

# МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

**А.И. Александров, И.А. Александров**

## ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ГОЛУЗИНА ДЛЯ ЛЕВНЕРОВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА

Предлагается вывод основной вариационной формулы Голузина в методе внутренних вариаций однолистных отображений круга, основанный на вариации управляющей функции в уравнении Лёвнера.

**Ключевые слова:** уравнение Лёвнера, вариационная формула Голузина.

В классе  $S$  голоморфных однолистных в круге  $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  функций  $f(z) = z + \dots$  имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \left[ A_k H^2(z_k) \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_k)} - A_k K(z, z_k) - \bar{A}_k K\left(z, \frac{1}{z_k}\right) \right] + o(\varepsilon), \quad (1)$$

где 
$$H(z) = \frac{z f'(z)}{f(z)}, \quad K(z, \zeta) = \frac{z f'(z)}{2} \frac{z + \zeta}{z - \zeta} + \frac{f(z)}{2},$$

$A_k$  – произвольные комплексные числа,  $z_k \in E$ ,  $k = (1, \dots, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Указанная формула лежит в основе вариационного метода Шиффера – Голузина и в приведенном виде установлена Г.М. Голузиным [1]. Другим способом формула (1) была получена Поммеренке [2]. Недавно А.Н. Сыркашевым [3] был предложен свой вариант вывода этой формулы.

В данной статье предлагается вывод формулы (1) для плотного в  $S$  множества  $S' \subset S$  функций, отображающих  $E$  на области, получающиеся исключением из  $\mathbb{C}$  разрезов по конечному числу жордановых кривых. Такие функции представляются в виде

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} \zeta(\tau, z),$$

где  $\zeta(\tau, z)$  – решение уравнения Лёвнера [4]

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}, \quad \zeta(0, z) = z \in E, \quad (2)$$

с управляющей функцией  $\mu(\tau)$ ,  $0 \leq \tau < \infty$ ,  $|\mu(\tau)| = 1$ .

Как отмечает Н.А. Лебедев в своём Добавлении в книге [1], вышедшей в 1966 г., такую попытку он сделал в 1951 г. и кратко здесь же изложил её, ограничиваясь сообщением некоторых идей. Более общей задачей в связи с изучением уравнения Лёвнера – Куфарева занимался в своей докторской диссертации В.Я. Гутлянский [5].

Мы проведём полный вывод формулы (1) для лорановских областей.

Проведём в уравнении (2) замену переменной  $\tau$  на  $t$  по формуле  $\tau = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – монотонно возрастающая кусочно-гладкая функция на  $[0, \infty)$ ,  $\varphi(0) = 0$ , удовлетворяющая неравенству:  $\varphi(t) < Me^{-t}$ ,  $M > 0$ . Чтобы не вводить новых обозначений, будем вместо  $\mu(\varphi(t_1))$  писать  $\mu(t)$ . Очевидно,  $|\mu(t)| = 1$ . После замены в (2) переменной  $\tau$  на  $t$  получим

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\varphi'(t)\zeta \frac{\mu(t) + \zeta}{\mu(t) - \zeta}, \quad \zeta(0, z) = z. \quad (3)$$

Для решения  $\zeta(t, z)$  этого уравнения имеем

$$\frac{d \ln \frac{\zeta}{z}}{dt} = -\varphi'(t) \frac{\mu + \zeta}{\mu - \zeta}$$

и, устремляя здесь  $z$  к нулю, находим, что

$$\frac{d \ln \zeta'_z(t, 0)}{dt} = -\varphi'(t).$$

Отсюда

$$\zeta'_z(t, 0) = e^{-\int_0^t \varphi'(x) dx}.$$

Пусть  $\varphi'(t) = 1 - \lambda q_1(t)$ , где  $\lambda$  – достаточно малое вещественное число,  $q_1(t)$  – кусочно-непрерывная функция,  $|q_1(t)| < Me^{-t}$ . Тогда

$$\zeta'_z(t, 0) = e^{-t} e^{\lambda \int_0^t q_1(x) dx} = e^t \left( 1 + \lambda \int_0^t q_1(x) dx + o(\lambda) \right),$$

и функция 
$$\zeta^*(t, z) = \frac{\zeta(t, z)}{\zeta'_z(t, 0)} = e^t \zeta(t, z) \left[ 1 - \lambda \int_0^t q_1(x) dx + o(\lambda) \right],$$

однолистная в  $E$  при фиксированном  $t$ , удовлетворяет нормировке:  $\zeta^*(0, z) = z$ ,  $\zeta^*_{z'}(t, 0) = 1$ .

Пусть  $q_2(t)$  – кусочно-непрерывная функция на  $[0, \infty)$ ,  $|q_2(t)| < M$ . Запишем уравнение (3) с управляющей функцией  $\mu(t)e^{i\lambda q_2(t)}$  и при  $\varphi'(t) = 1 - \lambda q_1(t)$ :

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(1 - \lambda q_1) \frac{\mu e^{i\lambda q_2} + \zeta}{\mu e^{i\lambda q_2} - \zeta}, \quad \zeta(0, z) = z. \quad (4)$$

Найдём два первых слагаемых в разложении решения  $\zeta(\tau, z, \lambda)$  этого уравнения по формуле Тейлора при малых  $\lambda$ . Имеем

$$\mu(t)e^{i\lambda q_2(t)} = \mu(t) + i\lambda \mu(t)q_2(t) + \dots$$

$$\zeta(t, z; \lambda) = \zeta(t, z; 0)(1 + \lambda \Psi(t, z) + \dots), \quad \Psi(0, z) = 0,$$

$$\ln \xi(t, z; \lambda) = \ln \zeta(t, z; 0) + \lambda \Psi(t, z) + \dots$$

Полагая  $\zeta(t, z, 0) = \zeta(t, z) = \zeta$ , имеем

$$\frac{\mu e^{i\lambda q_2} + \zeta(t, z; \lambda)}{\mu e^{i\lambda q_2} - \zeta(t, z; \lambda)} = \frac{\mu + \zeta}{\mu - \zeta} + \lambda \frac{2\mu\zeta(\Psi - iq_2)}{(\mu - \zeta)^2} + \dots$$

и, согласно (4),

$$\frac{d \ln \varsigma}{dt} + \lambda \frac{d\Psi}{dt} = -(1 - q_1) \left[ \frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} + \lambda \frac{2\mu\varsigma(\Psi - iq_2)}{(\mu - \varsigma)^2} + \dots \right].$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при  $\lambda$ , получаем для  $\Psi$  обыкновенное дифференциальное линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{2\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \Psi + \frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} q_1 + \frac{2i\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} q_2, \quad \Psi(0, z) = 0. \quad (5)$$

Для решения соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{2\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \Psi$$

используем формулу

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \right) = -\frac{2\mu\varsigma'_z}{(\mu - \xi)^2}, \quad \varsigma = \varsigma(t, z),$$

справедливую для решений уравнения Лёвнера. Имеем

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \frac{d}{dt} \left( \frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \right).$$

Значит,  $\Psi = C \frac{\varsigma'_z}{\varsigma}$ . Варьируя произвольную постоянную  $C$ , находим, что функция  $C(t, z)$  имеет вид

$$C = \int_0^t P(\tau, z) d\tau,$$

где

$$P(\tau, z) = \frac{\varsigma(\tau, z)}{\varsigma'_z(\tau, z)} \left[ \frac{\mu(\tau) + \varsigma(\varsigma, z)}{\mu(\tau) - \varsigma(\varsigma, z)} q_1(\tau) + \frac{2i\mu(\tau)\varsigma(\varsigma, z)}{(\mu(\tau) - \varsigma(\varsigma, z))^2} q_2(\tau) \right]. \quad (6)$$

Решением задачи (5) является функция

$$\Psi(t, z) = \frac{\varsigma'_z(t, z)}{\varsigma(t, z)} \int_0^t P(\tau, z) d\tau$$

Для нормированного отображения

$$\frac{\varsigma(t, z; \lambda)}{\varsigma'_z(t, 0; \lambda)} = z + \dots$$

получаем разложение по параметру  $\lambda$  в следующем виде:

$$\frac{\varsigma(t, z, \lambda)}{\varsigma'_z(t, 0, \lambda)} = e^t \varsigma(t, z) + \lambda \left[ e^t \varsigma'_z(t, z) \int_0^t P(t, z) dt - e^t \varsigma(t, z) \int_0^t q_1(t) dt \right] + o(\lambda), \quad (7)$$

где  $o(\lambda)$  – величина более высокого порядка малости, чем  $\lambda$ , равномерно относительно  $z$  внутри  $E$ .

Перейдём в (7) к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Получим в пределе следующую вариационную формулу в классе  $S'$ :

$$f^*(z) = f(z) + \lambda \left[ f'(z) \int_0^\infty P(t, z) dt - f(z) \int_0^\infty q_1(t) dt \right] + o(\lambda). \quad (8)$$

Она может быть использована для получения различных вариационных формул за счёт выбора функций  $q_2(t)$ ,  $q_1(t)$ . Мы придём к вариационной формуле Голузина, полагая

$$q_1 = \sum_{k=1}^n \left[ A_k Q_k^2 \frac{2\mu\varsigma_k}{(\mu - \varsigma_k)^2} + \overline{A_k} \overline{Q_k^2} \frac{2\mu\overline{\varsigma_k^{-1}}}{\left(\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}}\right)^2} \right],$$

$$q_2 = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \left[ A_k Q_k^2 \frac{\mu + \varsigma_k}{\mu - \varsigma_k} + \overline{A_k} \overline{Q_k^2} \frac{\mu + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \right],$$

где  $A_1, \dots, A_n$  – постоянные,  $Q_k = z_k \varsigma'_{z_k} / \varsigma_k$ ,  $\varsigma_k = \varsigma(t, z_k)$ ,  $\varsigma'_{z_k} = \varsigma'_z(t, z_k)$  и  $z_1, \dots, z_n$  – попарно различные точки единичного круга.

С учетом указанного выбора  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  имеем

$$P(t, z) = \sum_{k=1}^n \left( A_k X_k + \overline{A_k} Y_k \right), \quad (9)$$

где

$$X_k = \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} Q_k^2 \left[ \frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} \frac{2\mu\varsigma_k}{(\mu - \varsigma_k)^2} + \frac{\mu + \varsigma_k}{\mu - \varsigma_k} \frac{\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \right],$$

$$Y_k = \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \overline{Q_k^2} \left[ \frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} \frac{2\mu\overline{\varsigma_k^{-1}}}{\left(\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}}\right)^2} + \frac{\mu + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \frac{\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \right].$$

Представим эти функции в виде, удобном для интегрирования.

Легко проверить, что для любых  $u$ ,  $u \neq v$ ,  $u^2 + v^2 \neq 0$ , справедливо равенство

$$\frac{\mu + u}{\mu - u} \frac{\mu}{(\mu - v)^2} = \frac{u}{(\mu - v)^2} \left( \frac{\mu + u}{\mu - u} - \frac{\mu + v}{\mu - v} \right) - \frac{u + v}{u - v} \frac{\mu}{(\mu - v)^2}$$

и что если  $u = \varsigma(\tau, z)$  – решение уравнения Лёвнера с управляющей функцией  $\mu(\tau)$ , то  $v = 1/\varsigma(\tau, \bar{z})$  – решение этого же уравнения.

Если  $u$ ,  $v$  – различные решения уравнения Лёвнера, то

$$\frac{d}{d\tau} \frac{u + v}{u - v} = \frac{2uv}{(u - v)^2} \left( \frac{\mu + u}{\mu - u} - \frac{\mu + v}{\mu - v} \right)$$

и

$$\frac{2\mu v}{(\mu - v)^2} = -\frac{v}{v'_z} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{v'_z}{v} \right) = \frac{v'_z}{v} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{v}{v'_z} \right).$$

Поэтому

$$\frac{\mu + u}{\mu - u} \frac{2\mu v}{(\mu - v)^2} = \frac{d}{d\tau} \frac{u+v}{u-v} + \frac{u+v}{u-v} \frac{v}{v'_z} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{v'_z}{v} \right) = \frac{d}{d\tau} \frac{u+v}{u-v} - \frac{u+v}{u-v} \frac{v'_z}{v} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{v}{v'_z} \right).$$

Применим эти формулы для преобразования  $X_k$ . Имеем

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} Q_k^2 \left[ \frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} + \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} \frac{\varsigma_k}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varsigma'_z}{\varsigma_k} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma_k + \varsigma}{\varsigma_k - \varsigma} + \frac{1}{2} \frac{\varsigma_k + \varsigma}{\varsigma_k - \varsigma} \frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} Q_k^2 \frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} + \frac{1}{2} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} Q_k^2 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \right) + \frac{1}{2} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} (Q_k^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \cdot Q_k^2 \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Проводя аналогичные вычисления для  $Y_k$ , имеем

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \overline{Q_k^2} \left[ \frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} + \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \frac{\overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\overline{\varsigma'_z}}{\overline{\varsigma_k^{-1}}} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \frac{\overline{\varsigma_k^{-1}} + \varsigma}{\overline{\varsigma_k^{-1}} - \varsigma} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\varsigma_k^{-1}} + \varsigma}{\overline{\varsigma_k^{-1}} - \varsigma} \frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \cdot \overline{Q_k^2} \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем  $q_1$  к виду, удобному для интегрирования:

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n A_k Q_k^2 \frac{2\mu \varsigma_k}{(\mu - \varsigma_k)^2} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n A_k \frac{z_k^2 \varsigma_{zk}^2}{\varsigma_k^2} \cdot \frac{\varsigma_k}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\varsigma'_z}{\varsigma_k} \right) = \\ &= -\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n A_k \frac{d}{d\tau} (Q_k^2) = -\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2} \frac{d}{d\tau} (Q_k^2) - \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k}}{2} \frac{d}{d\tau} (\overline{Q_k^2}). \end{aligned} \quad (12)$$

Переходим к записи значений интегралов в (8). Отметим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{z_k \varsigma'_z}{\varsigma_k} = H(z_k), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} Q_k = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} = \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} = z.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} = \frac{f(z) + f(z_k)}{f(z) - f(z_k)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} = -1.$$

Согласно (8) – (12), имеем

$$\begin{aligned} f^*(z) &= f(z) + \lambda \left\{ f(z) \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2} (H^2(z_k) - 1) + f(z) \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k}}{2} (\overline{H^2(z_k)} - 1) + \right. \\ &\quad \left. + f'(z) \sum_{k=1}^n A_k \left[ \frac{f(z)}{f'(z)} H_k^2 \frac{f(z) + f(z_k)}{f(z) - f(z_k)} - z \frac{z + z_k}{z - z_k} \right] - \right. \\ &\quad \left. - f'(z) \sum_{k=1}^n \overline{A_k} \left[ \frac{1}{2} \frac{f(z)}{f'(z)} \overline{H^2(z_k)} + \frac{z}{2} \frac{z + \overline{z_k^{-1}}}{z - \overline{z_k^{-1}}} \right] + o(\lambda), \right. \end{aligned}$$

то есть

$$f^*(z) = f(z) + \lambda \left[ \sum_{k=1}^n A_k H^2(z_k) \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_k)} - A_k \left( \frac{f'(z)}{2} \frac{z + z_k}{z - z_k} + \frac{f(z)}{2} \right) - \overline{A_k} \left( \frac{zf'(z)}{2} \frac{z + \overline{z_k}^{-1}}{z - \overline{z_k}^{-1}} + \frac{f(z)}{2} \right) \right] + o(\lambda).$$

Вывод вариационной формулы Голузина для  $f \in S'$  окончен. Так как  $S'$  плотен в  $S$  в смысле равномерной сходимости последовательностей внутри круга  $E$ , то формула распространяется на весь класс  $S$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. Pommerenke Ch. On a variational method for univalent functions // Michigan Math. J. 1970. V. 17. P. 1 – 3.
3. Сыркашев А.Н. О вариационном и параметрическом методах в теории однолистных функций // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 86 – 96.
4. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
5. Гутлянский В.Я. Параметрические представления и экстремальные задачи в теории однолистных функций: Автореф. дис. ... докт. физ.мат. наук. Киев: Математический институт АН УССР, 1972.

Принята в печать 08.04.08.