На правах рукописи

Чернявский Дмитрий Викторович

НЕКОТОРЫЕ КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор РАН
Галажинский Антон Владимирович

Официальные оппоненты:

Казинский Петр Олегович, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра квантовой теории поля, профессор

Крыхтин Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет», кафедра теоретической физики, профессор

Сидоров Степан Сергеевич, кандидат физико-математических наук, Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, старший научный сотрудник

Защита состоится 18 марта 2021 г. в 14.30 часов на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.01.04», созданного на базах физического факультета и Сибирского физико-технического института имени академика В.Д. Кузнецова федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория 211).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/2457ec54-4c8d-4df4-8b6b-f248487a3839

Автореферат разослан «__» февраля 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
«НИ ТГУ.01.04»

Панченко Елена Юрьевна

Общая характеристика диссертационной работы

Актуальность темы

Конформные теории уже давно находятся в центре пристального внимания исследователей. Конформной симметрией обладают многие классические системы: уравнения Максвелла, безмассовые уравнения Дирака и Клейна–Гордона, свободное уравнение Шредингера. И если конформная симметрия в упомянутых системах является скорее интересным математическим артефактом, наличие которого не влечет очевидных физических следствий, существует множество других примеров, где проявление конформной симметрии становится физически определяющим систему свойством. Среди них, к примеру, двумерные конформные теории поля, которые могут служить для описания критических явлений в статистической физике, а также играют ключевую роль в теории струн.

В последнее время понятие конформной симметрии заняло особое место в современной теоретической физике в связи с развитием идей голографического принципа и AdS/CFT–соответствия. Согласно гипотезе AdS/CFT–соответствия, теория гравитации в асимптотически анти–де–ситтеровом пространстве имеет дуальное описание в терминах конформной теории поля, заданной на границе этого пространства [1]. Хотя изначально гипотеза была выдвинута в контексте теории струн, последующее развитие показало возможность применения методов AdS/CFT–соответствия за ее областью, включая, например, физику черных дыр и даже теорию конденсированного состояния вещества.

В физике черных дыр была выдвинута гипотеза Kerr/CFT–соответствия, в рамках которой предлагается дуальное описание микросостояний вращающейся черной дыры Керра в терминах двумерной конформной теории поля [2]. Особенно плодотворной и более успешной в реализации эта идея оказалась для теорий гравитации в трехмерном пространстве–времени. В теории конденсированного состояния вещества была предложена нерелятивистская версия AdS/CFT–соответствия – гипотеза дуального соответствия гравитации с нерелятивистской конформной группой симметрии и нерелятивистской конформной теории поля. Стоит отметить, что нерелятивистская конформная симметрия и нерелятивистская версия AdS/CFT–соответствия заслуживают особого внимания, поскольку они могут быть связаны с системами, реализуемыми в лабораторных условиях.

---

[1] Maldacena J. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Adv. Theor. Math. Phys. - 1998. - Vol. 2. - P. 231-252.

[2] Guica M., Hartman T., Song W., Strominger A. The Kerr/CFT Correspondence // Physical Review D. 2009. - Vol. 80. - 124008.

Степень разработанности темы исследования

Настоящее диссертационное исследование посвящено построению и изучению конформно–инвариантных моделей суперсимметричной механики и теории поля. Простейшим представителем конформной симметрии служит конформная группа в одномерном пространстве $SL(2,R)$. Данная группа симметрии и ее различные расширения являются центральными объектами в представленной диссертационной работе. Одна из первых моделей, реализующих конформную симметрию $SL(2,R)$, была предложена в известной работе Альфаро, Фубини и Фурлана[3] более сорока лет назад. Позже были построены и ее первые суперсимметричные обобщения. Однако настоящий всплеск интереса модели (супер)конформной механики получили с появлением гипотезы AdS/CFT–соответствия.

Существует несколько основных подходов к построению моделей суперконформной механики, среди которых можно выделить суперполевой формализм, построение моделей непосредственно в рамках канонического подхода и метод нелинейных реализаций. Для того, чтобы ограничить произвол в выборе функционала действия, а также построить модели с минимальным количеством фермионов, целесообразно рассматривать системы, обладающие κ–симметрией, либо ее частью. Для этого удобно использовать формализм, предложенный в котексте теории струн, и использовавшийся при построении моделей суперструн и супербран на однородных пространствах. В данной работе мы сосредоточимся на построении и изучении моделей $N > 4$ суперконформной механики, а также уделим особое внимание специальному случаю $N = 4$, соответствующему исключительной супергруппе $D(2,1;\alpha)$. Таким образом, будут построены и исследованы одномерные суперконформные модели, ассоциированные с некоторыми простыми суперконформными алгебрами.

Наиболее общим нерелятивистским расширением алгебры $sl(2,R)$ является l–конформная алгебра Галилея [4]. Помимо алгебры Галилея и конформной подалгебры $sl(2,R)$, последняя включает набор дополнительных векторных генераторов, число которых характеризуется целым либо полуцелым параметром l. Свободная частица, описываемая уравнением с высшими производными, является простейшим примером реализации l–конформной алгебры Галилея, причем дополнительные генераторы можно интерпретировать как генераторы ускорений, обобщая, таким образом, галилеевские бусты. Несмотря на активное изучение l–конформной алгебры Галилея, в этом направлении исследований по-прежнему остается множество открытых вопросов. Среди них, в частности, вопрос о возможности построения динамических реализаций l–конформной симметрии Галилея, определенных дифференци-

---

[3] de Alfaro V., Fubini S., Furlan. G. Conformal invariance in quantum mechanics // Nuovo Cimento A. 1976. - Vol. 34. - 569.

[4] Negro J., del Olmo M., Rodriguez-Marco A. Nonrelativistic conformal groups // Journal of Mathematical Physics. 1997. - Vol. 38. - 3786

альными уравнениями второго с независимыми генераторами ускорений.

Интересной особенностью l–конформной алгебры Галилея является то, что она допускает бесконечномерное расширение. Можно отметить сходство структуры этой алгебры с алгебрами $sl(N, R)$ и их бесконечномерными обобщениями, известными как алгебры W_N. Алгебра W_N является асимптотической алгеброй симметрии в теории гравитации в трехмерном пространстве–времени, взаимодействующей с полями высших спинов[5]. Наблюдение о схожести структур l–конформной алгебры и $sl(N)$, а также их бесконечномерных расширений, ставит вопрос о возможной связи l–конформной симметрии Галилея с теорией высших спинов в трехмерном пространстве–времени.

Описание техмерной теории гравитации, взаимодействующей с полями высших спинов, опирается на формулировку Черна–Саймонса. Теория Черна–Саймонса может быть построена для любой алгебры Ли, на которой существует невырожденная билинейная форма. К сожалению, l–конформная алгебра Галилея не допускает существование такой формы. Поэтому для анализа связи l–конформной симметрии Галилея с теорией высших спинов необходимо некоторым образом обойти эту проблему. В недавней работе было построено расширение алгебры Шредингера, которое обладает невырожденной билинейной формой[6]. Естественно попытаться обобщить эту конструкцию для других представителей семейства l–конформных алгебр. Это, в свою очередь, позволит построить теорию гравитации с (расширенной) l–конформной симметрией Галилея и проанализировать связь с теорией высших спинов.

Цели и задачи диссертационной работы

В диссертационной работе ставятся следующие цели:

1. Исследование суперконформной механики с расширенной суперсимметрией в рамках метода нелинейных реализаций и установление соответствия с частицами, движущимися вблизи горизонта событий черных дыр.

2. Исследование возможности построения динамических реализаций l–конформной симметрии Галилея, определенных дифференциальными уравнениями второго порядка.

3. Исследование трехмерной теории гравитации с калибровочной группой, соответствующей расширенной l–конформной симметрии Галилея.

4. Исследование l–конформной симметрии Галилея в контексте теории полей высших спинов.

---

[5] Campoleoni A. Fredenhagen S., Pfenninger S. Asymptotic W-symmetries in three-dimensional higher-spin gauge theories // Journal of High Energy Physics. 2011. - Vol. 09. - 113.

[6] Hartong J., Lei Y., Obers N. Nonrelativistic Chern-Simons theories and three-dimensional Horava-Lifshitz gravity // Physical Review D. 2016. - Vol. 94. - 065027.

Для достижения поставленных целей решены следующие задачи:

1. Развит метод построения моделей суперконформной механики, инвариантных относительно преобразований из заданной конформной группы и обладающий κ–симметрией.

2. Сформулирована новая процедура построения Риччи–плоских пространств и многообразий Эйнштейна с l–конформной группой симметрии Галилея.

3. Предложена новая схема построения динамических реализаций l–конформной группы Галилея, свободных от высших производных.

4. Построены метрики на факторпространствах l–конформной группы Галилея.

5. В рамках существующего подхода построены новые модели гравитации с расширенной калибровочной группой Галилея.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построены новые модели $D(2,1;\alpha)$, $OSp(2|N)$ и $SU(1,1|N)$ суперконформной механики. Установлено соответствие таких систем с моделями релятивистских частиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр.

2. Построены новые решения вакуумных уравнений Эйнштейна и уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, группа изометрии которых описывается l–конформной группой Галилея.

3. Построены новые динамические реализации l–конформной группы Галилея, не вовлекающие высших производных.

4. Построена новая модель трехмерной гравитации, группа калибровочных преобразований которой представлена расширенной l–конформной группой Галилея. Установлена взаимосвязь такой модели с теорией полей высших спинов в трехмерном пространстве–времени.

Научная новизна. Все приведенные в диссертационной работе результаты являются оригинальными.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в работе результаты способствуют более глубокому пониманию современной теории (супер)конформной симметрии и ее приложений. Построенные в работе модели суперконформных частиц на факторпространствах супергурпп для $N > 4$ восполняют определенный пробел в литературе по этой тематике, а найденная связь с геометриями вблизи горизонта событий черных дыр, в том числе в пространствах размерности больше четырех, обобщает результаты работ, полученных ранее другими исследователями. Найденная в работе геометрическая реализация l–конформной симметрии Галилея может быть использована в дальнейшем в контексте нерелятивистской версии AdS/CFT–соответствия. Предложенные примеры динамических реализаций в терминах дифференциальных уравнений второго порядка вносят вклад в понимание структуры и свойств l–конформной симметрии Галилея. Построенные теории гравитации с расширенной l–конформной симметрией Галилея и исследование ее асимптотической группы симметрии проливает свет на неизвестную ранее связь с теорией полей высших спинов в трехмерном пространстве–времени.

Методология и достоверность результатов работы

В рамках работы применялись стандартные математические методы теоретической физики (включая теорию (супер)групп и (супер)алгебр Ли, методы дифференциальной геометрии и т.д.), обеспечивающие достоверность результатов работы. Достоверность также контролируется совпадением в ряде случае с результатми других авторов.

Апробация результатов и личный вклад автора

Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором, либо при его непосредственном участии. Основные результаты работы опубликованы в шести статьях в международных рецензируемых журналах [1–6]. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих международных конференциях: «Supersymmetry in Integrable Systems» (г. Дубна, 2014), «Supersymmetries and Quantum Symmetries» (г. Дубна, 2015), «Перспективы развития фундаментальных наук» (г. Томск, 2017), «Quantum Field Theory and Gravity» (г. Томск, 2018).

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из Введения, трех глав, Заключения, списка литературы и двух приложений. В Приложении А приведены в явной форме структурные соотношения супералгебр $D(2,1;\alpha)$, $SU(1,1|N)$ и $OSp(4|N)$, а также обсуждаются различные технические подробности, относящиеся к первой главе. В Приложении Б приведены соглашения и обозначения, которые мы используем в Главе 3. Помимо этого, Приложение Б включает дополнительные сведения, касающиеся алгебр $su(1,2)$ и $sl(3,R)$. Полный объем диссертации составляет 104 страницы, а список литературы включает в себя 131 наименование.

Основное содержание работы

Первая глава основана на публикациях [1–3] и посвящена построению и изучению суперконформных механик на факторпространствах супергрупп, обладающих κ–симметрией либо ее частью.

Построение моделей суперконформных механик с κ–симметрией осуществляется с применением теоретико–группового подхода. Зафиксировав некоторую подгруппу H, проводится построение факторпространства по супергруппе G/H, на котором в дальнейшем определяется функционал действия для суперчастицы. В диссертационной работе в качестве суперконформной группы G рассматриваются простые супергруппы $D(2,1;\alpha)$, $SU(1,1|N)$ и $OSp(N|2)$. Основную роль при построении инвариантного действия суперконформной механики играют один–формы Маурера–Картана, свойства которых, в свою очередь, определяются структурой соответствующей супералгебры и факторпространства.

Продемонстрируем используемый в работе подход к построению функционала действия суперконформной механики, обладающим κ–симметрией, на примере супергруппы $D(2,1;\alpha)$. Формы Маурера–Картана определяются посредством соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{-1}d\tilde{G} = HL_H + KL_K + i\left(L_Q Q + \bar{Q}L_{\bar{Q}} + L_S S + \bar{S}L_{\bar{S}}\right) + \mathcal{J}_m L_m \\ +DL_D + i(I_+L_{I_+} + I_-L_{I_-}) + I_3 L_{I_3} + \mathcal{J}_3 L_J,\end{aligned} \tag{1}$$

где $m = 1,2$, $\tilde{G}$ представляет собой элемент факторпространства супергруппы $D(2,1;\alpha)$, а символом L обозначены один–формы Маурера–Картана. В дальнейшем будем полагать, что подгруппу H, по которой берется фактор при определении факторпространства, генерируют следующие операторы: $D, I_\pm, I_3, \mathcal{J}_3$. Представим структурные соотношения супералгебры $D(2,1;\alpha)$ в виде уравнений на один–формы Маурера–Картана

$$\begin{aligned}
dL_H &= -L_H \wedge L_D - 2iL_Q \wedge L_{\bar{Q}}, \\
dL_K &= L_K \wedge L_D - 2iL_S \wedge L_{\bar{S}}, \\
dL_D &= -2L_H \wedge L_K + 2i\left(L_Q \wedge L_{\bar{S}} + L_S \wedge L_{\bar{Q}}\right), \\
dL_a &= -\frac{1}{2}\epsilon_{abc}L_b \wedge L_c + 2\alpha\left(L_S\sigma_a \wedge L_{\bar{Q}} - L_Q\sigma_a \wedge L_{\bar{S}}\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где σ_a – это матрицы Паули.

Формы Маурера–Картана на факторпространстве и на подгруппе подчиняются разным законам преобразования под действием группы: первые преобразуются однородно, в то время как вторые ведут себя как связности. Однородный закон преобразования форм Маурера–Картана на факторпространстве дает возможность построению инвариантных квадратичных форм, которые, в свою очередь, могут быть использованы при построении кинетического слагаемого функционала действия суперчастицы. В нашем случае таких квадратичных форм две: $L_H L_K$ и $L_m L_m$. Один–формы на подгруппе стабильности L_J и L_D преобразуются как абелевы связности

$$L_J \to L_J + df_J, \qquad L_D \to L_D + df_D, \tag{3}$$

где f_J и f_D представляют некоторые функции, и могут быть использованы в качестве слагаемых Весса–Зумино. Подводя итог описанию свойств форм Маурера–Картана, зафиксируем вид инвариантного функционала действия

$$S = -m \int \sqrt{4L_H L_K - cL_m L_m} - \int (aL_D + bL_J)\,, \tag{4}$$

где m, a, b и c – некоторый набор постоянных параметров.

Для анализа свойств κ–симметрии функционала действия используется стандартный подход, который опирается на удобное представление вариаций один–форм Маурера–Картана. Для супергруппы $D(2,1;\alpha)$ они имеют вид

$$\begin{aligned}
\delta L_H &= d[\delta x_H] + [\delta x_D] L_H - L_D[\delta x_H] - 2i\left([\delta\psi] L_{\bar{Q}} - L_Q[\delta\bar{\psi}]\right),\\
\delta L_K &= d[\delta x_K] - [\delta x_D] L_K + L_D[\delta x_K] - 2i\left([\delta\eta] L_{\bar{S}} - L_S[\delta\bar{\eta}]\right),\\
\delta L_D &= d[\delta x_D] - 2[\delta x_H] L_K + 2[\delta x_K] L_H +\\
&\qquad\qquad +2i\left([\delta\psi] L_{\bar{S}} - L_Q[\delta\bar{\eta}] + [\delta\eta] L_{\bar{Q}} - L_S[\delta\bar{\psi}]\right)\\
\delta L_a &= d[\delta x_a] - \epsilon_{abc}[\delta x_b] L_c +\\
&\qquad +2\alpha\left([\delta\eta]\sigma_a L_{\bar{Q}} - L_S\sigma_a[\delta\bar{\psi}] - [\delta\psi]\sigma_a L_{\bar{S}} + L_Q\sigma_a[\delta\bar{\eta}]\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$[\delta Z^A] = \delta Z^M L^A{}_M \tag{6}$$

для один–форм $L^A = dx^M L^A{}_M$. Как известно, преобразования κ–симметрии характеризуются условием равенства нулю $[\delta Z^A]$, связанных с бозонными один–формами на факторпространстве. В рассматриваемом случае это приводит к следующему ограничению:

$$[\delta_\kappa x_H] = [\delta_\kappa x_K] = [\delta_\kappa x_m] = 0. \tag{7}$$

Принимая во внимание (5) и (7), можно показать, что действие (4) обладает κ–симметрией, если параметры подчинены условию

$$c = \alpha^{-2}, \qquad \tilde{m}^2 = a^2 + (\alpha b)^2. \tag{8}$$

Таким образом, функционал действия (4) инвариантен относительно преобразований глобальной суперсимметрии супергруппы $D(2,1;\alpha)$, а также обладает локальной κ-симметрией, при условии, что постоянные параметры функционала действия подчинены соотношениям (8). В диссертационной работе в дальнейшем проводится детальное исследование функционала действия (4), записанного в явной форме и в фиксированной калибровке, в том числе отдельно изучается бозонная часть действия и демонстрируется ее связь с геометрией вблизи горизонта событий заряженной черной дыры Райсснера–Нордстрема с космологической постоянной.

Аналогичная процедура построения и анализа функционала действия моделей суперконформной механики проводится для супергрупп $SU(1,1|N)$ и $OSp(N|2)$. Отличительной особенностью этих моделей является то, что в случае произвольного N κ–симметрия оказывается редуцирована до однопараметрической фермионной калибровочной группы симметрии. В работе явно проводится канонический анализ модели $OSp(N|2)$ суперконформной механики, в том числе приводится вид гамильтониана и связей

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{1}{2x^2}J^aJ^a-\frac{i}{2x^2}(\eta\lambda^a\eta)J^a, \qquad p_\eta-\frac{i}{2}\eta=0, \tag{9}$$

$$p_\psi+i\psi\left(\frac{p^2}{2}-\frac{2}{x^2}J^aJ^a\right)-2pp_\eta+\frac{i}{x}J^a(\eta\lambda^a)=0, \tag{10}$$

где x и ψ_i, η_i бозонные и фермионные переменные, а p и p_{ψ_i}, p_{η_i}, соответственно, их канонически сопряженные импульсы. Бозонные функции J^a также имеют внутреннюю структуру и задают представление алгебры $SO(N)$. Следует обратить внимание на вид связей: для случая произвольного N, построенная по связям второго рода скобка Дирака имеет крайне нетривиальную структуру. Стоит также отметить, что за исключением связи во второй строке в выражении (9), структура гамильтониана и связей такая же, как и в специальном случае $N=4$, в котором κ–симметрия оказывается полной. Более того, такую же структуру гамильтониана можно наблюдать у моделей $D(2,1;\alpha)$ и $SU(1,1|N)$ суперконформной механики, если заменить $SO(N)$–генераторы J^a на генераторы $SO(3)$ и $SU(N)$, соответственно, а также если добавить дополнительное слагаемое четвертой степени по фермионам. Другими словами, такая структура гамильтониана является универсальной для широкого класса моделей суперконформной механики.

Во **второй Главе** проводится изучение нерелятивистской конформной симметрии, представленной l–конформной алгеброй Галилея. Глава основана на двух публикациях [4,5].

l–конформные алгебры Галилея представляют собой семейство нерелятивистских конформных алгебр, которые параметризуются целым или полуцелым положительным параметром l. Структурные соотношения алгебры имеют вид

$$
\begin{aligned}
&[H, C_i^{(n)}] = inC_i^{(n-1)}, \qquad && [D, C_i^{(n)}] = i(n-l)C_i^{(n)}, && (11)\\
&[K, C_i^{(n)}] = i(n-2l)C_i^{(n+1)}, && [M_{ij}, C_k^{(n)}] = -i(\delta_{ik}C_j^{(n)} - \delta_{jk}C_i^{(n)}), &&\\
&[M_{ij}, M_{kl}] = -i(\delta_{ik}M_{jl} + \delta_{jl}M_{ik} - \delta_{il}M_{jk} - \delta_{jk}M_{il}), &&&&\\
&[H, D] = iH, \qquad [H, K] = 2iD, \qquad [D, K] = iK, &&&& (12)
\end{aligned}
$$

где $n = 0, \ldots, 2l$. Как и в Первой главе, конформная подалгебра $so(1,2)$ задана операторами временных трансляций H, дилатаций D и специальных конформных преобразований K, действие которых естественно определить в d–мерном галилеевом пространстве с дополнительным выделенным временным измерением. Вращения, трансляции и галилеевские бусты в этом пространстве генерируются операторами M_{ij}, $C_i^{(0)}$ и $C_i^{(1)}$, соответственно, в то время как $C_i^{(\alpha)}$, где $\alpha = 2, \ldots, 2l$, представляют собой генераторы ускорений.

В диссертационной работе проводится построение метрических пространств, обладающих l–конформной симметрией Галилея. Для этого используется теоретико–групповой подход и формализм один–форм Маурера–Картана. Для l–конформной группы Галилея G зафиксируем факторпространство G/H, где подгруппа H генерируется операторами D и M_{ij}. Один–формы на факторпространстве определяются стандартным образом

$$\tilde{G}^{-1}d\tilde{G} = i(L_H H + L_K K + L_D D + L_i^{(n)}C_i^{(n)}), \tag{13}$$

где

$$
\begin{aligned}
&L_i^{(n)} = dx_i^{(n)} + 2r(n-l)x_i^{(n)}dt - (n+1)x_i^{(n+1)}dt - (n-2l-1)x_i^{(n-1)}(r^2dt + dr),\\
&L_H = dt, \qquad\qquad L_K = r^2dt + dr, \qquad\qquad L_D = -2rdt. \qquad\qquad (14)
\end{aligned}
$$

и предполагается, что $x_i^{(-1)} = x_i^{(2l+1)} = 0$. Инвариантная метрика на факторпространстве, построенная из представленных выше один–форм, имеет вид

$$ds^2 = L_H L_K + S_{m,n}L_i^{(m)}L_i^{(n)}, \tag{15}$$

где $S_{m,n}$ – антидиагональная матрица с произвольными постоянными элементами. Уравнения геодезических на факторпространстве определяют динамическую систему l–конформной алгебры Галилея на уравнениях второго порядка. Эти уравнения можно записать в компактной форме

$$
\begin{aligned}
&\dot{L}_H = -L_H L_D + 2(q-2l)S_{p,q+1}L_i^{(p)}L_i^{(q)}, \qquad (16)\\
&\dot{L}_K = L_K L_D + 2qS_{p,q-1}L_i^{(p)}L_i^{(q)},\\
&\dot{L}_i^{(p)}S_{p,n} = -(n-l)S_{p,n}L^{(p)}L_D - nS_{p,n-1}L_i^{(p)}L_H - (n-2l)S_{p,n+1}L_i^{(p)}L_K,
\end{aligned}
$$

где точка над символом обозначает производную по параметру вдоль геодезической и предполагается, что все дифференциалы dz^μ в один формах $L^a = L^a_\mu dz^\mu$ заменены на соответствующие скорости. Отличительной особенностью данной динамичекой системы является то, что генераторы ускорений функционально независимы.

Метрику на факторпространстве (15) можно деформировать таким образом, чтобы она описывала Риччи–плоское пространство, либо многообразие Эйнштейна. Чтобы этого добиться, расширим факторпространство, включив дополнительное измерение, параметризуемое координатой y

$$ds^2 = \alpha \left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} \right) + S_{n,m} \omega_i^{(n)} \omega_i^{(m)} + \epsilon dy^2, \tag{17}$$

где временная координата была переопределена таким образом, чтобы первое слагаемое, представляющее метрику в пространстве AdS_2, было записано в координатах Пуанкаре. В работе рассматриваются два случая: либо α является функцией от y, либо компоненты матрицы $S_{m,n}$. В первом случае можно зафиксировать вид функции $\alpha(y)$ таким образом, чтобы метрика описывала Риччи–плоское пространство. При этом компоненты постоянной матрицы должны удовлетворять рекуррентному соотношению

$$S_{m,n} = \varepsilon_{mn} \frac{n}{m+1} S_{m+1,n+1}, \tag{18}$$

где $\epsilon_{mn} = \pm 1$, оставляя таким образом лишь один независимый параметр в матрице. Во втором случае в работе демонстрируется, что если зависящие от y компоненты матрицы $S_{m,n}$ подчиняются соотношению (18), то при удовлетворении некоторого дифференциального уравнения на оставшуюся независимую компоненту, метрика (15) описывает многообразие Эйнштейна, причем параметр α оказывается связан с космологической постоянной. В обоих случаях метрики описывают $[(2l+1)d+3]$–мерные пространства ультрагиперболической сигнатуры.

Третья глава основана на публикации [6] и посвящена трехмерной гравитации с полями высших спинов, обладающей расширенной l–конформной симметрией Галилея.

В диссертационной работе показывается, что l–конформная алгебра Галилея допускает нетривиальное расширение, причем случаи целого и полуцелого l значительно отличаются друг от друга. Для полуцелых l такое расширение может быть построено лишь для $d = 2$. Для целых l расширенная алгебра может быть построена для произвольного d, однако мы ограничиваемся лишь случаем $d = 1$. Прежде чем представить вид расширенной l–конформной алгебры Галилея, напомним, что сама l–конформная алгебра обладает конформной подалгеброй $so(1,2)$, которая является алгеброй Лоренца в трехмерном пространстве–времени. Наличие этой подалгебры дает возможность представить всю l–конформную алгебру Галилея в таком виде, что все остальные генераторы преобразуются относительно некоторого представления группы Лоренца. В соответствии с этим замечанием, структурные соотношения расширенной l–конформной алгебры Галилея для полуцелого l можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c, \qquad [I, Z^{a_1 \ldots a_n, i}] = \epsilon^{ij} Z^{a_1 \ldots a_n, j} \\
&[J^a, Z^{b_1 \ldots b_n, i}] = \left(n + \frac{1}{2}\right) Z^{b_1 \ldots b_n, i} \gamma^a - Z^{a(b_2 \ldots b_n |, i} \gamma^{|b_1)}, \\
&[Z_\alpha^{a_1 \ldots a_n, i}, Z_\beta^{b_1 \ldots b_n, j}] = \epsilon^{ij} f_{\alpha\beta}^{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n c} \mathcal{P}_c + \delta^{ij} N_{\alpha\beta}^{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n} N,
\end{aligned} \tag{19}$$

где структурные константы являются $SO(1,2)$–инвариантными тензорами, построенными из гамма–матриц, метрики Минковского, тензора Леви–Чевиты и матрицы зарядового сопряжения. Также предполагается, что бозонный генератор $Z_\alpha^{a_1 \ldots a_n, i}$, преобразующийся относительно спинорного представления, симметричен по всем индексам a_i и подчиняется условию гамма–бесследовости $\gamma_a Z^{a_1 \ldots a_n, i} = 0$. Выпишем расширенную l–конформную алгебру Галилея для случая целого l

$$\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, && [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c, \\
&[J^a, Z^{a_1 \ldots a_l}] = \epsilon^{ab(a_1} Z^{a_2 \ldots a_l)}{}_b, && [Z^{a_1 \ldots a_l}, Z^{b_1 \ldots b_l}] = f^{a_1 \ldots a_l b_1 \ldots b_l c} \mathcal{P}_c,
\end{aligned} \tag{20}$$

где структурные константы также являются $SO(1,2)$–инвариантными тензорами и симметричный по всем индексам генератор $Z^{a_1 \ldots a_l}$ должен быть бесследовым по любой паре индексов. Расширенная l–конформная алгебра отличается от своего прототипа тем, что имеет три дополнительных генератора P^a, которые вместе с J^a образуют подалгебру Пуанкаре. Интересной особенностью расширенной l–конформной алгебры Галилея для полуцелых l является то, что бозонные генераторы $Z_\alpha^{a_1, \ldots, a_n, i}$ находятся в спинорном представлении. При этом структура алгебры подобна структуре супералгебры, а оператор галиеевых поворотов I играет роль генератора R–симметрии. Для случая $l = \frac{1}{2}$ структура расширенной l–конформной алгебры Галилея имеет сильное сходство со структурой супералгебры Пуанкаре в трехмерном пространстве–времени.

Используя тот факт, что расширенная алгебра имеет невырожденную билинейную форму, в диссертационной работе были построены соответствующие модели теории Черна–Саймонса, которые можно интерпретировать как модели расширенной теории гравитации в трехмерном пространстве–времени. Для случая полуцелого l функционал действия имеет вид

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_3} \left(2e^a R_a - \epsilon^{ij} \bar{\lambda}^i_{a_1 \ldots a_n} \nabla \lambda^{a_1 \ldots a_n, j} - 2vdb\right), \tag{21}$$

где ковариантная производная определена соотношением

$$\nabla \lambda^{a_1 \ldots a_n, i} = d\lambda^{a_1 \ldots a_n, i} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega^b \gamma^b \lambda^{a_1 \ldots a_n, i} - \omega^b \gamma^{(a_1} \lambda^{a_2 \ldots a_n) b, i} - b\epsilon^{ij} \lambda^{a_1 \ldots a_n, j}, \tag{22}$$

и предполагается, что $n = l - \frac{1}{2}$. Поля v и b ассоциированны с генераторами I и N, соответственно. Выпишем функционал действия для случая целого l

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_3} \left(2e^a R_a + \lambda^{a_1 \dots a_l} \nabla \lambda_{a_1 \dots a_l}\right), \tag{23}$$

где ковариантная производная задана выражением

$$\nabla \lambda^{a_1 \dots a_l} = d\lambda^{a_1 \dots a_l} + \epsilon^{bc(a_1} \lambda_b{}^{a_2 \dots a_l)} \omega_c. \tag{24}$$

В обоих случаях параметр k можно связать с гравитационной постоянной. В этом случае первое слагаемое представляет модель плоской эйнштейновской гравитации, в то время как о полях λ можно думать как о полях высших спинов. Понятие спина в трехмерном пространстве–времени не связано с представлениями малой группы, поскольку безмассовые представления в этом случае тривиальны. В трехмерном пространстве–времени со спином принято ассоциировать свойства полей относительно лоренцевских преобразований. Для случая $l = \frac{1}{2}$ в работе было явно продемонстрированно, что функционал действия (21) может быть получен контракцией соответствующего функционала $SU(1,2) \times SU(1,2)$ теории Черна–Саймонса, который, в свою очередь, на линеаризованном уровне определяет уравнения Фронсдала для поля спина–3 и линеаризованную модель теории гравитации [7].

Гравитация в трехмерном пространстве–времени является топологической теорией. Однако, если многообразие, на котором задана теория, имеет границу, на ней могут существовать эффективные степени свободы. Анализ граничных степеней свободы технически более удобно проводить в формулировке теории Черна–Саймонса, и он сводится к изучению асимптотической алгебры симметрии и ее свойств. В диссертационной работе был проведен такой анализ явно для теорий с $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 2$. Остановимся на случае $l = \frac{1}{2}$ более подробно. Будем полагать, что на границе калибровочное поле Черна–Саймонса $\mathbf{A}$, принимающее значения в расширенной $l = \frac{1}{2}$ конформной алгебре Галилея, ведет себя следующим образом:

$$\mathbf{A} = h^{-1}(d + \mathfrak{a})h, \tag{25}$$

где групповой элемент h зависит лишь от радиальной кооординаты $h = h(r)$, которая определяет расстояние до границы многообразия. Калибровочное поле $\mathfrak{a}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = \Big(L_{+1} + (\mathcal{N}\mathcal{I} - \mathcal{L})M_{-1} + (\mathcal{N}^2 - \mathcal{M})L_{-1} + \sqrt{2}\mathcal{C}^i Z^i_{-\frac{1}{2}} + \mathcal{I}N\Big)\, d\phi + \\ + \big(M_{+1} + (\mathcal{N}^2 - \mathcal{M})M_{-1} + 2\mathcal{N}N - \mathcal{M}M_{-1}\big)\, dt, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{C}$ некоторые функции, зависящие от координат ϕ и t, параметризующих границу $\partial\mathcal{M}_3$. Здесь M_m, L_m, C^i_p, N и I обозначают набор генераторов расширенной

---

[7] Campoleoni A., Fredenhagen S., Pfenninger S., Theisen S. Asymptotic symmetries of three-dimensional gravity coupled to higher-spin fields // Journal of High Energy Physics. 2010. - Vol. 19. - 007.

$l = \frac{1}{2}$–конформной алгебры Галилея в специальном базисе. Следует отметить, что данные граничные условия включают решения, представляющие физический интерес, например, космологические горизонты [8]. Для данных граничных условий была найдена асимптотическая алгебра симметрии, структурные соотношения которой имеют вид

$$\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = i(m-n)L_{m+n}, && [L_m, M_n] = i(m-n)M_{m+n} - ikn^3\delta_{m+n,0},\\
&[L_m, I_n] = -inI_{m+n}, && [L_m, N_n] = -inN_{m+n},\\
&[M_m, I_n] = -2inN_{m+n}, && [I_m, N_n] = -2ink\delta_{m+n,0},\\
&[L_m, C^i_p] = i\left(\frac{m}{2} - p\right)C^i_{p+m}, && [I_m, C^i_p] = -\epsilon^{ij}C^j_{m+p},\\
&[C^i_p, C^j_q] = -M_{p+q}\epsilon^{ij} + i(p-q)N_{p+q}\delta^{ij} - 2q^2k\delta_{p+q,0}\epsilon^{ij}, && \qquad (27)
\end{aligned}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. В том случае, когда $p, q = \pm\frac{1}{2}$, $m, n = \pm 1, 0$ и наборы генераторов I_m и N_m ограничены одним представителем в каждом $I \equiv I_0$, $N \equiv N_0$, представленная выше алгебра изоморфна расширенной $l = \frac{1}{2}$–конформной алгебре Галилея. Первая строка структурных соотношений представляет собой алгебру BMS_3 с центральным зарядом $c = 12k$. Упомянутое ранее сходство структуры расширенной l–конформной алгебры Галилея со структурой суперbegin алгебры Пуанкаре, наследуется и асимтотической алгеброй симметрии в модели теории Черна–Саймонса. Можно видеть, что асимптотическая алгебра имеет схожую структуру с асимптотической супералгеброй симметрии в $\mathcal{N} = 2$, $D = 3$ теории супергравитации[9].

Основные результаты диссертационной работы:

1. Построены новые модели $D(2,1;\alpha)$, $OSp(2|N)$ и $SU(1,1|N)$ суперконформной механики. Установлено соответствие таких систем с моделями релятивистских частиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр.

2. Построены новые решения вакуумных уравнений Эйнштейна и уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, группа изометрии которых описывается l–конформной группой Галилея.

3. Построены новые динамические реализации l–конформной группы Галилея, не вовлекающие высших производных.

4. Построена новая модель трехмерной гравитации, группа калибровочных преобразований которой представлена расширенной l–конформной группой Галилея. Установлена взаимосвязь такой модели с теорией полей высших спинов в трехмерном пространстве.

---

[8] Bagchi A., Detournay S., Fareghbal R., Simon J. Holography of 3D flat cosmological horizons // Physical Review Letters. 2013. - Vol. 110. - 141302.

[9] Fuentealba O., Matulich J., Troncoso R. Asymptotic structure of $\mathcal{N} = 2$ supergravity in 3D: extended super-BMS$_3$ and nonlinear energy bounds // Journal of High Energy Physics. 2017. - Vol. 30. - 01.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

[1] Chernyavsky D. On OSp(N2) superconformal mechanics [Electronic resource] / D. Chernyavsky // Journal of High Energy Physics. – 2019. – Vol. 2. – Article number 170 (2019). – 14 p. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP02(2019)170 (access date: 06.08.2020). – DOI: 10.1007/JHEP02(2019)170. – 0,5 а.л. (Web of Science).

[2] Chernyavsky D. Super 0-brane action on the coset space of D(2, 1;) supergroup / D. Chernyavsky // Journal of High Energy Physics. – 2017. – Vol. 9. – Article number 054 (2017). – 16 p. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP09%282017%29054 access date: 06.08.2020). – DOI: 10.1007/JHEP09(2017)054. – 0,5 а.л. (Web of Science).

[3] Chernyavsky D. SU(1, 1|N) superconformal mechanics with fermionic gauge symmetry [Electronic resource] / D. Chernyavsky // Journal of High Energy Physics. – 2018. – Vol. 4. – Article number 009 (2018). – 16 p. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP04%282018%29009 (access date: 06.08.2020). – DOI: 10.1007/JHEP04(2018)009. – 0,6 а.л. (Scopus).

[4] Chernyavsky D. Ricci-flat spacetimes with l-conformal Galilei symmetry / D. Chernyavsky / D. Chernyavsky, A. Galajinsky // Physics Letters B. – 2016. – Vol. 754. – P. 249–253. – DOI: 10.1016/j.physletb.2016.01.042. – 0,4 / 0,2 а.л. (Scopus).

[5] Chernyavsky D. Coset spaces and Einstein manifolds with l-conformal Galilei symmetry / D. Chernyavsky // Nuclear Physics B. – 2016. – Vol. 911. – P. 471–479. – DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.08.007. – 0,4 а.л. (Scopus).

[6] Chernyavsky D. Three-dimensional (higher-spin) gravities with extended Schrodinger and l-conformal Galilean symmetries [Electronic resource] / D. Chernyavsky, D. Sorokin // Journal of High Energy Physics. – 2019. – Vol. 7. – Article number 156 (2019). – 28 p. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP07%282019%29156 (access date: 06.08.2020). – DOI: 10.1007/JHEP07(2019)156. – 1 / 0,5 а.л. (Web of Science).

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета
Заказ № 7275 от «10» февраля 2021 г. Тираж 100 экз.
г. Томск Московский тр.8, тел. 53-15-28