ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 53

УДК 519.95
DOI: 10.17223/19988605/53/10

Ф.Г. Фейзиев, Н.Б. Абаева

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДВОИЧНЫХ 4*D*-НЕЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача синтеза одного класса двоичных 4*D*-нелинейных модулярных динамических систем, заданных двухзначным аналогом полинома Вольтерры. Задача формулируется как задача квадратичной оптимизации. При удовлетворении входной последовательностью системы условия ортогональности приводится алгоритм решения поставленной задачи. При неудовлетворении входной последовательностью условий ортогональности для решения задачи предлагается методика, основанная на привлечении специальных ортогональных входных последовательностей.

Ключевые слова: нелинейные модулярные динамические системы; полином Вольтерры; задача оптимального синтеза; задача квадратичной оптимизации; условие ортогональности; ортогональные входные последовательности.

Модулярные динамические системы (МДС) [1–6] являются одним из важных классов дискретных динамических систем (понятие модулярной динамической системы – синоним понятия «конечные автоматы», «конечные последовательностные машины» и т.д. [7]). Обычные, т.е. однопараметрические, и многопараметрические МДС широко применяются в вычислительной технике, системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, в криптографии, моделировании, управлении непрерывных и дискретных объектов, в распараллеливании выполнения вычислений для различных задач (см. [1, 2, 4–6, 8–12]). Исследованы также задачи теории и приложений МДС (см.: [1–7, 13–19]). К таким задачам относится и задача синтеза МДС. К настоящему времени разработаны методы и алгоритмы решения задачи синтеза для различных классов однопараметрических и многопараметрических МДС, заданных в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [5, 6, 20–22]. Одним из классов МДС является класс двоичных 4*D*-нелинейных МДС (4*D*-НМДС), который имеет более общие структуры, чем *nD*-НМДС, $n \in \{1, 2, 3\}$. А это стимулирует изучение различных задач также для 4*D*-НМДС. Лишь в работе [23] для полной реакции двоичных 4*D*-НМДС, заданных функциональными входно-выходными соотношениями, получено полиномиальное соотношение в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры. В данной работе рассматривается вопрос разработки метода и алгоритма решения задачи синтеза для двоичных 4*D*-НМДС.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двоичную 4*D*-НМДС с фиксированный памятью n_0, ограниченной связью $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, со степенью *S*, описываемую в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [23]:

$$y[n,c_1,c_2,c_3] = \sum_{i=1}^{S} \sum_{(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar{m})\in F(i)} \sum_{(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L(\ell_1,\ell_2,\ell_3)} \sum_{\bar{\bar{\tau}}\in\Gamma(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar{m})} h_{i,(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar{m})}[\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}]\times$$
$$\times \prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar{m})} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)], GF(2). \quad (1)$$

Здесь $n \in T = \{0,1,2,...\}$, $c_\alpha \in \{...,-1,0,1,...\}, \alpha = \overline{1,3}$; $y[n,c_1,c_2,c_3]$ и $u[n,c_1,c_2,c_3]$ есть соответственно выходная и входная последовательности над полем $GF(2)$; $P_\alpha = \{p_\alpha(1),...,p_\alpha(r_\alpha)\}$, $-\infty < p_\alpha(1) < ...$ $... < p_\alpha(r_\alpha) < \infty$, $p_\alpha(j) \in \{...,-1,0,1...\}$, $j = 1,...,r_\alpha$, $\alpha = \overline{1,3}$;

$$F(i)=\{(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)\big|\,\bar m=(m_{1,1,1},...,m_{1,1,\ell_3},m_{1,2,1},...,m_{1,2,\ell_3},...,m_{1,\ell_2,\ell_3},...,m_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}),$$
$$\sum_{\alpha=1}^{\ell_1}\sum_{\beta=1}^{\ell_2}\sum_{\gamma=1}^{\ell_3} m_{\alpha,\beta,\gamma}=i;\quad m_{\alpha,\beta,\gamma}\in\{0,...,n_0+1\},\ \ \alpha=\overline{1,\ell_1},\ \beta=\overline{1,\ell_2},\gamma=\overline{1,\ell_3};$$
$$(\forall\alpha\in\{1,...,\ell_1\})(\exists\beta\in\{1,...,\ell_2\})(\exists\gamma\in\{1,...,\ell_3\})\Rightarrow(m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq 0),$$
$$(\forall\beta\in\{1,...,\ell_2\})(\exists\alpha\in\{1,...,\ell_1\})(\exists\gamma\in\{1,...,\ell_3\})\Rightarrow(m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq 0),$$
$$(\forall\gamma\in\{1,...,\ell_3\})(\exists\alpha\in\{1,...,\ell_1\})(\exists\beta\in\{1,...,\ell_2\})\Rightarrow(m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq 0);\ \ell_\sigma\in\{1,...,r_\sigma\},\sigma=\overline{1,3}\Big\}\ ;$$
$$L(\ell_1,\ell_2,\ell_3)=\{(\bar j,\bar\sigma,\bar\rho)\ \big|\,\bar j\in L_1(\ell_1),\ \bar\sigma\in L_2(\ell_2),\ \bar\rho\in L_3(\ell_3)\},$$

где $\quad L_1(\ell_1)=\{\bar j=(j_1,...,j_{\ell_1})\big|1\le j_1<...<j_{\ell_1}\le r_1\},\ L_2(\ell_2)=\{\bar\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_{\ell_2})\big|1\le\sigma_1<...,\sigma_{\ell_2}\le r_2\},$

$$L_3(\ell_3)=\{\bar\rho=(\rho_1,...,\rho_{\ell_3})\big|1\le\rho_1<...<\rho_{\ell_3}\le r_3\};\ \ \Gamma(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)=\mathop{\times}_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)}\Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma})$$

(здесь $\Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma})=\{\bar\tau_{\alpha,\beta,\gamma}=(\tau(\alpha,\beta,\gamma,1),...,\tau(\alpha)),\beta,\gamma,\ m_{\alpha,\beta,\gamma}\big|\ 0\ \le\ \tau(\alpha,\beta,\gamma,1))\ <\ ...\ <\tau(\alpha,\beta,\gamma,m_{\alpha,\beta,\gamma})\ \le\ n_0\};$
$Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)=\{(\alpha,\beta,\gamma)\big|m_{\alpha,\beta,\gamma}$ есть компонента $\bar m$ и $m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq 0,\alpha=\overline{1,\ell_1},\ \beta=\overline{1,\ell_2},\gamma=\overline{1,\ell_3}\})$.

Пусть $\lambda_i=|F(i)|$, через $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)_\nu$ обозначим ν-й элемент множества $F(i)$. Тогда 4*D*-НМДС (1) можно записать в следующем виде:

$$y[n,c_1,c_2,c_3]=\sum_{i=1}^{S}\sum_{\nu=1}^{\lambda_i}\sum_{(\bar j,\bar\sigma,\bar\rho)\in L_{i,\nu}}\sum_{\bar{\bar\tau}\in\Gamma_{i,\nu}} h_{i,\nu}[\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}]\ \times$$
$$\times\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}}\ \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)],GF(2),\tag{2}$$

где для простоты записей приняты обозначения:

$$h_{i,\nu}[\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}]\equiv h_{i,(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)_\nu}[\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}],\ \ Q_{i,\nu}\equiv Q_0(i,(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)_\nu),\ \ \Gamma_{i,\nu}\equiv\Gamma((\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)_\nu),$$
$$L_{i,\nu}\equiv L((\ell_1,\ell_2,\ell_3)_\nu).$$

Из формулы (2) видно, что двоичный 4*D*-НМДС состоит из различных блоков. Между блоками и возможными двойками $\langle i,\nu\rangle$ есть взаимно-однозначное соответствие, где $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$. Отметим, что количество блоков определяется по формуле $\lambda_1+...+\lambda_S$.

Пусть $n\in[0,\mathrm{N}]\equiv\{0,1,...\mathrm{N}\}$, $c_\alpha\in[0,C_\alpha]\equiv\{0,1,...,C_\alpha\}$, $\alpha=\overline{1,3}$, и последовательность

$$\{y_0[n,c_1,c_2,c_3]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\}\tag{3}$$

суть желаемая выходная последовательность 4*D*-НМДС (2). Пусть на вход 4*D*-НМДС (2) поступает произвольная двоичная неизвестная последовательность

$$\{u[n,c_1,c_2,c_3]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\}.$$

Задача оптимального синтеза двоичных 4*D*-НМДС (2) заключается в нахождении для всех $\bar{\bar\tau}\in\Gamma_{i,\nu}$, $(\bar j,\bar\sigma,\bar\rho)\in L_{i,\nu}$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, таких $h_{i,\nu}[\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}]\in\{0,1\}$, при которых минимизируется функционал

$$J=\sum_{n=0}^{N}\ \sum_{c_1\in[0,C_1]}\ \sum_{c_2\in[0,C_2]}\ \sum_{c_3\in[0,C_3]}(y[n,c_1,c_2,c_3]-y_0[n,c_1,c_2,c_3])^2\ .\tag{4}$$

Функционал (4) указывает расстояние между реальной $y[n,c_1,c_2,c_3]$ и желаемой $y_0[n,c_1,c_2,c_3]$ последовательностями 4*D*-НМДС (2). Задача (2), (4) суть задача квадратичной оптимизации.

2. Матричный вид задачи оптимального синтеза

Через $\bar{\bar\tau}_k$ обозначим *k*-й элемент в $\Gamma_{i,\nu}$, а компоненты набора $\bar{\bar\tau}_k$ обозначим через $\tau^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma})$, где $(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}$. Введем следующий вектор столбец:

$$U_0(i,\nu,\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho},\overline{\overline{\tau}}_k)=$$
$$=\left\{\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}}\ \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)]\right\}, \tag{5}$$

где каждому набору $(n,c_1,c_2,c_3)\in[0,N]\times[0,C_1]\times[0,C_2]\times[0,C_3]$ соответствует одна компонента. Последовательно введем следующие блочные матрицы:

$$U_1(i,\nu,\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})=(U_0(i,\nu,\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho},\overline{\overline{\tau}}_1)\ \dots\ U_0(i,\nu,\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho},\overline{\overline{\tau}}_{|\Gamma_{i,\nu}|})),$$
$$U_2(i,\nu)=(U_1(i,\nu,(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_1)\ \dots\ U_1(i,\nu,(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_{|L_{i,\nu}|})), \tag{6}$$
$$U_3(i)=(U_2(i,\nu_1)\ \dots\ U_2(i,\nu_{\lambda_i})),\ U=(U_3(1)\ \dots\ U_3(S)).$$

Пусть

$$H_1(i,\nu,\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})=(h_{i,\nu}[\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho},\overline{\overline{\tau}}_1],\dots,h_{i,\nu}[\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho},\overline{\overline{\tau}}_{|\Gamma_{i,\nu}|}])^T. \tag{7}$$

Последовательно введем следующие блочные векторы:

$$H_2(i,\nu)=(H_1(i,\nu,(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_1),\dots,H_1(i,\nu,(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_{|D_{i,\nu}|}))^T,$$
$$H_3(i)=(H_2(i,1),\dots,H_2(i,\lambda_i))^T,\ H=(H_3(1),\dots,H_3(S))^T, \tag{8}$$

где в формулах (6)–(8) через $|A|$ обозначено количество элементов во множестве A.

В блочной матрице U все элементы блочной подматрицы $U_3(i),\ i=\overline{1,S}$, распишем в открытом виде, в полученной блочной матрице все элементы блочный подматрицы $U_2(i,\nu)$, $\nu=\overline{1,\lambda_i}$, $i=\overline{1,S}$, также распишем в открытом виде и т.д. Тогда получим обыкновенную матрицу U размерностью $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1)\times R$, где $R=\sum_{i=1}^{S}C^i_{(n_0+1)r_1r_2r_3}$. В блочном векторе H все компоненты блочных подвекторов $H_3(i),\ i=\overline{1,S}$, распишем в открытом виде. В полученном блочном векторе все компоненты блочных подвекторов $H_2(i,\nu)$, $\nu=\overline{1,\lambda_i}$, $i=\overline{1,S}$, распишем в открытом виде и т.д. Тогда получим обыкновенный вектор H с R компонентами.

Предполагаем, что $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1)>>R$. Пусть

$$Y_0=(y_0[0,0,0,0],\dots,y_0[0,0,0,C_3],\dots,y_0[0,0,C_2,C_3],\dots,y_0[0,C_1,C_2,C_3],\dots,y_0[N,C_1,C_2,C_3])^T,$$
$$Y=(y[0,0,0,0],\dots,y[0,0,0,C_3],\dots,y[0,0,C_2,C_3],\dots,y[0,C_1,C_2,C_3],\dots,y[N,C_1,C_2,C_3])^T.$$

Тогда задачу (2), (4) можем записать в следующем матричном виде:

$$Y=U\cdot H,\ GF(2), \tag{9}$$
$$J=(Y-Y_0)^T\cdot(Y-Y_0)\to\min. \tag{10}$$

Пусть на вход 4D-НМДС (2) поступает входная последовательность

$$\{u[n,c_1,c_2,c_3]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\}, \tag{11}$$

и она такова, что матрица U, образованная из нее по формулам (5), (6), удовлетворяет условиям ортогональности

$$U^T\cdot U=\mathrm{diag}\{d_{1,1},\dots,d_{R,R}\};\quad d_{\alpha,\alpha}>0,\ \alpha=1,\dots,R, \tag{12}$$

где $d_{\alpha,\alpha}$, $\alpha=\overline{1,R}$, есть элементы матрицы $U^T\cdot U$. Тогда последовательность (11) называется ортогональной входной последовательностью для 4D-НМДС (2).

При произвольности двоичной входной последовательности (11) матрица U может не удовлетворять условиям ортогональности (12). Можно доказать, что при $S>1$ невозможно найти входную последовательность типа (11) при которой U удовлетворяла бы условиям ортогональности (12). Однако если в разные блоки 4D-НМДС (2) поступают разные входные последовательности, тогда возможно удовлетворение матрицей U, образованной аналогично по формулами (5), (6), условия ортогональности аналогично (12) при $S>1$.

Решения задачи (2),(4) для случая ортогональных входных последовательностей и случая неортогональных входных последовательностей будем проводить в отдельности.

3. Решение задачи оптимального синтеза 4*D*-НМДС при ортогональных входных последовательностях

Рассмотрим случай, когда в разные блоки 4*D*-НМДС поступают разные входные последовательности. Таким образом, рассмотрим следующую 4*D*-НМДС:

$$y[n,c_1,c_2,c_3]=\sum_{i=1}^{S}\sum_{\nu=1}^{\lambda_i}\sum_{(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}}\sum_{\bar{\bar{\tau}}\in\Gamma_{i,\nu}} h_{i,\nu}[\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}]\ \times$$

$$\times\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}}\prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}}\upsilon_{i,\nu}[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)],GF(2). \tag{13}$$

В 4*D*-НМДС на вход блока, соответствующего $\langle i,\nu\rangle$, поступают последовательности $\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_2]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\}$, $i=1,...,S$. Пусть

$$V_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}_k)=$$

$$=\left\{\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}}\prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}}\upsilon_{i,\nu}[n-\tau^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)]\right\}. \tag{14}$$

На основе матрицы $V_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}_k)$ аналогично по формулам (6) последовательно формируем матрицы

$$V_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})=(V_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}_1)\ \ ...\ \ V_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}_{|\Gamma_{i,\nu}|}))\,,$$

$$V_2(i,\nu)=(V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_1)\ \ ...\ \ V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_{|L_{i,\nu}|}))\,, \tag{15}$$

$$V_3(i)=(V_2(i,\nu_1)\ \ ...\ \ V_2(i,\nu_{\lambda_i}))\,,\quad V=(V_3(1)\ \ ...\ \ V_3(S))\,.$$

В (15) матрица *V* как обычная матрица имеет размерность $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1)\times R$.

Задача (13), (4) имеет следующий матричный вид:

$$Y=V\cdot H,\ GF(2)\,.$$

В формуле (16) операция проводится над конечным полем $GF(2)$, а в (17) операция проводится над полем вещественных чисел. Однако эта задача оптимизации есть задача целочисленной оптимизации. Для решения данной задачи нужно использовать метод, использующий ее специфические особенности. Пусть входные последовательности

$$\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_2]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\},\ \ \nu=\overline{1,\lambda_i},\ \ i=\overline{1,S}\,, \tag{18}$$

ортогональные, т.е. удовлетворяются условиям ортогональности

$$V^T\cdot V=\mathrm{diag}\{d_{1,1},...,d_{R,R}\};\quad d_{\alpha,\alpha}>0,\ \ \alpha=1,...,R\,, \tag{19}$$

где $d_{\alpha,\alpha}$, $\alpha=\overline{1,R}$, – элементы матрицы $V^T\cdot V$.

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации над полем действительных чисел:

$$Y=V\cdot K\,, \tag{20}$$

$$J=(Y-Y_0)^T(Y-Y_0)\to\min\,, \tag{21}$$

где количество компонентов неизвестного вектора *K* суть *R*, и задача (20), (21) есть непрерывный аналог задачи (16), (17). Через k_α и h_α обозначим α-й компонент вектора *K* и вектора *H* соответственно. Если решение задачи (20), (21) известно, то решение задачи (16), (17) определяется по формуле [20]

$$h_\alpha=\begin{cases}1, & \text{если}\quad k_\alpha>0,5,\\ 0, & \text{если}\quad k_\alpha\le 0,5.\end{cases} \tag{22}$$

В случае удовлетворения входной последовательностью (18) условия ортогональности (19), решение задачи квадратичной оптимизации (20), (21) можно определить по формуле

$$K=(V^T\cdot V)^{-1}\cdot V^T\cdot Y_0\ . \qquad (23)$$

Рассмотрим вопрос определения оптимального значения импульсных характеристик $h_{i,\nu}[\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho},\overline{\overline{\tau}}]$, $\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma_{i,\nu}$, $(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})\in D_{i,\nu}$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$. Для этого определим номера компонентов вектора $H_1(i,\nu,(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha)=(h_{i,\nu}[(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha,\overline{\overline{\tau}}_1],...,h_{i,\nu}[(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha,\overline{\overline{\tau}}_{|\Gamma_{i,\nu}|}])^T$ среди компонентов вектора *H*. Рассмотрим компоненту $h_{i,\nu}[(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha,\overline{\overline{\tau}}_\beta]$ вектора $H_1(i,\nu,(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha)$, где $\beta\in\{1,...,|\Gamma_{i,\nu}|\}$, $\alpha\in\{1,...,|L_{i,\nu}|\}$. Номер компоненты $h_{i,\nu}[(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha,\overline{\overline{\tau}}_\beta]$ можно определить по формуле

$$\gamma=\sum_{\pi=1}^{i-1}\sum_{\xi=1}^{\lambda_\pi}\sum_{\mu=1}^{|L_{\pi,\xi}|}|\Gamma_{\pi,\xi}|+\sum_{\xi=1}^{\nu-1}\sum_{\mu=1}^{|L_{i,\xi}|}|\Gamma_{i,\xi}|+(\alpha-1)|\Gamma_{i,\lambda_i}|+\beta. \qquad (24)$$

Таким образом, при ортогональной последовательности (18) решение задачи (16), (17), т.е. оптимальное $h_{i,\nu}[(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha,\overline{\overline{\tau}}_\beta]$, $\beta\in\{1,...,|\Gamma_{i,\nu}|\}$, $\alpha\in\{1,...,|L_{i,\nu}|\}$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, можно определить по следующей последовательности: определение вектора *K* – решения задачи (20), (21), по формуле (23); для каждых $\beta\in\{1,...,|\Gamma_{i,\nu}|\}$, $\alpha\in\{1,...,|L_{i,\nu}|\}$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$ определение $h_{i,\nu}[(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha,\overline{\overline{\tau}}_\beta]$ по формуле

$$h_{i,\nu}[(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})_\alpha,\overline{\overline{\tau}}_\beta]=\begin{cases}1, & \text{если} \quad k_\gamma>0,5,\\ 0, & \text{если} \quad k_\gamma\le 0,5,\end{cases}$$

где γ определяется по формуле (24).

4. Решение задачи оптимального синтеза 4*D*-НМДС при произвольных входных последовательностях

Пусть входная последовательность (11) суть произвольная неизвестная двоичная последовательность. Тогда элементы матрицы *U*, образованной по формулам (5), (6), неизвестны, и условие ортогональности (12) не выполняется. По этой причине решение задачи оптимального синтеза (2), (4) на основе существующих методов невозможно, так как для решения задачи оптимизации этими методами должны быть известны значения элементов матрицы *U* или ее какие-либо свойства. Поэтому для решения поставленной задачи необходима разработка специального метода, основанного на ортогонализации входной последовательности, которая будет поступать на вход 4*D*-НМДС. Для реализации этого поставим на вход 4*D*-НМДС специальные преобразователи, с помощью которых входная последовательность (11) преобразуется в специальные ортогональные последовательности

$$\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\},\ \nu\in\{1,...,\lambda_i\},\ i\in\{1,...,S\}.$$

Для каждых $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, в качестве преобразователя можно использовать линейную модулярную систему, описываемую следующим уравнением:

$$\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]=\sum_{m=0}^{n-1}g_{i,\nu}[n-m-1,c_1,c_2,c_3]\,u[m,c_1,c_2,c_3]+g_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]\ ,\quad GF(2)\ , \qquad (25)$$

где $g_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$ является импульсной характеристикой соответствующего преобразователя. Выход преобразователя (25) подается на вход тех блоков 4*D*-НМДС (2), которые соответствуют $\langle i,\nu\rangle$, где $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$. Для каждых $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, при известной последовательности $\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\}$, импульсную характеристику преобразователя (25) можно определить по формуле

$$g_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]=\sum_{m=0}^{n-1}g_{i,\nu}[n-m-1,c_1,c_2,c_3]\,u[m,c_1,c_2,c_3]+\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]\ ,\quad GF(2)\ .$$

Таким образом, для решения задачи синтеза 4*D*-НМДС с произвольными неизвестными входными последовательностями сначала осуществляем ортогонализацию ее входной последовательности, а после этого, применяя методику решения задачи синтеза 4*D*-НМДС с ортогональными входными последовательностями, рассмотренную в разделе 3, решаем поставленную задачу.

Заключение

В работе задача оптимального синтеза одного класса двоичных 4*D*-НМДС, заданных двухзначным аналогом полинома Вольтерры, сформирована как задача квадратичной оптимизации. Получен матричный вид задачи оптимального синтеза. Введены понятие ортогональной входной последовательности для двоичных 4*D*-НМДС. Приведена методика решения задачи оптимального синтеза двоичных 4*D*-НМДС с ортогональными входными последовательностями. А для решения задача оптимального синтеза двоичных 4*D*-НМДС с произвольными двоичными входными последовательностями предложена методика, основанная на привлечении специальных ортогональных последовательностей. Отметим, что ортогональные последовательности строятся на основе условий ортогональности, учитывающих особенности рассматриваемой МДС. Поэтому в дальнейшем, во-первых, необходимо найти такие условия и, во-вторых, на основе этих условий разработать алгоритм для построения ортогональных входных последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М. : Наука, 1974. 288 с.
2. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М. : Сов. радио, 1975. 248 с.
3. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Анализ и синтез конечных линейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 57–66.
4. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
5. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку : Элм, 1996. 180 с.
6. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: основные результаты по теории и приложению. Баку : Элм, 2006. 234 с.
7. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3*D*-нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. 2011. Т. 33, № 2. С. 33–50.
8. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М. : Мир, 1986. 576 с.
9. Байбатшаев М.Ш. Синтез одного класса систем с двоичной нелинейной последовательностной машиной для управления непрерывным объектом // Сборник трудов ВНИИСИ. 1978. Вып. 1. С. 48–58.
10. Блюмин С.Л., Корнеев А.М. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления. Липецк : Липецк. эколого-гуманитар. ин-т, 2005. 124 с.
11. Nagiyev A.T., Feyziyev F.G. The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematic. 2001. Bd. 71. S. 31–43.
12. Кожевников В.С., Матюшин И.В. Вычисление детерминанта и произведения матриц в структуре клеточного автомата // Прикладная дискретная математика. 2019. № 46. С. 88–107.
13. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Гусейнов И.Н. Критерии диагностируемости билинейных последовательностных машин // Доклады РАН. 1998. Т. 361, № 5. С. 606–607.
14. Сперанский Д.В. Нечеткое двоичное логическое моделирование // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 27. С. 4–9.
15. Сперанский Д.В. Эксперименты с нечеткими автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 107–124.
16. Сперанский Д.В. Эксперименты с нестационарными билинейными автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 9. С. 161–174.
17. Haci Y. Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and computational mathematics. 2009. V. 8, No. 2. P. 263–269.
18. Haci Y., Özen K. Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. V. 38, No. 3. P. 625–633.
19. Haci Y., Candan M., Or A. On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 2016. V. 6, No. 1. P. 57–63.
20. Байбатшаев М.Ш., Попков Ю.С. Об одной задаче квадратичной оптимизации двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1978. № 12. С. 37–47.
21. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. К задаче квадратичной оптимизации для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. С. 104–119.

22. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Фейзиев Ф.Г. Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Доклады РАН. 1998. Т. 360, № 6. С. 750–752.
23. Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции одного класса двоичных 4*D*-модулярных динамических систем // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (45). С 46–54.

Поступила в редакцию 12 февраля 2020 г.

Feyziyev F.G., Abayeva N.B. (2020) THE PROBLEM OF OPTIMAL SYNTHESIS OF BINARY 4*D*-NONLINEAR MODULAR DYNAMIC SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 102–109

DOI: 10.17223/19988605/53/10

Binary 4*D*-nonlinear modular dynamic system (4*D*-NMDS) with fixed memory n_0, limited connection $P_1 \times P_2 \times P_3$, degree *S*, described in the form of two-valued analogue of Volterra's polynomial is considered:

$$y[n,c_1,c_2,c_3] = \sum_{i=1}^{S} \sum_{\nu=1}^{\lambda_i} \sum_{(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}} \sum_{\bar{\bar{\tau}}\in\Gamma_{i,\nu}} h_{i,\nu}[\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}] \prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1 + p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)],GF(2). \quad (1)$$

Here $n\in[0,\mathrm{N}]\equiv\{0,1,...\mathrm{N}\}$, $c_\alpha\in[0,C_\alpha]\equiv\{0,1,...,C_\alpha\}$, $\alpha=\overline{1,3}$; $y[n,c_1,c_2,c_3]$ and $u[n,c_1,c_2,c_3]$ is a sequence over field $GF(2)$; $P_\alpha=\{p_\alpha(1),...,p_\alpha(r_\alpha)\}$, $-\infty<p_\alpha(1)<...<p_\alpha(r_\alpha)<\infty$, $p_\alpha(j)\in\{...,-1,0,1...\}$, $j=1,...,r_\alpha$, $\alpha=\overline{1,3}$.

Let $\{y_0[n,c_1,c_2,c_3]:n\in[0,N]\}$, $c_1\in[0,C_1]$, $c_2\in[0,C_2]$, $c_3\in[0,C_3]$, be desired output sequences of 4*D*-NMDS (1). Let an arbitrary binary unknown sequence enter the input 4*D*-NMDS (1)

$$\{u[n,c_1,c_2,c_3]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2],c_3\in[0,C_3]\}\,. \quad (2)$$

The problems of the optimal synthesis of binary 4*D*-NMDS (1) consist in finding for all $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$, $\bar{\bar{\tau}}\in\Gamma_{i,\nu}$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, such $h_{i,\nu}[\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}]\in\{0,1\}$, for which the following functional is minimized

$$J=\sum_{n=0}^{N}\sum_{c_1\in[0,C_1]}\sum_{c_2\in[0,C_2]}\sum_{c_3\in[0,C_3]}(y[n,c_1,c_2,c_3]-y_0[n,c_1,c_2,c_3])^2\,. \quad (3)$$

Based on the sequence (2), the matrix $U_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}})$ is constructed. Based on the $U_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}})$ and $h_{i,\nu}[\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}]$, sequentially matrices $U_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, $U_2(i,\nu)$, $U_3(i)$, *U* and vectors $H_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, $H_2(i,\nu)$, $H_3(i)$, *H* are constructed respectively. The matrix *U* and the vector *H* have the dimensions $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1)\times R$ and *R*, respectively, where $R=\sum_{i=1}^{S}C^i_{(n_0+1)r_1r_2r_3}$. The formulas (1) and (3) have the following matrix form:

$$Y=U\cdot H,\ GF(2),\qquad J=(Y-Y_0)^T\cdot(Y-Y_0)\to\min\,. \quad (4)$$

If $S>1$, then the input sequence is not orthogonal, i.e. does not satisfy the conditions. $U^T\cdot U=\mathrm{diag}\{d_{1,1},...,d_{R,R}\}$, $d_{\alpha,\alpha}>0$, $\alpha=1,...,R$. If different input sequences enter input different blocks 4*D*-NMDS (1), then it is possible that, together input sequences of all blocks 4*D*-NMDS (1) can be orthogonal input sequences. Let orthogonal sequences $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, enters to input of 4*D*-НМДС (1) and the matrix *V* is formed from them. Then the solution to problem $Y=V\cdot H$, $GF(2)$, $J=(Y-Y_0)^T(Y-Y_0)\to\min$ is determined on the basis of the solution to the continuous problem of the quadratic optimization $Y=V\cdot K$, $J=(Y-Y_0)^T(Y-Y_0)\to\min$ as follows: if k_α and h_α are α-th components of vectors *K* and *H* respectively, then if $k_\alpha>0.5$, then $h_\alpha=1$, else $h_\alpha=0$. The vector *K* is determined by the formula $K=(V^T\cdot V)^{-1}\cdot V^T\cdot Y_0$.

Also in the case of non-orthogonal input sequences, for solving problem (4) a technique, based on attracting special orthogonal sequences, is proposed.

Keywords: 4*D*-nonlinear modular dynamic system; Volterra's polynomial; problem of optimal synthesis; problem of quadratic optimization; orthogonal input sequences.

FEYZIYEV Fikrat Gulali (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan).
E-mail: FeyziyevFG@mail.ru

ABAYEVA Nigar Bahram (Dissertant of Doktor philosophy (Ph.D) in Mathematics , Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan).
E-mail: abayeveldar404@gmail.com

REFERENCES

1. Gill, A. (1974) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential circuits]. Translated from English. Moscow: Nauka.
2. Faradzhev, R.G. (1975) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow: Sovetskoe radio.
3. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1981) Analysis and design of finite linear sequential cellular machines. *Avtomatika i telemechanika – Automation and Remote Control*. 6. pp. 57–66.
4. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1982) Linear cellular machine: The approach of the state space (review). *Avtomatika i telemechanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 125-163.
5. Faradzhev, R.G. & Feyziev, F.G.(1996) *Metody i algoritmy resheniya zadachi kvadratichnoy optimizatsii dlya dvoichnykh posledova-tel'nostnykh mashin* [Methods and algorithms for solving quadratic optimization problem for binary sequential machines]. Baku: Elm.
6. Feyziev, F.G. & Faradzheva, M.R. (2006) *Modulyarnye posledovatel'nostnye mashiny: osnovnye rezul'taty po teorii i prilozheniyu* [Modular sequential machine: The main results of the theory and application]. Baku: Elm.
7. Feyziev, F.G. & Samedova, Z.A. (2011) Polinomial'noe sootnoshenie dlya predstavleniya polnoy reaktsii 3D-nelineynykh modulyar-nykh dinamicheskikh sistem [Polynomial ratio to represent the full reaction 3D-nonlinear modular dynamical systems]. *Elektronnoe modelirovanie – Electronic Modeling*. 33(2). pp. 33–50.
8. Blahut, R. (1986) *Teoriya i praktika kodov, kontroliruyushchikh oshibki* [Theory and Practice of Error Control Codes]. Translated from English. Moscow: Mir.
9. Baybatshaev, M.Sh. (1978) Sintez odnogo klassa sistem s dvoichnoy nelineynoy posledovatel'nostnoy mashinoy dlya upravleniya nepreryvnym ob"ektom [Design of one class of systems with a binary non-linear sequential machine for controlling a continuous object]. *Sbornik trudov VNIISI*. 1. pp. 48–58.
10. Blyumin, S.L. & Korneev, A.M. (2005) *Diskretnoe modelirovanie sistem avtomatizatsii i upravleniya* [Discrete modeling automation and control systems]. Lipetsk: LEHI.
11. Nagiyev, A.T. & Feyziyev, F.G. (2001) The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters. *Seminarberichte, Fachbereich Mathematic*. 71. pp. 31–43.
12. Kozhevnikov, V.S. & Matyushkin, I.V. (2019) Computation of a determinant and matrix product in cellular automata. *Prikladnaya diskretnaya matematika – Applied Mathematics*. 46. pp. 88–107. DOI: 10.17223/20710410/46/8
13. Faradzhev, R.G., Nagiyev, A.T. & Guseynov, I.N. (1998) Kriterii diagnostiruemosti bilineynykh posledovatel'nostnykh mashin [The criteria of diagnosability for bilinear sequential machines]. *Doklady RAN*. 361(5). pp. 606–607.
14. Speranskiy, D.V. (2014) Fizzy binary logic modeling for digital devices. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 4−9.
15. Speranskiy, D.V. (2015) Experiments with fuzzy finite state machines. *Avtomatika i telemechanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 107–124.
16. Speranskiy, D.V. (2015) Experiments with nonstationary bilinear finite state machines. *Avtomatika i telemechanika – Automation and Remote Control*. 9. pp. 161–174.
17. Haci, Y. (2009) Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system. *Applied and computational mathematics*. 8(2). pp. 263–269.
18. Haci, H. & Özen, K. (2009) Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multiparametric binary dynamical system. *Control and Cybernetics.* 38(3). pp. 625–633.
19. Haci, Y., Candan, M. & Or, A. (2016) On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System. *Intenational Journal in Foundations of Computer Science and Technology*. 6(1). pp. 57–63. DOI: 10.5121/ijfcst.2016.6105
20. Baybatshaev, M.Sh. & Popkov, Yu.S. (1978) Ob odnoy zadache kvadratichnoy optimizatsii dvoichnykh nelineynykh posledovatel'nostnykh mashin [On one quadratic optimization problem for binary nonlinear sequential machines]. *Avtomatika i telemechanika – – Automation and Remote Control*. 12. pp. 37–47.
21. Faradzhev, R.G. & Feyziyev, F.G. (1996) K zadache kvadratichnoy optimizatsii dlya dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh posledova-tel'nostno-kletochnykh mashin [To the quadratic optimization problem for binary many-dimensional nonlinear sequential - cellular machines]. *Avtomatika i telemechanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 104–119.
22. Faradzhev, R.G., Nagiyev, A.T. & Feyziyev, F.G. (1998) Analiticheskoe opisanie i kvadratichnaya optimizatsiya dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh posledovatel'nostno-kletochnykh mashin [Analytical description and quadratic optimization of binary many-dimensional nonlinear sequential - cellular machines]. *Doklady RAN*. 360(5). pp. 750–752.
23. Feyziyev, F.G. & Abaeva, N.B. (2019) The polynomial ratio for description of full reaction of one classes binary 4D-multidimensional modular dynamic systems. *Vestnik Permskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2(45). pp. 46–54. DOI: 10.17072/1993-0550-2019-2-46-54