

На правах рукописи



Карловец Дмитрий Валерьевич

**ЭФФЕКТЫ НЕГАУССОВОСТИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ
В РАССЕЯНИИ И ИЗЛУЧЕНИИ**

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2020

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Официальные оппоненты:

Гинзбург Илья Файвильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория теоретической физики, главный научный сотрудник

Грум-Гржимайло Алексей Николаевич, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», отдел электромагнитных процессов и взаимодействия атомных ядер Научно-исследовательского института ядерной физики имени Д.В. Скобельцына, ведущий научный сотрудник

Шабаев Владимир Моисеевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», кафедра квантовой механики, профессор

Эпп Владимир Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет», кафедра теоретической физики, профессор

Защита состоится 18 февраля 2021 г. в 14³⁰ часов на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.01.04», созданного на базах физического факультета и Сибирского физико-технического института имени академика В.Д. Кузнецова федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория 211).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:

<https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/aad58d79-9e5f-4644-a920-d472ea8fddd0>

Автореферат разослан « » декабря 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
«НИ ТГУ.01.04»



Панченко Елена Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Современные ускорители частиц позволяют проверять теоретические модели фундаментальных взаимодействий с огромной точностью, однако, даже в рамках так называемой Стандартной модели, частью которой является квантовая электродинамика (КЭД), точный расчет физических процессов в высших порядках теории возмущений зачастую представляет собой технически сложную задачу, решаемую только с использованием современных компьютеров. Квантовые эффекты в излучении заряженных частиц во внешних электромагнитных полях и при рассеянии, либо аннигиляции обычно связаны с квантовой отдачей, спиновым вкладом (эффекты переворота спина и самополяризации), а также вкладом диаграмм Фейнмана более высоких порядков. В то же время эффекты, связанные с волновой природой самих массивных частиц, в том числе эффекты конечных размеров волновых пакетов, обычно не проявляются при релятивистских энергиях в виду малой длины волны де Бройля и потому сравнительно слабо изучены в процессах излучения и рассеяния.

Ситуация изменилась с созданием электронных микроскопов на энергию от 200-300 кэВ до 1 МэВ с непрерывным пучком и малым током. Для тока менее примерно 50 мкА расстояние между отдельными электронными пакетами может достигать 1-10 см и больше, поэтому волновые свойства отдельных электронных пакетов могут проявляться значительно сильнее, чем в банчированном пучке ускорителя. По-сути такие электронные микроскопы предоставляют сегодня наилучшие возможности для экспериментальной проверки квантовых свойств самих частиц и, в частности, влияния расплывания и формы пакетов на различные физические процессы. Хотя различные полные наборы точных и приближенных решений волновых уравнений, описывающие волновые пакеты различной формы и обладающие различными квантовыми числами, известны сравнительно давно, существенный прогресс в понимании возможностей манипулирования отдельными электронными пакетами был достигнут в серии теоретических работ Блюха и др. в 2007 г.¹ и позднее, где авторы предложили схему генерации так называемых закрученных электронов с внутренним угловым моментом импульса относительно оси распространения, которые являются массивными аналогами известных «закрученных» фотонов, полученных экспериментально около 25 лет назад. Данная идея была реализована в 2010 – 2011 годах сразу тремя группами в Японии, Бельгии и США², в 2013 г. были получены так называемые пучки Эйри электронов, а в 2015 г. были также впервые получены закрученные холодные нейтроны с угловым моментом импульса. Активно обсуждаются возможности генерации

¹Bliokh K.Y. Semiclassical dynamics of electron wave packet states with phase vortices / K.Y. Bliokh, Y.P. Bliokh, S. Savel'ev, F. Nori // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. **99** – P.190404 (1-4).

²Uchida M. Generation of electron beams carrying orbital angular momentum / M. Uchida, A. Tonomura // Nature. – 2010. – Vol. 464. – P.737-739. Verbeeck J. Production and application of electron vortex beams / J. Verbeeck, H. Tian, P. Schlattschneider // Nature. – 2010. – Vol. 467. – P.301-304. McMorran B.J. Electron Vortex Beams with High Quanta of Orbital Angular Momentum / B.J. McMorran, A. Agrawal, I. M. Anderson, et al. // Science. – 2011. – Vol. 331. P.192-195.

аналогичных квантовых состояний протонов и ионов. Существенной особенностью данных пакетов является отличие их формы от гауссовой: например, поперечный профиль закрученного состояния представляет собой «пончик» с минимумом по центру, а профиль пучка Эйри представляет собой произведение двух функций Эйри.

Новые возможности экспериментов стимулировали теоретические исследования различных физических процессов с такими пакетами. В частности, было показано, что форма пакета и такие его квантовые числа как угловой момент импульса могут оказывать существенное влияние на процессы рассеяния таких электронов на атомах и других частицах, излучения в среде и во внешних полях, в том числе для энергий электронов несколько МэВ, т.е. в умеренно релятивистском режиме. В данной работе мы разовьем релятивистские модели негауссовых волновых пакетов с упором на таковые с угловым моментом импульса и применим эти модели к расчету процессов рассеяния и излучения таких частиц. Существенно, что в ряде экспериментально реализуемых сценариев эффекты ширины и формы пакетов проявляются значительно сильнее, чем таковые от квантовой отдачи и спина и могут быть заметны невооруженным глазом, в том числе уже в древесном (борновском) приближении.

Цели диссертационной работы

Основные цели работы:

1. Исследовать квантовые состояния бозонов и фермионов с негауссовым профилем волнового пакета: прежде всего, «закрученных» частиц с угловым моментом импульса относительно оси распространения и пучков Эйри для свободных частиц и для таковых во внешнем поле плоской электромагнитной волны, а также оценить величину непараксиальных эффектов в последовательном релятивистском подходе к описанию волновых пакетов, в том числе в формализме функций Вигнера.
2. Разработать теоретическую модель для оценки влияния орбитального момента импульса «закрученного» электрона в процессах поляризационного излучения в неоднородных средах – прежде всего, для переходного излучения и большого углового момента – и указать оптимальные параметры для экспериментальной регистрации таких эффектов.
3. Разработать теоретическую модель для оценки влияния ширины и формы негауссовых пакетов заряженных частиц и их квантовых чисел на процессы рассеяния и аннигиляции, в том числе рассеяния электронов на атомах и на других частицах, а также оценить величину поправок к сечению рассеяния приближения плоских волн и проанализировать новые квантовые эффекты, возникающие благодаря этим поправкам, для реалистичных параметров.

Степень разработанности темы исследования

До первого экспериментального получения закрученных электронов в 2010 г. количество работ, посвященных влиянию размеров и формы волновых пакетов на физические процессы рассеяния и излучения было совсем небольшим. К числу таких работ относятся

прежде всего работы Томской школы Багрова и др. по излучению во внешнем поле³ и Новосибирской школы Сербо, Коткина и др. по излучению и рассеянию на коллайдерах⁴. В работах последней группы данные идеи были развиты в формализме функций Вигнера для учета размеров (в основном гауссовых) пучков и конечного импакт-параметра между пучками при столкновении, что тесно связано с так называемым MD-эффектом, обнаруженным в начале 80-х годов в Новосибирске.

Первые расчеты рассеяния оптических закрученных фотонов на ультрарелятивистских электронах были проведены в 2010 году⁵. В этой работах впервые проведено обобщение стандартного плосковолнового формализма S-матрицы для процесса с одной закрученной частицей. Данные идеи были развиты далее в работах Иванова и Сербо, однако, лишь для закрученных состояний, описываемых как бесселев пучок. Данная модель закрученного состояния является наиболее простой и содержит ограничения, поскольку бесселево состояние ненормируемо в бесконечном пространстве аналогично плоской волне. Как мы покажем в нашей работе, модель бесселева пучка не может использоваться для точного расчета величины непараксиальных эффектов и должна быть заменена на модель хорошо нормированного пакета, допускающего непараксиальное обобщение. Для этой цели мы проведем непараксиальное обобщение обычных параксиальных пучков Гаусса-Лагерра и проанализируем различия с аналогичными оптическими пучками.

Мы также проведем обобщение квантовой теории рассеяния, основанной на формализме S-матрицы, для случая произвольного негауссового пакета и рассмотрим частные случаи процессов с гауссовыми пакетами, с закрученными пакетами, пучками Эйри и когерентными суперпозициями состояний, часто называемыми состояниями кота Шрёдингера. Для электронов такие суперпозиции могут быть созданы в самое ближайшее время, поскольку – как и закрученные электроны – они также представляют интерес для целей слабозмушающей электронной микроскопии с нанометровым и субнанометровым разрешением.

Методология и методы исследования

Традиционными методами исследования излучения является метод точных решений волновых уравнений, операторный метод Байера-Каткова и формализм функций Вигнера, применимый также и для процессов рассеяния и аннигиляции. Следуя первому из упомянутых методов, мы получим несколько приближенных (параксиальных) и точных (непараксиальных) решений волновых уравнений, соответствующих негауссовым пакетам, также получим функции Вигнера таких состояний и разовьем общий формализм квантовой теории рассеяния для таких пакетов, следуя третьему подходу. Мы будем использовать аппарат нерелятивистской и релятивистской квантовой механики и квантовой теории

³Bagrov V.G. Theory of spontaneous radiation by electrons in a trajectory-coherent approximation / V.G. Bagrov, V.V. Belov, A. Yu. Trifonov // J. Phys. A: Math Gen. – 1993. – Vol.26, P.6431 – 6449.

⁴Kotkin G.L. Processes with large impact parameters at colliding beams / G.L. Kotkin, V.G. Serbo, A. Schiller // Int. J. Mod. Phys. A. – 1992. – Vol.7, P.4707 – 4745.

⁵Jentschura U. D. Generation of High-Energy Photons with Large Orbital Angular Momentum by Compton Backscattering / U.D. Jentschura, V.G. Serbo // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol.106. – P.013001 (1-4).

поля, квантовой оптики, классической и квантовой электродинамики, методы математической физики, а также методы численного интегрирования.

Положения, выносимые на защиту

1. Квантовые модели волновых пакетов массивных частиц с орбитальным моментом импульса относительно оси распространения и конечной квантовой неопределенностью орбитального момента, являющиеся приближенными (параксиальными) и точными (непараксиальными) решениями уравнений Шрёдингера, Клейна-Гордона и Дирака в формализме обычных переменных t, z и переменных светового конуса. Аналогичные модели для пучков Эйри бесспиновых частиц. Собственные мультипольные моменты заряженных негауссовых пакетов.
2. Непараксиальные волновые пакеты – обобщенные пакеты Гаусса-Лагерра – массивных частиц с орбитальным моментом импульса относительно оси распространения, являющиеся точными решениями уравнений Шрёдингера, Клейна-Гордона и Дирака. Последовательное релятивистское описание волновых пакетов, понятие параксиальности пакета массивной частицы и порядок величины непараксиальных поправок к наблюдаемым, особенно для больших орбитальных моментов. Зависимость фазы Гуи массивных частиц от времени. Электромагнитное поле электронного пакета с орбитальным моментом импульса.
3. Квантовая модель бесселева пучка электрона с орбитальным моментом импульса относительно оси распространения в поле плоской электромагнитной волны. Обобщения «волковских» состояний электрона. Зависимость среднего углового момента закрученного электрона в поле лазерной волны от интенсивности последней.
4. Метод поляризационных токов и теоретическая модель для расчета поляризационного излучения и, в частности, переходного излучения от электрона с большим орбитальным моментом импульса для мишени конечной диэлектрической проницаемости с учетом частотной дисперсии. Анализ вклада интерференции полей заряда и магнитного момента электрона в общее выражение для излучаемой энергии и возможности выделения этого вклада для реалистичных экспериментальных параметров. Эффекты угловой асимметрии излучения, возникающие благодаря большому орбитальному моменту, для реалистичных мишеней.
5. Обобщение нерелятивистской квантовой теории рассеяния заряженных частиц на потенциалах и атомах на случай локализованных пакетов произвольной формы без расплывания. Результаты применения данной модели к гауссовым пакетам, закрученным пакетам с орбитальным угловым моментом и к когерентным суперпозициям последних для гауссова потенциала, потенциала Юкавы, одиночного атома водорода, макроскопической мишени из большого числа атомов и мезоскопической локализованной атомной мишени. Анализ влияния формы и квантовых чисел падающего пакета на угловое распределение упруго рассеянных электронов. Результаты исследования влияния деструктивной квантовой само-интерференции электронного пакета типа кота Шрёдингера, связанной с областями

отрицательности соответствующей функции Вигнера пакета, на угловое распределение электронов, упруго рассеянных на атоме водорода.

6. Обобщение релятивистской квантовой теории рассеяния в формализме функций Вигнера на случай столкновения двух произвольных негауссовых пакетов под ненулевым импакт-параметром. Результаты исследования частных случаев гауссовых пакетов, закрученных пакетов с орбитальным моментом импульса, пучков Эйри. Параксиальные всюду положительные функции Вигнера ряда негауссовых пакетов, их свойства и сравнение с непараксиальным режимом. Результаты оценки поправок к сечению рассеяния приближения плоских волн в моделях с лоренц-неинвариантным и лоренц-инвариантным параметром разложения. Результаты исследования вклада общей фазы амплитуды рассеяния в обобщенное сечение процесса при столкновениях лептонов и адронов, зависимость этого вклада от квантовых состояний сталкивающихся частиц, от ширины пучков, от импакт-параметра, от энергии частиц и угла рассеяния.

Научная новизна: все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты диссертации представляют интерес для дальнейшего развития нерелятивистской и релятивистской квантовой механики, атомной физики, физики частиц и ядерной физики с различными видами волновых пакетов электронов, фотонов, нейтронов и других частиц (в т.ч. протонов и ионов) для развития методов квантовой оптики в физике частиц, в т.ч. для развития приложений и экспериментов с закрученными частицами, пучками Эйри, состояниями кота Шрёдингера и другими негауссовыми пакетами. Ряд предсказаний, сделанных в диссертации, может быть проверен на уже существующих установках – прежде всего, на электронных микроскопах, а также на ускорителях частиц. Весьма вероятно также развитие аналогичных технологий и методов манипуляции пакетами тяжелых частиц, таких как ионы, протоны и т.д. Полученные в диссертации количественные оценки эффектов негауссовости как правило относятся к реалистичным, достижимым в настоящее время экспериментальным параметрам или к таковым, достижение которых возможно в самые ближайшие годы.

Развитые методы и модели могут быть сравнительно легко обобщены и применены к другим видам негауссовых пакетов, а также к другим более сложным процессам излучения и рассеяния – например, в фоновых полях, отличных от поля плоской волны, что может быть полезно в том числе для физики ускорителей, физики электромагнитных излучений, физики частиц, астрофизических приложений. Развитый метод поляризационных токов представляет самостоятельную ценность для физики электромагнитных излучений, взаимодействия заряженных частиц с веществом и физики ускорителей, поскольку позволяет более адекватно описывать ряд процессов поляризационного излучения с учетом реалистичных свойств и параметров мишени.

Степень достоверности и апробация результатов работы

Достоверность результатов контролируется их внутренней согласованностью и совпадением в ряде частных случаев с результатами других авторов и, в частности, с результатами квантовой теории рассеяния в приближении плоских волн. Результаты получены на основе строгих методов квантовой механики, классической и квантовой электродинамики, атомной физики, квантовой оптики и математической физики.

Основные результаты диссертации докладывались на Международном симпозиуме «Radiation from relativistic electrons in periodic structures» в 2009 г. (г. Звенигород) и в 2019 г. (г. Белгород), на Международном рабочем совещании по спиновой физике высоких энергий «DSPIN» в 2011 г. и в 2017 г. (г. Дубна), на Международной конференции «Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena» в 2012 г. (г. Альгеро, Италия), на международном рабочем совещании «International Workshop on Strong Field Problems in Quantum Theory» в 2016 г. (г. Томск), на Международном семинаре по Физике высоких энергий QUARKS-2018 (г. Валдай), на Международной конференции «International Conference on New Frontiers in Physics» в 2018 г. (о. Крит, Греция), на Международном мини-воркшопе «Advance Generation of THz and X-rays using compact accelerators» в 2019 г. (г. Москва), на Международной конференции «International conference on optical angular momentum» в 2019 г. (г. Оттава, Канада), на Международной конференции «European conference on atoms, molecules, and photons» в 2019 г. (г. Флоренция, Италия), а также на семинаре лаборатории «Фотон» Томского политехнического университета в 2009-2013 гг., на семинаре Лаборатории Квантовой динамики и электродинамики Института Ядерной физики общества Макса Планка в 2013 г. и в 2015 г. (г. Гейдельберг, Германия), на семинаре лаборатории Теоретической физики Института Математики СО РАН в 2016 г. (г. Новосибирск) и др.

Публикации. Личный вклад автора

По теме диссертации опубликовано 23 работы, в том числе 22 статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 19 статей в зарубежных научных журналах, входящих в Web of Science, включая журналы 1 квартиля, и 3 статьи в российских научных журналах, переводные версии которых входят в Web of Science), 1 статья в сборнике материалов конференции, представленных в издании, входящем в Web of Science.

Все основные результаты, представленные в диссертации, получены либо лично автором, либо совместно с соавторами – А.П. Потылицыным, И.П. Ивановым, В.Г. Сербо и др. – при непосредственном участии автора. При выполнении всех работ с соавторами автор принимал активное участие как в постановке, так и в решении задач. Личный вклад автора заключался в постановке задач исследования, определении методов решения, в непосредственном решении задач, в том числе в проверке аналитических результатов, полученных

соавторами, в численном моделировании на основе полученных аналитических моделей, в анализе полученных данных и подготовке публикаций по результатам исследования. Ряд аналитических и численных результатов в задаче о переходном излучении закрученного электрона с орбитальным моментом импульса был получен совместно с И.П. Ивановым. Расчёты процессов рассеяния волновых пакетов на атомах были проведены совместно с В.Г. Сербо, Г.Л. Коткиным и А. Суржиковым; расчеты процессов рассеяния релятивистских закрученных пакетов – совместно с В.Г. Сербо. Соавторы, принимавшие участие в отдельных исследованиях, представлены в списке основных публикаций диссертации. Все результаты, составляющие научные положения, выносимые на защиту, научную новизну и ценность диссертации получены автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и библиографии из 244 наименований. Материал изложен на 308 страницах, включает 46 рисунков и 1 таблицу.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **вводной части** диссертации дана общая характеристика работы, обоснована актуальность темы исследования и приведена степень разработанности данной темы на момент написания работы. Определены цели исследования и методы их достижения, описана научная новизна полученных результатов, степень их достоверности, теоретическая и практическая значимость. Приведены положения, выносимые на защиту. Дается краткая история развития данного научного направления, более развернуто описывается постановка проблемы и задачи, решаемые в диссертации, а также дается краткий обзор современного развития данной области. Подчеркнем, что хотя физика процессов с негауссовыми волновыми пакетами является довольно молодым направлением, только за последние 10 лет было опубликовано несколько десятков статей по данной теме, что делает затруднительным исчерпывающий обзор литературы в рамках данной диссертации.

Глава 1 посвящена построению математических моделей нормированных негауссовых волновых пакетов для нерелятивистских частиц, описываемых уравнением Шрёдингера, а также для релятивистских бозонов и фермионов, описываемых уравнениями Клейна-Гордона и Дирака соответственно. Простейшие модели таких пакетов в виде ненормированного бесселева пучка и нормированного параксиального пакета Гаусса-Лагерра ранее были получены Блюхом и др.⁶ В п.1.2 нами получено *точное* решение уравнения Шрёдингера в виде непараксиального пакета Гаусса-Лагерра

$$\psi_{\ell,n}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{n!}{(n+|\ell|)!}} \frac{i^{2n+\ell}}{\pi^{3/4}} \frac{\rho^{|\ell|}}{(\sigma_{\perp}(t))^{|\ell|+3/2}} L_n^{|\ell|} \left(\frac{\rho^2}{(\sigma_{\perp}(t))^2} \right) \times \exp \left\{ -it\langle p \rangle^2 / 2m + i\langle p \rangle z + i\ell\phi_r - i(2n + |\ell| + 3/2) \arctan(t/t_d) - \right.$$

⁶Bliokh K.Y. Theory and applications of free-electron vortex states / K.Y. Bliokh, I.P. Ivanov, G. Guzzinati, et al. // Phys. Rep. – 2017. – Vol. 690 – P.1-70.

$$-\frac{1}{2(\sigma_{\perp}(t))^2} (1 - it/t_d) (\rho^2 + (z - \langle u \rangle t)^2) \},$$

$$\int d^3r |\psi_{\ell,n}(\mathbf{r}, t)|^2 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

содержащее лоренц-инвариантную фазу Гун

$$\varphi_G = (2n + |\ell| + 3/2) \arctan(t/t_d).$$

Здесь

$$\langle \hat{L}_z \rangle = \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

есть среднее значение орбитального углового момента относительно направления движения пакета $\langle \mathbf{u} \rangle = \{0, 0, \langle u \rangle\}$, а также

$$(\sigma_{\perp}(t))^2 = \frac{1}{\sigma^2} (1 + t^2/t_d^2) = (\sigma_{\perp}(0))^2 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2 t^2,$$

$$\sigma_{\perp}(0) = \frac{1}{\sigma}, \quad t_d = \frac{m}{\sigma^2}, \quad \langle u \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m} \ll 1. \quad (2)$$

Расплывание пакета со временем представляет собой непараксиальный эффект, поскольку подавлено следующим малым параметром:

$$\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_c}{\sigma_{\perp}(0)}\right)^2 = |\ell| \left(\frac{\lambda_c}{\langle \rho(0) \rangle}\right)^2 \ll 1, \quad (3)$$

где $\lambda_c = \hbar/mc \approx 3.9 \times 10^{-11}$ см есть комптоновская длина волны электрона и

$$\langle \rho \rangle(t) = \sqrt{|\ell|} \sigma_{\perp}(t) = \frac{\sqrt{|\ell|}}{\sigma} \sqrt{1 + t^2/t_d^2} \quad (4)$$

есть средний радиус пакета. Время расплывания $t_d = m/\sigma^2$ может также быть представлено в следующем виде: $t_d = t_c (\sigma_{\perp}(0)/\lambda_c)^2 \gg t_c$, $t_c = \lambda_c/c \approx 1.3 \times 10^{-21}$ сек. При изменении знака времени имеем

$$t \rightarrow -t: \quad \ell \rightarrow -\ell, \quad \langle p \rangle \rightarrow -\langle p \rangle, \quad z \rightarrow z, \quad \phi_r \rightarrow \phi_r, \quad (5)$$

и поэтому

$$t \rightarrow -t: \quad \psi_{\ell,n}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi_{\ell,n}^*(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

как и должно быть согласно теореме Вигнера об инверсии времени в квантовой механике и общей СРТ-теореме в релятивистском подходе.

Существует как минимум два варианта релятивистского обобщения пакетов (1): (i) в переменных светового конуса $t \pm z$ и (ii) в обычных переменных z, t . Первый подход развивается нами в главе 1, следуя работам Багрова, Гитмана и др.⁷, а второй подход – в главе 2. В п.1.4 нами получено аналогичное *точное* непараксиальное решение уравнения Клейна-Гордона в терминах переменных светового конуса, описывающее релятивистский волновой пакет с угловым моментом импульса относительно оси распространения и

⁷Bagrov V. G. The Dirac Equation and Its Solutions. Vol. 4 / V. G. Bagrov, D. Gitman – Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014. – 441 p.

ненулевой квантовой неопределенностью углового момента благодаря конечному вектору поперечного импульса $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\psi(x) = \text{const} \frac{R}{2} \left(a + i \frac{\xi}{\lambda} \right)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \lambda \tilde{\xi} - i \xi \frac{m^2}{2\lambda} - \frac{a}{2} \kappa^2 + \frac{i}{2} \mathbf{r}_{\perp,0} \boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{R}^2}{a + i \xi / \lambda} + i l \varphi \right\} \left(I_{\frac{1}{2}(\ell-1)} \left(\frac{1}{4} \frac{\mathbf{R}^2}{a + i \xi / \lambda} \right) - I_{\frac{1}{2}(\ell+1)} \left(\frac{1}{4} \frac{\mathbf{R}^2}{a + i \xi / \lambda} \right) \right), \quad (7)$$

где $\xi = t + z$, $\tilde{\xi} = t - z$ – переменные светового конуса, I_ℓ обозначает модифицированную функцию Бесселя, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{\perp,0} - i a \boldsymbol{\kappa} = R \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}$, $\mathbf{r}_{\perp,0}$ есть 2-мерный вектор начальных условий для координат, a^{-1} имеет смысл дисперсии импульса, λ есть собственное значение оператора $\hat{\lambda} = \hat{p}^0 + \hat{p}^3$, т.е. аналог энергии в формализме переменных светового конуса.

В п.1.3 получено подобное скалярное решение в виде релятивистского пакета Эйри, среднее значение углового момента которого равно нулю, но квантовая неопределенность углового момента при этом отлична от нуля. Общее выражение для неопределенности углового момента импульса пакета с конечным поперечным импульсом получено в п.1.5. Преимуществом подхода с переменными светового конуса является его наглядность – возможность аналитической записи волновых функций бозонов и фермионов в координатном представлении в элементарных функциях.

В п.1.6 получено общее выражение для первых трёх собственных мультипольных моментов нерелятивистского заряженного волнового пакета и рассмотрены примеры закрученного электрона с орбитальным угловым моментом, пучка Эйри и состояния кота Шрёдингера – когерентной суперпозиции двух гауссовых пакетов, разделенных импакт-параметром. Важным свойством всех этих пакетов является наличие электрического квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$, который определяется шириной пакета и растет по мере его расплывания со временем. В частности для закрученного пакета нами получено следующее выражение:

$$Q_{\alpha\beta} = \langle \rho \rangle^2 \text{diag}\{1/2, 1/2, -1\}, \quad (8)$$

где $\langle \rho \rangle$ – средний радиус пакета из (4), который растет со временем по мере расплывания.

Глава 2 посвящена альтернативному релятивистскому обобщению пакетов Гаусса-Лагерра (1) с орбитальным моментом импульса, не требующему использования переменных светового конуса. Показано, что аналогичный пакет, являющийся точным непараксиальным решением уравнений Клейна-Гордона (п.2.2) и Дирака (п. 2.3), может быть получен и в обычных переменных z, t , однако, в координатном представлении для фермиона он не может быть выражен в элементарных функциях, и использование импульсного представления технически более удобно. Данное обстоятельство не является недостатком этого формализма, поскольку тесно связано с невозможностью сфокусировать одночастичный пакет массивной частицы в пятно с неопределенностью координаты меньше комптоновской длины волны этой частицы без сопутствующего рождения электрон-позитронных пар в процессе фокусировки. Поэтому для любых одночастичных пакетов следует полагать $\sigma_\perp > \lambda_c$, $\sigma = 1/\sigma_\perp < m$ – см. (3) выше, а импульсное представление является более удобным в непараксиальном режиме с $\sigma_\perp \gtrsim \lambda_c$, чем координатное.

Лоренц-инвариантная относительно продольных бустов волновая функция скалярного пакета Гаусса-Лагерра с орбитальным моментом выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi_\ell(p) &= \frac{2^{3/2}\pi}{\sigma^{|\ell|+1}\sqrt{|\ell|!}} p_\perp^{|\ell|} \frac{e^{-m^2/\sigma^2}}{\sqrt{K_{|\ell|+1}(2m^2/\sigma^2)}} \exp\left\{\frac{(p_\mu - \bar{p}_\mu)^2}{2\sigma^2} + i\ell\phi_p\right\} \simeq \\ &\simeq \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\sigma}\right)^{3/2} \sqrt{2m} \frac{p_\perp^{|\ell|}}{\sigma^{|\ell|}\sqrt{|\ell|!}} \left(1 - \frac{4(|\ell|+1)^2 - 1}{32} \frac{\sigma^2}{m^2}\right) \exp\left\{\frac{(p_\mu - \bar{p}_\mu)^2}{2\sigma^2} + i\ell\phi_p\right\}, \\ &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon} |\psi_\ell(p)|^2 = 1,\end{aligned}\quad (9)$$

где $K_{|\ell|}$ – модифицированная функция Бесселя, и лоренц-инвариантным малым параметром по-прежнему является (3). Такие состояния ортогональны по орбитальному моменту,

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon} [\psi_{\ell'}(p)]^* \psi_\ell(p) = \delta_{\ell,\ell'}.$$

Фурье-образ этой функции – *точное* решение уравнения Клейна-Гордона – может быть найден точно:

$$\begin{aligned}\psi_\ell(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon} \psi_\ell(p) e^{-ipx} = \frac{(i\rho)^{|\ell|}}{\sqrt{2|\ell|!} \pi} \frac{\sigma^{|\ell|+1}}{\varsigma^{|\ell|+1}} \frac{K_{|\ell|+1}(\varsigma m^2/\sigma^2)}{\sqrt{K_{|\ell|+1}(2m^2/\sigma^2)}} e^{i\ell\phi_r}, \\ \varsigma &= \frac{1}{m} \sqrt{(\bar{p}_\mu + ix_\mu \sigma^2)^2} = \text{inv}, \quad \text{Re } \varsigma > 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Для такого пакета также $\langle \hat{L}_z \rangle = \ell$. В частном случае $\ell = 0$ данная функция сводится к инвариантному Гауссовому пакету, используемому в теории осцилляций нейтрино⁸.

В п.2.2, 2.3. мы также считаем непараксиальные поправки к среднему магнитному моменту закрученного пакета поляризованного электрона и средней инвариантной массе пакета. Для электронного пакета в системе отсчета с энергией $\bar{\varepsilon}$ и вектором спина ζ для среднего магнитного момента имеем:

$$\begin{aligned}\mu_b &= \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{u} \times \frac{\partial \varphi_\ell(p)}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}} \ell \left\langle \frac{1}{2\varepsilon} \right\rangle \simeq \hat{\mathbf{z}} \ell \frac{1}{2\bar{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2m^2} \left(|\ell| + \frac{1}{2} + \frac{m^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\right), \\ \mu_s &= \left\langle \frac{1}{(2\varepsilon)^2} \left(\zeta(\varepsilon + m) + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\zeta)}{\varepsilon + m}\right) \right\rangle \simeq \zeta \frac{1}{2\bar{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2m^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{3m}{2\bar{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\bar{\varepsilon}^2} - \frac{3m^3}{2\bar{\varepsilon}^3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m}{\bar{\varepsilon} + m} \left(\frac{3}{2} - 2\frac{m^2}{\bar{\varepsilon}^2} - \frac{3m^3}{2\bar{\varepsilon}^3}\right) + |\ell| \left(1 + \frac{m}{\bar{\varepsilon}} - \frac{m}{\bar{\varepsilon} + m}\right)\right]\right)\end{aligned}\quad (11)$$

где два последних независимых от системы отсчета слагаемых представляют собой параметр Δ , часто используемый для описания спин-орбитального взаимодействия:

$$\Delta = \left(1 - \frac{m}{\bar{\varepsilon}}\right) \sin^2 \theta_0 \simeq |\ell| \frac{\sigma^2}{m^2} \left(\frac{m}{\bar{\varepsilon}} - \frac{m}{\bar{\varepsilon} + m}\right), \quad (12)$$

причем в отличие от модели Бесселева пучка этот параметр линеен по $|\ell|$, благодаря пакетному описанию. Аналогично другим наблюдаемым непараксиальные поправки оказываются пропорциональными инвариантному параметру $\sigma^2/m^2 = \lambda_c^2/\sigma_\perp^2 \ll 1$, где $\sigma = 1/\sigma_\perp$

⁸Наумов Д.В. Измерение θ_{13} , Δm_{32}^2 и ковариантная квантово-полевая теория нейтринных осцилляций: дис. ...докт. физ.-мат. наук / Д.В. Наумов. – Москва, 2017. – 324 с.

есть неопределенность импульса пакета. Данный параметр определяет общий вклад непараксиальных поправок в том числе в процессах рассеяния, аннигиляции и излучения, как показано в главе 6.

В п.2.4 мы приводим приближенное параксиальное решение уравнения Клейна-Гордона и показываем, что в отличие от пакета Гаусса-Лагерра фотона и аналогичного параксиального решения для электрона Блюха и др. общие требования релятивистской инвариантности и СРТ-теоремы приводят к тому, что фаза Γ такого пакета зависит от времени, а не от координаты z , в том числе и в релятивистском случае. В п.2.5 мы выводим электромагнитные поля электрона с орбитальным угловым моментом импульса, когда электрон моделируется как обобщенный пакет Гаусса-Лагерра с зарядом, магнитным моментом и внутренним электрическим квадрупольным моментом. Особенностью найденных полей является азимутальная асимметрия магнитного поля в системе покоя электрона, возникающая благодаря неисчезающему орбитальному моменту. Мы обсуждаем возможности экспериментального обнаружения такой асимметрии и предсказываем усиление непараксиального вклада от квадрупольного момента электрона в лабораторной системе отсчета, где электронный пакет движется и расплывается. По мере расплывания пакета квадрупольный момент растет вместе с его вкладом с электромагнитное поле, что также приводит к возможности наблюдать такое динамическое усиление непараксиальных эффектов. Величина непараксиального вклада может измеряться следующей *азимутальной асимметрией*:

$$\mathcal{A}(t) = H_\phi(\mathbf{r}, t)/H_\rho(\mathbf{r}, t) = -\text{sign}(\ell) \left(\frac{\lambda_c}{\sigma_\perp(0)} \right)^2 \frac{t}{t_c}, \quad (13)$$

которая чётна относительно инверсии времени, не растёт с увеличением значения орбитального момента, но зависит от его знака, и где компоненты магнитного поля в цилиндрической системе координат измеряются на одном и том же расстоянии от электрона.

В **главе 3** проводится обобщение известных «волковских» квантовых состояний электрона в поле плоской электромагнитной волны для электрона с орбитальным моментом импульса относительно оси распространения. Такой электрон находится в квантовом состоянии, характеризуемом аналогично свободному бesselеву пучку модулем поперечного квази-импульса, но не его азимутальной компонентой. Бesselев пучок электрона

$$\begin{aligned} \psi(r) &= N \exp \left\{ -i\epsilon t + ip_\parallel z - i \frac{e^2 a^2}{2(pk)} (kr) \right\} \left(1 + \frac{e}{2(pk)} (\gamma k)(\gamma A) \right) \\ &\times \left(u^{(1/2)} J_{\ell+\lambda-1/2}(\kappa \mathcal{R}_\perp) e^{i\phi_{\mathcal{R}}} (\ell+\lambda-1/2) + u^{(-1/2)} J_{\ell+\lambda+1/2}(\kappa \mathcal{R}_\perp) e^{i\phi_{\mathcal{R}}} (\ell+\lambda+1/2) \right), \\ \mathcal{R}_\perp^\mu &= \{0, \mathcal{R}_\perp \cos \phi_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}_\perp \sin \phi_{\mathcal{R}}, 0\}, \quad \mathcal{R}_\perp^2 = \left(r_\perp + \frac{e}{(pk)} \int d\varphi A_\perp \right)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

также является точным решением уравнения Дирака с полем плоской циркулярно поляризованной волны, потенциал которой выглядит как $A = a\{0, \cos \varphi, \sin \varphi, 0\}$, $A^2 = -a^2$. Здесь N есть нормировочная постоянная, J_m – функция Бесселя, γ^μ – матрицы Дирака, $u^{(\pm 1/2)}$ – биспиноры, являющиеся собственными функциями оператора спина \hat{s}_z с собственными значениями $\pm 1/2$, κ – параметр, характеризующий средний поперечный импульс. Неполаризованный электрон в данном состоянии также имеет определенную проекцию

орбитального момента на ось распространения волны (лобовое столкновение электрона и волны):

$$\langle \hat{L}_z \rangle = \int d^3\mathcal{R} \psi^*(r) \hat{L}_z \psi(r) / \int d^3\mathcal{R} |\psi(r)|^2 = \ell. \quad (15)$$

В то же время для поляризованного электрона спин ζ в поле волны испытывает прецессию, и в результате среднее значение полного углового момента $\langle j_z \rangle$ не сводится к простой сумме ℓ и ζ , но также содержит дополнительный сдвиг в режиме сильного поля волны $-e^2 \bar{A}^2 / m^2 \gtrsim 1$. Для слабых полей обычных лазеров с $-e^2 \bar{A}^2 / m^2 \ll 1$ данным сдвигом можно пренебречь, и тогда $\langle j_z \rangle \approx \ell + \zeta$.

В **главе 4** развивается общий метод расчёта характеристик поляризационного излучения заряженных частиц в пространственно неоднородных средах (мишенях) произвольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$ с учетом частотной дисперсии – *метод поляризационных токов*. Как показано в п.4.1, данный метод позволяет находить точные и приближенные решения задачи об энергии, излученной частицей при взаимодействии с мишенью заданной формы и диэлектрических свойств. В качестве модельных примеров рассмотрено несколько задач об излучении в цилиндрическом экране конечной длины и радиуса, в прямоугольной пластинке и при пролете вблизи решетки из стрипов конечной проницаемости (излучение Смита-Парселла). Существенно, что предложенный метод применим в том числе когда несколько видов поляризационного излучения генерируются одновременно – например, излучение Вавилова-Черенкова и дифракционное излучение или переходное излучение. Общая формула для векторного потенциала поля излучения *внутри среды* выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A}^{pol}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{V_T} d^3r' \sigma(\omega) \mathbf{E}^0(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (16)$$

где \mathbf{E}^0 – собственное поле частицы, генерирующей излучение, интегрирование ведется по объему мишени V_T произвольной формы, комплексная проводимость материала мишени $\sigma(\omega) = i\omega(1 - \varepsilon(\omega))/4\pi = \sigma' + i\sigma''$. В ограниченном объеме помимо «первичных» волн поляризационного излучения присутствуют также отраженные от границ раздела волны, не описываемые выражением (16). Мы используем подход, основанный на теореме взаимности, позволяющий точно просуммировать вклады всех отраженных волн для широкого класса форм мишени и произвольной диэлектрической проницаемости вещества, рассматривая выход поля излучения из среды в вакуум и решая *обратную задачу*.

Необходимая нам формулировка принципа взаимности имеет вид:

$$(\mathbf{E}^{R(vac)}, \mathbf{d}^{(vac)}) = (\mathbf{E}^{R(m)}, \mathbf{d}^{(m)}), \quad (17)$$

где: $\mathbf{E}^{R(vac)}$ - искомое поле излучения в вакууме, создаваемое диполем с моментом \mathbf{d} , расположенным в среде; $\mathbf{E}^{R(m)}$ - поле излучения в среде, создаваемое таким же диполем, расположенным в вакууме далеко от границы раздела (в волновой зоне). Дипольный момент \mathbf{d} полагаем ориентированным перпендикулярно поверхности, через которую рассматривается

выход излучения в вакуум. Физически такая ориентация означает, что тонкий проводящий экран на больших расстояниях является двойным слоем. Учитывая, что вектор \mathbf{E}^R перпендикулярен единичному вектору излучения \mathbf{e} , модуль поля излучения в вакууме из формулы (17) находится как:

$$|\mathbf{E}^{R(vac)}| = \left| \frac{\sin \Theta}{\sin \theta} \mathbf{E}^{R(m)} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E}^{R(m)} \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{H}^{R(m)} \right|, \quad (18)$$

где использован закон Снеллиуса для связи «вакуумного» угла θ и угла в среде Θ , а также тот факт, что для поля сферической волны в среде выполняется равенство: $|\mathbf{E}^{R(m)}| = |\varepsilon^{-1/2} \mathbf{H}^{R(m)}|$. Углы излучения в среде можно выразить через углы излучения в вакууме следующим образом:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right\}. \quad (19)$$

В п.4.2 мы применяем данный метод к задаче о поляризованном излучении электрона с большим орбитальным моментом импульса $\ell \gg 1$. Для излучения оптического диапазона и для более длинных волн такой электрон с очень хорошей точностью можно рассматривать как точечную частицу, обладающую зарядом и магнитным моментом, пропорциональным орбитальному угловому моменту ℓ , причем вклад этого магнитного момента значительно сильнее такового от спина электрона. Интенсивность излучения в этом случае представляется как сумма интенсивностей излучения заряда dW_e , магнитного момента dW_μ и интерференционного слагаемого $dW_{e\mu}$:

$$dW = dW_e + dW_{e\mu} + dW_\mu. \quad (20)$$

Тогда как излучение от магнитного момента слишком слабо для прямого измерения, вклад последнего интерференционного слагаемого и отвечает влиянию орбитального момента на излучение. Как мы показываем, это влияние заключается в угловой асимметрии излучения при наклонном падении частицы на поверхность мишени конечной проводимости, причем при нормальном пролете этот эффект исчезает, что следует уже из соображений симметрии. Данный эффект может быть количественно охарактеризован следующей асимметрией излучения:

$$A = \frac{\int d\Omega_L \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} - \int d\Omega_R \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}}{\int d\Omega_L \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} + \int d\Omega_R \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}}. \quad (21)$$

где $d\Omega_L$ и $d\Omega_R$ обозначают две полусферы, лежащие слева и справа от плоскости падения. Если падающий электрон с энергией $E_e = \gamma m$ излучает фотон с частотой ω , то относительный вклад данной асимметрии в мощность излучения подавлен как

$$x_\ell = \ell \frac{\hbar\omega}{E_e} \ll 1. \quad (22)$$

Энергия излучения содержит этот фактор в квадрате. Для оптических и ультрафиолетовых фотонов и характерных энергий электронных микроскопов мы получаем

$$x_\ell \sim 10^{-5} \ell. \quad (23)$$

Однако для сильно закрученных электронов с $\ell \sim 10^3$ и выше данные эффекты становятся доступными экспериментальному наблюдению. Существенно, что такие электроны уже созданы⁹.

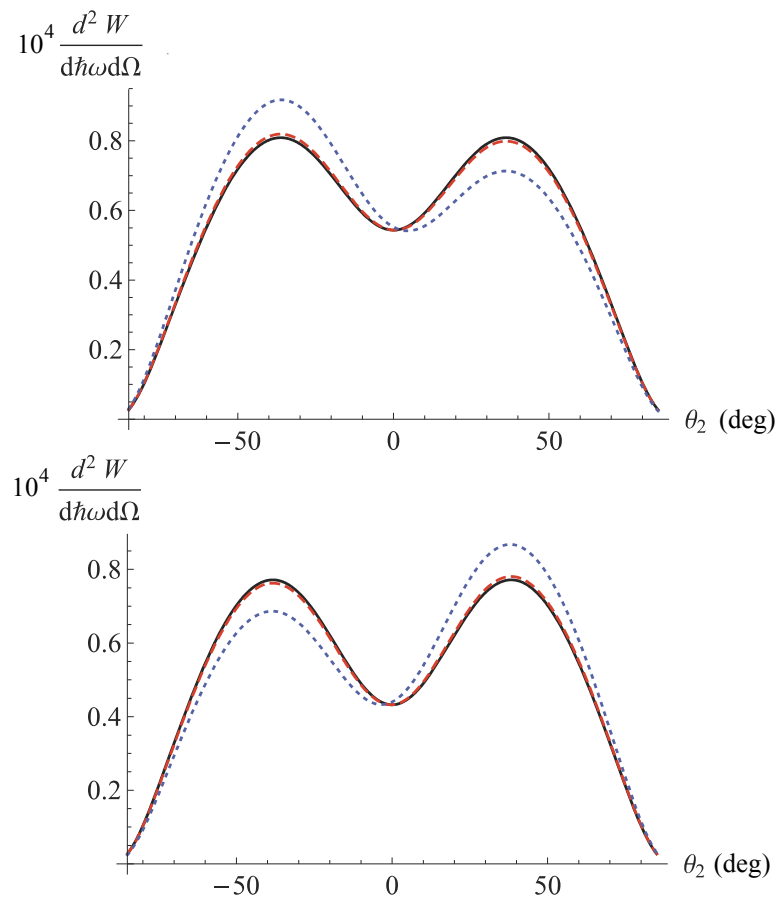


Рис. 1: Распределение интенсивности излучения по θ_2 – угол наблюдения в плоскости, перпендикулярной плоскости падения частицы на алюминиевую мишень – для переходного излучения «вперёд» (сверху) и «назад» (снизу) для $\alpha = 70^\circ$ (угол падения), $\bar{\theta}_1 = -40^\circ$ (угол наблюдения в плоскости падения), $\gamma = 1.59$, $\hbar\omega = 5$ эВ при $\ell = 0$ (сплошная чёрная кривая) 1000 (пунктирная красная кривая) и 10000 (точечная голубая кривая).

В п.4.3 показано, что частотная дисперсия диэлектрической проницаемости играет ключевую роль в определении количественных оценок асимметрии. Так для мишени из алюминия, излучения оптического и ультрафиолетового диапазона частот и электронов с $\ell \sim 10^3$ асимметрия может достигать 1 %. На рис.1 мы приводим соответствующую угловую асимметрию в плоскости, перпендикулярной плоскости падения электрона на алюминиевую мишень. Видно, что для значений $\ell \sim 10^3$ и выше эффект может быть замечен невооруженным глазом. В случае экспериментального обнаружения данный эффект был бы первым наблюдением вклада магнитного момента свободного электрона в интенсивность поляризованного излучения.

В **главе 5** проведено обобщение нерелятивистской квантовой теории рассеяния в бор-

⁹Mafakheri E. Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography / E. Mafakheri, A.H. Tavabi, P.-H. Lu, et al., // Appl. Phys. Lett. – 2017. – Vol. 110. – P.093113 (1-5).

новском приближении для процессов упругого рассеяния негауссовых пакетов без учета расплывания на потенциалах и, в частности, на атомах и атомных мишенях. Общее выражение для углового распределения числа событий для пучка из N_e падающих электронов имеет следующий вид:

$$\frac{d\nu}{d\Omega} = \frac{N_e}{\cos \theta_k} |F(\mathbf{Q})|^2, \quad (24)$$

$$F(\mathbf{Q}) = \int f(\mathbf{Q} - \mathbf{k}_\perp) \Phi_{\text{tr}}(\mathbf{k}_\perp) \frac{d^2 k_\perp}{2\pi},$$

где:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = (\mathbf{Q}_\perp, Q_z), \quad \mathbf{Q}_\perp = (\mathbf{p}_f)_\perp = p_f(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 0), \quad (25)$$

$$Q_z = p_f \cos \theta - p_i, \quad p_f = \sqrt{p_i^2 + \varkappa_0^2}.$$

Здесь вектор $\mathbf{p}_i = \{0, 0, p_i\}$ характеризует средний продольный импульс падающего пакета, \varkappa_0 – угловой раствор импульса или среднее значение поперечного импульса:

$$\langle k_\perp \rangle = \varkappa_0 = p_i \tan \theta_k, \quad (26)$$

\mathbf{p}_f есть импульс конечного электрона, Φ_{tr} – поперечная часть волновой функции падающего пакета в импульсном представлении и

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int U(r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3r, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i, \quad (27)$$

есть амплитуда рассеяния – фурье-образ рассеивающего потенциала $U(r)$.

В п.5.1, 5.2 подробно рассмотрены примеры рассеяния гауссова пакета, закрученного пакета с угловым моментом, а также суперпозиции закрученных состояний с разными угловыми моментами на гауссовом потенциале, потенциале Юкавы, атоме водорода в основном $1s$ состоянии. Проведены обобщения для рассеяния на макроскопической мишени из большого числа рассеивающих центров, а также для мезоскопической мишени, размер которой может быть соизмерим с шириной налетающего пакета или даже меньше его. Во всех этих случаях число событий рассеяния и обобщенное сечение меняются в зависимости от угла раствора импульсного конуса – в частности, при увеличении поперечного импульса пакета максимум в угловом распределении рассеянных электронов сдвигается в область полярных углов $\theta \approx \theta_k$, при этом сечение не зависит от фазы падающего пакета и в частности от значения углового момента закрученного электрона, но зависит от разности $\ell_1 - \ell_2$ в случае суперпозиции двух состояний с разными ℓ_1 и ℓ_2 .

На рис.2 приведена угловая зависимость эффективного сечения рассеяния закрученных электронов на широкой (макроскопической) мишени из атомов водорода. Сечение не зависит от углового момента падающего электрона, но зависит от поперечного импульса \varkappa_0 , что приводит к максимуму при углах $\theta \approx \theta_k$, что является довольно общим свойством процессов рассеяния, имеющим место в том числе за пределами борновского приближения.

В п.5.4 проведено исследование рассеяния в случае когда на мишень падает суперпозиция двух гауссовых пучков $|\mathbf{r}_0\rangle \pm |-\mathbf{r}_0\rangle$, разделенных небольшим импакт-параметром \mathbf{r}_0 – т.н. состояние кота Шрёдингера. Особенностью данной геометрии является тот факт,

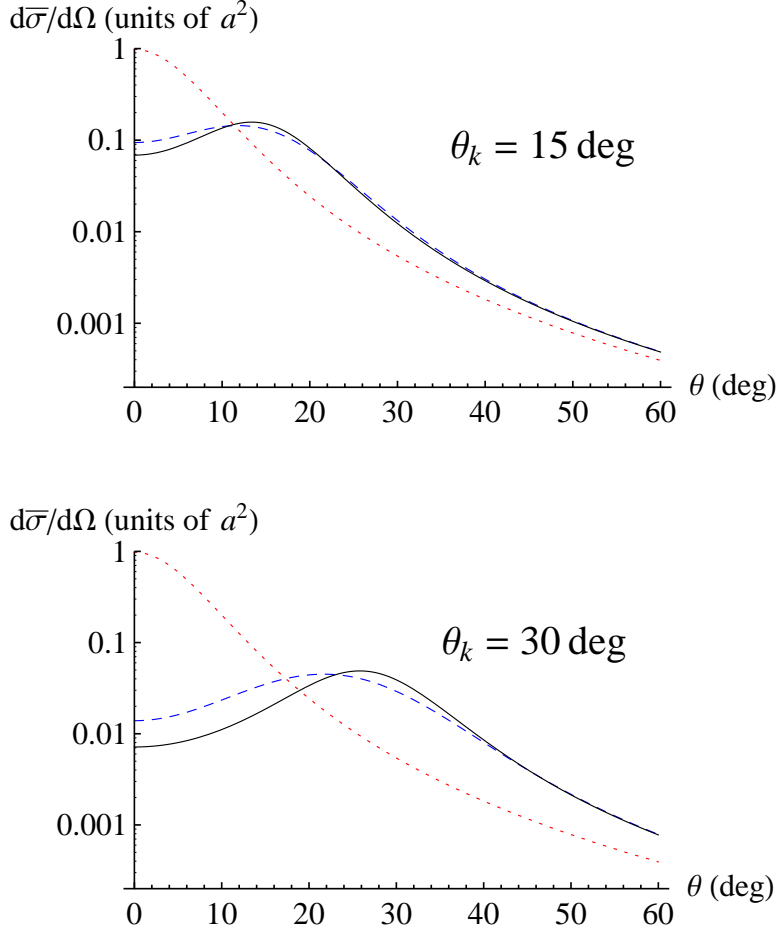


Рис. 2: Эффективное сечение рассеяния закрученных электронов на макроскопической мишени из атомов водорода в основном состоянии. Результаты представлены для падающего пакета ширины $\sigma_x = \kappa_0/3$ (синяя пунктирная линия) и $\sigma_x \ll \kappa_0$ (чёрная сплошная линия); угол раскрытия $\theta_k = 15$ градусов (сверху) и 30 градусов (снизу). Результаты сравниваются с таковыми для плосковолновых электронов (красная пунктирная линия). Средний импульс пакетов $p_i = 10/a_0$, где a_0 — боровский радиус (кинетическая энергия 1.4 кэВ).

что области самоинтерференции и отрицательности функции Вигнера такого состояния вносят заметный вклад в число событий и сечение, а именно приводят к их уменьшению за счет деструктивной интерференции. В борновском приближении число событий рассеяния в формализме функций Вигнера определяется простой формулой:

$$\frac{d\nu}{d\Omega} = N_e \int d^2b d^2p n(\mathbf{b}) W(\mathbf{b}, \mathbf{p}) (f(\mathbf{Q} - \mathbf{p}))^2, \quad (28)$$

которая связывает число событий с профилем мишени $n(\mathbf{b})$ и функцией Вигнера налетающего пакета $W(\mathbf{b}, \mathbf{p})$. Видно, что области отрицательности $W(\mathbf{b}, \mathbf{p})$ уменьшают число событий. Функция Вигнера состояния кота Шрёдингера при $t = 0$ имеет следующий вид:

$$W_{1\pm 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{W_1(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{1 \pm \exp\{-\mathbf{r}_0^2/(2\sigma_\perp^2)\}} \left(\cosh(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/\sigma_\perp^2) e^{-\mathbf{r}_0^2/(2\sigma_\perp^2)} \pm \cos(2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}) \right), \quad (29)$$

где

$$W_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi^2} \exp\{-2\sigma_\perp^2 \mathbf{p}^2 - \mathbf{r}^2/(2\sigma_\perp^2)\} \quad (30)$$

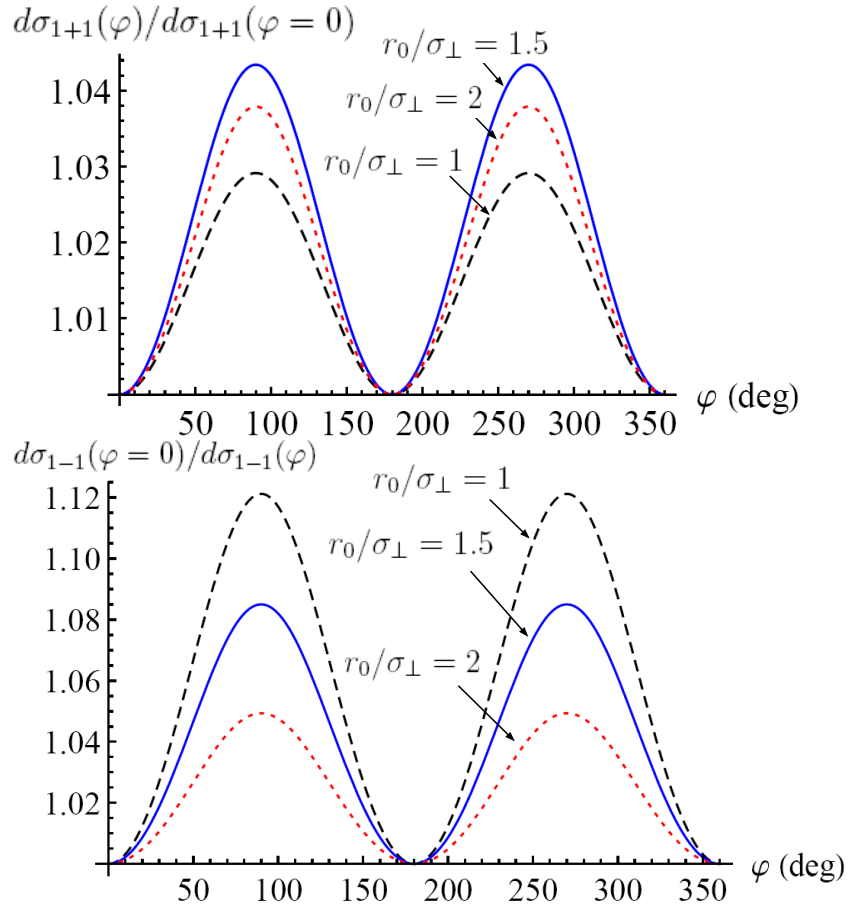


Рис. 3: Азимутальная асимметрия сечения рассеяния электронов на широкой водородной мишени для ширины пакета $\sigma_{\perp} = 2a \approx 0.1$ нм (полуширина ≈ 0.25 нм), полярный угол рассеяния: $\theta = 10^\circ$, относительное расстояние между максимумами плоскости вероятности состояния кота Шрёдингера: $r_0/\sigma_{\perp} = 1$ (чёрная штрих-пунктирная линия), 1.5 (синяя сплошная линия), 2 (красная точечная пунктирная линия). Параметры: ширина мишени $\sigma_t \gg \sigma_{\perp}$, $\varphi_{r_0} = 0$, $p_i = p_f = 10/a$ ($\varepsilon_{\text{kin}} = 1.4$ кэВ). Сверху: для т.н. «четного» состояния, снизу: для «нечетного».

является всюду положительной функцией Вигнера одного гауссова пакета, \mathbf{r}_0 определяет расстояние между максимумами двух частей пакета, σ_{\perp} – ширина пакета. Будем называть состояния W_{1+1} и W_{1-1} *чётным* и *нечётным* состоянием кота Шрёдингера соответственно. На рис.3 приведены численные значения азимутальной асимметрии в угловом распределении электронов, рассеянных на широкой мишени из водорода в основном $1s$ состоянии. Данная асимметрия возникает благодаря вкладу отрицательных областей функции Вигнера. Возможности её экспериментального измерения также обсуждаются в п.6.4.

Таким образом угловое распределение упруго рассеянных электронов несет информацию не только о профиле мишени, но и о профиле падающего пакета, т.е. о квантовом состоянии налетающей частицы. Это означает, что рассеяние частиц на атомах и атомных мишенях может использоваться как инструмент *квантовой томографии* состояний массивных частиц.

В **главе 6** развивается общий релятивистский подход к квантовой теории рассеяния,

основанный на формализме S -матрицы и использовании функций Вигнера. Рассмотрена задача о столкновении двух негауссовых пакетов под ненулевым импакт-параметром, характеризующихся фазами в импульсном представлении и некоторым набором квантовых чисел, например, орбитальным угловым моментом. В п.6.2 получено несколько функций Вигнера негауссовых пакетов – в частности, функция Бесселя пучка, функция пучка Эйри, а также обобщенного пакета Гаусса-Лагерра с орбитальным моментом. В параксиальном режиме всюду положительная функция Вигнера обобщенного пакета Гаусса-Лагерра с $n = 0$ и энергией $\bar{\varepsilon} = \bar{\gamma}m$ имеет вид

$$n_\ell(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{8}{|\ell|!} \left(\frac{p_\perp}{\sigma}\right)^{2|\ell|} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{p}_\perp^2 + \bar{\gamma}^{-2} (p_z - \langle p \rangle)^2) - \sigma^2 \left(\left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{u}_\perp t - \ell \frac{\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{z}}}{p_\perp^2} \right)^2 + \bar{\gamma}^2 (z - u_z t)^2 \right) \right\}. \quad (31)$$

причем ввиду параксиального приближения данное выражение *не является единственным*. На примере пучка Эйри изучены различия точной непараксиальной функции Вигнера, которая может иметь отрицательные значения, и всюду положительной параксиальной функции. Показано, что в подавляющем большинстве экспериментально реализуемых сценариев использование всюду положительной параксиальной функции достаточно для адекватного описания.

В п.6.3 получены общие формулы, определяющие вероятность dW и обобщенное сечение $d\sigma$ рассеяния для столкновения двух негауссовых пакетов и пучков многих тождественных частиц. Показано, что по сравнению с обычным сечением приближения плоских волн данные формулы учитывают эффекты формы и размеров пакетов, в том числе связанные с конечной неопределенностью импульса и энергии, динамические эффекты, в т.ч. эффекты распыливания пакетов в процессе соударения и их интерференции, а также эффекты вклада общей фазы амплитуды рассеяния. Если представить амплитуду процесса в следующем виде:

$$M_{fi} = |M_{fi}| \exp \{i\zeta_{fi}\}, \quad (32)$$

то обычное сечение приближения плоских волн $d\sigma^{(pw)}$ определяется только модулем, но не фазой

$$d\sigma^{(pw)} \propto |M_{fi}|^2.$$

В более точной модели рассеяния с волновыми пакетами и инвариантным малым параметром (3) обобщенное сечение представляется в виде суммы двух слагаемых (п. 7.6):

$$d\sigma = \frac{dW}{L} = d\sigma^{\text{incoh}} + d\sigma^{\text{int}} + \mathcal{O}(\sigma^2), \quad (33)$$

где ведущий вклад

$$d\sigma^{\text{incoh}} = \frac{dW^{\text{incoh}}}{L},$$

$$dW^{\text{incoh}} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} d^4 x v(\mathbf{p}_i) n_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) n_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) d\sigma^{(pw)}(\mathbf{p}_i) \quad (34)$$

содержит некогерентное интегрирование обычных плосковолновых сечений с функциями Вигнера сталкивающихся пакетов n_1, n_2 . Первая поправка к некогерентному вкладу

$$d\sigma^{\text{int}} = -\frac{1}{L} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} d^4 x v(\mathbf{p}_i) n_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) \frac{\partial n_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t)}{\partial \mathbf{r}} d\sigma^{(\text{pw})}(\mathbf{p}_i) \partial_{\Delta \mathbf{p}} \zeta_{fi}(\mathbf{p}_i),$$

$$\partial_{\Delta \mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2}, \quad (35)$$

учитывает квантовую интерференцию амплитуд с разными импульсами. Отсюда сразу видно, что эта поправка обращается в нуль для моделей с постоянной фазой ζ_{fi} (древесное приближение КЭД, скалярная КЭД и другие абелевы модели). Подчеркнем, что $d\sigma^{\text{int}}$ не является первой поправкой к плосковолновому сечению, поскольку непараксиальные поправки того же порядка (3) могут возникнуть и из $d\sigma^{\text{incoh}}$.

Определение вклада кулоновской фазы в КЭД при столкновении лептонов и адронной фазы при столкновении адронов является важной задачей в физике высоких энергий. Так вклад относительной фазы за счет интерференции электромагнитного и сильного взаимодействий под очень малыми углами рассеяния недавно изучался коллаборацией TOTEM на Большом адронном коллайдере¹⁰. Как мы показываем в п.6.4, для столкновения двух пучков вклад фазы амплитуды рассеяния в нашей модели может быть охарактеризован количественно следующей асимметрией:

$$\mathcal{A}[\mathbf{b}_\varphi] = \frac{dW[\mathbf{b}_\varphi] - dW[-\mathbf{b}_\varphi]}{dW[\mathbf{b}_\varphi] + dW[-\mathbf{b}_\varphi]} = \frac{d\sigma[\mathbf{b}_\varphi] - d\sigma[-\mathbf{b}_\varphi]}{d\sigma[\mathbf{b}_\varphi] + d\sigma[-\mathbf{b}_\varphi]} =$$

$$= \frac{2\Sigma_1^2 \Sigma_2^2}{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} \left[\frac{\Delta \mathbf{u}}{|\Delta \mathbf{u}|} \times \left[\frac{\Delta \mathbf{u}}{|\Delta \mathbf{u}|} \times \langle \mathbf{b}_\varphi \rangle \right] \right] \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) \zeta_{fi} \Big|_{\mathbf{p}_{1,2} = \langle \mathbf{p} \rangle_{1,2}}, \quad (36)$$

где

$$\mathbf{b}_\varphi = \mathbf{b} - \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{p}_1)}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{p}_2)}{\partial \mathbf{p}_2}, \quad \Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sigma_b^2}, \quad (37)$$

$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, \mathbf{b} – импакт-параметр, φ_i – фаза i -го пакета в импульсном представлении (например, для закрученного пакета $\varphi = \ell \phi_p$), σ – неопределенность импульса пакета, σ_b – ширина пучка, а знак $\langle \dots \rangle$ обозначает квантовое усреднение для соответствующего пакета.

Как видно из этой формулы, существует два способа измерить конечную асимметрию и, следовательно, вклад от фазы амплитуды:

- *Нецентральное* столкновение двух гауссовых пучков под ненулевым импакт-параметром \mathbf{b} ,
- Центральное столкновение двух негауссовых пучков с *нарушенной азимутальной симметрией* – например, двух закрученных пучков или двух пучков Эйри.

Вклад фазы амплитуды будет проявляться в асимметрии рассеяния вверх-вниз, которая может измеряться двумя обычными детекторами. Для релятивистских пучков в системе центра инерции с энергией $\varepsilon \approx p = \gamma t$ асимметрия показывает как изменяется фаза амплитуды как функция угла рассеяния θ_{sc} или мандельштамовской переменной

¹⁰ Antchev G. Measurement of elastic pp scattering at $\sqrt{s} = 8$ TeV in the Coulomb–nuclear interference region: determination of the ρ -parameter and the total cross-section / G. Antchev, P. Aspell, I. Atanassov, et al. (TOTEM Collab.) // Eur. Phys. J. C – 2016. – Vol. **76**, P.661-1 – 661-21.

$t \approx -p^2 \theta_{sc}^2$, $\theta_{sc} \ll 1$:

$$\mathcal{A} \approx -2 \frac{\lambda_c}{\sigma_b} \cos \phi_{sc} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \zeta_{fi}}{\partial \theta_{sc}}. \quad (38)$$

Например, для кулоновской фазы на однопетлевом уровне имеем следующую оценку:

$$\mathcal{A} = \mathcal{O} \left(\frac{\lambda_c}{\sigma_b} \frac{\alpha_{em}}{\gamma \theta_{sc}} \right), \quad (39)$$

где $\alpha_{em} = 1/137$. Беря феноменологические модели адронной фазы, можно оценить её вклад и в адронных столкновениях. Как мы показываем в п.6.4, для параметров Большого адронного коллайдера данный вклад пренебрежимо мал из-за слишком широких пучков (малого отношения $\lambda_c/\sigma_b \ll 1$), тогда как на электрон-позитронных коллайдерах следующего поколения с пучками нанометровых размеров (CLIC, ILC) эффекты кулоновской фазы могут проявляться значительно сильнее и стать соизмеримыми с радиационными поправками. В п.6.6 нами также получены первые неплосковолновые поправки к сечению рассеяния и аннигиляции ультрарелятивистских электронов и позитронов дресного приближения, когда одна из частиц является закрученной, и показано, что они могут конкурировать с вкладами петлевых диаграмм для умеренно релятивистских энергий и при значениях орбитального момента закрученной частицы выше 10^3 .

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Основные результаты диссертации

1. Разработана общая процедура построения нерелятивистских и релятивистских волновых пакетов бозонов и фермионов с орбитальным угловым моментом относительно оси распространения в обычных переменных и в переменных светового конуса. Использование переменных светового конуса в частности позволяет получить непараксиальные пакеты, являющиеся точными решениями квантовых волновых уравнений, в координатном представлении. Показано, что ненулевой поперечный импульс пакета тесно связан с ненулевой квантовой неопределенностью его орбитального углового момента. Получены аналогичные параксиальные и непараксиальные релятивистские пучки Эйри.
2. Получены общие выражения для первых трёх собственных мультипольных моментов заряженных волновых пакетов в зависимости от их формы, определяемой фазой волновой функции в импульсном представлении. Получены явные выражения для электрического квадрупольного момента закрученного электрона, пучка Эйри, состояния кота Шрёдингера. Выведены электромагнитные поля закрученного электронного пакета в виде мультипольного разложения с точностью до квадрупольного вклада включительно и предсказан эффект азимутальной асимметрии магнитного поля в системе покоя электрона.
3. Предложено непараксиальное описание волновых пакетов бозонов и фермионов с орбитальным угловым моментом относительно оси распространения – обобщенные пакеты Гаусса-Лагерра, являющиеся точными решениями уравнений Шрёдингера, Клейна-Гордона и Дирака. Получены первые непараксиальные поправки к среднему магнитному моменту закрученного электрона, к средней инвариантной массе пакета. Показано, что

даже в параксиальном режиме фаза Гауи массивной частицы зависит от времени, а не от переменной z , что тесно связано с общей СРТ-теоремой.

4. Построены бесселевы состояния релятивистского электрона с орбитальным угловым моментом, находящимся в поле плоской электромагнитной волны произвольной интенсивности. В отличие от известных «волковских» состояний данный пучок характеризуется другим набором квантовых чисел, включающим орбитальный угловой момент. Вычислено среднее значение углового момента поляризованного электрона в поле волны и предсказан сдвиг данного значения за счет прецессии спина в режиме сильного поля.

5. Разработан общий метод расчета характеристик поляризационного излучения заряженных частиц в мишенях сложной формы и произвольной диэлектрической проницаемости с учетом частотной дисперсии, применимый для процессов переходного излучения, излучения Вавилова-Черенкова, дифракционного излучения, излучения Смита-Парселла и др. – метод поляризационных токов. На основе данного метода разработана модель для расчета переходного излучения от закрученного электрона с большим орбитальным угловым моментом. Предсказано, что орбитальный момент может проявиться в интерференции между полем заряда и соответствующего магнитного момента, причем для наблюдения вклада от орбитального момента необходима мишень конечной диэлектрической проницаемости и наклонная геометрия падения электрона на поверхность. В этом случае для электрона с угловым моментом $\ell \sim 10^3 - 10^4$ его вклад может проявиться в угловой асимметрии излучения порядка 0.1 – 1%, которая не имеет места для обычного (например, гауссова) электронного пакета.

6. Развита нерелятивистская квантовая теория упругого рассеяния быстрых электронных волновых пакетов произвольной формы на атомах без учета расплывания в борновском приближении. Рассмотрены частные случаи падающего гауссова пучка, закрученного электрона с орбитальным моментом, квантовой суперпозиции типа кота Шрёдингера из двух гауссовых пучков и двух закрученных пучков с различными значениями углового момента. Подробно изучены угловые распределения рассеянных электронов для потенциала Юкавы, одиночного атома водорода в основном $1s$ состоянии, макроскопической мишени из многих атомов и мезоскопической локализованной мишени. Показано, что для состояния кота Шрёдингера сечение рассеяния может уменьшаться под некоторыми азимутальными углами за счет деструктивной квантовой само-интерференции пакета, что связано с областями отрицательности соответствующей функции Вигнера и приводит к азимутальной асимметрии рассеяния, которая может достигать 10% для реалистичных параметров. Таким образом угловое распределение упруго рассеянных электронов несет информацию не только о профиле мишени, но и о профиле падающего пакета, т.е. о квантовом состоянии налетающей частицы. Поэтому рассеяние заряженных частиц на атомах и атомных мишенях может использоваться как инструмент квантовой томографии состояний массивных частиц.

7. Развита общая релятивистская квантовая теория рассеяния для столкновения двух произвольных негауссовых пакетов, характеризуемых фазой волновой функции в импульсном

представлении, под ненулевым импакт-параметром. Показано, что поправки к стандартным наблюдаемым приближения плоских волн (вероятность, сечение) возникают благодаря конечным квантовым неопределенностям энергии и импульса сталкивающихся пакетов, их квантовым числам (таким как орбитальный момент), расплыванию пакетов в процессе столкновения, конечному импакт-параметру и общей фазе амплитуды рассеяния. Найдены параксиальные, всюду положительные и непараксиальные (не обязательно всюду положительные) функции Вигнера нескольких негауссовых пакетов и показано, что вклад областей отрицательности функций Вигнера подавлен в релятивистском режиме. Получены первые непараксиальные поправки к сечению рассеяния приближения плоских волн для широкого класса моделей теории поля и показано, что они в частности приводят к возникновению чувствительности обобщенного сечения рассеяния к общей фазе амплитуды процесса, а точнее к её первой производной по мандельштамовским переменным s и t . Рассмотрено несколько феноменологических моделей адронной фазы, используемых при описании протонных столкновений на Большом адронном коллайдере, и показано, что эффекты от фазы пренебрежимо малы из-за слишком широких пучков коллайдера, тогда как на электрон-позитронных коллайдерах следующего поколения с пучками нанометровых размеров (CLIC, ILC) эффекты кулоновской фазы могут проявляться значительно сильнее. Получены первые неплосковолновые поправки к сечению рассеяния и аннигиляции ультрарелятивистских электронов и позитронов древесного приближения, когда одна из частиц является закрученной, и показано, что они могут конкурировать с вкладами петлевых диаграмм для умеренно релятивистских энергий и при значениях орбитального момента закрученной частицы выше $10^3 \hbar$.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

- [1] 1. **Карловец Д. В.** Дифракционное излучение от экрана конечной проводимости / Д. В. Карловец, А. П. Потылицын // Письма в ЖЭТФ. – 2009. – Т. 90, № 5. – С. 368–373. – DOI: 10.1134/S0021364009170032. – 0,31 / 0,15 а.л.
в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:
Karlovets D. V. Diffraction radiation from a finite-conductivity screen / D. V. Karlovets, A. P. Potylitsyn // JETP Letters. – 2009. – Vol. 90, № 5. – P. 368–373.
- [2] **Карловец Д. В.** О дуальном представлении в классической электродинамике / Д. В. Карловец // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180, № 8. – С. 851–858. – DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008e.0851. – 0,44 а.л.
в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:
Karlovets D. V. On dual representation in classical electrodynamics / D. V. Karlovets // Physics-Uspekhi. – 2010. – Vol. 53, № 8. – P. 817–824.

- [3] **Карловец Д. В.** К теории поляризационного излучения в средах с резкими границами // ЖЭТФ. – 2011. – Т. 140, № 1. – С. 36–55. – DOI: 10.1134/S1063776111050116. – 1,19 а.л.
в переводной версии журнала, входящей в *Web of Science*:
Karlovets D. V. On the Theory of Polarization Radiation in Media with Sharp Boundaries / D. V. Karlovets // Journal of experimental and theoretical physics. – 2011. – Vol. 113, № 1. – P. 27–45.
- [4] **Karlovets D. V.** Generalized surface current method in the macroscopic theory of diffraction radiation / D. V. Karlovets, A. P. Potylitsyn // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics – 2009. – Vol. 373, is. 22. – P. 1988–1996. – DOI: 10.1016/j.physleta.2009.03.060. – 0,5 / 0,25 а.л. (*Web of Science*).
- [5] **Karlovets D. V.** Radiative polarization of electrons in a strong laser wave / D. V. Karlovets [Electronic resource] // Physical Review A. – 2011. – Vol. 84, is. 6. – Article number 062116. – P. 062116 (1–12). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.84.062116> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.84.062116. – 0,75 а.л. (*Web of Science*).
- [6] **Karlovets D. V.** Electron with orbital angular momentum in a strong laser wave [Electronic resource] / D. V. Karlovets // Physical Review A. – 2012. – Vol. 86, is. 6. – Article number 062102. – P. 062102 (1–13). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.86.062102> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.86.062102. – 0,81 а.л. (*Web of Science*).
- [7] Ivanov I. P. Detecting transition radiation from a magnetic moment [Electronic resource] / I. P. Ivanov, **D. V. Karlovets** // Physical Review Letters. – 2013. – Vol. 110, № 26. – Article number 264801. – P. 264801 (1–5). – URL: <https://journals.aps.org/prlpdf/10.1103/PhysRevLett.110.264801> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.264801. – 0,31 / 0,15 а.л. (*Web of Science*).
- [8] Ivanov I. P. Polarization radiation of vortex electrons with large orbital angular momentum [Electronic resource] / I. P. Ivanov, **D. V. Karlovets** // Physical Review A. – 2013. – Vol. 88, is. 4. – Article number 043840. – P. 043840 (1–15). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.88.043840> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.88.043840. – 0,94 / 0,45 а.л. (*Web of Science*).
- [9] **Karlovets D. V.** Gaussian and Airy wave packets of massive particles with orbital angular momentum [Electronic resource] / D. V. Karlovets // Physical Review A. – 2015. – Vol. 91, is. 1. – Article number 013847. – P. 013847 (1–12). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.91.013847> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.91.013847. – 0,75 а.л. (*Web of Science*).
- [10] **Karlovets D. V.** Scattering of wave packets on atoms in the Born approximation [Electronic resource] / D. V. Karlovets, G. L. Kotkin, V. G. Serbo // Physical Review A. – 2015. – Vol. 92, is. 5. – Article number 052703. – P. 052703 (1–8). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.92.052703> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.92.052703. – 0,5 / 0,15 а.л. (*Web of Science*).

- [11] **Karlovets D. V.** Probing phase of a scattering amplitude beyond the plane-wave approximation [Electronic resource] / D. V. Karlovets // EPL. – 2016. – Vol. 116, № 3. – Article number 31001. – P. 31001 (1–7). – URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/116/31001/pdf> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1209/0295-5075/116/31001. – 0,44 а.л. (*Web of Science*).
- [12] **Karlovets D. V.** Scattering of twisted electron wave packets by atoms in the Born approximation [Electronic resource] / D. V. Karlovets, G. L. Kotkin, V. G. Serbo, A. Surzhykov // Physical Review A. – 2017. – Vol. 95, is. 1. – Article number 032703. – P. 032703 (1–11). – DOI: 10.1103/PhysRevA.95.032703. – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.95.032703> (access date: 26.09.2020). – 0,69 / 0,15 а.л. (*Web of Science*).
- [13] **Karlovets D. V.** Possibility to probe negative values of a Wigner function in scattering of a coherent superposition of electronic wave packets by atoms [Electronic resource] / D. V. Karlovets, V. G. Serbo // Physical Review Letters. – 2017. – Vol. 119, is. 17. – Article number 173601. – P. 173601 (1–5). – URL: <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.119.173601> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.173601. – 0,31 / 0,15 а.л. (*Web of Science*).
- [14] **Karlovets D. V.** Scattering of wave packets with phases [Electronic resource] / D. V. Karlovets // Journal of High Energy Physics. – 2017. – Vol. 3. – Article number 049. – P. 049 (1–45). – URL: https://www.researchgate.net/publication/310953311_Scattering_of_wave_packets_with_phases#read (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1007%2FJHEP03%282017%29049. – 2,81 а.л. (*Web of Science*).
- [15] **Karlovets D.** Relativistic vortex electrons: Paraxial versus nonparaxial regimes [Electronic resource] / D. Karlovets // Physical Review A. – 2018. – Vol. 98, is. 1. – Article number 012137. – P. 012137 (1–11). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.98.012137> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.98.012137. – 0,69 а.л. (*Web of Science*).
- [16] **Karlovets D.** Intrinsic multipole moments of non-Gaussian wave packets [Electronic resource] / D. Karlovets, A. Zhevlakov // Physical Review A. – 2019. – Vol. 99, is. 2. – Article number 022103. – P. 022103 (1–6). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.99.022103> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.99.022103. – 0,38 / 0,2 а.л. (*Web of Science*).
- [17] **Karlovets D.** Dynamical enhancement of nonparaxial effects in the electromagnetic field of a vortex electron [Electronic resource] / D. Karlovets // Physical Review A. – 2019. – Vol. 99, is. 4. – Article number 043824. – P. 043824 (1–7). – URL: <https://journals.aps.org/prapdf/10.1103/PhysRevA.99.043824> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysicalReviewA.99.043824. – 0,44 а.л. (*Web of Science*).
- [18] **Karlovets D.** On Wigner function of a vortex electron [Electronic resource] / D. Karlovets // Journal of Physics A – Mathematical and Theoretical. – 2019. – Vol. 52, is. 5. – Article number 05LT01. – 6 p. – URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751->

8121/aaf9d8/pdf (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1088/1751-8121/aaf9d8. – 0,38 а.л. (*Web of Science*).

- [19] **Karlovets D.** Corrigendum: On Wigner function of a vortex electron (2019 J. Phys. A: Math. Theor. 5205LT01) [Electronic resource] / D. Karlovets // Journal of Physics A – Mathematical and Theoretical. – 2019. – Vol. 52, is. 58. – Article number 389501. – 2 p. – URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/ab374e/pdf> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1088/1751-8121/ab374e. – 0,13 а.л. (*Web of Science*).
- [20] Afanasev A. V. Schwinger scattering of twisted neutrons by nuclei [Electronic resource] / A. V. Afanasev, **D. V. Karlovets**, V. G. Serbo // Physical Review C. – 2019. – Vol. 100, is. 5. – Article number 051601(R). – P. 051601(R) (1–5). – URL: <https://journals.aps.org/prc/pdf/10.1103/PhysRevC.100.051601> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevC.100.051601. – 0,31 / 0,1 а.л. (*Web of Science*).
- [21] **Karlovets D.** Effects of the transverse coherence length in relativistic collisions [Electronic resource] / D. V. Karlovets, V. G. Serbo // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101, is. 7. – Article number 076009. – P. 076009 (1–18). – URL: <https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.101.076009> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevD.101.076009. – 1,13 / 0,60 а.л. (*Web of Science*).
- [22] Floettmann K. Quantum mechanical formulation of the Busch theorem [Electronic resource] / K. Floettmann, **D. Karlovets** // Physical Review A. – 2020. – Vol. 102, № 4. – Article number 043517. – P. 043517 (1–5). – URL: <https://journals.aps.org/pra/pdf/10.1103/PhysRevA.102.043517> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1103/PhysRevA.102.043517. – 0,31 / 0,15 а.л. (*Web of Science*).
Статья в сборнике материалов конференции, представленных в издании, входящем в Web of Science:
- [23] **Karlovets D.** Quantum scattering beyond the plane-wave approximation [Electronic resource] / D. V. Karlovets // Journal of Physics Conference Series. – 2018. – Vol. 938 : 17th Workshop on High Energy Spin Physics (DSPIN). Dubna, Russia, September 11–15, 2017. – Article number UNSP 012031. – P. 01203 (1–5). – URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/938/1/012031/pdf> (access date: 26.09.2020). – DOI: 10.1088/1742-6596/938/1/01203. – 0,6 а.л.

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета
Заказ № 7233 от «11» декабря 2020 г. Тираж 100 экз.
г. Томск Московский тр.8, тел. 53-15-28