

М.С. Бухтяк

**ПСЕВДОМИНИМАЛЬНОСТЬ И ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ**

Данная публикация продолжает серию работ автора о моделировании формы ортотропного упругого материала, принимающего равновесную форму внутри области, граница которой указана. Около 30 лет тому назад В.М. Гряник и В.И. Ломан, основываясь на уравнениях равновесия тонкой оболочки, решили аналогичную задачу для изотропного сетеполотна, прикреплённого к жёстким параболическим рёбрам. Желая распространить моделирование на ортотропные материалы (и иные ограничивающие контуры), автор в ряде публикаций 2016–2017 годов предложил подход к решению задачи, основанный на использовании поверхностей с постоянным отношением главных кривизн. Эти поверхности названы псевдоминимальными поверхностями. Дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП), задающее (в локальном смысле) класс псевдоминимальных поверхностей, весьма сложно для анализа. Однако для некоторых классов поверхностей анализ существенно упрощается, причем анализ удастся провести без обращения к этому неудобному ДУЧП, а применив метод подвижного репера. Речь идёт о классе линейчатых поверхностей. Этот класс интересен не только в силу указанного обстоятельства, но и вследствие весьма заметного интереса к нему со стороны архитекторов и строителей. Однако речь должна идти не о псевдоминимальных линейчатых поверхностях (они существуют, но являются в очевидном смысле тривиальными), а об инварианте (отношение главных кривизн), который не является тождественной константой на данной поверхности, но его линии уровня совпадают с линиями некоторого инвариантного семейства. Допуская вольность речи, можно сказать, что имеются поверхности, для которых условие псевдоминимальности выполнено тождественно, и поверхности, псевдоминимальные «в ограниченном смысле» – вдоль линий некоторого семейства, внутренним образом связанным с поверхностью. Автором показано, что роль такого семейства могут играть линии, «эквиливантные» в очевидном смысле для горловой линии косой линейчатой поверхности, а лучи – носители такой линейчатой поверхности – образуют регулюс с постоянными евклидовыми инвариантами.

**Ключевые слова:** *линейчатая поверхность, регулюс, инварианты, горловая линия, коэффициент псевдоминимальности, семейство линий на поверхности.*

**Постановка задачи**

С конструированием, изготовлением и эксплуатацией параболических рефлекторов связаны (кроме прочего) следующие задачи.

1. Выкраивание сетеполотна (имеется в виду не только вырезание плоских листов сетеполотна и соединение их между собой, но и схема прикрепления сетеполотна к несущим конструкциям). Оптимизация выкраивания понимается как минимизация (интегральная) отклонения отношения метрических форм поверхностей, точечное соответствие которых и есть модель прикрепления сетеполотна к тыльной и фронтальной сетям. Эта конструкция последовательно строилась автором (совместно с А.В. Соломиной) в работах [1–3].

2. Моделирование формы сетеполотна, подверженного так называемому «матрасному эффекту», который сопровождается раскрытие зонтика: прогиб ткани внутрь купола. Решение этой задачи для изотропного сетеполотна, прикрепленного к соседним ребрам осесимметричного рефлектора, предложено в [6]. В основу положены уравнения равновесия тонкой упругой оболочки. Работы автора 2016–2017 годов призваны распространить моделирование на ортотропные материалы, а также на области, границы которых могут быть заранее не указаны. Это привело к понятию «псевдоминимальной поверхности» – попросту поверхности с постоянным отношением главных кривизн. Это отношение выражается через экстремальные значения коэффициентов растяжения упругого материала в двух ортогональных направлениях (для ортотропного материала).

Первое применение указанной конструкции (в ограниченном смысле) приведено в работе [5], где, по примеру [6], давалась оценка формы сетеполотна лепестка осесимметричного рефлектора, но для ортотропного материала, и путем построения поверхности, для которой условие псевдоминимальности выполнено вдоль линии симметрии (осевой линии) точно, а на лепестке в целом приближенно.

Отметим, что алгоритм конечно-элементного моделирования псевдоминимальной поверхности разработан в [7].

Пусть сетеполотно ортотропно и коэффициент его растяжения в радиальном направлении равен  $коэфф_{рад}$ , а вдоль окружностей, ортогональным радиусам –  $коэфф_{окр}$ . В статье [8] введен коэффициент ортотропности сетеполотна

$$L = \left( \frac{коэфф_{рад}}{коэфф_{окр}} \right)^2.$$

В работе [9] определена псевдоминимальная поверхность веса  $L$  как гладкая поверхность, главные кривизны которой  $k_1$  и  $k_2$  связаны (в случае упорядоченности) соотношением

$$k_1 + Lk_2 = 0 \text{ при } L = const.$$

Если же нет оснований для упорядочения, то говорим об ослабленном условии псевдоминимальности в виде

$$(k_1 + Lk_2)(Lk_1 + k_2) = 0. \tag{1}$$

Пусть  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $\Sigma$ , а  $b_{11}, b_{12}, b_{22}$  – коэффициенты второй квадратичной формы. Тогда ослабленное условие псевдоминимальности веса  $a$  запишется в виде [9]

$$L(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2 + (1-L)^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = 0.$$

Введем в рассмотрение безразмерный показатель псевдоминимальности с весом  $L$ , а именно

$$\delta(u, v) = \frac{(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2}{(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} - \frac{(1-L)^2}{L}.$$

Существенную роль будет играть выражение

$$f(u, v) = \frac{(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2}{(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}. \tag{2}$$

Ясно, что поверхность псевдоминимальна (с указанным весом), если

$$\delta(u, v) \equiv 0. \quad (3)$$

В предлагаемой работе решаются два вопроса. Первый: для каких линейчатых поверхностей выполнено условие (3). Второй: для каких линейчатых поверхностей линии уровня функции (2) внутренним образом связаны с данной поверхностью. Этот вопрос подлежит уточнению, что и будет сделано.

Интерес к линейчатым поверхностям обусловлен (кроме прочего) тем вниманием, которое уделяется им в строительстве и архитектуре. Вполне адекватное суждение по этому вопросу можно получить благодаря капитальной монографии трёх авторитетных специалистов [10]. Стоит отметить, что детальное описание частных классов поверхностей сопровождается основательными ссылками на источники сведений о применениях в строительстве и механике. В диссертации З.В. Беляевой [11] детально прослеживаются особенности применения линейчатых поверхностей различных классов (торсы, цилиндриды, коноиды и т. д.). О глубине проникновения линейчатой геометрии в архитектуру (хотя и косвенным образом) свидетельствует [12]: основания классификации линейчатых поверхностей, проведенной в этой статье, не слишком отвечают теоретической геометрии, но, очевидно, отлично служат тем, кто проектирует и конструирует. Свойства линейчатых поверхностей, делающие эти поверхности привлекательными для строителя, обоснованы, например, в статье [13].

Автор полагает, что характеристика ортотропных свойств упругого материала может иметь значение для конструкций, использующих линейчатые поверхности. В частности, можно поставить вопрос о реализации (в той или иной мере) свойства поверхности, сводимое к отношению главных кривизн, то есть свойство, опирающееся на поведение левой части уравнения (1). Вполне очевидно, что развёртывающаяся поверхность псевдоминимальна в тривиальном смысле с весом 0. Не вполне очевидно, но выяснится, что других псевдоминимальных поверхностей (если не считать прямой геликоид) среди линейчатых нет. Однако можно поставить другой вопрос: существуют ли линейчатые поверхности, для которых уравнение (1) выполнено вдоль линий некоторого семейства, естественным образом связанного с поверхностью, а если да, то каковы эти поверхности.

### Канонический репер регулюса

Одномерный объект линейчатой геометрии трёхмерного пространства – регулюс – есть однопараметрическое семейство прямых. В локальной дифференциальной геометрии его изучают (как правило) методом подвижного репера, помещая вершину репера на прямую и направляя вектор репера параллельно прямой. При этом прямая приобретает направление этого вектора. В итоге оказывается, что регулюс – однопараметрическое семейство лучей. Двумерное многообразие точек, расположенных на лучах регулюса есть линейчатая поверхность. Регулюс называется носителем этой линейчатой поверхности.

Мы будем использовать методы локальной дифференциальной геометрии. Соответственно слово «прямая» может означать как прямую, так и некоторый отрезок прямой; аналогично, «параболоид» может обозначать произвольный (двумерный) кусок параболоида, и т. п. Все функции предполагаются принадлежащими тому классу гладкости, который достаточен для корректности суждений об уравнениях, связывающих эти функции. Далее, равенство  $F = 0$  для функции  $F$  означает, что  $F$  принимает значение 0 для всех допустимых значений своих аргу-

ментов. Отметим, что цилиндры для нашего анализа не представляют интереса по очевидной причине, отмеченной выше.

Для нецилиндрического регулюса в трехмерном евклидовом пространстве ещё в 1894 году построен канонический репер, описание которого приведем по [14]. Текущий луч регулюса снабжен параллельным ему единичным вектором  $\mathbf{e}_3$ . Элементы репера – функции параметра  $s$  (длина дуги сферической индикатрисы вектора  $\mathbf{e}_3$ ). Вершина репера помещена в горловую точку луча. Вектор  $\mathbf{e}_1$  параллелен касательной к упомянутой сферической индикатрисе и ортогонален касательной плоскости в горловой точке (в общем случае). Вектор  $\mathbf{e}_2$  ортогонален асимптотической плоскости луча. Девивационные формулы репера имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= -p(s)\mathbf{e}_2 - a(s)\mathbf{e}_3, \\ \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} &= -b(s)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} &= b(s)\mathbf{e}_1, \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Геометрическая характеристика инвариантов приведена в [14]. Имея в виду линейчатую поверхность, носителем которой является наш регулюс, запишем радиус-вектор текущей точки

$$\mathbf{R}(s, v) = \mathbf{r}(s) + v\mathbf{e}_3(s).$$

Метрический тензор

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} v^2 + p^2 + a^2 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица второй квадратичной формы

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + p^2}} \begin{pmatrix} bp^2 - ap - v\frac{dp}{ds} + bv^2 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем (2) в виде

$$f(s, v) = \frac{m(s, v)^2}{p^2(v^2 + p^2)}, \tag{4}$$

где 
$$m(s, v) = pa + p^2b + bv^2 - v\frac{dp}{ds}. \tag{5}$$

Ради удобства функцию  $f(s, v)$  будем называть *основной функцией*.

### Случай независимости основной функции от $s$

Геометрический смысл параметра  $v$  вполне очевиден – расстояние, отмеренное на луче в направлении вектора  $\mathbf{e}_3$  (координата текущей точки луча в подвижном репере). Линия  $v = \text{const}$  состоит из точек, равноудаленных (в указанном смысле) от горловой линии. Потребуем, чтобы  $f(s, v)$  была постоянной вдоль линии  $v = \text{const}$ , то есть зависела от координаты  $v$  точки на луче и не зависела от

выбора луча. Это приводит к уравнению

$$-2m \left( -p^3 \frac{dm}{ds} - pv^2 \frac{dm}{ds} + 2mp^2 \frac{dp}{ds} + mv^2 \frac{dp}{ds} \right) = 0. \quad (6)$$

Если  $m = 0$ , то равенство

$$p(s)a(s) + p(s)^2 b(s) + b(s)v^2 - v \frac{dp(s)}{ds} = 0$$

должно выполняться тождественно относительно  $v$ . Тогда либо

$$p(s) = \text{const} \neq 0, \quad a(s) = 0, \quad b(s) = 0, \quad (7)$$

либо

$$p(s) = 0, \quad b(s) = 0. \quad (8)$$

Согласно [14], в первом случае линейчатая поверхность – прямой геликоид (в локальном смысле), а во втором – плоскость (и тоже в локальном смысле).

Внеся (5) в (6) и обращая в нуль второй множитель, получаем уравнение

$$K_0 + K_1 v + K_2 v^2 + K_3 v^3 + K_4 v^4 = 0,$$

где

$$K_0 = -(p(s))^3 \left( \left( \frac{d}{ds} a(s) \right) p(s) - a(s) \frac{d}{ds} p(s) + \left( \frac{d}{ds} b(s) \right) (p(s))^2 \right),$$

$$K_1 = (p(s))^2 \left( \left( \frac{d^2}{ds^2} p(s) \right) p(s) - 2 \left( \frac{d}{ds} p(s) \right)^2 \right),$$

$$K_2 = -(p(s))^2 \left( -b(s) \frac{d}{ds} p(s) + 2 \left( \frac{d}{ds} b(s) \right) p(s) + \frac{d}{ds} a(s) \right),$$

$$K_3 = \left( \frac{d^2}{ds^2} p(s) \right) p(s) - \left( \frac{d}{ds} p(s) \right)^2,$$

$$K_4 = - \left( \frac{d}{ds} b(s) \right) p(s) + b(s) \frac{d}{ds} p(s).$$

Обращая в нуль коэффициент  $K_3$ , находим, что

$$p(s) = c_2 \exp(c_1 s), \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (9)$$

Если  $c_2 = 0$ , то и все  $K_i$  становятся нулями. Регулюс в этом случае – торс [14]. Среди главных кривизн хотя бы одна равна нулю, и условие псевдоминимальности выполнено тривиальным образом. Исключаем этот случай из рассмотрения, полагая

$$c_2 \neq 0. \quad (10)$$

Заметим, что вследствие (9) имеем

$$K_1 = c_1^2 c_2^4 \exp(c_1 s)^4.$$

Обращение  $K_1$  в нуль с учетом (10) приводит к тому, что

$$p(s) = \text{const} \neq 0,$$

и обращение в нуль прочих величин  $K_i$  приведёт к тому, что

$$a(s) = \text{const. } b(s) = \text{const.}$$

Итак, если основная функция косо́го регулю́са не зависит от  $s$ , то это – регулю́с с постоянными метрическими инвариантами. Данный класс регулюсов исследуемым образом исследован в [14]. Там же приведены вектор-функции, задающие указанные регулюсы. Именно, радиус-вектор горловой линии имеет вид

$$\mathbf{r} = \left\{ \frac{(bp - a) \cos(Bs)}{B^2}, \frac{(bp - a) \sin(Bs)}{B^2}, \frac{(p + ab)s}{B} \right\},$$

где  $B = \sqrt{1 + b^2}$ ,

а направляющий вектор луча

$$\mathbf{e} = \left\{ -\frac{\sin(Bs)}{B}, \frac{\cos(Bs)}{B}, -\frac{b}{B} \right\}.$$

Для такого регулюса вместо основной функции (4) следует говорить о функции

$$\varphi(v) = \frac{(ap + bp^2 + bv^2)^2}{p^2(p^2 + v^2)}.$$

В случае псевдоминимальной поверхности равенство (3) выполнено при подходящей константе  $L$ . В нашем же случае аналогичное равенство обеспечивается заданием  $L(v)$ , удовлетворяющей равенству

$$\frac{(L(v) - 1)^2}{L(v)} = \frac{(ap + bp^2 + bv^2)^2}{p^2(p^2 + v^2)} \equiv \varphi(v).$$

Отметим, что линейчатые поверхности, носители которых – регулюсы с постоянными инвариантами, представлены в [10], где на с. 75 приведен косо́й геликоид

$$\mathbf{R}(r, v) = \{r \cos v, r \sin v, cv + kr\}.$$

Укажем для этого регулюса метрические инварианты

$$a = -ck, b = -\frac{k}{1+k^2}, p = \frac{c}{1+k^2}.$$

На рис. 1 – косо́й геликоид при  $c = 1, k = 1$ .

Далее, на стр. 78 дано описание псевдо-развертывающегося геликоида

$$\mathbf{R}(u, v) = \{c \cos v - u \sin v, c \sin v + u \cos v, kv\}.$$

Он изображен на рис. 2, а его метрические инварианты таковы:

$$a = -c, b = 0, p = k.$$

В классе регулюсов с постоянными метрическими инвариантами содержатся, в частности, прямые геликоиды (при  $bp - a = 0, p + ab \neq 0$ ) и однополостные гиперболоиды (при  $bp - a \neq 0, p + ab = 0$ ) [14].

Отметим, что торсы, которые здесь исключены из анализа по указанной причине, определенно важны для задач строительства, о чем можно судить по работам [15, 16, 10].

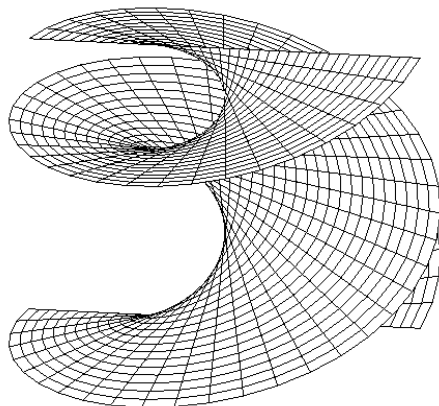


Рис. 1. Косой геликоид  
Fig. 1. Skew helicoid

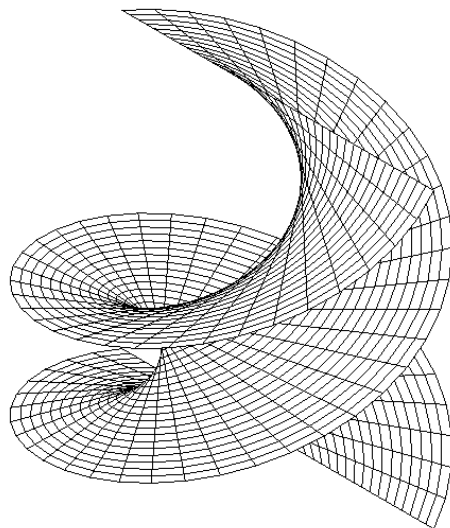


Рис. 2. Псевдо-развертывающийся геликоид.  
Fig. 2. Pseudo-developable helicoid

### Случай постоянства основной функции вдоль луча

Потребуем, чтобы  $f(s, v)$  была постоянной вдоль луча регулуса. Тогда, как видно из (4) и (5), либо

$$m(s, v) = 0,$$

либо

$$bv^3 + (bp^2 - ap)v - \frac{dp}{ds}p^2 = 0.$$

И в том, и в другом случае должно выполняться одно из условий

$$\{b = 0, p = 0\}, \{p = \text{const}, p \neq 0, a = b = 0\},$$

и мы находимся в той же ситуации, что и для (7), (8). Именно, согласно [14], в первом случае линейчатая поверхность – плоскость (в локальном смысле), а во втором – прямой геликоид (и тоже в локальном смысле).

### Заключение

Автор полагает, что предложенная работа (наряду с предшествующими) служит прояснению понятия псевдоминимальности применительно к линейчатым поверхностям, и надеется на внимание к этому вопросу со стороны заинтересованных лиц.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
2. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(29). С. 5–14.

3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте пары поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24.
4. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 5–17.
5. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
6. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
7. Бухтяк М.С. Конечно-элементная модель псевдоминимальной поверхности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 5–16.
8. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 5–24.
9. Бухтяк М.С. Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 5–24.
10. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. М.: Наука, 2006. 544 с.
11. Беляева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций: дис. ... к.т.н. Екатеринбург, 2015. 175 с.
12. Кривошапко С.Н. Аналитические линейчатые поверхности и их полная классификация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. № 16(2). С. 131–138 с.
13. Иванов В.Н. Линейчатые поверхности на заданных опорных кривых // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 9–17.
14. Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 236 с.
15. Митюшов Е.А., Роцева Т.А. Кинематический алгоритм развёртывания линейчатых поверхностей // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010. С. 112–116.
16. Кривошапко С.Н. Перспективы и преимущества торсовых поверхностей // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1(72). С. 20–30.

Статья поступила 22.06.2020 г.

Bukhtyak M.S. (2020) PSEUDO-MINIMALITY AND RULED SURFACES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 18–27

DOI 10.17223/19988621/67/2

Keywords: ruled surface, regulus, invariants, striction line, pseudo-minimality ratio, family of lines on a surface.

This paper is a follow-up to the author's series of works about shape modeling for an orthotropic elastic material that takes an equilibrium form inside the area with the specified boundaries. V.M. Gryanik and V.I. Loman, based on thin shell equilibrium equations, solved about 30 years ago a similar problem for an isotropic mesh attached to rigid parabolic edges. With a view to extend modeling to orthotropic materials (and other boundary contours), the author in his publications of 2016–2017 proposed an approach to the problem based on the application of surfaces with a constant ratio of principal curvatures. These surfaces are called pseudo-minimal surfaces. A partial differential equation that defines (in the local sense) a class of pseudo-minimal surfaces is very complex for analysis. However, for some classes of surfaces, the analysis is greatly simplified, notably, the analysis can be performed without this inconvenient PDE, but



with the method of moving frames. The author is referring to a class of ruled surfaces. This class is interesting not only due to the aforesaid but also due to an evident interest manifested by architects and builders. However, one should discuss not the pseudo-minimal ruled surfaces (they exist but are obviously trivial) but an invariant (principal curvatures ratio), which is not an identical constant on a given surface but its contour lines coincide with the lines of some invariant family. Roughly speaking, there are surfaces whose pseudo-minimal condition is satisfied identically, and surfaces that are pseudo-minimal "in a limited sense"—lengthways the lines of a certain family, internally connected with the surface. The article finds that the role of such a family can be obviously played by "equidistant" lines for the striction line of a skew ruled surface, and rays are the carriers of such a ruled surface, they form a regulus with constant Euclidean invariants.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 2020: 53Z30

Mikhail S. BUKHTYAK (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation ) E-mail: bukhtyakm@mail.ru

#### REFERENCES

1. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoye modelirovaniye raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axissymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 34(2). pp. 5–17.
2. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoye modelirovaniye raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axissymmetric reflector. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 36(4). pp. 5–14.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 39(1). pp. 13–24.
4. Bukhtyak M.S. Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepeška setepolotna [Defect of mapping for deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 40(2) pp. 5–18.
5. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical Modeling of a Metallic Mesh Deformation of the Parabolic Reflector. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461. DOI: 10.1134/S2070048216040050.
6. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertyvayemyye zerkal'nyye anteny zontichnogo tipa* [Umbrella type deployable reflector antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.
7. Bukhtyak M.S. (2017) Konechno-elementnaya model' psevdominimal'noy poverkhnosti [Finite element model of a pseudominimal surface]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 5–16.
8. Bukhtyak M.S. (2017) Obobshcheniye minimal'nykh poverkhnostey i modelirovaniye formy konstruktssii iz ortotropnogo materiala [Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotropic material construction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24.
9. Bukhtyak M.S. (2017) Sostavnaya poverkhnost', blizkaya k psevdominimal'noy [A composite surface close to pseudo-minimal]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 5–13.

10. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. (2006) *Analiticheskiye poverkhnosti: materialy po geometrii 500 poverkhnostey i informatsiya k raschetu na prochnost' tonkikh obolochek* [Analytical surfaces: materials on geometry of 500 surfaces and information for strength calculation of thin shells]. Moscow: Nauka.
11. Belyayeva Z.V. (2015) *Geometricheskoye modelirovaniye prostranstvennykh konstruksiy* [Geometric modelling of spatial constructions]. Dissertation. Ural Federal University.
12. Krivoshapko S.N. (2020) Analiticheskiye lineychatyye poverkhnosti i ikh polnaya klassifikatsiya [Analytical ruled surfaces] *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 16(2). pp. 131–138.
13. Ivanov V.N. (2015) Lineychatyye poverkhnosti na zadannykh opornykh krivykh [Ruled surfaces on given supporting curves]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 3. pp. 9–17.
14. Shcherbakov R.N. (1973) *Osnovy metoda vneshnikh form i lineychatoy differentsial'noy geometrii* [Foundations of the exterior form method and ruled differential geometry]. Tomsk: Tomsk State University.
15. Mityushov E.A., Roshcheva T.A. (2010) Kinemacheskyy algoritm razviorotyvaniya lineychatyykh poverkhnostey [Kinematic algorithm of ruled surface development]. *Mekhanika. Nauchnyye issledovaniya i uchebno-metodicheskiye razrabotki*. 4. pp. 112–116.
16. Krivoshapko S.N. (2019) Perspektivy i preimushchestva torsovykh poverkhnostey. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 72(1). pp. 20–30.

Received: June 22, 2020