МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ

Том 3. Математика

Сборник научных трудов
XVI Международной конференции студентов, аспирантов
и молодых ученых

23–26 апреля 2019 г.

PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

Volume 3. Mathematics

Abstracts
XVI International Conference of students, graduate students
and young scientists

April 23–26, 2019

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Национальный исследовательский Томский государственный университет

ТГАСУ

TUSUR UNIVERSITY
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ТОМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Томск 2019

АЛГЕБРА СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В (2+1) ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

А.А. Сараева

Научный руководитель: к.ф.-м.н. А.И. Бреев

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 67, 634050

E-mail: Anastasia16-05@yandex.ru

SYMMETRY ALGEBRA OF THE DIRAC EQUATION IN (2 + 1) SPACE-TIME

A.A. Saraeva

Scientific Supervisor: Ph.D. A.I. Breev

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 67, 634050

E-mail: : Anastasia16-05@yandex.ru

Abstract. *The Dirac equation for a charge in an external electromagnetic field is the basic equation for relativistic quantum mechanics and quantum electrodynamics. The Dirac equation in the magnetic solenoid field is the basis of the theory of Aharonov-Bohm effect both in (3+1) and (2+1) dimensions. The self-adjoint extension problem in quantum mechanics was investigated in detail by Gitman, Tyutin, and Voronov. The Dirac equation is of interest in planar gravity and the Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) black hole in relation with the investigation of the Dirac matter field behavior on the background of the BTZ gravity. Another motivation in studying the (2 + 1) Dirac equation in curved space-time is that, although the (2+1) dimensional gravity is a toy model for a regular Einstein theory in (3+1) dimensions, it preserves some significant properties of regular gravity being mathematically simpler. To construct exact solutions of the Dirac equation, the separation of variables method is commonly used. A new method, named the noncommutative integration method, has been proposed to construct basses of exact solutions of linear partial differential equations. The noncommutative integration (NI) method essentially uses a Lie algebra L of differential symmetry operators of the first order. Note that the method allows one to find exact solutions (NI-solutions) in the cases when the Dirac equation does not allow separation of variables.*

Введение. Уравнение Дирака для заряда во внешнем электромагнитном поле является основным уравнением релятивистской квантовой механики и квантовой электродинамики. В релятивистской квантовой механике это уравнение интерпретируется как одночастичное волновое уравнение, описывающее фермионы во внешнем поле. В квантовой электродинамике точные решения уравнения Дирака необходимы для получения изображения взаимодействия Фарри, чтобы точно построить взаимодействие с внешним полем и взаимодействие фотонов [1].

Точные решения уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени являются полезными инструментами для исследования физического поведения частиц. Поэтому эта тема стала интересной из-за применения уравнения в различных областях физики, в частности в физике конденсированных сред. Там (2+1) уравнение Дирака при наличии внешнего электромагнитного потенциала используется при теоретическом изучении электронных свойств графена [2-4] и графеновых квантовых точек [5]. Примем во внимание то обстоятельство, что при исследовании свойств симметрии уравнения возникают некоторые новые отличительные моменты от уравнения Клейна-Гордона-Фока, связанные с многокомпонентностью волновой функции. Способ описать симметрию на языке алгебр Ли позволяет добиться математической строгости изложения с использованием относительно несложных выкладок, а также пригоден для описания симметрии, не связанной с преобразованиями пространства-времени.

Трехмерная теория уравнения Дирака обладает свойствами, подобными (3+1) теории, поскольку тензор Римана сводится к тензору Риччи в (2+1) теории и, кроме этого, матрицы Дирака сводятся к известным матрицам Паули. Вывод определяющих уравнений для уравнения Дирака в (2+1)-мерном пространстве-времени определяет оператор симметрии с матричными коэффициентами, а полный набор операторов симметрии обеспечивает разделение переменных в уравнении Дирака в (2+1) пространстве-времени, аналогично (3+1)-мерному случаю. Обобщая сказанное, мы видим, что разработка математических методов для обнаружения новых точных решений для уравнения (2+1) Дирака имеет важное значение в связи с расширением применения релятивистских квантовых уравнений в актуальных задачах квантовой теории. Данная работа основана на статье [6] и также является её логическим продолжением.

Описание метода. Уравнение Дирака (2+1) в искривленном пространстве времени определяется путём введения соответствующих матриц Дирака, спинорной связности и обобщённого оператора импульса. Матрицы Дирака определяются как

$$\gamma^{\mu}(x) = e^{\mu}_{\alpha}(x)\hat{\gamma}^{\alpha},$$

где $\hat{\gamma}^0 = \sigma_3, \hat{\gamma}^1 = is\sigma_1, \hat{\gamma}^2 = \sigma_2$, и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ матрицы Паули.

Спинорная связность Γ_{μ} (предполагается бесследовой) обеспечивает ковариантное дифференцирование спиноров. Обобщенный оператор импульса определяется как $\mathrm{P}_{\nu} = p_{\nu} - \mathrm{A}_{\nu}$, $p_{\nu} = i(\nabla_{\nu} + \Gamma_{\nu})$, где A_{ν} -компоненты векторного потенциала внешнего электромагнитного поля.

Уравнение Дирака для частицы массой m в (2+1) пространстве-времени с внешним электромагнитным потенциалом выглядит следующим образом: $H\psi = 0, H = \gamma^{\mu}\mathrm{P}_{\mu} - m.$

Линейный дифференциальный оператор $X = X^{\nu}\mathrm{P}_{\nu} + \chi$ первого порядка с матричными коэффициентами переводит каждое решение уравнения Дирака в решение этого уравнения; X^{ν} и χ это матричные функции от x. Определяющее уравнение для оператора симметрии X можно записать в виде $[X, H] = \Psi H$. Здесь через Ψ обозначили множитель оператора Лагранжа, имеющий вид $\Psi = \Psi^{\nu}\mathrm{P}_{\nu} + \overline{\Psi}$, где Ψ^{ν} и $\overline{\Psi}$ это матричные функции от x.

Операторы X, которые удовлетворяют определяющему уравнению, образуют алгебру Ли L. Ясно, что любой оператор $Y = RH$ является решением с $\Psi = [R, H]$, где R это линейный дифференциальный оператор. Множество таких операторов Y образует идеал N в алгебре Ли L: $[Y, X] = ([R, X] - R\Psi)H$.

Операторы Y из идеала N не несут никакой информации об уравнении Дирака и его решениях. Такие симметрии мы называем тривиальными. Нас интересуют элементы фактор-алгебры M=L/N, которые мы будем называть нетривиальными симметриями.

Таким образом, подставляя выражения оператора симметрии и множителя Лагранжа в определяющее уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях обобщенного оператора импульса P_ν, получаем определяющие уравнения в терминах матричных функций. Далее раскладываем матричные функции по базису через гладкие скалярные функции от x и как следствие определяем наш оператор симметрии в этой терминологии. В массивном случае операторы симметрии для уравнения (2+1) Дирака представлены в терминах векторов Киллинга, а спиновые операторы с матричными коэффициентами при производных могут быть удалены из операторов симметрии без потери общности.

Результаты. Были получены определяющие уравнения для уравнения Дирака в (2+1)-мерном многообразии в классе линейных дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами, а также в классе линейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами. Получена система уравнений, соответствующая коэффициентам разложения определяющих уравнений по степеням обобщённого оператора импульса.

Заключение. Полученные определяющие уравнения определяют оператор симметрии, а полный набор операторов симметрии обеспечивает разделение переменных в уравнении Дирака в (2+1)-мерном пространстве, аналогично (3+1)-мерному случаю. Определяющие уравнения всегда линейны, а множество их решений образует алгебру симметрий рассматриваемого уравнения.

Для построения точных решений уравнения Дирака обычно используется метод разделения переменных. Внешние электромагнитные поля, допускающие разделение переменных в уравнении Дирака и Клейна – Гордона перечислены в [7, 8]. В ссылках [9] представлен новый метод, названный методом некоммутативного интегрирования, который существенно использует алгебру Ли L дифференциальных операторов симметрии первого порядка. Отметим, что этот метод позволяет найти точные решения в тех случаях, когда уравнение Дирака не допускает разделения переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fradkin E.S., Gitman D.M., Shvartsman Sh.M. Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum.− Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, London, 1991. − P. 1-288.
2. Castro Neto H., Guinea F., Peres N. M. R., Novoselov K. S. and Geim A. K. The electronic properties of graphene// Rev. Mod. Phys. – 2009. − V. 81.−P. 109-162.
3. Vozmediano M. A. H., Katsnelson M. I., Guinea F. Gauge fields in graphene// Physics Reports. − 2010. − V. 496.−P. 109-122.
4. Katsnelson M.I. Graphene: Carbon in two dimensions//Cambridge University Press. − 2012. −V.10.−P. 20-27.
5. Guclu A.D., Potasz P., Korkusinski M., Hawrylak P. Graphene Quantum Dots.− Springer Heidelberg, 2014. − P. 172.
6. Breev A.I., Shapovalov A.V. Symmetry operators and separation of variables in the (2 + 1)-Dirac equation with external electromagnetic field//Mathematical Physics.− 2017.− V.15.− P. 2-8 .
7. Bagrov V.G., Gitman D.M. Exact solutions of relativistic wave equations.− Dordrecht: Kluwer, 1990. − P. 7-10.
8. Bagrov V.G., Gitman D.M. The Dirac equation and its Solutions.− Boston: De Gruyter, 2014. − P. 1-6.
9. Shapovalov A.V., Shirokov I.V. Noncommutative integration of linear differential equations. Theor. Math.Phys. − 1995.− V.104.− P. 921-934.