Известия вузов. Математика
2018, № 9, с. 21–28

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

О.В. ИВАНЕЦ, В.М. МИСЯКОВ

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С ДОСТАТОЧНО π-РЕГУЛЯРНЫМ КОЛЬЦОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Аннотация. Понятие π-регулярного кольца эндоморфизмов абелевой группы, обобщающее понятие регулярного кольца эндоморфизмов, было введено в работах Л. Фукса и К. Рангасвами. Они описали периодические абелевы группы, имеющие π-регулярные кольца эндоморфизмов. Нашли некоторые необходимые условия для абелевой группы иметь π-регулярное кольцо эндоморфизмов. В данной статье исследуются абелевы группы с достаточно π-регулярным кольцом эндоморфизмов — подкласс абелевых групп, обладающих π-регулярным кольцом эндоморфизмов. Найдены некоторые необходимые и достаточные условия для произвольных абелевых групп иметь достаточно π-регулярное кольцо эндоморфизмов.

Ключевые слова: абелева группа, достаточно π-регулярное кольцо эндоморфизмов.

УДК: 512.541

Данная статья связана с проблемой 7 ([1]): “описать редуцированные смешанные абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых регулярны”. Напомним, что кольцо R называется регулярным (π-регулярным), если для каждого элемента $x \in R$ существует элемент $y \in R$ такой, что $xyx = x$ ($x^m y x^m = x^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, зависящего от x). Заметим, что основные исследования по изучению абелевых групп, имеющих регулярное (π-регулярное) кольцо эндоморфизмов, связаны с работами К. Рангасвами [2], Л. Фукса и К. Рангасвами [3], которые свели изучение таких групп к редуцированным группам. Подробное изложение этих результатов имеется также в монографиях [4] и [5]. Описание редуцированных групп конечного ранга без кручения, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, было предложено С. Глазом и В. Виклессом в работе [6]. Некоторые необходимые и достаточные условия редуцированной абелевой группы иметь регулярное кольцо эндоморфизмов были найдены в [7]. Абелевы группы, имеющие регулярный центр кольца эндоморфизмов, изучались в работах [7] и [8]. В теореме 1 настоящей работы дается некоторое описание абелевых групп, имеющих достаточно π-регулярное кольцо эндоморфизмов.

Все группы, встречающиеся в работе, абелевы. Введем следующие обозначения: $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, прямую сумму и произведение групп (колец) обозначаем символами $\bigoplus$ и $\times$ или $\prod$ соответственно, $T(X)$ — периодическая часть группы X, $T_p(X)$ — p-компонента $T(X)$, $E(X)$ — кольцо эндоморфизмов группы X, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — группа гомоморфизмов из группы X в группу Y, $X[p^m] = \{a \in X \mid p^m a = 0\}$, $C(R)$ — центр кольца R, (m, n) — наибольший общий делитель целых чисел m и n, P — множество всех простых чисел, $P(X) = \{p \in P \mid T_p(X) \neq 0\}$. Все понятия, которые не поясняются здесь, являются стандартными их можно найти, например, в монографиях [4], [5] и [9].

Определение 1. Кольцо R будем называть достаточно π-регулярным, если для каждого элемента $0 \neq x \in R$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и элемент $y \in R$ такие, что $x^m \neq 0$ и $x^m y x^m = x^m$.

Поступила 10.05.2017

Замечание 1. Из определений достаточно π-регулярности, π-регулярности и регулярности колец следует, что класс групп, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов содержится в классе групп, обладающих достаточно π-регулярным кольцом эндоморфизмов, который в свою очередь является подклассом групп, имеющих π-регулярное кольцо эндоморфизмов.

Лемма 1. *Для группы G следующие условия эквивалентны*:

1) *$E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо*;
2) *для любого $0 \neq \alpha \in E(G)$ такого, что $\alpha^m \neq 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ следует, что $\operatorname{im} \alpha^m$ и $\ker \alpha^m$ — прямые слагаемые группы G.*

Доказательство. 1)⇒2). Пусть $E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо. Тогда для любого $0 \neq \alpha \in E(G)$ такого, что $\alpha^m \neq 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ существует $\beta \in E(G)$ со свойством $\alpha^m\beta\alpha^m = \alpha^m$. Справедливы включения

$$\operatorname{im} \alpha^m = \operatorname{im} \alpha^m\beta\alpha^m \subseteq \operatorname{im} \alpha^m\beta \subseteq \operatorname{im} \alpha^m, \quad \ker \alpha^m \subseteq \ker \beta\alpha^m \subseteq \ker \alpha^m\beta\alpha^m = \ker \alpha^m.$$

Следовательно, имеем $\operatorname{im} \alpha^m = \operatorname{im} \alpha^m\beta$ и $\ker \alpha^m = \ker \beta\alpha^m$. Так как $\alpha^m\beta$ и $\beta\alpha^m$ — идемпотенты кольца $E(G)$, то $\operatorname{im} \alpha^m$ и $\ker \alpha^m$ — прямые слагаемые группы G.

Покажем, что 2)⇒1). Допустим, что $0 \neq \alpha \in E(G)$ и $G = A \bigoplus C = B \bigoplus D$, где C, D — некоторые подгруппы, $A = \operatorname{im} \alpha^m$, $B = \ker \alpha^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ такого, что $\alpha^m \neq 0$. Так как $\alpha^m(B) = 0$, то $\alpha^m|_D$ является изоморфизмом группы D на группу A. Следовательно, существует $\beta \in E(G)$, аннулирующий C и обратный к $\alpha^m|_D$. Тогда для произвольного $a \in G$ такого, что $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in B$, $a_2 \in D$, имеем

$$(\alpha^m\beta\alpha^m)(a) = (\alpha^m\beta\alpha^m)(a_2) = \alpha^m(a_2) = \alpha^m(a_1) + \alpha^m(a_2) = \alpha^m(a). \qquad \square$$

Лемма 2. *Для группы G следующие условия эквивалентны*:

1) *$C(E(G))$ — достаточно π-регулярное кольцо*;
2) *для любого $0 \neq \alpha \in C(E(G))$ такого, что $\alpha^m \neq 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, следует $G = \operatorname{im} \alpha^m \bigoplus \ker \alpha^m$*;
3) *для любого $0 \neq \alpha \in C(E(G))$ такого, что $\alpha^m \neq 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, следует $\operatorname{im} \alpha^m$ и $\ker \alpha^m$ — прямые слагаемые группы G с единственными дополнениями.*

Доказательство того, что 1)⇒2) аналогично доказательству этой импликации в лемме 1. Очевидно, 2)⇒3). Покажем, что 3)⇒1). Допустим $\alpha \in C(E(G))$ и $G = A \bigoplus C = B \bigoplus D$, где C, D — некоторые подгруппы, $A = \operatorname{im} \alpha^m$, $B = \ker \alpha^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ такого, что $\alpha^m \neq 0$. Так как $\alpha^m(B) = 0$, то $\alpha^m|_D$ является изоморфизмом группы D на группу A. Следовательно, существует $\beta \in E(G)$, аннулирующий C и обратный к $\alpha^m|_D$.

Покажем, что $\beta \in C(E(G))$. Пусть $\varphi \in E(G)$ и $x \in G$, тогда $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in A$, $x_2 \in C$. Следовательно, $(\varphi\beta)(x) = \varphi(\beta(x_1 + x_2)) = \varphi(\beta(x_1))$. Так как $x_1 \in A$, то существует такой элемент $a_1 \in D$, что $\alpha^m(a_1) = x_1$. Поскольку D — единственное дополнение к подгруппе B, то D — вполне характеристическая подгруппа в G ([9], следствие 9.7). Тогда имеем

$$(\varphi\beta)(x_1) = \varphi(\beta(\alpha^m(a_1))) = \varphi(a_1) = (\beta\alpha^m)(\varphi(a_1)) = \\ = \beta(\varphi(\alpha^m(a_1))) = \beta(\varphi(x_1)) + \beta(\varphi(x_2)) = (\beta\varphi)(x).$$

Пусть $a \in G$, тогда $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in B$, $a_2 \in D$. Следовательно, $(\alpha^m\beta\alpha^m)(a) = (\alpha^m\beta\alpha^m)(a_2) = \alpha^m(a_2) = \alpha^m(a_1) + \alpha^m(a_2) = \alpha^m(a)$. $\square$

Следствие 1. Пусть G — группа. Если $E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо, то $C(E(G))$ достаточно π-регулярен.

Доказательство. Действительно, для произвольного $0 \neq \alpha \in C(E(G))$ из достаточно π-регулярности кольца $E(G)$ следует существование $m \in \mathbb{N}$ такого, что $\alpha^m \neq 0$, $\ker \alpha^m$ и $\operatorname{im} \alpha^m$ —

прямые слагаемые группы G (лемма 1). Тогда $C(E(G))$ — достаточно π-регулярное кольцо по лемме 2. □

Следствие 2. Кольцо эндоморфизмов любого прямого слагаемого группы с достаточно π-регулярным кольцом эндоморфизмов достаточно π-регулярно.

Доказательство. Пусть группа $G = A \bigoplus B$ имеет достаточно π-регулярное кольцо эндоморфизмов. Рассмотрим произвольное $0 \neq \alpha \in E(A)$ и $\pi : G \to A$ — канонический эпиморфизм. Тогда $0 \neq \alpha\pi \in E(G)$ и из достаточно π-регулярности кольца $E(G)$ следует существование $m \in \mathbb{N}$ и $\beta \in E(G)$ таких, что $0 \neq (\alpha\pi)^m$ и $(\alpha\pi)^m\beta(\alpha\pi)^m = (\alpha\pi)^m$. Тогда для произвольного $a \in A$ выполняются следующие равенства: $(\alpha\pi)^m(a) = (\alpha^m\pi^m)(a) = \alpha^m(a)$. Пусть $\beta' = \pi\beta\pi \in E(A)$. Для произвольного $a \in A$ имеем

$$(\alpha^m\beta'\alpha^m)(a) = (\alpha\pi)^m\beta(\alpha\pi)^m(a) = (\alpha\pi)^m(a) = \alpha^m(a), \quad \text{т. е.} \quad \alpha^m\beta'\alpha^m = \alpha^m.$$ □

Лемма 3. *Кольцо эндоморфизмов делимой группы без кручения достаточно π-регулярно.*

Доказательство. Пусть G — делимая группа, тогда для любого эндоморфизма $0 \neq \alpha$ группы G следует, что $\operatorname{im}\alpha$ как эпиморфный образ группы G является делимой группой, а следовательно, прямым слагаемым группы G. Покажем, что $\ker\alpha$ — делимая подгруппа группы G. Действительно, пусть $g \in \ker\alpha$. Так как G — делимая группа, то существует $b \in G$ такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $nb = g$. Тогда имеем $(n\alpha)(b) = \alpha(g) = 0$. Так как G — группа без кручения, то $\alpha(b) = 0$. Следовательно, $b \in \ker\alpha$. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $g \in \ker\alpha$ в $\ker\alpha$ разрешимо уравнение $nx = g$, т. е. $\ker\alpha$ — делимая подгруппа в группе G. Следовательно, $\ker\alpha$ — прямое слагаемое в группе G и $E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо по лемме 1. □

Лемма 4. *Кольцо эндоморфизмов элементарной группы достаточно π-регулярно.*

Доказательство. Поскольку всякая подгруппа элементарной группы выделяется в ней прямым слагаемым, то достаточная π-регулярность элементарной группы вытекает из леммы 1. □

Далее существенную роль будут играть идеализации бимодулей. Напомним это понятие. Пусть R и S — кольца, M — R-S-бимодуль. Идеализацией бимодуля M называется кольцо, состоящее из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, с обычными для матриц операциями сложения и умножения. Будем обозначать построенное кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

или одной буквой K. Будем отождествлять естественным образом кольца R и S с кольцами

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

соответственно, произведение $R \times S$ — с матрицей

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

и бимодуль M — с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

записываем в виде вектора (r, s). Имеются два канонических сюръективных гомоморфизма колец:

$$K \to R, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to r, \quad K \to S, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to s.$$

Рассматривая кольца эндоморфизмов групп, можем получить идеализацию бимодуля в следующей ситуации. Пусть G — прямая сумма двух групп, $G = B \bigoplus A$, причем B — вполне характеристическое слагаемое, т. е. $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$. Группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, B)$ стандартным способом превращается в $E(B)$-$E(A)$-бимодуль. Следовательно, можно записать идеализацию этого бимодуля:

$$\begin{pmatrix} E(B) & \mathrm{Hom}(A, B) \\ 0 & E(A) \end{pmatrix}.$$

Поскольку кольцо $E(G)$ естественным образом отождествляется с данным кольцом матриц, то кольцо эндоморфизмов $E(G)$ можно считать идеализацией $E(B)$-$E(A)$-бимодуля $\mathrm{Hom}(A, B)$. Более подробно о кольцах формальных матриц можно посмотреть, например, в работе [10].

Лемма 5. *Пусть $G = A \bigoplus B$, где A, B — вполне характеристические подгруппы группы G. Кольцо $E(G)$ достаточно π-регулярно тогда и только тогда, когда $E(A)$, $E(B)$ — достаточно π-регулярные кольца.*

Доказательство. Достаточная π-регулярность колец $E(A)$ и $E(B)$ вытекает из следствия 2.

Обратно. Пусть $E(A)$ и $E(B)$ — достаточно π-регулярные кольца. Покажем, что $E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо. Действительно, для произвольного $0 \neq \alpha \in E(G)$ такого, что $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{smallmatrix}\right)$, где $\alpha_1 \in E(A)$, $\alpha_2 \in E(B)$. Пусть $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$. Тогда из достаточной π-регулярности колец $E(A)$ и $E(B)$ имеем $\alpha_1^{m_1} \neq 0$ и $\alpha_2^{m_2} \neq 0$, а также $\alpha_1^{m_1} = \alpha_1^{m_1} \beta_1 \alpha_1^{m_1}$ и $\alpha_2^{m_2} = \alpha_2^{m_2} \beta_2 \alpha_2^{m_2}$ для некоторых $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Тогда $\alpha_1^{m_1 m_2} = \alpha_1^{m_1 m_2} {\beta_1}^{m_2} \alpha_1^{m_1 m_2}$ и $\alpha_2^{m_2 m_1} = \alpha_2^{m_2 m_1} \beta_2^{m_1} \alpha_2^{m_2 m_1}$.

Следовательно,

$$\alpha^{m_1 m_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{m_1 m_2} {\beta_1}^{m_2} \alpha_1^{m_1 m_2} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{m_2 m_1} {\beta_2}^{m_1} \alpha_2^{m_2 m_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{m_1 m_2} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{m_2 m_1} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1^{m_1 m_2} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{m_2 m_1} \end{pmatrix} = \alpha^{m_1 m_2} \delta \alpha^{m_1 m_2},$$

где $\delta = \left(\begin{smallmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{smallmatrix}\right) \in E(G)$. Остальные случаи также легко проверяются. □

Предложение 1 ([8])**.** *Пусть $G = B \bigoplus A$, где A — редуцированная непериодическая группа, B — делимая группа без кручения. Тогда центр кольца эндоморфизмов группы G можно отождествить с подкольцом поля $\mathbb{Q}$, порожденным единицей и всеми числами $1/p$ такими, что $pG = G$.*

Докажем следующий простой, но важный результат.

Лемма 6. *Пусть G — редуцированная группа и $T(G) \neq 0$, причем $G/T(G)$ — делимая группа, тогда $E(G)$ изоморфно подкольцу кольца $E(T(G))$.*

Доказательство. Рассмотрим кольцевой гомоморфизм $\sigma : E(G) \to E(T(G))$, ставящий в соответствие каждому $\alpha \in E(G)$ его ограничение на $T(G)$. Предположим, что существует ненулевой гомоморфизм $\beta \in E(G)$ такой, что $\beta \in \ker \sigma$. Тогда $\mathrm{im}(\beta)$ является делимой группой (как эпиморфный образ делимой группы $G/T(G)$), что противоречит редуцированности группы G. Следовательно, σ — мономорфизм. □

Определение 2. Подкольцо B кольца A будем называть достаточно π-регулярно разрешимым в кольце A, если для любого $b \in B$ такого, что $b^m \neq 0$ и $b^m \in b^m A b^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, следует существование $n \in \mathbb{N}$ такого, что $b^n \neq 0$ и $b^n \in b^n B b^n$.

Замечание 2. Всякое достаточно π-регулярное подкольцо B в кольце A достаточно π-регулярно разрешимо, причем m может совпадать с n, где m и n определяются как в предыдущем определении.

Доказательство. Действительно, для любого $b{\in}B$ найдется $m{\in}\mathbb{N}$ такой, что $b^m \neq 0$, $b^m \in b^m B b^m$ и, значит, $b^m \in b^m A b^m$. Таким образом, справедливо утверждение: для любого $b \in B$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $b^m \neq 0$, и в силу $b^m \in b^m A b^m$ следует $b^m \in b^m B b^m$. □

Пример 1. Пусть $G = A \oplus Q^+$, где A — редуцированная периодическая группа, Q^+ — группа рациональных чисел. Тогда кольцо $E(G)$ естественным образом отождествляется с кольцом матриц

$$\begin{pmatrix} E(A) & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

а кольца $E(A)$ и $E(Q^+) \cong Q$ соответственно с кольцами матриц

$$\begin{pmatrix} E(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где Q — кольцо рациональных чисел. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

и пусть существует $m \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m E(G) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m.$$

Следовательно, существует элемент

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix} \in E(G)$$

такой, что выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m.$$

Тогда имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r^m r_1 r^m \end{pmatrix}.$$

Поскольку элемент

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix} \in Q,$$

то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m E(Q^+) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^m.$$

Таким образом, подкольцо $E(Q^+)$ является достаточно π-регулярно разрешимым в кольце $E(G)$.

Замечание 3. Пусть B — подкольцо кольца A. Эквивалентны утверждения:

1) для любого $b \in B$ такого, что $b^m \neq 0$, и $b^m \in b^m A b^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, следует существование $n \in \mathbb{N}$ такого, что $b^n \neq 0$, и $b^n \in b^n B b^n$.
2) для любого $b \in B$ такого, что $b^m \neq 0$, и в кольце A разрешимо уравнение $b^m = b^m x b^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, следует существование $n \in \mathbb{N}$ такого, что $b^n \neq 0$, и в подкольце B разрешимо уравнение $b^n = b^n x b^n$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $b \in B$ и существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $b^m \neq 0$, и разрешимо уравнение $b^m \in b^m x b^m$ в кольце A. Тогда $b^m \in b^m A b^m$ и, как вытекает из условия, существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $b^n \neq 0$, и $b^n \in b^n B b^n$. Следовательно, в подкольце B разрешимо уравнение $b^n = b^n x b^n$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $b \in B$ и существует $m \in \mathbb{N}$ такой, что $b^m \neq 0$, и $b^m \in b^m A b^m$. Тогда в кольце A разрешимо уравнение $b^m = b^m x b^m$. По условию найдется $n \in \mathbb{N}$ такой, что $b^n \neq 0$, и в подкольце B разрешимо уравнение $b^n = b^n x b^n$. Следовательно, $b^n \in b^n B b^n$. $\square$

Докажем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Для группы G справедливы утверждения*:

1) *если G — нередуцированная группа, то $E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо тогда и только тогда, когда $G = T(G) \bigoplus D$, где D — делимая без кручения и $T(G)$ — элементарная группы*;
2) *если G — редуцированная группа, то $E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются условия*
   a) *$T(G)$ — элементарная группа,*
   b) *$E(G)$ изоморфно достаточно π-регулярно разрешимому подкольцу кольца $E(T(G))$.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $G = A \bigoplus D$, где A — редуцированная, $0 \neq D$ — делимая группы. Допустим, что $T(G) = 0$. Пусть n — произвольное натуральное число. Поскольку $n \in E(G)$, то из достаточной π-регулярности $E(G)$ следует $G = \operatorname{im} n^m \bigoplus \ker n^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. По предположению G — группа без кручения, поэтому $\ker n^m = 0$ и $G = \operatorname{im} n^m = n^m G$, т. е. G — делимая группа без кручения. Поскольку нулевая группа является элементарной, получаем необходимое утверждение.

Пусть $T(G) \neq 0$. Тогда умножение на фиксированное простое число p является эндоморфизмом из $E(G)$. В силу достаточной π-регулярности кольца $E(G)$ $\ker p^m = T_p(G)[p^m]$ выделяется прямым слагаемым в G, но это возможно, если только $T_p(G)$ совпадает с $T_p(G)[p^m]$. Значит, $T_p(G)$ — ограниченная группа. Поскольку ограниченная группа не является делимой, то D — делимая группа без кручения, причем $T(G) = T(A)$.

Допустим, что $A \neq T(A)$. Тогда по предложению 1 кольцо $C(E(G))$ изоморфно подкольцу L поля $\mathbb{Q}$, которое порождается единицей и всеми числами $1/p$ такими, что $pG = G$. Если предположить, что $L \neq \mathbb{Q}$, то найдется простое число $q \in L$ такое, что $1/q \notin L$. Из достаточной π-регулярности кольца L следует существование элемента $x \in L$, удовлетворяющего уравнению $q^m x q^m = q^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $x = 1/q^m \in L$ и, следовательно, $1/q \in L$, что противоречит допущению. Таким образом, $C(E(G)) \cong \mathbb{Q}$ и $pG = G$ для любого простого числа p, но это невозможно ввиду редуцированности прямого слагаемого $A \neq 0$ в G. Значит, $A = T(A)$ и $T_p(A)$ — ограниченная группа для всякого $p \in P(G)$.

Покажем, что $T_p(A)$ — элементарная группа для всякого $p \in P(G)$. Допустим противное, т. е. пусть она содержит циклическое прямое слагаемое B порядка p^k, где $k > 1$. Поскольку

$T_p(A)$, как ограниченная и сервантная подгруппа в G, выделяется в G прямым слагаемым, то и подгруппа B — прямое слагаемое в G и поэтому $E(B)$ — достаточно π-регулярное кольцо по следствию 2. Так как $p^{k-1} \in E(B)$ и $(p^{k-1})^2 = 0$, то $\operatorname{im} p^{k-1} = B[p]$ — прямое слагаемое в B (лемма 1), что невозможно.

Достаточность. Достаточную π-регулярность кольца $E(G)$ получаем из лемм 3–5.

2) *Необходимость.* Пусть G — редуцированная группа и $E(G)$ — достаточно π-регулярное кольцо. Тогда для любого простого числа p, некоторых $m_p \in \mathbb{N}$ и $\beta \in E(G)$, имеем $p^{m_p} \neq 0$ и $p^{m_p} = p^{m_p}\beta p^{m_p}$. Таким образом, для любого $g \in G$ выполняется равенство $p^{m_p}(g) = p^{m_p}\beta p^{m_p}(g)$, т. е. $p^{m_p}G = p^{2m_p}G$.

Покажем, что $p^{m_p}G$ — p-делимая группа. Пусть $B = p^{m_p}G$ и $b \in B$. Тогда существуют $a, d \in G$ такие, что $b = p^{m_p}a = p^{2m_p}d = p(p^{m_p-1}b_1)$, где $b_1 = p^{m_p}d \in B$. Поскольку $p^{m_p-1}b_1 \in B$, то для любого $b \in B$ в группе B разрешимо уравнение $b = px$, т. е. $B = pB$ и, значит, G не может быть группой без кручения.

Заметим, что $p^{m_p}g = 0$ для любого $g \in T_p(G)$. Действительно, пусть $o(g) = p^k$, где $k > m_p$ (если $k \leq m_p$, то утверждение очевидно). Поскольку $p^{m_p}g = (p^{2m_p}\beta)(g) = (p^{3m_p}\beta^2)(g) = \dots = (p^{tm_p}\beta^{t-1})(g)$, где $t \in \mathbb{N}$ и $tm_p \geq k$, то $p^{m_p}g = (p^{tm_p-k}\beta^{t-1})(p^k g) = 0$.

Таким образом, $T_p(G)$ является сервантной и ограниченной подгруппой в группе G. Тогда $T_p(G)$ — прямое слагаемое группы G ([9], теорема 27.5), т. е. $G = T_p(G) \oplus p^{m_p}G$ для каждого $p \in P(G)$. Отсюда имеем, что группа $G/T(G)$ является эпиморфным образом группы $G/T_p(G)$, которая изоморфна p-делимой группе $p^{m_p}G$ для каждого простого числа p. Следовательно, $G/T(G)$ — делимая группа.

Доказательство элементарности подгруппы $T_p(G)$ проводится аналогично доказательству элементарности группы $T_p(A)$ (см. доказательство необходимости в п. 1)). Таким образом, условие a) выполнено.

b) Поскольку $G/T(G)$ — делимая группа, то в силу леммы 6 $E(G)$ изоморфно подкольцу кольца $E(T(G))$. Тогда из замечания 2 получаем необходимое утверждение.

Достаточность. Из выполнения условия b) следует, что $E(G)$ изоморфно достаточно π-регулярно разрешимому подкольцу кольца $E(T(G))$. Отождествим $E(G)$ с его образом при этом изоморфизме. Рассмотрим произвольный $0 \neq \delta \in E(G)$. Поскольку $T(G)$ — элементарная группа, то $E(T(G))$ — достаточно π-регулярное кольцо по лемме 4. Значит, найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta^m \neq 0$ и $\delta^m \in \delta^m E(T(G))\delta^m$. Так как кольцо $E(G)$ достаточно π-регулярно разрешимо в кольце $E(T(G))$, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta^n \neq 0$ и $\delta^n \in \delta^n E(G)\delta^n$. $\square$

Пример 2. Пусть A — циклическая группа порядка p^2, тогда умножение на простое число p является ненулевым эндоморфизмов этой группы, причем $\operatorname{im} p = pA$, который не выделяется прямым слагаемым в группе A. Следовательно, $E(A)$ не является достаточно π-регулярным кольцом по лемме 1, но оно π-регулярно ([4], теорема 112.5).

Литература

[1] Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. *Endomorphism rings of abelian groups*, J. Math. Sci. **110** (3), 2683–2745 (2002).

[2] Rangaswamy K.M. *Abelian groups with endomorphism images of special types*, J. Algebra **6** (3), 271–280 (1967).

[3] Fuchs L., Rangaswamy K.M. *On generalized regular rings*, Math. Z. **107** (1), 71–81 (1968).

[4] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 2 (Мир, М., 1977).

[5] Fuchs L. *Abelian groups* (Springer, New York, 2015).

[6] Glaz S., Wickless W. *Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups*, Comm. in Algebra **22** (4), 1161–1176 (1994).

[7] Мисяков В.М. *Абелевы группы с регулярным центром кольца эндоморфизмов*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. **2** (40), 33–36 (2016).

[8] Карпенко А.В., Мисяков В.М. *О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы*, Фундамент. и прикл. матем. **13** (3), 39–44 (2007).
[9] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1 (Мир, М., 1974).
[10] Крылов П.А., Туганбаев А.А. *Формальные матрицы и их определители*, Фундамент. и прикл. матем. **19** (1), 65–119 (2014).

Олеся Владимировна Иванец

Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,

e-mail: olesiy_95@mail.ru

Виктор Михайлович Мисяков

Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,

e-mail: mvm@mail.tsu.ru

O.V. Ivanets and V.M. Misyakov

Abelian groups with enough π-regular ring of endomorphisms

Abstract. The concept of π-regular endomorphism ring of an abelian group, which generalizes the concept of regular endomorphism ring was introduced in the works of L. Fuchs and K. Rangaswamy. They described a periodic abelian groups with π-regular endomorphism rings and found some necessary conditions for an abelian group with π-regular endomorphism rings. In the present paper we study the abelian groups with enough π-regular endomorphism ring (i. e., a subclass of abelian groups with π-regular endomorphism ring) and find the necessary and sufficient conditions for arbitrary abelian groups with enough π-regular endomorphism ring.

Keywords: abelian group, enough π-regular endomorphism ring.

Olesya Vladimirovna Ivanets

Tomsk State University,
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050 Russia,

e-mail: olesiy_95@mail.ru

Viktor Mikhajlovich Misyakov

Tomsk State University,
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050 Russia,

e-mail: mvm@mail.tsu.ru