

УДК 537.874

В.В. Фисанов

Законы геометрической оптики для изотропных «левых» метаматериалов

Рассмотрены закономерности явления отрицательного преломления прямых и обратных плоских электромагнитных волн в рамках геометрической оптики при наличии «левых» изотропных метаматериалов с двумя отрицательными проницаемостями. Сопоставлены различные скалярные формы закона Снеллиуса, записанные без привлечения термина «отрицательный показатель преломления». Приведена формула для обобщённого лучевого закона преломления с использованием идентификатора типа волны. Получены формулы для угла преломления в зависимости от угла отклонения луча и для положения мнимого источника в случае отрицательного преломления. В соответствии с правилом Гамильтона и Мак-Куллага рассмотрены возможные лучевые траектории для одной поверхности раздела сред. Опираясь на принцип наименьшего времени Ферма, применительно к неплюсской границе получены обобщённые биполярные дифференциальные соотношения, которые различаются для действительных и мнимых изображений. Эти соотношения поддаются интегрированию и могут быть взяты для расчёта преломляющих и отражающих поверхностей со свойствами фокусировки применительно к антеннам СВЧ с использованием метаматериалов.

Ключевые слова: электромагнитные метаматериалы, прямая и обратная плоские волны, геометрическая оптика, световой луч, закон Снеллиуса, показатель преломления, действительные и мнимые изображения.

doi: 10.21293/1818-0442-2018-21-1-42-46

Электромагнитные метаматериалы находятся в фокусе внимания исследователей с начала 2000-х годов. Эти искусственные среды являются композитными структурами. При макроскопическом электродинамическом описании они нередко рассматриваются как сплошные изотропные среды, характеризующиеся эффективными значениями диэлектрической и магнитной проницаемости. Наиболее интригующими свойствами обладают радиопрозрачные материалы с обеими отрицательными проницаемостями, на которые ранее обратил внимание В.Г. Веселаго [1, 2]. Именно эти «левые» среды Веселаго обычно подразумеваются под метаматериалами в узком смысле данного термина. Они характеризуются также показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, которому принято приписывать *отрицательное* значение, следуя работам Веселаго. Нормальные плоские волны в «левых» средах являются волнами обратного типа в том смысле, что у них направления распространения фазового фронта и переноса энергии прямо противоположны, в отличие от прямых объёмных волн в обычных «правых» средах, где эти направления совпадают.

Геометрическая оптика является математической дисциплиной, которая находит применение не только в задачах распространения света и для разработки оптических устройств, когда длина волны мала (стремится к нулю). Она служит основой квазиоптики – геометрической теории дифракции, других методов высокочастотной электродинамики. Геометрооптические методы хорошо зарекомендовали себя при расчёте антенн диапазона СВЧ [3]. Геометрическая оптика оперирует понятием луча как линии, вдоль которой происходит распространение энергии волны. Показатель преломления в геометрической оптике, как и вообще в оптике, принимается положительной величиной (только как специальный приём, в отдельных случаях ему приписывают знак

«минус»). Обратные волны до недавнего времени в геометрической оптике не рассматривались.

Вещества с отрицательными значениями ϵ и μ представляют интерес для линзовых систем [4, 5], в антенных [6] и других приложениях. Для того чтобы распространить методы геометрической оптики на «левые» среды, требуется внести ясность в отношении знака показателя преломления и принять во внимание явление отрицательного преломления, которое возникает на поверхности раздела обычной среды и среды Веселаго.

Следует заметить, что необычное направление отрицательного преломления не является физически «неправильным»; как виртуальное оно возникает в результате применения принципа обратимости световых лучей к обычному (положительному) преломлению. Если изменить направления распространения отражённого и преломлённого лучей на противоположные направления, то два обращённых луча сходятся в одной точке на поверхности сред и затем складываются в луч с амплитудой, равной амплитуде первоначальной падающей волны. Дополнительные лучи – образованный отражением обращённого преломлённого луча и образованный преломлением обращённого отражённого луча – распространяются по линии отрицательного преломления для сопряжённой среды и взаимно компенсируются [7]. (Сопряжёнными называют среды с единым значением показателя преломления, различающиеся типом распространяющихся объёмных волн.)

Две формы закона Снеллиуса

Скалярный вариант закона преломления волн на плоской поверхности раздела двух изотропных сред с положительными показателями преломления n_1 и n_2 (закон В. Снеллиуса) имеет вид

$$n_1 \sin \alpha = \begin{cases} n_2 \sin \beta \\ n_2 \sin(\pi - \beta) \end{cases}, \quad (1)$$

где первая строка в правой части формулы (1) относится к обычной форме закона Снеллиуса (положительное преломление), а вторая строка – к другой форме, описывающей отрицательное преломление. Острые положительные углы α (угол падения) и β (угол преломления) измеряются между направлением волнового вектора, а также вектора рефракции падающей и, соответственно, преломлённой волны и положительным направлением нормали (из первой среды во вторую) к поверхности раздела. Тупой смежный угол $(\pi - \beta)$ обозначает направление вектора фазовой скорости обратной волны, противоположное ему направление луча отличается на величину π . Следовательно, закон преломления с участием луча обратной волны должен гласить

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin(2\pi - \beta) = -n_2 \sin \beta. \quad (2)$$

В формуле (2) углы и показатели преломления являются *положительными* величинами. Объединяя формулы (1) и (2), можно записать обобщённый лучевой закон Снеллиуса в виде

$$n_1 \sin \alpha = an_2 \sin \beta, \quad (3)$$

где применён идентификатор типа волны $a = \text{sgn} \tilde{\epsilon} = \text{sgn} \tilde{\mu}$, а $\tilde{\epsilon} = \epsilon_2 / \epsilon_1$ и $\tilde{\mu} = \mu_2 / \mu_1$ являются относительными проницаемостями. Именно величину an_2 Веселаго называет показателем преломления, см. формулу (9) в [1]. При равенстве показателей преломления контактирующих сред из формулы (3) следует, что $\beta = -\alpha$ при значении $a = -1$ (угол отрицательного преломления равен углу падения, как в плоской линзе Веселаго–Пендри [8]), и $\beta = \alpha$ при значении $a = +1$ (преломление отсутствует, среды являются идентичными). Формула (3) описывает и закон зеркального отражения. Если, считая угол отражения тупым, положить $an_2 = n_1$, то получим $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Эта формула приводится к традиционному виду $\sin \alpha = \sin \alpha'$, где $|\alpha'| = \alpha$ – острый угол отражения, который измеряется от противоположного направления нормали, т.е. если нормаль направлена от границы в сторону среды [9] (обращение направления нормали эквивалентно изменению аргумента синуса на угол π). В этом случае нужно в (3) чисто формально положить $an_2 = -n_1$.

Отклонение луча при преломлении

В результате положительного преломления происходит отклонение луча от первоначального направления на величину $\delta = \alpha - \beta$. В работе [10] приведена формула вычисления угла падения по заданному отклонению δ для случая $n_2 < n_1$ при положительном преломлении. Здесь даются подобные формулы для направления преломлённого луча β в случае как положительного, так и отрицательного преломления.

Пусть положительное преломление происходит в оптически более плотную среду ($n_2 > n_1$). Преломлённый луч располагается ближе к нормали, раз-

ность $\delta = \alpha - \beta$ является положительной величиной. Закон Снеллиуса (3) в данном случае записывается в виде

$$n_1 \sin(\beta + \delta) = n_2 \sin \beta, \quad (4)$$

откуда следует выражение

$$\beta = \arctg \frac{\sin \delta}{n_2/n_1 - \cos \delta}. \quad (5)$$

Наибольшее отклонение $\delta_{\max} = \arccos(n_1/n_2)$ имеет место при значении угла β , равном критическому углу полного внутреннего отражения. В случае $n_2 < n_1$ разность углов $\delta < 0$, поэтому формула (5) видоизменяется:

$$\beta = \arctg \frac{\sin |\delta|}{\cos \delta - n_2/n_1}.$$

Угол отклонения при положительном преломлении δ связан с углом отклонения при отрицательном преломлении Δ соотношением $\delta = \pi - \Delta - 2\beta$, используя которое, формулу (4) приведём к виду

$$n_1 \sin(\beta + \Delta) = n_2 \sin \beta. \quad (6)$$

Угол отрицательного преломления вычисляется по формуле

$$\beta = \arctg \frac{\sin \Delta}{n_2/n_1 - \cos \Delta}, \quad (7)$$

она отличается от (5) просто заменой символа отклонения. Обращение знаменателя в нуль, которое возможно в случае $n_2 < n_1$, соответствует критическому преломлению под углом $\beta = \pi/2$.

Законы Снеллиуса и принцип Ферма

В геометрической оптике законы отражения и преломления являются локальными, поэтому остаются справедливыми и для неплоской границы. Они следуют из принципа наименьшего времени, который сформулировал П. Ферма.

На рис. 1 изображено сечение поверхностей показателей преломления двух сред (окружности радиусов n_1 и n_2), которые являются длинами векторов рефракции волн в этих средах. В соответствии с правилом У. Гамильтона и Дж. Мак-Куллага [11] концы векторов рефракции всех участвующих в актах преломления волн лежат на двух прямых, проведённых нормально к поверхности раздела и расположенных симметрично относительно точки падения O .

Точки пересечения окружностей и прямых, обозначенные начальными (строчными и прописными) буквами латинского алфавита, являются началом или концом траектории светового луча, которая проходит через точку O на границе сред и подчиняется закону Снеллиуса. Например, если преломление происходит в оптически более плотную среду, то траекторией положительного преломлённого луча является путь aOD , отрицательно преломлённого луча – путь aOC , отражённого луча – путь aOB . При отрицательном преломлении, когда падающий

луч принадлежит прямой волне, нарастание фазового фронта происходит по трассе aOB .

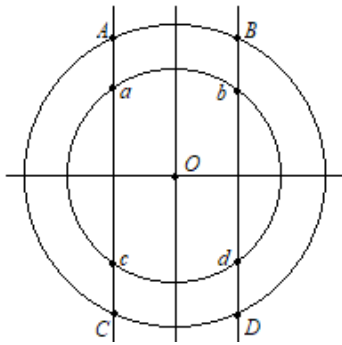


Рис. 1. Начальные и конечные точки лучевых траекторий для явлений преломления и отражения волн

Если преломление происходит в оптически менее плотную среду, то положительное (отрицательное) преломление происходит по пути AOb (AOc).

Из рис. 1 следует, что возможны и траектории лучей, которые являются симметричными вышеуказанным траекториям относительно нормали, проходящей через точку O .

Рассмотрим лучевые траектории с позиций геометрической теории оптических изображений. Для трассы положительного преломления aOD точка D является действительным стигматическим изображением точки a , которая является источником гомотрического пучка лучей. Обозначим длину плеча aO через r , а длину плеча OD – через ρ . Предположим, что преломление происходит в точке O' , которая расположена на границе сред немного правее точки O . Плечо aO' удлинится по сравнению с aO , получив положительное приращение dr , а плечо $O'D$ окажется короче плеча OD на величину $d\rho$. По принципу Ферма, оптическая длина истинного пути (aOD) и виртуального пути ($aO'D$) одинакова:

$$n_1 r + n_2 \rho = n_1 (r + dr) + n_2 (\rho - d\rho),$$

откуда следует

$$n_1 dr - n_2 d\rho = 0. \quad (8)$$

Формула (8) не изменится, если точка O' окажется левее точки O . Для трассы отрицательного преломления aOc малое смещение виртуальной точки преломления O' вправо от точки O приведёт к укорочению плеча aO' и плеча $O'C$:

$$n_1 r + n_2 \rho = n_1 (r - dr) + n_2 (\rho + d\rho),$$

поэтому вместо (8) получается соотношение

$$n_1 dr + n_2 d\rho = 0. \quad (9)$$

При акте отражения по трассе aOb точка c , зеркально симметричная точке a , является мнимым источником. На плече cO эквивалентной трассы луч является мнимым, а его оптическая длина (cO) отрицательной [12]. При малом смещении точки отражения вправо плечо cO' удлинится, а плечо $O'b$ укорачивается:

$$-n_1 r + n_2 \rho = -n_1 (r + dr) + n_2 (\rho - d\rho).$$

Приращения соотносятся как

$$dr + d\rho = 0. \quad (10)$$

Формула (10) выглядит как частный случай формулы (9), которая, в свою очередь, получается из (8) заменой знака у n_2 . Таким образом, можно ввести понятие мнимого источника в сопряжённой среде. Если точка источника в пространстве предметов находится на расстоянии h от границы сред, а точка мнимого источника в сопряжённом пространстве – на расстоянии H от границы, то между ними имеет место связь

$$htg\alpha = Htg\beta. \quad (11)$$

Два тесно примыкающих луча, которые исходят из точки источника и падают на преломляющую поверхность, вновь пересекаются в точке изображения. В зависимости от формы граничной поверхности изображение может быть действительным или мнимым. В последнем случае оно располагается по одну сторону с точкой источника.

При положительном преломлении действительному изображению D или d соответствует мнимое изображение B (или b) источника a (или, соответственно, источника A). По принципу постоянства длины оптического пути имеем в случае мнимого изображения:

$$n_1 r - n_2 \rho = n_1 (r + dr) - n_2 (\rho - d\rho),$$

откуда следует соотношение (9). При отрицательном преломлении луча мнимым изображением являются точки A или a на рис. 1. При малом смещении виртуальной траектории от точки O вдоль поверхности раздела происходит удлинение (или укорочение при смещении в противоположном направлении) обеих частей пути до мнимого изображения, вследствие чего имеем:

$$n_1 r - n_2 \rho = n_1 (r + dr) - n_2 (\rho + d\rho),$$

откуда следует формула (8). Итак, формула (8) соответствует действительному изображению при положительном преломлении и мнимому изображению при отрицательном преломлении. Напротив, формула (9) соответствует мнимому изображению при положительном преломлении и действительному изображению при отрицательном преломлении.

Формулы (8) и (9) допускают детализацию, если применить биполярную систему координат: ассоциировать с точкой источника полярные координаты (r, θ) , а с точкой изображения – полярные координаты (ρ, ϕ) [3, 13]. Принимая во внимание связь между малыми линейными и угловыми приращениями $dr = r d\theta$, $d\rho = \rho d\phi$, формулы можно переписать в виде

$$n_1 r d\theta \mp n_2 \rho d\phi = 0, \quad (12)$$

где знак «минус» указывает на связь с формулой (8), а знак «плюс» – на связь с формулой (9). Вводя относительный показатель преломления $v = n_2/n_1$, формуле (12) придадим вид

$$rd\theta \mp v\rho d\phi = 0, \quad (13)$$

весьма удобный для расчёта одноповерхностных преломляющих линз, которые обладают круговой симметрией [3]. Формула (13) обобщает схему расчёта таких линз на случай, когда контактирующие среды поддерживают волны разного типа. Соотношения вида (13) в ситуациях, характерных для технической реализации антенн СВЧ, поддаются интегрированию и могут быть использованы для расчёта преломляющих и отражающих поверхностей со свойствами фокусировки. При наличии ряда поверхностей формулы вида (13) можно использовать неоднократно, поочерёдно применяя для каждой поверхности [13].

Заключение

«Левые» изотропные среды поддерживают обратные электромагнитные волны, поэтому законы геометрической оптики для них должны быть уточнены и обобщены. Две формы закона Снеллиуса позволили найти аналитические выражения связи между углами отклонения и преломления лучей. С опорой на принцип Ферма к преломлению на неплоской границе выявлены закономерности преломления в сопряжённые среды, которые характеризуются единым показателем преломления, но различаются типом нормальных волн: отмечены соответствия между действительными и мнимыми изображениями, предложена формула для определения положения мнимого источника при отрицательном преломлении.

Обобщённые закономерности геометрической оптики найдут применение для расчёта преломляющих и отражающих поверхностей при наличии волн как прямого, так и обратного типа, в том числе для антенных устройств СВЧ с использованием метаматериалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Научного фонда им. Д.И. Менделеева НИ ТГУ.

Литература

1. Веселаго В.Г. О свойствах веществ с одновременно отрицательными значениями диэлектрической (ϵ) и магнитной (μ) восприимчивостей // Физика твёрдого тела. – 1966. – Т. 8, вып. 12. – С. 3571–3573.
2. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92, вып. 3. – С. 518–526.
3. Корнблит С. СВЧ-оптика. Оптические принципы в приложении к конструированию СВЧ-антенн. – М.: Связь, 1980. – 360 с.
4. Parazzoli C.G. Performance of a negative index of refraction lens / C.G. Parazzoli, R.B. Greegor, J.A. Nielsen, M.A. Thompson, K. Li, A.M. Vetter, M.H. Tanillean, and D.C. Vier // Appl. Phys. Lett. – 2004. – Vol. 84, No. 17. – P. 3232–3234.
5. Beruete M. Planoconcave lens by negative refraction of stacked subwavelength hole arrays / M. Beruete, M. Navarro-Cia, M. Sorolla, and I. Campillo // Optics Express. – 2008. – Vol. 16, No. 13. – P. 9677–9683.
6. Chen Z.N. Metamaterial-based antennas: Engineering designs / Z.N. Chen, X. Qing, J. Shi, Nasimuddin, and

W. Liu // Asia-Pacific Microwave Conference (APMC). – Nanjing: IEEE, 2015. – Vol. 1. – P. 1–3.

7. Шустер А. Введение в теоретическую оптику. – Л.: М.: ОНТИ, 1935. – 376 с.

8. Pendry J.B. Negative refraction makes a perfect lens // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85, No 18. – P. 3966–3969.

9. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2003. – 848 с.

10. Gitin A.V. A simple proof of Damien's theorem and duality in theory of the zero-distance phase front // International J. of Antennas and Propagation. – 2015. – Vol. 2015. – P. 478580-1–478580-10.

11. Фёдоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. – Минск: Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.

12. Сивухин Д.В. Оптика. – М.: Наука, 1985. – 752 с.

13. Корнблит С. Новый подход к геометрической оптике // ТИИЭР. – 1983. – Т. 71, № 4. – С. 27–63.

Фисанов Василий Васильевич

Д-р физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотр. СФТИ при НИ ТГУ, профессор каф. радиофизики Национального исследовательского Томского государственного ун-та (НИ ТГУ) Ленина пр-т, д. 34, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7 (382-2) 41-20-78
Эл. почта: fisanov@mail.tsu.ru

Fisanov V.V.

Laws of geometrical optics for isotropic left-handed metamaterials

Peculiarities of the phenomenon of negative refraction of forward and backward plane electromagnetic waves are considered within the framework of geometric optics in the presence of left-handed isotropic metamaterials with two negative permeabilities. Various scalar forms of the Snell law, recorded without using the term «negative index of refraction», are compared. A formula is given for the generalized law of ray refraction using a wave type identifier. The formulas for the angle of refraction, depending on the angle of ray deviation, and for the position of an imaginary source in the case of negative refraction were derived. In accordance with the Hamilton and MacCullagh rule, possible ray trajectories for one interface are considered. Using the Fermat's least time principle, generalized bipolar differential relations are obtained for the non-planar boundary, which differ for real and imaginary images. These relationships are amenable to integration and can be taken to calculate refractive and reflective surfaces with focusing properties applied to microwave antennas using metamaterials.

Keywords: electromagnetic metamaterials, forward and backward plane waves, geometrical optics, ray of light, Snell's law, refractive index, real and imaginary images.

doi: 10.21293/1818-0442-2018-21-1-42-46

References

1. Veselago V.G. About properties of substances with simultaneously negative values of dielectric and magnetic permeabilities. *Soviet Physics, Solid State*, 1967, vol. 8, no. 12, pp. 2853–2855.
2. Veselago V.G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet Physics Uspekhi*, 1968, vol. 10, no. 4, pp. 509–514.

3. Cornbleet S. *Microwave optics. The Optics of microwave antenna design*. London, Academic Press, 1976. 416 p.
 4. Parazzoli C.G., Greigor R.B., Nielsen J.A., Thompson M.A., Li K., Vetter A.M., Tanillean M.H., Vier D.C. Performance of a negative index of refraction lens. *Appl. Phys. Lett.*, 2004, vol. 84, no. 17, pp. 3232–3234.
 5. Beruete M., Navarro-Cia M., Sorolla M., Campillo I. Planoconcave lens by negative refraction of stacked subwavelength hole arrays. *Optics Express*, 2008, vol. 16, no. 13, pp. 9677–9683.
 6. Chen Z.N., Qing X., Shi J., Nasimuddin, Liu W. Metamaterial-based antennas: Engineering designs. *Proc. of the Asia-Pacific Microwave Conference (APMC)*. Nan-jing, IEEE, 2015, vol. 1, pp. 1–3.
 7. Schuster A. *An introduction to the theory of optics*. London, Edward Arnold, 1935. 376 p.
 8. Pendry J.B. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 18, pp. 3966–3969.
 9. Landsberg G.S. *Optika* [Optics]. Moscow, Fizmatlit publ., 2003. 848 p.
 10. Gitin A.V. A simple proof of Damien's theorem and duality in theory of the zero-distance phase front. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2015, vol. 2015, pp. 478580-1–478580-10.
 11. Fedorov F.I. *Optika anizotropnykh sred* [Optics of anisotropic media]. Minsk, Izd. Akad. Nauk BSSR, 1958. 380 p.
 12. Sivukhin D.V. *Optika* [Optics]. Moscow, Nauka publ., 1985. 752 p.
 13. Cornbleet S. Geometrical optics reviewed: A new light on an old subject. *Proceedings of the IEEE*, 1983, vol. 71, no. 4, pp. 471–502.
-

Vasilii V. Fisanov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Radiophysics,
National Research Tomsk State University (TSU)
36, Lenin Av., Tomsk, Russia, 634050
Phone: +7 (382-2) 41-20-78
Email: fisanov@mail.tsu.ru