МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–28 апреля 2017 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Обучение арифметическим действиям над натуральными числами в различных позиционных системах счисления как основа для последующего изучения действий над многочленами

Лапатин А. Л.

ТГУ, Томск
e-mail: lapatin.lesha@yandex.ru

Аннотация

Статья описывает промежуточные результаты работы автора по разработке курса «Решение задач на позиционную запись числа» и создания к нему банка задач для учеников 5–8 классов средней школы. Предполагается, что система задач будет постепенно формировать навыки работы с натуральным числом как с суммой разрядных слагаемых, что, с одной стороны, подготовит учащихся к решению сложных олимпиадных задач, связанных с позиционной записью числа, а с другой стороны поможет учащимся при изучении действий над многочленами от одной переменной.

Ключевые слова: позиционные системы счисления, арифметические действия над натуральными числами, действия над многолченами.

Арифметические действия над натуральными числами и над многочленами от одной переменной выполняются по схожим алгоритмам (сложение, вычитание и умножение «в столбик», деление «уголком»). Однако если действия над числами большинство школьников выполняют достаточно уверенно, то действия над многочленами у многих учеников вызывают серьезные затруднения.

Одной из причин возникновения проблем у школьников при переходе от действий над числами к действиям над многочленами может являться то, что отработанный еще в начальном звене школы навык арифметических действий фактически никак в школьном курсе математики не обосновывается. Обоснование же невозможно провести без глубокого понимания сути десятичной записи натурального числа, а следовательно, без понимания того, что подразумевается под записью числа в позиционной системе счисления.

Определение 1. *Под записью*

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}_{(p)}, \tag{1}$$

где $0 \le a_1, a_2, \dots, a_n < p$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_1 \ne 0$, $p \in \mathbb{N}$, $p \ne 1$, *понимают число, равное сумме*

$$A = a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n \tag{2}$$

Запись (1) *называют записью числа* A *в позиционной системе счисления с основанием* p, *а сумму* (2) *называют суммой разрядных слагаемых числа в системе счисления с основанием* p. *Символы, обозначающие числа* $a_1, a_2, \dots, a_n$, *называют цифрами, а про число* A *говорят, что оно является* n*-значным.*

Пример 1. $B = 7892_{(10)}$. Здесь $n = 4$, $p = 10$, $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 9$, $a_4 = 2$. Имеем $B = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2$. Число B записано в десятичной системе счисления, число B является четырехзначным.

Пример 2. $C = 24031_{(6)}$. Здесь $n = 5$, $p = 6$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 0$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$. Имеем $C = 2 \cdot 6^4 + 4 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6 + 1$. Число C записано в шестеричной системе счисления, число C является пятизначным.

Замечание. При записи чисел в позиционной системе с основанием 10 принято основание не указывать: $7892_{(10)} = 7892$.

Итак, любое натуральное число можно записать в позиционном виде с любым натуральным основанием, не равным единице. Мы традиционно привыкли работать в десятичной системе счисления, поэтому десятичная запись числа большинством людей воспринимается как основная, главная. Однако нет никаких причин считать основание 10 более приоритетным по отношению к другим основаниям, кроме привычки работать в десятичной системе. Но именно эта многолетняя привычка мыслить десятками делает задачи на недесятичную запись числа достаточно трудными. Поэтому, чтобы успешно решать такие задачи, необходимо достаточно свободно уметь переводить недесятичную запись в десятичную и наоборот. Этому навыку нужно заранее уделить особое внимание.

С другой стороны, безусловно, десятичная запись, как наиболее популярная в окружающей нас реальности, может выполнять роль некого эталона, образца при изучении других систем счисления. Поэтому удобно начинать освоение позиционных систем счисления с рассмотрения задач, связанных именно с десятичной записью натуральных чисел. Эти задачи должны помочь в осознании понятий цифра, разрядное слагаемое, n-значное число.

К сожалению, традиционные УМК по математике, предназначенные для российских школ, не содержат достаточного количества заданий по данной тематике. Поэтому весьма актуальной становится проблема разработки банка таких задач. В статье приведены авторские задачи, аппробированные на факультативных занятиях с учениками 5–6 классов.

Типы задач.

1. Задачи, содержащие условие, связанное с суммой цифр.

2. Задачи, содержащие условие, связанное с результатом различных арифметических операций над цифрами.

3. Задачи, содержащие условие, связанное с обратным прочтением числа или перестановкой цифр.

4. Задачи, содержащие условие, связанное с арифметическими действиями над целыми числами.

5. Задачи, содержащие условие, связанное с кратностью или остатком от деления.

6. Задачи на определение основания позиционной записи целого числа.

7. Задачи на определение количества цифр в позиционной записи целого числа.

8. Другие типы задач.

Вспомогательные задачи.

1. Задачи на перевод записи целого числа из десятичной системы в недесятичную позиционную систему счисления и наоборот.

2. Задачи на арифметические действия с целыми числами в недесятичных позиционных системах счисления.

3. Действия с многочленами, записанными в общем виде.

Уровни сложности задач.

1. Двузначные числа.

2. Трехзначные числа.

3. Многозначные числа.

4. Числа с неопределенным количеством знаков.

Решение задач на нахождение двузначного числа обычно сводится к линейному уравнению с двумя неизвестными, а трехзначного — с тремя неизвестными. Однако можно подобрать такие задачи на нахождение трехзначного числа, которые при использовании дополнительного условия сразу сводятся к линейному уравнению с двумя неизвестными. Такие задачи можно отнести к промежуточному уровню сложности между первым и вторым. Эти задачи очень важны, так как опыт их решения поможет преодолеть психологический барьер при решении более сложных задач, в которых действительно придется иметь дело с уравнением или системой уравнений с тремя неизвестными.

Решение задач на определение основания позиционной записи двузначного целого числа обычно приводит к линейному уравнению с одной неизвестной, тогда как такие же задачи о трехзначных числах — к квадратному уравнению. Можно осторожно подбирать такие задачи уже для учеников шестого класса, если квадратное уравнение получается неполным. Тогда оно может быть решено либо подбором, либо разложением на множители. Однако весь пласт этих задач возможно систематически решать только после освоения методов решения квадратных уравнений.

Нужно понимать, что деление задач на уровни сложности достаточно условно, так как встречаются тривиальные задачи на нахождение числа с неопределенным количеством знаков, в то же время есть достаточно сложные задачи с двузначными числами.

Задача 1. Найдите двузначное число, которое в два раза больше суммы его цифр.

Решение. Одно из решений, число 18, находится подбором. Есть ли другие решения? $\overline{ab} = 10a + b$, $10a + b = 2(a + b)$, $8a = b$. Конечность множества цифр позволяет легко установить, что b, которое обязано быть кратно восьми, может быть равно только 8, соответственно $a = 1$, и найденное подбором решение 18 является единственным.

Задача 2. Найдите двузначное число, которое в четыре раза больше суммы его цифр.

Решение. Первое подходящее число 12. С помощью простого перебора можно найти остальные решения, либо установить, что таковых больше нет. Однако аналитический подход дает полную картину с минимальными трудозатратами: $10a + b = 4(a + b)$, $2a = b$. Решение свелось к условию, что вторая цифра в два раза больше первой. Этому условию удовлетворяют четыре числа: 12, 24, 36, 48.

Задача 3. Найдите двузначное число, которое в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Легко заметить, что все числа, оканчивающиеся на ноль, удовлетворяют условию. Докажем, что других решений нет. $10a + b = 10(a + b)$, $b = 0$. Ответ: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Задача 4. Найдите двузначное число, которое в одиннадцать раз больше суммы его цифр.

Решение. $10a + b = 11(a + b)$, $a + 10b = 0$, что невозможно, так как a положительно, а b неотрицательно. Таким образом, чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Подборка задач типа 1–4 полезна тем, что она иллюстрирует разнообразие возможных результатов при решении казалось бы соверешенно однотипных задач. Тем самым, эти задачи обосновывают необходимость не останавливаться на первом найденном решении, а либо проводить полный перебор, либо, что оказывается более эффективным, решать задачу аналитически в общем виде.

Задача 5. Если данное двузначное число записать наоборот и к полученному числу прибавить сумму его цифр, то получим утроенное данное число. Найдите данное число.

Решение. $\overline{ab} = 10a+b$, $\overline{ba} = 10b+a$, $(10b+a)+(a+b) = 3(10a+b)$, $7a = 2b$. Этому условию удовлетворяют только цифры $a = 2$ и $b = 7$. Значит, искомое число равно 27.

Задача 6. Если из данного двузначного числа вычесть 10, а полученный результат умножить на 2, то получим данное число, записанное наоборот. Найдите данное число.

Решение. $(10a + b - 10) \cdot 2 = 10b + a$, $19a - 20 = 8b$. Заметим, что для выполнения равенства необходимо, чтобы a было четным. Есть 5 четных цифр. Первая цифра не может быть нулем. При $a = 2$ получаем уравнение $18 = 8b$, которое не имеет целых корней. Если $a = 4$, то $b = 7$. При $a = 6$ или $a = 8$ получаем $b > 9$. Итак, искомое число равно 47.

Отметим, что перебор значений a можно было уменьшить, если заметить, что a кратно четырем.

Задача 7. Найдите основание позиционной системы счисления, если $32_{(n)} + 43_{(n)} = 130_{(n)}$.

Решение. Так как $2+3$ дает на конце 0, то, очевидно, основание равно 5. Остается проверить, что равенство выполняется и задача имеет решение.

Задача 8. Найдите основание позиционной системы счисления, если $32_{(n)} + 23_{(n)} = 130_{(n)}$.

Решение. Аналогично, по последним цифрам основание должно быть 5, однако проверка показывает, что равенство не выполняется. Следовательно, задача не имеет решений.

Задача 9. Найдите основание позиционной системы счисления, если $32_{(n)} + 53_{(n)} = 130_{(n)}$.

Решение. Наличие цифры 5 говорит о том, что $n > 5$, однако условие, о котором шла речь в решении предыдущих задач, однозначно указывает на то, что $n = 5$. Значит, нет решений.

Задачи типа 7–9 очень полезны, несмотря на их кажущуюся тривиальность. Они хорошо иллюстрируют тот факт, что сложная с виду задача может иметь очень простое решение, с другой стороны, очевидное на первый взгляд решение может таковым не оказаться.

Задача 10. Найдите основание позиционной системы счисления, если $32_{(n)} + 4\star_{(n)} = 130_{(n)}$, и запишите данное равенство в десятичной системе счисления.

Решение. Используя все то же условие суммы последних цифр, имеем $\star = n - 2$. Расписывая через сумму разрядных слагаемых, получим $(3n+2)+(4n+(n-2)) = n^2+3n$. Упрощаем $n^2 = 5n$. Корни уравнения 0 и 5, однако, основание позиционной системы счисления есть натуральное число больше единицы. Проверка покажет, что равенство выполняется и выглядит так: $32_{(5)} + 43_{(5)} = 130_{(5)}$. Переведем в десятичную систему: $32_{(5)} = 17$; $43_{(5)} = 23$; $130_{(5)} = 40$ и $17 + 23 = 40$.

Задача 11. Найдите сумму чисел 234_n и 351_n для $6 \leq n \leq 9$, результаты запишите в десятичной системе счисления.

Решение.

1 способ. Подставляем по очереди вместо n числа 6, 7, 8, 9 и вычисляем, затем переводим в десятичную форму, либо сначала переводим, а потом вычисляем. Очень трудоемкий процесс.

Когда задача будет решена первым способом, сверены ответы, имеет смысл предложить такой способ решения этой задачи.

2 способ.

$$\begin{array}{c} 2n^2 + 3n + 4 \\ 3n^2 + 5n + 1 \\ \hline 5n^2 + 8n + 5 \end{array}$$

Подставляя вместо n числа 6, 7, 8, 9 сразу получаем значения суммы в десятичном виде.

Таким образом, 2 способ решения задачи 11 подводит школьников к идее, что действия над многочленами можно выполнять аналогично действиям над натуральными числами.

Литература

1. Гашков С. Б. Системы счисления и их применение. Библиотека «Математическое просвещение». Выпуск 29. М.: МЦНМО, 2004. 52 с.

2. Гельфман Э. Г. Математика : учебник для 5 класса : в 2 ч. Ч. 1 / Э. Г. Гельфман, О. В. Холодная. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 152 с. : ил.