

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная
научная конференция
«Все грани математики и
механики»**

(25–28 апреля 2017 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Численное решение двумерных уравнений газовой динамики с подвижными границами на неподвижной вычислительной сетке на примере задач внутренней баллистики РДТТ *

Кирюшкин А. Е., Миньков Л. Л.

НИ ТГУ, Томск
e-mail: sashakir94@mail.ru

Аннотация

Задачи внутренней баллистики ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) относятся к задачам с подвижными границами. В данной работе рассматривается алгоритм, позволяющий решать подобные задачи в осесимметричной постановке на декартовой неподвижной сетке с произвольным порядком точности как по пространству, так и по времени. Основой алгоритма в задании фиктивных значений служит обратный метод Лакса-Вендроффа, а в неявном представлении границы области - метод уровней. В качестве примера была решена задача для заряда с "зонтиком" на всем участке работы и получены зависимость давления от времени, а также распределение параметров внутри камеры в различные моменты времени.

Ключевые слова: обратный метод Лакса-Вендроффа, метод уровней, численное моделирование, внутренняя баллистика, ракетные двигатели на твердом топливе.

Проектирование новых РДТТ связано с многочисленными испытаниями и экспериментами. Развитие вычислительной техники стало одной из причин широкого распространения численных методов для моделирования процессов, связанных с РДТТ. Возможность моделирования внутрикамерных процессов РДТТ без затрат на производство позволяет тестировать большее количество разных конфигураций.

Для многих зарядов, несмотря на их сложную форму, давление и другие параметры течения в камере сгорания могут либо практически не изменяться, либо зависеть только от одной простран-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №9.9625.2017/БЧ.

ственной координаты. Таким образом, существуют численные модели, которые, учитывая сложную форму зарядов твердого топлива, предполагают или нульмерную, или одномерную постановку задачи для течения продуктов сгорания [1, 2].

Однако иногда необходимо рассматривать трехмерное (осесимметричное) течение продуктов сгорания совместно с учетом трехмерной (осесимметричной) формы заряда. При таком подходе необходимо учитывать движение границ горящего твердого топлива, то есть численно решать задачу с подвижными границами. Такие задачи можно решать с помощью неструктурированных подвижных вычислительных сеток. Однако сложность построения "качественной" вычислительной сетки, возможное изменение топологии поверхности, вероятная потеря точности при перестроении сетки и другие сложности реализации данного подхода оставляют простор для поиска новых алгоритмов решения данной задачи.

В данной работе разработан алгоритм, позволяющий численно решать задачи внутренней баллистики РДТТ с учетом подвижной поверхности, на неподвижной декартовой сетке с произвольным порядком точности по пространству и времени.

Описание численной схемы. Будем рассматривать нестационарные гиперболические законы сохранения для двух пространственных координат в ограниченной области $\Omega(t)$ с границей $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$ для вектора-функции консервативных переменных $U(x, y, t)$:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (1)$$

Прямоугольная область, включающая в себя $\Omega(t)$ покрывается однородной декартовой сеткой с шагами по соответствующим координатам, равными $\Delta x = h_x$, $\Delta y = h_y$. Схематично область $\Omega(t)$ и расчетная сетка изображены на рисунке 1. Стоит отметить, что в данной работе граница области задавалась неявно, как нулевой уровень некоторой функции [3], что представляется наиболее эффективным способом работы с подвижной границей. Тогда полудискретная аппроксимация уравнений (1) запишется в виде:

$$\frac{d}{dt} U_{i,j}(t) = -\frac{1}{h_x} (F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}) - \frac{1}{h_y} (G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}) + S_{i,j}, \quad (2)$$

где $F_{i+\frac{1}{2},j}$, $G_{i,j+\frac{1}{2}}$ - численные потоки. Теперь можно использовать метод Рунге-Кутты [4] для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) по времени.

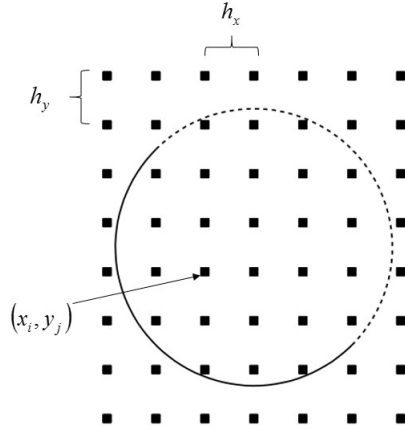


Рис. 1. Схематичное изображение границ области и расчетной сетки

Для получения высокого порядка точности по пространству, например, используя ENO схему третьего порядка точности или WENO схему пятого порядка точности [5], требуется шаблон, состоящий из семи точек. Таким образом для точек, лежащих внутри области $\Omega(t)$ и рядом с границей, до трех фиктивных точек может входить в шаблон схемы.

Задание значений в фиктивных точках. Задание фиктивных точек с помощью обратного метода Лакса-Вендроффа подробно описано в работе [6] и поэтому укажем лишь некоторые аспекты.

Уравнения гиперболического типа характерны конечной скоростью распространения возмущений вдоль характеристических направлений. Количество граничных условий на границе зависит от количества входящих в нее характеристик. Обратный метод Лакса-Вендроффа предполагает построение полинома заданной степени для экстраполяции значений в фиктивные точки с учетом граничных условий. Было показано, что способ экстраполяции, используемый в работе [6], обеспечивает заданный порядок точности аппроксимации уравнений по пространству.

Для задач внутренней баллистики РДТТ в основном имеется три типа границ: поверхность горения, твердая стенка и область постоянного давления. Если для последних двух типов границ задание фиктивных значений не представляет никакой трудности, то для поверхности горения в силу нелинейности граничных условий

необходимо отдельно описать процедуру получения коэффициентов для полиномов.

Обратная процедура Лакса-Вендроффа для неподвижной границы газоприхода. Запишем граничные условия для горячей поверхности топлива, которую в первом приближении будем считать неподвижной. Граничные условия заключаются в задании массовой скорости горения и энтальпии образовавшихся продуктов. Тангенциальная скорость горения полагается равной нулю.

$$\rho u_n = m_i p^\nu, \quad (3)$$

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u_n^2 + u_\tau^2}{2} = H_0, \quad (4)$$

$$u_\tau = 0. \quad (5)$$

Согласно обратной процедуре Лакса-Вендроффа к трем граничным условиям (3) - (5) нужно добавить одно уравнение экстраполяции вида (6).

$$l_{4,1}\rho + l_{4,2}u_n + l_{4,3}u_\tau + l_{4,4}p = V_4, \quad (6)$$

Однако если записать систему уравнений газовой динамики в неконсервативной форме для переменных (ρ, u_n, u_τ, p) , то из-за нулевых значений некоторых компонент левых собственных векторов уравнение (6) переписывается в виде (7).

$$l_{4,2}u_n + l_{4,4}p = V_4. \quad (7)$$

Систему уравнений (3) - (7) без труда можно решить численно. Для получения производных по пространству следует взять производную по времени от граничных условий (3) - (5), но так как в данной работе для вычисления была выбрана схема первого порядка точности, то на этом шаге мы останавливаться не будем.

Алгоритм расчета. Как известно, скорость горения топлива много меньше скорости истекающих газов. Поэтому считается, что давление в камере успеваает подстраиваться под изменение горячей поверхности, то есть горение идет в квазистационарном режиме. Таким образом, при численной реализации можно воспользоваться этим допущением для уменьшения времени расчета. Суть заключается в следующем: каждый раз мы досчитываем задачу до установления по описанной схеме, затем интегрируем функцию уровня [3], определяя скорость горячей поверхности по формуле $u = \frac{m_i p^\nu}{\rho \tau}$.

После интегрирования опять решаем задачу до установления и т.д. пока не сгорит все топливо.

Физическая постановка задачи. В качестве примера расчеты проводились в области, изображенной на рисунке 2, представляющей из себя корпус двигателя, в котором расположен заряд твердого топлива и сопловой блок, при следующих геометрических параметрах. Длина заряда $L = 2.5$ м, начальный радиус канала $R_0 = 0.2$ м, конечный радиус канала $R_k = 0.9$ м, длина «зонтика» до скругления $H = 0.523$ м, ширина зонтика $h = 0.2$ м, расстояние от левого края заряда до места начала «зонтика» $l = 0.585$ м, радиус критического сечения сопла $r_{кр} = 0.1$ м, угол наклона «зонтика» $\alpha = 45^\circ$.

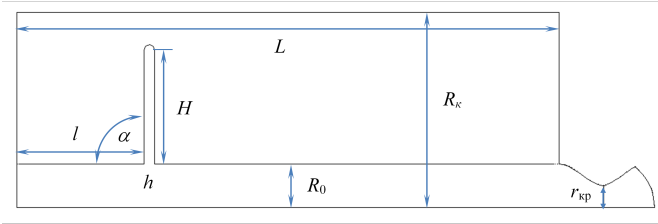


Рис. 2. Геометрические параметры расчетной области

При решении данной задачи использовались следующие допущения: осесимметричная постановка, невязкий, идеальный газ, топливо гомогенное, скорость горения зависит от давления по закону $\rho u_n = m_t p^\nu$.

Математическая постановка задачи. Для описания внутрикамерных процессов в случае невязкого газа для осесимметричной области используются уравнения Эйлера, записанные в виде (8) – (11), и уравнение состояния для идеального газа (12).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \rho v, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial z} + \frac{\partial \rho v u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \rho v u, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial r} = -\frac{1}{r} \rho v^2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H}{\partial z} + \frac{\partial \rho v H}{\partial r} = -\frac{1}{r} \rho v H, \quad (11)$$

$$p = \rho R T \quad (12)$$

Чтобы система уравнений (8) – (12) имела единственное решение, необходимо также задать начальные и граничные условия. Всего в данной задаче присутствуют 4 типа границ: твердая стенка, ось симметрии, горящая поверхность, область постоянного давления. На твердой стенке нормальная составляющая скорости полагается равной нулю (13). На оси симметрии нормальная производная от соответствующих параметров равна нулю (14). Граничные условия для горячей поверхности были описаны в предыдущих разделах (см. (3) – (5)). На границе раздела с областью постоянного давления задается давление (15), равное атмосферному, для дозвукового истечения. В случае сверхзвукового истечения граничные условия не ставятся.

$$u_n = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = 0, \quad (14)$$

$$p = p^*. \quad (15)$$

Начальные условия записываются в виде (16) - (19).

$$p = p_0. \quad (16)$$

$$\rho = \rho_0. \quad (17)$$

$$u = 0. \quad (18)$$

$$v = 0. \quad (19)$$

Значения параметров и констант. Геометрические параметры области были выписаны в предыдущем разделе. Параметры топлива равны соответственно: $m_t = 5.34 \cdot 10^{-3}$, $H_0 = 10251150$, $\nu = 0.5$, $\rho_T = 1700$. Начальное давление и давление на границе полагалось равным атмосферному: $p_0 = p^* = 101325$. А плотность $\rho_0 = 1.3$. Шаги по пространству равны $h_x = h_y = 0.02$.

Численные результаты. Для расчетов уравнений газовой динамики использовалась схема первого порядка точности по пространству и времени, а для определения функции уровня использовалась схема пятого порядка точности по пространству и третьего порядка точности по времени. На рисунке 3 представлено изменение формы топливной шашки с интервалом по времени 5 секунд. На рисунке 4 изображена зависимость давления в камере от времени. Для каждого шага осредненное давление сравнивалось с формулой Бори для давления в камере и проверялось выполнение закона сохранения массы, то есть, равен ли газоприход с поверхности горения газоотводу через сопло. Для проведенных расчетов численное значение давление отличалось от аналитического не более чем на 10 процентов, а закон сохранения массы выполнялся с точностью до погрешности интегрирования.

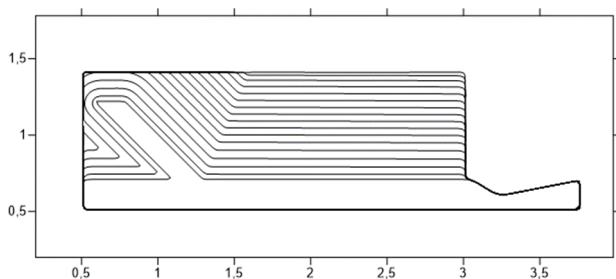


Рис. 3. Форма поверхности топлива в зависимости от времени

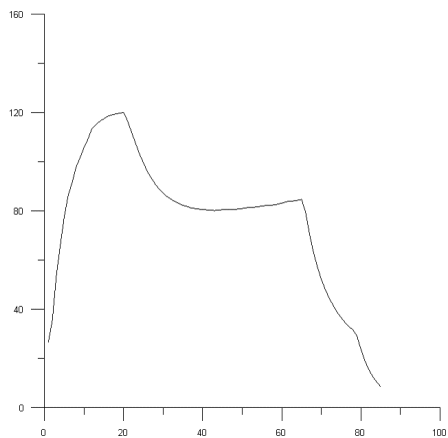


Рис. 4. Давление в камере в зависимости от времени

На рисунках 5 - 6 можно увидеть распределение вектора скорости во всем двигателе и давления в камере в момент времени $t = 5$.

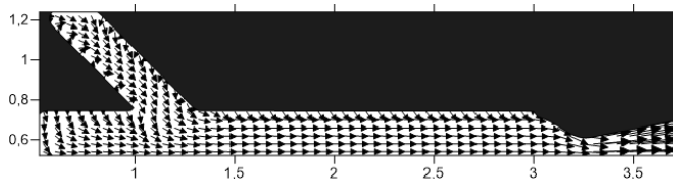


Рис. 5. Распределение вектора скорости в двигателе

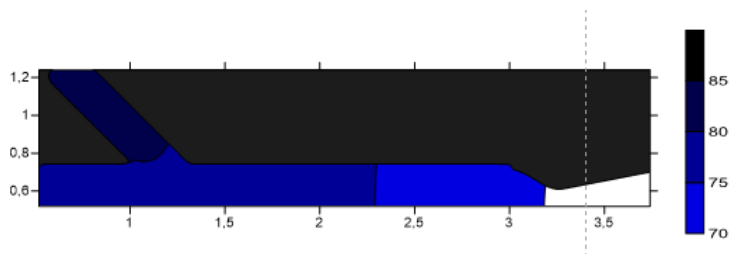


Рис. 6. Распределение давления в камере

Заключение. В данной работе был разработан алгоритм, позволяющий решать задачи внутренней баллистики с учетом подвиж-

ной границы горящего топлива на неподвижной декартовой вычислительной сетке. К преимуществам данного алгоритма можно отнести тривиальное построение вычислительной сетки, произвольный порядок точности схемы как по пространству, так и по времени, а также легкое обобщение вышенаписанного на трехмерный случай. В качестве примера была решена задача для заряда с "зонтиком".

Литература

1. Enrico Cavallini. Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics. PhD thesis, 2010.
2. Wichard Sullwald, Grain regression analysis. Master's thesis, 2014.
3. Osher S. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces / S. Osher, R. Fedkiw. NY : Springer, 2003. 273 p.
4. Gottlieb S. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes / S. Gottlieb, C.-W. Shu // Mathematics of Computation. 1998. V. 67. P. 73-85.
5. G.-S. Jiang Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes / G.-S. Jiang, C.-W. Shu // Journal of Computational Physics. 1996. V. 126 (1). P. 202-228.
6. Tan S. Inverse Lax-Wendroff Procedure for Numerical Boundary Conditions of Conservation Laws / S. Tan, C.-W. Shu // Journal of Computational Physics. 2010. V. 229 (21). P. 8144-8166.