МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–28 апреля 2017 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Вычисление сингулярного разложения матриц

Афанасьева А. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: afanasevaanyutka@gmail.com

Аннотация

В данной статье изучаются такие понятия, как сингулярное разложение (SVD), сингулярные числа, сингулярные векторы. Приведены алгоритмы для практического вычисления сингулярного разложения и примеры применения данного разложения. Приведен пример матрицы малого порядка, в которой найдены собственные и сингулярные числа. В частности, на примере сжатия МРТ-изображения черепа показана возможность существенного уменьшения размера файла с изображением без потери качества при исключении малозначимых компонент в изображении. Проведен анализ полученных данных для МРТ-фотографии.

Ключевые слова: SVD–разложение, сингулярные числа, сжатие изображения.

Сингулярное разложение (Singular Values Decomposition, SVD) является удобным методом при работе с матрицами. Сингулярное разложение показывает геометрическую структуру матрицы и позволяет наглядно представить имеющиеся данные. Сингулярное разложение используется при решении самых разных задач — от приближения методом наименьших квадратов и решения систем уравнений до сжатия и распознавания изображений [1-5].

Сингулярное разложение помогает решить некоторые алгебраические задачи:

- нахождение ранга матрицы,
- вычисление модуля определителя
- определение чисел обусловленности,
- нахождение общих решений однородных систем;
- решения произвольной СЛАУ;
- нахождения псевдообратных матриц.

Определение 1. *Сингулярное разложение - это разложение прямоугольной вещественной или комплексной матрицы в виде* $A=$

$U\Sigma V$, где Σ - диагональная $m\times n$-матрица с диагональю из невозрастающих сингулярных чисел $\sigma_1,\dots,\sigma_k$, а U и V – ортогональные, соответственно $m\times m$ и $n\times n$ – матрицы [1].

Определение 2. *Сингулярными числами вещественной $m\times n$-матрицы A называются арифметические квадратные корни из собственных чисел $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ матриц $A^T A$ и $A\ A^T$, где $k{=}min\left\{m,n\right\}$*

Сингулярные числа обозначаются буквой σ и нумеруются в порядке убывания: $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_k\geq 0$. Сингулярные числа сразу вводятся как диагональные элементы матрицы Σ в SVD – разложении. Также определение сингулярного числа σ формулируется посредством совокупности равенств Ax=σy, A^Ty=σx, где n-мерный вектор x и m-мерный вектор y – правый и левый сингулярные векторы. Эти векторы образуют ортогональные базисы.

Пример на нахождение собственных и сингулярных чисел на матрице малого порядка

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}$$

Находим произведение матрицы А и транспонированной матрицы А.

$$A^T A=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&6\\6&4\end{pmatrix}$$

Находим собственные числа.

$$\begin{vmatrix}13-\lambda&6\\6&4-\lambda\end{vmatrix}=$$

=(13-λ)(4-λ)-36=52-13λ-4λ+λ^2-36=λ^2-17λ+16=(λ-1)(λ-16)

λ_1=1, λ_2=16 - собственные числа.

$\sigma_1=\sqrt{\lambda_1}$=1, $\sigma_2=\sqrt{\lambda_2}$=4 - сингулярные числа.

Теорема 1. *Пусть A - произвольная $m\times n$ – матрица, причем $m{\geq}n$. Тогда справедливо представление $A{=}\ U\Sigma\ V^T$, где матрица U имеет размер $m\times m$ и удовлетворяет соотношению $U^T U{=}I$, матрица V – квадратная порядка n и удовлетворяет соотношению $V^T V{=}I$, а $\Sigma{=}diag\ (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, где $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_n\geq 0$. Столбцы $u_1,\dots,u_m$ матрицы U называются левыми сингулярными векторами (матрицы A). Столбцы $v_1,\dots,v_n$ матрицы V называются правыми сингулярными векторами. Величины $\left\{\sigma_i\right\}_{i=1,\dots,n}$*

называются сингулярными числами. (При m<n нужно рассматривать матрицу A^T).

Алгоритмы, используемые для практического вычисления сингулярного разложения [2]

1. QR – итерации и ее варианты.

При правильной реализации наиболее быстрый метод отыскания всех сингулярных чисел двухдиагональной матрицы. Более того, все сингулярные числа определяются с высокой относительной точностью. Это означает, что у всех найденных сингулярных чисел, даже у самых малых, все разряды будут верны. Однако такой метод остается скорейшим лишь для малых матриц, порядок n которых не превосходит примерно 25.

2. «Разделяй и властвуй».

В настоящее время это самый быстрый метод отыскания всех сингулярных чисел и сингулярных векторов матриц порядка большего, чем 25. Однако алгоритм «Разделяй-и-властвуй» не гарантирует высокой относительной точности для малых сингулярных чисел. Гарантируется лишь граница погрешности того же типа, что и в симметричной проблеме собственных значений.

3. Бисекция и обратная итерация.

Применяя бисекцию в комбинации с обратной итерацией к матрице, можно находить только сингулярные числа из заданного интервала. Этот алгоритм гарантирует высокую относительную точность сингулярных чисел, хотя вычисленные сингулярные векторы могут терять ортогональность.

4. Метод вращений Якоби.

Сингулярное разложение плотной матрицы G можно найти, применяя метод Якоби к матрице G^TG(или G G^T) неявно, т.е. так, что ни одна из названных матриц в явном виде не формируется, чем избегается потеря численной устойчивости, связанная с этим формированием.

Применение сингулярного разложения при сжатии изображения

Один из наиболее эффективных методов сжатия изображений — SVD-алгоритм на основе сингулярного разложения матриц. Исходная идея метода: разложение исходной матрицы изображения$A(m\times n)$ в виде $=U\Sigma V$, где Σ — сингулярная матрица, т. е. диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены корни из собственных значений матрицы $\cdot A^T$ в порядке убывания. Матрицы U и V являются ортогональными.

В матрице Σ выделяются первые r строк и столбцов, а оставшиеся исключаются. Первые r самых значимых сингулярных чисел называются главными компонентами.

Тогда можно реконструировать исходную матрицу с использованием меньшего объема входной информации:

$$A(m \times n) = U(m \times r)\Sigma(r \times r)V(r \times n)$$

Критерием качества восстановления матрицы A служит близость к единице коэффициента детерминации, рассчитываемого по формуле:

$$Q(r) = \frac{\sum_{k=1}^{r} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$$

где λ_k - собственные значения матрицы $\cdot A^T$. Зависимость коэффициента детерминации от числа главных компонент позволяет оценить эффективность алгоритма.

В данной работе для анализа эффективности SVD-алгоритма использовалось МРТ-изображение черепа. Размер изображения — 413×620 px. Представленное на рисунке 1(a) – это исходное изображение.

Рис. 1. Исходное изображение до декомпозиции (a), восстановленное изображение (b) – (d) с числом главных компонент: (b) — r = 4; (c) — r = 20; (d) — r = 100

На рисунках 1(b)-(d) продемонстрировано применение SVD - алгоритма с использованием различного числа главных компонент r, позволяющее качественно оценить результат обработки. При r = 4 (b) реконструкция информативной не является, при r = 20 (c) прослеживается характер изображения, но мелкие детали практически не различимы. При r = 100 (d) уже трудно отличить реконструкцию от оригинала, точности восстановления достаточно для получения необходимой информации. Объем памяти, требуемый для изображения, полученного при r = 100, снижается в 3 раза относительно исходного (было 751 кб, а стало 252 кб).

Для численного подтверждения полученного результата приведен график зависимости коэффициента детерминации от числа главных компонент (Рис.2). Видно, что чем больше r, тем критерий качества приближается к 1 и чем доказывает, что качество восстановления изображения будет сохраняться.

Преобладание мелких деталей рис.1 (a) приводит к необходимости использования большего числа главных компонент для получения изображения требуемого качества.

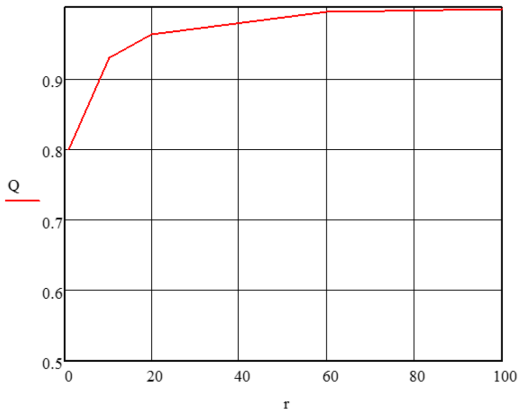

Рис. 2. График зависимости коэффициента детерминации Q от числа главных компонент r.

Из рис.2 видно, что при r=4 имеется явное различие коэффициента детерминации от 1, при r=60 и r=80 Q(r)→1.

Таким образом, в работе показано, что сжатие изображения через сингулярное разложение приводит к уменьшению размера изображения без потери качества при исключении малозначимых компонент.

Литература

1. Квасов Б.И. Численные методы анализа и линейной алгебры. Новосибирск: НГУ. 262 с.

2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. М.: Мир, 2000. 430 с.

3. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения: Учеб. пособие для вузов. М.: ООО Издательский дом "Оникс 21 век 2005. 432 с.

4. Богданова Н.А., Зыбина Ю.С., Шпакова Е.С. Использование сингулярного разложения матриц для сжатия электронно-микроскопических изображений // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2016. № 2 (10). С. 7-11.

5. Жданов А.И. Введение в вычислительную линейную алгебру [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). Самара, 2011. 71 с.