МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–28 апреля 2017 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Применение производящих функций и Wolfram Mathematica в теории чисел

Пчёлкина Д. Е., Зюзьков В. М.

ТГУ, Томск
e-mail: pchyolkina1993@mail.ru

Аннотация

В комбинаторике и теории чисел часто используется аппарат производящих функций для получения новых результатов. Производящие функции позволяют доказывать тождества, а с использованием языка программирования Wolfram это становится еще проще.

Ключевые слова: Система Mathematica, производящие функции, производящие функции Дирихле, мультипликативные функции.

Целью работы является доказательства различных комбинаторных тождеств и тождеств в теории чисел, используя производящие функции и язык Wolfram Mathematica.

Для начала рассмотрим определение производящих функций [1, стр. 364–365].

Определение 1. *Пусть* $< a_0, a_1, a_2, \cdots >$ *- произвольная (бесконечная) последовательность вещественных чисел. Тогда функция*

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ... \tag{1}$$

называется производящей функцией для последовательности $< a_0, a_1, a_2, \cdots >$. *Мы можем также определить производящую функцию для конечной последовательности* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *полагая* $a_i = 0$ *для* $i > n$*; поэтому* $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ *будет производящей функцией для конечной последовательности.*

Как понимать равенство (1) и функцию $g(z)$? В математическом анализе $g(z)$ понимается в общем случае как функция комплексного переменного, где значение $g(z_0)$ для конкретного z_0 есть сумма сходящегося ряда $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$, и встает вопрос о сходимости ряда. В теории производящих функций сходимость не играет никакой роли, так как нет необходимости вычислять $g(z_0)$ для конкретного z_0. Правая сторона (1) есть формальный степенной ряд относительно z. Различные степени z^n используются, чтобы просто пометить соответствующий элемент a_n последовательности. Другими словами, z^n мыслится просто как заполнитель. Почти всем операциям над производящими функциями можно дать строгое истолкование как операции над формальными степенными рядами, и такие операции являются корректными, даже если ряд расходится (см. [1, стр.365], [2, стр. 13-29]). Но, если в (1) числовой ряд в точке z_0 сходится, то значение $g(z_0)$ равно сумме этого ряда. Математические методы, с помощью которых для последовательностей чисел получаем соответствующие производящие функции, подробно рассмотрены в [1, стр. 353–417].

Примеры: производящая функция для последовательности $< 1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots >$ есть $1/(1+z)$; для последовательности $< 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots >$ имеем производящую функцию $1/(1-z)^2$.

Теперь рассмотрим описание основных функций языка Wolfram [3] с помощью которых можно вычислять производящие функции:

1. $GeneratingFunction[expr, n, x]$ - дает производящую функцию по x, для последовательности n, коэффициент задается выражением $expr$.
2. $FindGeneratingFunction[a_1, a_2, \ldots, x]$ – ищет простую производящую функцию по x из последовательности $a_1, a_2, \ldots$.

Приведем примеры производящих функций, получаемых в системе Mathematica.

1. Найдем производящую функцию для последовательности из единиц
   $\Rightarrow GeneratingFunction[1, n, x]$
   $$\frac{1}{1-x}$$
2. Получение производящей функции для чисел Фибоначчи
   $\Rightarrow FindGeneratingFunction[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, x]$
   $$\frac{1}{(1-x-x^2)}$$
3. Можно доказать тождество Паскаля, которое имеет следующий вид: $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$, где $n > k > 1$.
   $\Rightarrow GeneratingFunction[Binomial[n, k], k, x]$
   $(1+x)^n$
   $\Rightarrow GeneratingFunction[Binomial[n-1, k] + Binomial[n-1, k-1], k, x]$
   $(1+x)^{-1+n} + x(1+x)^{-1+n}$
   $\Rightarrow Simplify[(1+x)^{-1+n} + x(1+x)^{-1+n}]$
   $(1+x)^n$.

Так же с использованием языка Wolfram можно доказывать тождества с числами Фибоначчи.

1. $\sum_{k=0}^{n} F(k) = F(n+2) - 1$
2. $F(n+1)F(n-1) - F(n)^2 = (-1)^n$
3. $F(n)^2 - F(n+r)F(n-r) = (-1)^{n-r}F(r)^2$

Приведем их доказательства.

1. $\Rightarrow GeneratingFunction[\sum_{k=0}^{n} Fibonacci[k], n, x]$

   $$-\frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{(x(-1+x+x^2))}$$

   $\Rightarrow Simplify[-1/(1-x) - 1/x - 1/(x(-1+x+x^2))]$

   $$\frac{x}{(1-2x+x^3)}$$

   $\Rightarrow GeneratingFunction[Fibonacci[n+2] - 1, n, x]$

   $$-\frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{(x(-1+x+x^2))}$$

   $\Rightarrow Simplify[-1/(1-x) - 1/x - 1/(x(-1+x+x^2))]$

   $$\frac{x}{(1-2x+x^3)}$$

   Первым шагом вычисляется производящая функция для левой части тождества, затем вычисляется производящая функция для правой части и делается вывод о том, что левая и правая части совпали. Для остальных тождеств проделывается все то-же самое.

2. $\Rightarrow GeneratingFunction[Fibonacci[n+1]Fibonacci[n-1] -$
   $- Fibonacci[n]^2, n, x]$

   $$\frac{2(3+\sqrt{5})(-1+x)x}{(3+\sqrt{5}-2x)(1+x)(-2+(3+\sqrt{5})x)} +$$
   $$+ \frac{4(7+3\sqrt{5})(-1+2x)}{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5}-2x)(1+x)(-2+(3+\sqrt{5})x)}$$

   $\Rightarrow FullSimplify[\%]$

   $$\frac{1}{1+x}$$

   $\Rightarrow GeneratingFunction[(-1)^n, n, x]$

   $$\frac{1}{1+x}$$

3. $\Rightarrow GeneratingFunction[Fibonacci[n]^2 - Fibonacci[n+r] *$
   $* Fibonacci[n-r], n, r, x, y]$

   $$\frac{y(1+y)}{(1+x)(-1+y)(1+y(3+y))}$$

   $\Rightarrow GeneratingFunction[(-1)^{n-r} Fibonacci[r]^2, n, r, x, y]$

$$\frac{y(1+y)}{(1+x)(-1+y)(1+y(3+y))}$$

Теперь рассмотрим еще один вид производящих функций, это производящие функции Дирихле. Важная альтернатива обычным производящим функциям получается, если вместо ядер z^n используются ядра $1/n^z$; они рассчитаны для последовательности $< g_0, g_1, g_2, ... >$, начинающиеся с $n = 1$, а не с $n = 0$: $\tilde{G}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_n}{n^z}$. Такие функции называются производящими функциями Дирихле [1]. Например, производящая функция Дирихле для последовательности $\{1, 1, 1, ...\}$ равна $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} = \zeta(z)$. Это известная дзета-функция Римана.

Производящие функции Дирихле особенно полезны, когда последовательность $\{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ является мультипликативной функцией. Мультипликативные функции играют важную роль в изучении делимости целых чисел и распределении простых чисел.

Рассмотрим общие свойства мультипликативных функций, операции с ними, и познакомимся с важными примерами [4].

Будем рассматривать арифметические функции, под которыми понимаются функции с множеством натуральных чисел в качестве области определения.

Определение 2. *Арифметическая (в общем случае комплекснозначная) функция f называется мультипликативной, если f – не тождественный ноль и $f(nm) = f(n)f(m)$ для любых взаимно простых m и n.*

Примеры мультипликативных функций:

1. Пусть $f_a(n) = n^a$, где a – фиксированное вещественное или комплексное число. Эта функция для любого a – мультипликативна. В частности, единичная функция $u = f_0$ является мультипликативной.
2. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется для натурального числа n, как количество натуральных чисел меньших n и взаимно простых с n. Функция Эйлера является мультипликативной. В языке Wolfram функция Эйлера вычисляется с помощью встроенной функции $EulepPhi[n]$.
3. Произведением fg двух арифметических функций f и g называется арифметическая функция, определяемая равенством $(fg)(n) = f(n)g(n)$. Подобным образом определяется частное двух функций $(f/g)(n) = f(n)/g(n)$, если $g(n) \neq 0$ для всех n.

Если f и g – мультипликативные функции, то таковыми являются и функции fg и f/g.

В теории чисел часто используется следующее сигма-обозначение $\sum_{d|n} f(d)$, где f – арифметическая функция, а суммирование осуществляется по всем положительным делителям числа n. Функция $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ называется сумматорной функцией для f.

Теорема 1. *Если f – мультипликативная функция, то сумматорная функция*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

является также мультипликативной.

Еще несколько примеров мультипликативных функций:

4. Так как все функции вида $n \to n^k$ – мультипликативны, то по теореме 1, все функции $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ – также мультипликативны. Функции $\sigma(n) = \sigma_1(n)$ и $\tau(n) = \sigma_0(n)$ называюся сумма делителей n и число делителей n, соответственно. В языке Wolfram функция $\sigma_k(n)$ вычисляется с помощью функции $DivisorSigma[k, n]$
5. Функцией Мёбиуса называется функция со следующими значениями:
$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{если } n = 1; \\ (-1)^r, \text{если } n = p_1 p_2 ... p_r, \text{где все } p_i - \text{различные числа}; \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$
Функция Мёбиуса $\mu(n)$ является мультипликативной. В языке Wolfram функция $MoebiusMu[n]$ вычисляет значения функции Мёбиуса для целого n.
6. Сумматорная функция для функции Мёбиуса $\varepsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ оказывается очень важной и просто вычисляется:
$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, \text{если } n = 1; \\ 0, \text{если } n > 1 \end{cases}$$

Суммы вида: $\sum_{d|n} f(d)g(n/d)$ часто встречаются в аналитической теории функции и полезны при изучении свойств арифметических функций.

Определение 3. *Пусть f и g – две арифметические функции. Определим свертку Дирихле функций f и g, обозначаемую $f * g$, как $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$. Эту функцию называют также произведением Дирихле или конволюцией Дирихле.*

Функция $\varepsilon(n)$, является нейтральным элементом для операции свёртки Дирихле: для любой арифметической функции f имеем $\varepsilon * f = f * \varepsilon = f$.

Теорема 2. *Множество мультипликативных арифметических функций образует абелеву подгруппу группы всех арифметических функций со свойством $f(1) \neq 0$ и с операцией свертка Дирихле и нейтральным элементом ε (имеется подходящее понятие обратного элемента группы).*

В качестве нейтрального элемента ε в группе мультипликативных функций в Wolfram используется функция $KroneckerDelta[1-n]$ (дельта Кронекера):

$\Rightarrow Simplify[KroneckerDelta[0], KroneckerDelta[n], n \neq 0]$

$\{0, 1\}$

Каким образом производящие функции Дирихле связаны с мультипликативными функциями? Пусть $\tilde{F}(z)$ и $\tilde{G}(z)$ – производящие функции Дирихле для последовательностей $\{f(1), f(2), \ldots\}$ и $\{g(1), g(2), \ldots\}$, соответственно. Тогда произведение этих производящих функций является также производящей функцией Дирихле:

$$\tilde{F}(z)\tilde{G}(z) = \sum_{k,m \geq 1} \frac{f_k}{k^z} \frac{g_m}{m^z} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} \Big(\sum_{\substack{k,m \geq 1 \\ km=n}} f_k g_m \Big) = \tilde{H}(z).$$

Если рассматривать функции f и g как соответствующие последовательности $\{f(1), f(2), \ldots\}$ и $\{g(1), g(2), \ldots\}$, то сумма вида

$$\sum_{\substack{k,m \geq 1 \\ km=n}} f_k g_m$$

встретилась раньше при определении свертки Дирихле $f * g$. Следовательно, произведение проиводящих функций $\tilde{F}(z)\tilde{G}(z)$ есть производящая функция $\tilde{H}(z)$ для свертки $h = f * g$.

В языке Wolfram производящие функции Дирихле вычисляются с помощью преобразования Дирихле $DirichletTransform[f[n], n, s]$. В частности, имеем

$\Rightarrow DirichletTransform[1, n, s]$

$Zeta[s]$

С помощью производящих функций Дирихле мы получаем возможность вычислять свертку Дирихле для мультипликативных функций. Если мы предполагаем, что $f * g = h$, то для доказательства тождества вычисляем производящие функции для функций f, g, h и убеждаемся, что произведение двух первых производящих функций равно третьей производящей функции.

Сначала известные примеры.

7. $\varphi(n) * \sigma(n) = n\tau(n)$

   Для доказательства тождества вычисляем производящие функции для функций $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ и $n\tau(n)$ и убеждаемся, что произведение двух первых производящих функций равно третьей производящей функции.

   $\Rightarrow DirichletTransform[EulerPhi[n], n, s]$

   $\dfrac{Zeta[-1+s]}{Zeta[s]}$

   $\Rightarrow DirichletTransform[DivisorSigma[1, n], n, s]$

   $Zeta[-1+s]Zeta[s]$

   $\Rightarrow DirichletTransform[DivisorSigma[0, n], n, s]$

   $Zeta[-1+s]^2$

8. $1 * \mu = \varepsilon$

   $\Rightarrow DirichletTransform[1, n, s]$

   $Zeta[s]$

   $\Rightarrow DirichletTransform[MoebiusMu[n], n, s]$

   $\dfrac{1}{Zeta[s]}$

   $\Rightarrow DirichletTransform[KroneckerDelta[1-n], n, m]$

   1

9. $n\mu(n) * \varphi(n) = \mu(n)$

   $\Rightarrow DirichletTransform[nMoebiusMu[n], n, s]$

   $\dfrac{1}{Zeta[-1+s]}$

   $\Rightarrow DirichletTransform[EulerPhi[n], n, s]$

   $\dfrac{Zeta[-1+s]}{Zeta[s]}$

   $\Rightarrow DirichletTransform[MoebiusMu[n], n, s]$

   $\dfrac{1}{Zeta[s]}$

   Теперь докажем два новых тождества. Предыдущие три тождества можно явно получить, используя встроенную функцию *DirichletConvolve* для вычисления свертки Дирихле. Но для примеров 10 и 11 функция *DirichletConvolve* не работает, поэтому использование производящих функций Дирихле необходимо.

10. $n^a\varphi(n) * n^a = n^{a+1}$

    $\Rightarrow DirichletTransform[n^a EulerPhi[n], n, s]$

    $\dfrac{Zeta[-1-a+s]}{Zeta[-a+s]}$

$\Rightarrow DirichletTransform[n^a, n, s]$
$Zeta[-a+s]$
$\Rightarrow DirichletTransform[n^(a+1), n, s]$
$Zeta[-1-a+s]$

11. $n^a\mu(n) * n^{a+1} = n^a\varphi(n)$
$\Rightarrow DirichletTransform[n^a MoebiusMu[n], n, s]$
$$\frac{1}{Zeta[-a+s]}$$
$\Rightarrow DirichletTransform[n^(a+1), n, s]$
$Zeta[-1-a+s]$
$\Rightarrow DirichletTransform[n^a EulerPhi[n], n, s]$
$$\frac{Zeta[-1-a+s]}{Zeta[-a+s]}$$

С использованием системы Mathematica можно доказывать математические тождества, получать производящие функции для сложных функций и последовательностей.

Литература

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика: Пер. с англ. М.: Мир, 1998. 703 с.
2. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. 3-е изд., испр. М.: МЦЕМО, 2007. 144 с.
3. Зюзьков В. М. Начала компьютерной алгебры: учеб. пособие. Томск: Издательский Дом ТГУ, 2015. 128 с.
4. Сизый С. В. Лекции по теории чисел. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 192 с.