Министерство образования и науки
Российской Федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Философский факультет

INITIA: АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОЦИАЛЬНЫХ НАУК (26–27 апреля 2019 г)

Материалы XXI Международной конференции молодых ученых

Томск
2019

КРОСС-МИРОВОЕ СРАВНЕНИЕ В РАСШИРЕННОЙ ЛОГИКЕ СОСЛАГАТЕЛЬНОГО НАКЛОНЕНИЯ

А.Р. Гавриков
Научный руководитель: д.ф.н. Е.В. Борисов
Томский государственный университет

Цель доклада – сравнить классическую первопорядковую модальную логику, изложенную в учебнике «Fitting, Mendelsohn - First-OrderModalLogic (1998)», с расширенной логикой сослагательного наклонения, предложенной Вемайером в статье «SubjectivityandCross-WorldPredication», и показать возможности последней в формализации высказываний, содержащих кросс-мировое сравнение.

Для начала рассмотрим язык L КМЛ (классической модальной логики). Вокабуляр языка L содержит предикатные символы (P, R, Q,…), кванторы (∀,∃), логические союзы (~, &, →, v, ≡), модальные операторы (□, ◊), два вида термов: индивидные переменные (x, y, z,…) и индивидные константы (a, b, c,…). Дадим определение правильно построенной формулы:

Def.: Множество формул задается по следующим правилам:

1. Если R – n-местный предикатный символ, а (t1, … ,tn) – термы языка L, то Rt1, … ,tn – атомарная формула;
2. Каждая атомарная формула – формула; каждое вхождение переменной в атомарной формуле – свободное вхождение;
3. Если X – формула, то ~X также формула; свободные вхождения ~X те же, что и в X;
4. Если X и Y – формулы и ® – бинарная связка, (X®Y) – формула; свободные вхождения переменных в (X®Y) те же, что в X и в Y вместе;
5. Если X – формула, то □X и ◊X – формулы; свободные вхождения переменных в □X и ◊X те же, что в X;
6. Если X – это формула и t – это переменная, то (∃t)X и (∀t)X – формулы; свободные вхождения переменных в (∃t)X и (∀t)X те же, что в X, за исключением вхождений t;

Теперь дадим определение модели в КМЛ:

Def.: Модель M для языка L представляет собой упорядоченную четверку вида (G, R, D, I), где:

1. G – непустое множество возможных миров;
2. R – бинарное отношение достижимости на G;
3. D – функция из множества возможных миров в множество непустых множеств; функция D также называется доменной функцией;
4. I – функция, назначающая: a)каждому n-местному предикатному символу R и каждому возможному миру Γ є G, некое n-местное отношение на D(M):=U{D(Γ)| ΓєG}; b) каждому константному символу c и каждому миру ΓєG некий член D(M);

Пусть v – функция из множества индивидных переменных в D(M). Запись w[x]v означает, что w – x-вариант v. Если t – переменная, v*I(t, Γ)=v(x). Если t – константа, v*I(t, Γ)=I(t, Γ). Дадим определение истинности в модели:

Def.: Пусть M = (G, R, D, I) – модель для языка L. Для каждого Γ є G и для каждой валюацииv в D(M):

1. Если R - n-местный предикат, то M, Г||-vR(t1, ... ,tn), тогда и только тогда, когда (v*I(t1, Г), ... , v*I(tn, Г)) ϵ I(R, Г).

2. M, Г||-v~X ↔ M, Г||-/X;

3. M, Г||-v(X&Y) ↔ M, Г||-vX и M, Г||-vY;

4. M, Г||-v□X ↔ для каждого ΔϵG, если ГRΔ, то M, Δ||-vX;

5. M, Г||-v◊X ↔ для некоторых ΔϵG, ГRΔ и M, Δ||-vX;

6. M, Г||-v(∀x)Φ ↔ для каждого w, если w[x]v и w(x)ϵD(Г), то M, Г||-wΦ;

7. M, Г||-v(∃x)Φ ↔ для некоторых w, w[x]v и w(x)ϵD(Г) и M, Г||-wΦ;

Теперь покажу ограниченность возможностей КМЛ при формализации высказываний типа:

(1) Наступит день, когда все, кто сейчас праведны, будут спасены.

В этом высказывании утверждается, что существует некоторый возможный мир Δ, такой что, все те, кто праведен в актуальном мире Г', будут спасены в Δ. Соответственно для того, чтобы формализовать это предложение, необходимо каким то образом присовокупить ◊ к формуле ∀x(Пx→Cx). Данный пример следует формализовать в рамках темпоральной логики, поэтому символ ◊ следует понимать как «однажды, наступит день». Это можно сделать тремя возможными способами:

1. ◊∀x(Пx→Cx)

Очевидно, данный вариант не является адекватной формализацией нашего высказывания, так как ◊ отсылает нас в некоторый возможный мир Δ, следовательно, квантор всеобщности будет пробегать по D(Δ). Однако (1) говорит, что спасутся именно те, кто праведен в актуальном мире Г'.

2. ∀x◊(Пx→Cx)

Данный вариант также не является адекватной формализацией, по двум причинам. Во-первых, хотя квантор всеобщности будет пробегать по D(Г'), ◊ отсылает нас в некий мир Δ, следовательно интерпретация предиката П будет задана на D(Δ). Иными словами в данной формализации объекты, существующие в мире Г', спасутся в Δ, если будут праведны в Δ. Во-вторых, поскольку ∀ расположен перед ◊, формула гласит, что для всякого x существует некоторый мир Δ, возможно для каждого разный, в котором если x праведен, то x спасется, что не соответствует смыслу нашего высказывания.

3. ∀x(Пx→◊Cx)

Третий вариант не подходит для формализации по схожей причине. Так как ∀ в данной формуле стоит перед ◊, получается, что для всякого праведника существует некоторый мир Δ, возможно для каждого разный, в котором он будет спасен.

Теперь рассмотрим язык ЛСН (логики сослагательного наклонения) и формализуем с его помощью наше высказывание. Особенность языка, предложенного Вемайером, заключается в использовании специальных маркеров наклонения предиката, «i» - для изъявительного и «s» - для сослагательного. Другими словами маркер «i» отсылает нас к интерпретации предиката в актуальном мире Г', маркер «s», отсылает нас к интерпретации предиката в Δ, ΔϵG. Дадим определение правильно построенной формулы для языка L логики сослагательного наклонения:

Def.: Множество формул задается по следующим правилам:

1. Если R – n-местный предикатный символ, а (t1, … ,tn) – термы языка L, то Rit1, … ,tn - атомарная формула;
2. Если R – n-местный предикатный символ, а (t1, … ,tn) – термы языка L, то Rst1, … ,tn - атомарная формула;
3. Каждая атомарная формула – формула; каждое вхождение переменной в атомарной формуле – свободное вхождение;
4. Если X – формула, то ~X также формула; свободные вхождения ~X те же, что и в X;
5. Если X и Y – формулы и ® - бинарная связка, (X®Y) – формула; свободные вхождения переменных в (X®Y) те же, что в X и в Y вместе;
6. Если X – формула, то □X и ◊X – формулы; свободные вхождения переменных в □X и ◊X те же, что в X;
7. Если X – это формула и t – это переменная, то (∃it)X и (∀it)X – формулы; свободные вхождения переменных в (∃it)X и (∀it)X те же, что в X, за исключением вхождений t;
8. Если X – это формула и t – это переменная, то (∃st)X и (∀st)X – формулы; свободные вхождения переменных в (∃st)X и (∀st)X те же, что в X, за исключением вхождений t;

Теперь дадим определение модели в ЛСН:

Def.: Модель M для языка L представляет собой упорядоченную шестерку вида (G, Г’, R, D, Ic, I), где:

1. G – непустое множество возможных миров;
2. Г’ – актуальный мир модели M;
3. R – бинарное отношение достижимости заданное на G;
4. D – функция из множества возможных миров в множество непустых множеств; функция D так же называется доменной функцией;
5. Ic – функция из множества индивидных констант в D(Г’);
6. I – функция, назначающая каждому n-местному предикатному символу R и каждому возможному миру ГϵG, некое n-местное отношение на D(M);

Дадим определение истинности в модели:

Def.: Пусть M = (G, Г’, R, D, Ic, I)– модель для языка L. Если t – переменная, то v*Ic(t)=v(x). Если t – константа, то v*Ic(t)=Ic(t). Для каждого ГϵG и для каждой валюациив в D(M):

1. Если R - предикатный символ n-местного отношения, то M, Г||-vRi(t1, ... ,tn), тогда и только тогда, когда (v*Ic(t1), ... , v*Ic(tn)) ϵ I(R, Г’);
2. Если R - предикатный символ n-местного отношения, то M, Г||-vRs(t1, ... ,tn), тогда и только тогда, когда (v*Ic(t1), ... , v*Ic(tn)) ϵ I(R, Г);
3. M, Г||-v~Ф ↔ M, Г||-/Ф;
4. M, Г||-v(X&Y)↔M, Г||-v X и M, Г||-v Y;
5. M, Г||-v□X↔для каждого ΔϵG, если ГRΔ, то M, Δ||-vX;
6. M, Г||-v◊X↔для некоторых ΔϵG, ГRΔ и M, Δ||-vX;
7. M, Г||-v(∀ix)Ф↔ для каждого w,если w[x]v и w(x)ϵD(Г’), то M, Г||-wФ;
8. M, Г||-v(∃ix)Ф↔ для некоторых w, w[x]v и w(x)ϵD(Г’) иM, Г||-wФ;
9. M, Г||-v(∀sx)Ф↔ для каждого w, если w[x]v и w(x)ϵD(Г) то M, Г||-wФ;
10. M, Г||-v(∃sx)Ф↔ для некоторых w, w[x]v и w(x)ϵD(Г) и M, Г||-wФ;

Теперь мы можем формализовать высказывание (1), используя предложенную Вемайером систему:

$\Diamond\forall ix(\Pi ix \rightarrow Csx)$

Для наглядности разберем истинностные условия получившейся формулы:

$M, \Gamma' \| \text{-} v \Diamond\forall ix(\Pi ix \rightarrow Csx)$ если и только если существует возможный мир Δ, такой что $\Gamma' R \Delta$ и $M, \Delta \| \text{-} v \forall ix(\Pi ix \rightarrow Csx)$;

если и только если существует возможный мир Δ, такой что $\Gamma' R \Delta$ и для всякой w, если w[x]v и $w(x) \epsilon D(\Gamma')$, то $M, \Delta \| \text{-} w\ \Pi ix \rightarrow Csx$;

если и только если существует возможный мир Δ, такой что $\Gamma' R \Delta$ и для всякой w, если w[x]v и $w(x) \epsilon D(\Gamma')$, то, если $M, \Delta \| \text{-} w\ \Pi ix$ то $M, \Delta \| \text{-} wCsx$;

если и только если существует возможный мир Δ, такой что $\Gamma R \Delta$ и для всякой w, если w[x]v и $w(x) \epsilon D(\Gamma')$, то, если $w(x) \epsilon I(\Pi, \Gamma')$ то $w(x) \in I(C, \Delta)$;

если и только если существует возможный мир Δ, такой что $\Gamma R \Delta$ и $I(\Pi, \Gamma') \subseteq I(C, \Delta)$;

Нетрудно увидеть, что теперь формализация корректна. Истинностные условия вполне согласуются со смыслом высказывания.

Теперь мы можем перейти к формализации высказываний, содержащих кросс-мировое сравнение. Разберем следующий пример:

(2) Джон мог бы быть выше, чем Мэри (как она есть).

Для формализации этого высказывания Веймайер вводит некоторое расширение в язык ЛСН. Это дополнение касается 2-местных предикатов. Маркер наклонения предлагается использовать для каждого терма, занимающего некоторое место в отношении. Таким образом, следует расширить определение формулы за счет следующих пунктов:

1. Если t1,t2 – формулы, а R – предикатный символ, то Riit1t2 – формула;
2. Если t1,t2 – формулы, а R – предикатный символ, то Rsst1t2 – формула;
3. Если t1,t2 – формулы, а R – предикатный символ, то Rist1t2 – формула;
4. Если t1,t2 – формулы, а R – предикатный символ, то Rsit1t2 – формула;

Теперь модифицируем 6 пункт в определении модели ЛСН:

6. I – функция, назначающая a) каждому n-местному предикатному символу R ($n \neq 2$) и каждому возможному миру $\Gamma \epsilon G$, некое n-местное отношение на D(M); b) каждому 2-местному предикатному символу R и каждой $(\Gamma, \Delta) \epsilon G2$, некое 2-местное отношение на D(M);

Соответствующее расширение получило определение истинности в модели:

1. Если R - предикатный символ 2-местного отношения, то $M, \Gamma \| \text{-} vRii(t1, t2)$, тогда и только тогда, когда $(v^*I(t1), v^*I(t2)) \in I(R, (\Gamma', \Gamma'))$;
2. Если R - предикатный символ 2-местного отношения, то $M, \Gamma \| \text{-} vRss(t1, t2)$, тогда и только тогда, когда $(v^*I(t1), v^*I(t2)) \in I(R, (\Gamma, \Gamma))$;
3. Если R - предикатный символ 2-местного отношения, то $M, \Gamma \| \text{-} vRis(t1, t2)$, тогда и только тогда, когда $(v^*I(t1), v^*I(t2)) \in I(R, (\Gamma', \Gamma))$;
4. Если R - предикатный символ 2-местного отношения, то $M, \Gamma \| \text{-} vRsi(t1, t2)$, тогда и только тогда, когда $(v^*I(t1), v^*I(t2)) \in I(R, (\Gamma, \Gamma'))$;

Получившееся расширение Вемайер назвал кросс-мировой ЛСН. Теперь мы без труда можем формализовать высказывание (2):

$\Diamond Rsijm$

Не трудно увидеть, что формализация адекватно передает содержание нашего высказывания.

Таким образом, кросс-мировая ЛСН имеет большие возможности при формализации высказываний естественного языка, нежели КМЛ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fitting M*. First-Order Modal Logic. Lehman College and the Graduate Center, Vol. 277, 1998. 291 p.
2. *Wehmeier K.* Subjunctivity and cross-world predication // Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition. 2012.Vol. 159, No. 1. – pp. 107-122.