Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Радиофизический факультет

8-я Международная научно-практическая конференция

Актуальные проблемы радиофизики АПР 2019

Сборник трудов конференции

РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1-4 октября 2019 года
г. Томск

Частотная модуляция вместо фазовой при управлении формой нелинейной передаточной характеристики: pro et contra

Измайлов Игорь Валерьевич,
Пойзнер Борис Николаевич
Томский государственный университет
E-mail: pznr@mail.tsu.ru

Постановка задачи. Управление формой нелинейной передаточной характеристики (ПХ) является одной из фундаментальных задач теории управления, радиофизики, функциональной электроники, оптоэлектроники, включая радиофотонику, нелинейной оптики и акустики *etc*. При этом нелинейность, как известно, проявляет себя в качестве универсального свойства материальных сред и систем. Здесь под ПХ подразумевается передаточная характеристика в пространстве величин сигналов [1, с. 100–103], например, вольтамперная характеристика высокочастотного диода в низкочастотных цепях.

Авторами ранее была разработана аксиоматическая схема исследования систем, в рамках которой предложен общий принцип формирования нелинейной передаточной характеристики преобразователей сигналов. Причём ПХ способна быть управляемой и самоуправляемой, поскольку её форма может зависеть от формы внешнего сигнала, в общем случае – пространственно-временной. Эта зависимость обусловливает широкое разнообразие достижимых форм ПХ: ведь известно, что множество форм сигналов исключительно велико. В силу универсальности принципа, существует неопределённое множество вариантов конструкций элемента с формируемой нелинейностью (с управляемой формой ПХ). Так, можно построить нелинейный элемент, в котором важное место занимает фазовый модулятор.

Как известно, понятия частоты и фазы колебаний связаны по определению: угловая частота $\omega(t)$ колебаний (мгновенная) есть производная по времени t от полной фазы $\varphi_f(t)$. Полная же фаза, часто записываемая в виде $\varphi_f(t)=\omega(t)t+\varphi_0$ (φ_0 – начальная фаза), есть аргумент периодической функции, моделирующей колебания, выражаемый в радианах (в СИ). Более строго и с учётом связи между фазой и частотой полную фазу следует представлять выражением $\varphi_f(t) = \int_{-\infty}^{t} \omega(t)\mathrm{d}t + \varphi_0$. В силу этой связи имеет место «перетекание» фазовой модуляции (ФМ) $\varphi_f(t)$ в частотную модуляцию (ЧМ) $\omega(t)$, поскольку изменение величины φ_f есть сама $\omega(t)$. Напротив, частотная модуляция $\omega(t)$ приводит и к модуляции полной фазы $\varphi_f(t)$. По-видимому, единственная существенная разница между этими двумя видами модуляции состоит в стремлении инженеров подчинить динамику величины $\varphi_f(t)$ либо $\omega(t)$ закону изменения информационного сигнала.

Далее пойдёт речь о возможности построения нелинейного элемента с управляемой ПХ, содержащем фазовый модулятор, а также о возможности и целесообразности замены фазовой модуляции на частотную.

Нелинейный элемент на базе ФМ. Свойством изменять форму нелинейной ПХ обладают оптические интерферометры. Сказанное приложимо, например, к известным интерферометрам Маха–Цендера, Рождественского, Икеды, хотя, судя по литературе, никто в контексте этого свойства на эти приборы не смотрел.

Строго говоря, этим свойством зависимости формы ПХ от формы внешнего сигнала обладают не сами интерферометры как оптические приборы, но совокупность последних с устройствами регулировки разности хода световых волн и с «анализаторами» интерференционной картины (глаз наблюдателя, фотодетектор и т.д.). Здесь вход устройства управления этой разностью есть вход нелинейного элемента, а выходом «анализатора» интерференционной картины является выход нелинейного элемента. При этом форма передаточной характеристики (например, сигнал управления разностью хода vs ток фотодетектора) зависит от формы оптического сигнала: гармонической либо более сложной, скажем, как у поля бихроматического лазера. В составе этого многокомпонентного нелинейного элемента с управляемой ПХ присутствует своего рода *одновходовый* нелинейный элемент с «готовой» (неуправляемой) ПХ. Это глаз наблюдателя, фотодетектор и т.д., который обеспечивает – в простейшем описании – возведение в квадрат и усреднение ранее просуммированных напряжённостей электрических полей оптических волн.

Предположим возможность (трудноосуществимой в оптике, но реализуемой в иных областях) замены двух упомянутых операций (суммирования и возведения в квадрат) на одну, описываемую перемножением двух сигналов. Такая замена одновходового нелинейного элемента с «готовой» ПХ и сумматора на *двухвходовый* элемент приводит к синтезу формально нового нелинейного элемента, но со сходными свойствами. Если не ограничиваться оптикой, то, например, в радиоэлектронике выполнима замена двух указанных операций любой бинарной нелинейной: перемножением логическим, суммированием по модулю 2, операцией, осуществляемой монтажным «или» на двух диодах, когда на схему поданы аналоговые (а не цифровые) сигналы. Нетрудно видеть, что и исходная комбинация сумматора с одновходовым нелинейным

элементом представляет собой двухвходовый нелинейный элемент. С одной стороны, сказанное подчёркивает общность структуры нелинейных элементов, а с другой – вариативность конструкции элемента с такой структурой. Однако и сама структура эта, характерная для двухлучевых интерферометров, есть частный случай реализации общего принципа формирования нелинейной ПХ преобразователей сигналов, упомянутого выше.

Оставаясь в рамках нелинейного элемента такой структуры и строя его на основе аналогового перемножителя (двухвходовой «готовой» нелинейности), получим нелинейный элемент *(рис. 1)*, который функционально подобен *коррелятору*, поскольку здесь фазовый модулятор действует подобно регулируемой линии задержки в корреляторе.

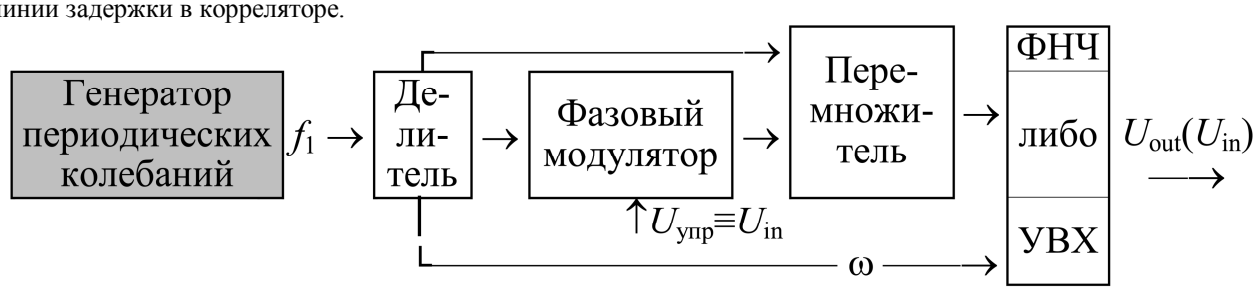

Рис. 1. Структурная схема нелинейного элемента, функционально подобного коррелятору. Здесь ФНЧ – фильтр нижних частот; УВХ – устройство выборки-хранения; для простоты считается, что делитель обеспечивает равенство обоих выходных сигналов входному $f_1(t)$

В этом нелинейном элементе высокочастотный периодический сигнал $f_1(t)$ от генератора поступает на вход делителя. Для простоты считается, что оба его выходных сигнала равны входному $f_1(t)$. Один из сигналов $f_1(t)$ после делителя поступает на фазовый модулятор, испытывая запаздывание δt в нём (избыточное над временем распространения сигнала f_1 в плече без модулятора), или, в терминах фазового модулятора, приобретая фазовый набег $\delta\varphi=2\pi\delta t/T$, где T – период $f_1(t)$. Величина δt регулируется сигналом U_{in} на втором входе фазового модулятора: $\delta t=\delta t(U_{in})$. Далее испытавший задержку δt сигнал $f_1(t-\delta t)$ и не испытавший её $f_1(t)$ перемножаются. Результат $f_1(t-\delta t)f_1(t)$ подаётся на вход фильтра нижних частот (ФНЧ). Ради простоты его можно считать ФНЧ первого порядка. В нём выделяется постоянная составляющая U_{out}, по крайней мере, если постоянная времени ФНЧ $\tau_{ФНЧ}>>T$.

На данном примере удобно демонстрировать, как возможно сменять вид нелинейности передаточной характеристики $U_{out}(U_{in})$ в системе сменой формы периодического входного сигнала $f_1(t)$. А также – с опорой на этот пример – рассуждать о применимости в этой задаче частотной модуляции вместо фазовой. Причём, если генератор периодических колебаний отделён от системы и поставляет ей сигнал $f_1(t)$ издалека, то возможно *дистанционное* управление формой ПХ.

Нетрудно проверить, что нелинейная ПХ $U_{out}(U_{in})$ элемента на *рис. 1* описывается выражениями

$$U_{out}(U_{in}) = U_{out}(S_{cor}(\delta t(U_{in}))),$$

$$S_{cor}(\delta t) = (1/T)\int_0^T f_1(t)f_1(t-\delta t)\mathrm{d}t\,. \qquad (1)$$

Здесь S_{cor} – автокорреляционная функция для $f_1(t)$. Как уже говорилось, предполагается, что $\tau_{ФНЧ}>>T$. В противном случае, можно использовать «тактируемый» ФНЧ, если длительность его такта $\tau_{clock}=mT$, где m – целое. Такой ФНЧ есть устройство выборки-хранения. Оно осуществляет интегрирование согласно (1), но – по отрезку времени $[0;\tau_{clock}]$ и выдаёт сигнал, величина которого соответствует S_{cor}. Однако, в отличие от обычного ФНЧ, это сигнал дискретен по времени. Такой ФНЧ способен быть более быстродействующим, чем традиционный фильтр (при небольших m).

Очевидно, что на форме зависимости $U_{out}(U_{in})$ отражается форма модуляционной характеристики $\delta t(U_{in})$ фазового модулятора. Поскольку вид $\delta t(U_{in})$ зависит от технической реализации модулятора, которая пока не рассматривается, то удобно оперировать аргументом ПХ, приведённым к величине времени запаздывания δt, т.е. оперировать ПХ на плоскости: время запаздывания δt – сигнал U_{out} на выходе ФНЧ: $U_{out}(\delta t)\equiv N_0(\delta t)$.

Влияние формы сигнала $f_1(t)$ на вид $N_0(\delta t)$ иллюстрирует *рис. 2*, который построен на основе вычислений корреляционной функции в (1). Из *рис. 2* очевидно: если f_1 – последовательность из прямоугольных импульсов *(рис. 2, а, в)*, то нелинейность $N_0(\delta t)$ кусочно-линейна (*б, г*). А если f_1 состоит из отрезков прямых (*д, ж*), то нелинейность $N_0(\delta t)$ состоит из отрезков кубичных парабол (*е, з*) и может быть близка к гармонической функции: $N_0(\delta t)\approx c_1+c_2\cos(2\pi\delta t)$, где c_1, c_2 – константы. Выводы об управлении нелинейностью доказываются и лабораторным экспериментом (кружки́ на *рис. 2, б, г*) с радиоэлектронным устройством, соответствующим схеме на *рис. 1*. В целом этот пример показывает, как разнообразие форм внешнего сигнала $f_1(t)$ порождает

разнообразие видов ПХ $N_0(\delta t)$. Эти ПХ $N_0(\delta t)$ в простейших случаях на определённых отрезках аргумента описываются, как и обычно, неким полиномом: на рис. 2 *б, г* это полиномы первого порядка, на рис. 2 *е, з* – полиномы третьего порядка. Хотя полином первого порядка есть линейная функция, но ПХ $N_0(\delta t)$, состоящая из набора таких полиномов, в целом является нелинейной. В более сложных случаях эта ПХ может быть такой нелинейной функцией, которую – лишь при работе нелинейного элемента в режиме малого сигнала – рационально раскладывать в ряд Тейлора, чтобы представить в привычном полиномиальном виде.

Если нелинейный элемент *(рис. 1)* включён в состав некоторого устройства (например, генератора хаоса), в котором входной сигнал U_{in} модулятора зависит от времени $U_{in}(t)$, то для корректной работы элемента (для справедливости (1)) требуется выполнить некоторые ограничения.

Первое ограничение: скорость изменения $d\delta t(t)/dt$ задержки $\delta t(t)$ в фазовом модуляторе должна быть достаточно мала по модулю:

$$|d\delta t(t)/dt| \ll 1. \qquad (2)$$

Выполнение его позволяет пренебречь компрессией / растяжением сигнала (потока) $f_1(t)$ в результате прохождения через фазовый модулятор. То есть пренебречь локальными изменениями его «силы» (например, амплитуды, интенсивности, величины расхода потока) из-за модуляции.

Второе ограничение: скорость изменения $d\delta\varphi(t)/dt$ фазового набега $\delta\varphi(t)$ в модуляторе должна быть достаточно мала по модулю:

$$|T d\delta\varphi(t)/dt| \ll 2\pi. \qquad (3)$$

То есть изменение фазового набега мало за период T сигнала $f_1(t)$. Выполнение его позволяет пренебречь искажениями формы сигнала (включая изменение его временного масштаба T) в результате прохождения через фазовый модулятор. Следовательно, позволяет пренебречь искажениями формы ПХ $U_{out}(U_{in})$ или $N_0(\delta t)$.

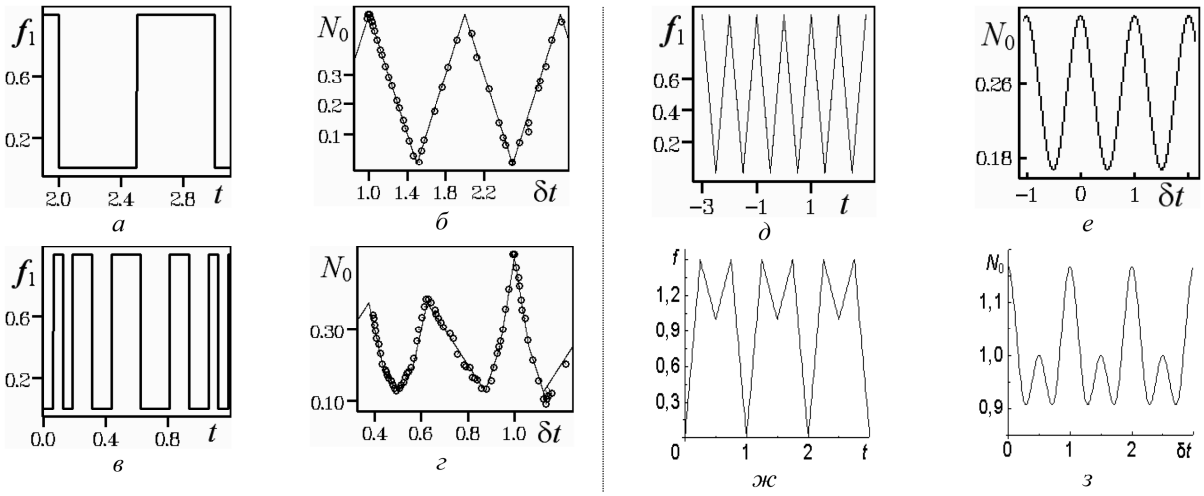

*Рис. 2. Входные сигналы f_1 (а, в, д, ж) и формируемые ими нелинейности N_0 (б, г, е, з) в модели (1). Символ «**o**» отражает данные эксперимента с радиоэлектронным устройством, соответствующим схеме на рис. 1*

Какое из двух ограничений является более сильным? Неравенство $|d\delta t(t)/dt| \ll 1$ или $|T d\delta\varphi(t)/dt| \ll 2\pi$? Учтём во втором неравенстве, что $\delta\varphi(t) \equiv 2\pi\delta t(t)/T$ и получим $|T d(2\pi\delta t(t)/T)/dt| = |2\pi d\delta t(t)/dt| \ll 2\pi$, откуда следует неравенство $|d\delta t(t)/dt| \ll 1$. Очевидно, что оно совпадает с неравенством в первом ограничении. Другими словами, оба ограничения одинаково сильны. Условимся следить лишь за выполнением второго. В радиофизическом аспекте это означает: если в модуляторе форма сигнала $f_1(t)$ не искажается, то и не возникает компрессии / растяжения сигнала.

Относительно зависимости $\delta t(U_{in})$ предположим, что $\delta t(U_{in}) = \delta t_0 + K_{\delta t}(U_{in} - U_{in\,min})$, где $K_{\delta t}$ – крутизна модуляционной характеристики фазового модулятора, δt_0 – начальная задержка (т.е. $\delta t_0 = \delta t(U_{in\,min})$), $U_{in\,min}$ – минимальное значение величины U_{in}. Тогда

$$\delta\varphi(t) \equiv 2\pi\delta t(U_{in}(t))/T = 2\pi\delta t_0/T + 2\pi K_{\delta t}(U_{in}(t) - U_{in\,min})/T = \delta\varphi_0 + K(U_{in}(t) - U_{in\,min})/(U_{in\,max} - U_{in\,min}), \qquad (4)$$

где $\delta\varphi_0 \equiv 2\pi\delta t_0/T$ – начальный сдвиг фаз; $U_{in\,max}$ – максимальное значение величины $U_{in}(t)$; $K \equiv 2\pi K_{\delta t}(U_{in\,max} - U_{in\,min})/T$ – некий коэффициент нелинейности. Его модуль показывает максимально достижимое изменение (размах) фазового набега в модуляторе. В методологическом плане $|K|$ есть количественная мера нелинейных свойств устройств, созданных на базе нелинейных элементов, имеющих обсуждаемый здесь принцип действия – см. *рис. 1* и (1). К ним, например, относится кольцевой интерферометр с керровской нелинейной средой. Эта среда осуществляет возведение в квадрат напряжённости светового поля, усреднение результата и обеспечивает

фазовый набег $\delta\varphi(t)$, пропорциональный этому усреднённому результату [2]. Опыт моделирования процессов в этом интерферометре позволяет *предположить*, что в схеме на *рис. 1* при подаче сигнала U_{out} с выхода ФНЧ с помощью цепи обратной связи с коэффициентом передачи γ на вход фазового модулятора U_{in} бифуркации возможны, если $|K|\geq 1$ рад. А при наличии запаздывания в цепи обратной связи возможен динамический хаос, когда значения $|K|$ составляют порядка 2,5 рад и более.

Полезно переписать неравенство (3) второго ограничения в предположении (4): $|dU_{in}(t)/dt|<<2\pi(U_{in\,max}-U_{in\,min})/(|K|T)$. Предположим, что организована обратная связь, как о ней говорилось выше ($U_{in}=\gamma U_{out}$). Тогда максимальный (по модулю) темп $|dU_{in}/dt|_{max}$ изменения входного сигнала U_{in} равен таковому для выходного сигнала U_{out}, умноженному на γ. Оценить же максимальный (по модулю) темп $|dU_{out}/dt|_{max}$ изменения величины U_{out} нетрудно из модели ФНЧ 1-го порядка (*RC*-фильтра). Этой оценкой служит отношение $(U_{out\,max}-U_{out\,min})/\tau_{ФНЧ}$. То есть $|dU_{in}/dt|_{max}=\gamma|dU_{out}/dt|_{max}=\gamma(U_{out\,max}-U_{out\,min})/\tau_{ФНЧ}$. С учётом этой оценки и равенства $(U_{in\,max}-U_{in\,min})/\tau_{ФНЧ}=\gamma(U_{out\,max}-U_{out\,min})/\tau_{ФНЧ}$ преобразованное здесь неравенство (3) можно модифицировать к виду $|dU_{in}/dt|<(U_{in\,max}-U_{in\,min})/\tau_{ФНЧ}<<2\pi(U_{in\,max}-U_{in\,min})/(|K|T)$. Отсюда, упрощая неравенство, нетрудно получить аналог второго ограничения (3) для нелинейного элемента, охваченного простейшей обратной связью:

$$\tau_{ФНЧ} >> |K|T/(2\pi). \qquad (5)$$

Следует сравнить это ограничение со стандартным условием корректного выделения постоянной составляющей фильтром, которое приведено в комментариях к (1): $\tau_{ФНЧ}>>T$. Если считать актуальными для практики значения $|K|$ порядка 2,5 рад и более, то очевидно, что условия (5) имеют силу, которая либо раза в три ниже, либо близка, либо выше, чем у неравенства $\tau_{ФНЧ}>>T$.

Такая – достаточно высокая – сила неравенства (5) значит следующее. Казалось бы, применение тактируемого ФНЧ, ослабляя требование выделения постоянной составляющей (заменяя условие $\tau_{ФНЧ}>>T$ на $\tau_{clock}=mT$), способно повысить быстродействие нелинейного элемента. Однако требование (5), обеспечивающее малость искажений формы сигнала $f_1(t)$ (и $N_0(\delta t)$), остаётся в силе. Но в него вместо $\tau_{ФНЧ}$ следует поставить длительность такта τ_{clock}. Очевидно, (5) по-прежнему ограничивает допустимый темп динамики переменных, ставя предел быстродействию нелинейного элемента и системы в целом.

Тем не менее, если – в дополнение к тактируемому ФНЧ – вообразить применение некоего быстродействующего тактируемого модулятора фазы, то можно создать устройство с обратной связью, чьё быстродействие обусловлено лишь длительностью такта τ_{clock}. При этом постоянного выполнения условия (5) не требуется. Дело в том, что такая комбинация ФНЧ с модулятором подразумевает их синхронную работу. Благодаря ей, фазовый набег под управлением *дискретного во времени* сигнала с выхода ФНЧ меняется в модуляторе почти мгновенно: за доли периода T, т.е. условие (5) нарушается. Затем набег не меняется в течение времени τ_{clock}: условие (5) выполняется с большим «запасом», и ФНЧ имеет возможность точно «вычислить» интеграл в (1). Очевидно, что оценкой точности реального устройства, воплощающего этот принцип, может служить отношение указанной доли периода T к величине τ_{clock}. Математической моделью работы такого устройства способно служить дискретное отображение вида $\delta t_{i+1}=\gamma K_{\delta t}N_0(\delta t_i)$.

Следует подчеркнуть, что требования (5) и $\tau_{ФНЧ}>>T$ актуальны для справедливости (1) и, возможно, для того, чтобы устройство на *рис. 1* имело ПХ в пространстве величин сигналов (было безынерционным нелинейным элементом). Поэтому, если стремиться всего лишь к сложности динамики в некой системе с обратной связью, то требование (5), как и требование $\tau_{ФНЧ}>>T$ ($\tau_{clock}=mT$) могут оказаться необязательными. Но для таких устройств потребуется строить другую математическую модель. Акцентируем снова: в этом случае может оказаться, что устройство на *рис. 1* не будет иметь ПХ в пространстве величин сигналов.

Заметим, что соотношение (5) бросает свет на нетривиальную закономерность («принцип 1»): чем более нелинейную систему мы хотим построить, тем ниже допустимый темп изменения динамических переменных U_{in}, оцениваемый величиной $(U_{in\,max}-U_{in\,min})/\tau_{ФНЧ}$. То есть для заданного значения размаха $(U_{in\,max}-U_{in\,min})$ при увеличении $|K|$ требуется увеличивать и значение $\tau_{ФНЧ}$. Экстраполируема ли эта закономерность на произвольный нелинейный элемент? Если принять максимально достижимую скорость изменения выходного сигнала элемента за некую объективную характеристику быстродействия системы, то, действительно, эта закономерность выглядит универсальной, причём не только для нелинейных элементов. Ведь коэффициент нелинейности K характеризует максимальный отклик системы при максимальном воздействии, а скорость изменения выходного сигнала пропорциональна K и темпу изменения воздействия (динамической переменной). Вероятно, в этом контексте уместно упомянуть, что, скажем, операционные усилители характеризуются не только граничной частотой, но и максимальной *скоростью* изменения выходного сигнала.

О возможности замены ФМ на ЧМ. Ясно, что в соотношении (1) первостепенную роль играет отношение $\delta t/T$ (или набег фаз $\delta\varphi=2\pi\delta t/T$), а не запаздывание δt как таковое. Величина же набега $\delta\varphi$ зависит от величины этого запаздывания и частоты $\omega\equiv 2\pi/T$ сигнала f_1. Поэтому возникает идея управлять не величиной δt в ФМ, а частотой ω

генератора периодических колебаний f_1. Сам же ФМ – заменить постоянной линией задержки с временем запаздывания τ. Под величиной τ логично подразумевать задержку, избыточную над временем распространения сигнала f_1 в плече без этой линии. С точки зрения удобства реализации, такой подход привлекателен, потому что управлять частотой в широких пределах зачастую легче, чем фазой. С другой стороны, при таком подходе генератор сигнала f_1 становится непосредственно включённым в нелинейный элемент, а потому может утратиться дистанционное управление формой ПХ $U_{out}(U_{in})$ с помощью формы сигнала f_1.

Чтобы в какой-то мере сохранить это свойство, можно предпринять, например, декомпозицию генератора f_1 на два блока: генератор периодического сигнала f_0 фиксированной формы с частотой, управляемой напряжением, и следующий за ним формирователь формы сигнала f_1 из сигнала f_0. При этом у формирователя есть некий вход, величина сигнала U_{F1} на котором способна управлять формой сигнала f_1. Пример такого нелинейного элемента, в котором f_0 есть периодическая последовательность прямоугольных импульсов, а двухвходовый элемент с «готовой» ПХ выполняет, скажем, операцию «логическое И» либо «сумма по модулю два», изображён на *рис. 3*.

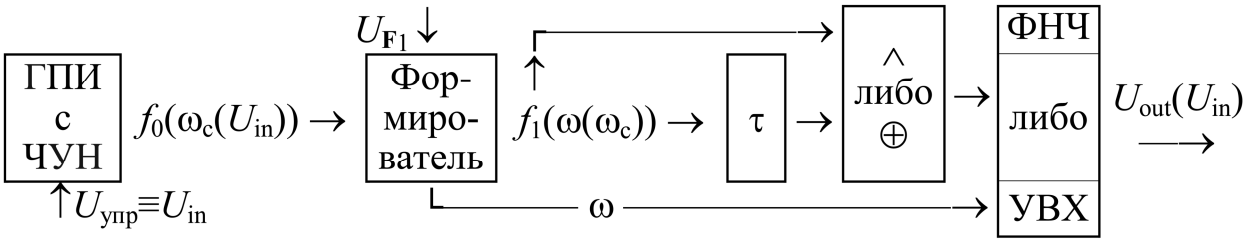

Рис. 3. Нелинейный элемент, реализующий принцип «f_1→Делитель→ФМ→Перемножитель→ФНЧ» на рис. 1, когда $\omega(\omega_c(U_{in}))$ изменяется достаточно медленно. Здесь ГПИ с ЧУН – генератор прямоугольных импульсов с частотой, управляемой напряжением, УВХ – устройство выборки-хранения

По аналогии с рассмотрением нелинейного элемента, содержащего фазовый модулятор, здесь требуется оценить:

1) в каких пределах должна меняться частота $\omega(\omega_c(U_{in}))$, чтобы в устройствах с обратной связью и с этим элементом были наблюдаемы бифуркации и, возможно, хаос;

2) с какой скоростью может меняться частота, чтобы элемент работал согласно модели (1).

Пусть при изменении U_{in} в пределах $[U_{in\,min}, U_{in\,max}]$ частота ω (монотонно) изменяется в пределах $[\omega_{min}, \omega_{max}]$. Тогда набег фазы в линии задержки τ варьирует от $\delta\varphi_{\tau\,min}=\omega_{min}\tau$ до $\delta\varphi_{\tau\,max}=\omega_{max}\tau$. А максимально достижимое изменение (размах) фазового набега составляет $\delta\varphi_{\tau\,max}-\delta\varphi_{\tau\,min}=(\omega_{max}-\omega_{min})\tau$. По своему физическому смыслу разность $\delta\varphi_{\tau\,max}-\delta\varphi_{\tau\,min}$ совпадает с модулем коэффициента нелинейности $|K|$. Он введён выше для случая применения фазовой модуляции в нелинейном элементе *(рис. 1)*, а не частотной модуляции *(рис. 3)*. Поэтому если задать некое актуальное (желаемое) значение $|K|$ (например, упоминавшееся ранее значение $|K|\geq 2{,}5$ рад), то очевидно, что должно выполняться условие $\delta\varphi_{\tau\,max}-\delta\varphi_{\tau\,min}=(\omega_{max}-\omega_{min})\tau\geq|K|$, или

$$\mu \geq (|K|/2\pi)(T_{max}/\tau), \tag{6}$$

где $\mu\equiv(\omega_{max}-\omega_{min})/\omega_{min}$ – размах частот, нормированный на минимальную частоту, $T_{max}\equiv 2\pi/\omega_{min}$ – максимальный период сигнала f_1. Это неравенство превращается в равенство, когда размах частот μ обеспечивает желаемый уровень нелинейности $|K|$ без какого-либо «запаса».

Из условия (6) следует некий «принцип 2»: чем большую девиацию частоты можно себе позволить технически, тем меньшее запаздывание τ в единицах максимального периода T_{max} требуется, чтобы достичь заданного уровня нелинейности $|K|$. Например, при $|K|\geq\pi$ рад из (6) вытекает условие: $2\mu \geq 1/(\tau/T_{max})$. Тем самым, дан ответ на первый из вопросов.

А теперь надо ответить на второй вопрос. Чтобы элемент на *рис. 3* работал согласно модели (1), сигналы, приходящие на двухвходовый элемент с «готовой» ПХ, должны иметь близкие временные масштабы (частоты). То есть $\omega(t)\approx\omega(t-\tau)$, или $\omega(t-\tau)/\omega(t)\approx 1$, или $|\omega(t-\tau)-\omega(t)|/\omega(t)<<1$. Если принять приемлемость аппроксимации $\omega(t-\tau)\approx\omega(t)-\tau d\omega(t)/dt$, то последнее соотношение примет вид

$$\tau|d\omega(t)/dt|/\omega(t)<<1. \tag{7}$$

В предположении, что в системе обеспечен желаемый уровень нелинейности без «запаса», выразим время τ из (6) $\tau=(|K|/2\pi)(T_{max}/\mu)=|K|/(\mu\omega_{min})$ и подставим в (7)

$$|d\omega(t)/dt|/\omega(t)<<\mu\omega_{min}/|K|. \tag{8}$$

Здесь произведение $\mu\omega_{min}$ характеризует технические возможности генератора с частотой, управляемой напряжением. В целом же из условия (8) следует некий «принцип 3»: чем большую девиацию частоты можно себе позволить технически, тем большая нормированная скорость изменения частоты $|d\omega(t)/dt|/\omega(t)$ допустима –

при заданном (желаемом) уровне нелинейности $|K|$. Но чем выше желаемый уровень нелинейности $|K|$, тем ниже допустимая нормированная скорость изменения частоты.

Очевидно, что неравенство (8) уже объединяет ответы на оба поставленные вопроса. Теперь логично задуматься: какое из устройств является боле быстродействующим? Характеристику быстродействия нелинейного элемента на основе ЧМ, используя (8), сложно сопоставить с выводами, касающимися устройства на основе фазовой модуляции. Поэтому попробуем сопоставить близкие по смыслу условия (7) и (3).

Заменой $\delta\varphi_\tau(t)\equiv\tau\omega(t)$ соотношение (7) можно привести к виду $|\mathrm{d}\delta\varphi_\tau(t)/\mathrm{d}t|<<\omega(t)$, а выражение (3) заменой $2\pi/T\equiv\omega$ – к виду $|\mathrm{d}\delta\varphi(t)/\mathrm{d}t|<<\omega$. Отсюда, казалось бы, вытекает, что в терминах допустимой скорости изменения фазового набега (разности фаз на входе двухвходового нелинейного элемента с готовой ПХ) быстродействие устройств на *рис. 1* и *рис. 3* сравнимо. Сравнимо, – но с той разницей, что в случае *рис. 3* частота меняется. Тогда для пущей надёжности выполнения условия (7) можно $\omega(t)$ заменить на $\omega_{\min}$. Это даже следует сделать. Ведь в реальных системах на базе такого нелинейного элемента комбинации скорости изменения $U_{\mathrm{in}}(t)$ и величины $U_{\mathrm{in}}(t)$ могут быть любыми. Следовательно, в силу зависимости величин $\delta\varphi_\tau(t)$ и $\omega(t)$ от $U_{\mathrm{in}}(t)$ этот тезис справедлив и для комбинаций $|\mathrm{d}\delta\varphi_\tau(t)/\mathrm{d}t|$ и $\omega(t)$. То есть условие (7) логично усилить до вида

$$|\mathrm{d}\delta\varphi_\tau(t)/\mathrm{d}t|<<\omega_{\min}, \tag{9}$$

а условие (8) – до вида

$$|\mathrm{d}\omega(t)/\mathrm{d}t|<<\mu\omega_{\min}^2/|K|, \text{ или } |\mathrm{d}\delta\varphi_\tau(t)/\mathrm{d}t|<<\mu\tau\omega_{\min}^2/|K|. \tag{10}$$

А для устройства на *рис. 1*, напротив, если фазовый модулятор и двухвходовый нелинейный элемент с готовой ПХ способны корректно работать при $\omega=\omega_{\max}$ (благоприятный случай), то разумно выбирать $\omega=\omega_{\max}$. Тогда (3) примет вид

$$|\mathrm{d}\delta\varphi(t)/\mathrm{d}t|<<\omega_{\max}. \tag{11}$$

Впрочем, когда создать быстродействующий фазовый модулятор (модулятор для высокой частоты ω) технически сложно, то частота ω в (3) может оказаться даже ниже, чем $\omega_{\min}$ – неблагоприятный случай. Здесь возникает запрос к конструкторам и материаловедам.

Соотношения (9), (10) и (11) выглядят логично. Действительно, они говорят о том, что быстродействие в нелинейном элементе ограничивается минимальной частотой служебного сигнала f_1 (подобно тому как в системе её быстродействие ограничена инерционностью используемых компонентов). В первом случае (ФМ) это $\omega=\omega_{\max}$, а во втором (ЧМ) – $\omega(t)=\omega_{\min}$. Это некий «принцип 4».

Казалось бы, сопоставление в терминах допустимой скорости изменения фазового набега можно завершить. Однако надо обратить внимание на разницу в величинах $\delta t(t)$ и τ. На них надо смотреть с учётом величины желаемого $|K|$. Напомним, что количественная мера $|K|$ нелинейных свойств устройств на *рис. 1* или *рис. 3* показывает максимально достижимое изменение фазового набега $\delta\varphi$ или $\delta\varphi_\tau$. Тогда для системы на *рис. 1* должно быть $\delta\varphi_{\max}-\delta\varphi_{\min}=\omega(\delta t_{\max}-\delta t_{\min})\geq|K|$, или $\delta t_{\max}\geq\delta t_{\min}+|K|/\omega$. Например, если плечи сбалансированы (по времени распространения сигнала f_1 в них), то $\delta t_{\min}=0$ и $\delta t_{\max}\geq|K|/\omega$. В благоприятном случае $\omega=\omega_{\max}$ имеем $\delta t_{\max}\geq|K|/\omega_{\max}$. Ранее же для *рис. 3* вывели, что $\tau\geq|K|/(\mu\omega_{\min})$. Если величина желаемого $|K|$ обеспечивается без «запаса», то эти неравенства превращаются в равенства. Поделим первое равенство на второе

$$\delta t_{\max}/\tau=1-\omega_{\min}/\omega_{\max}. \tag{12}$$

Из (12) видно, что время τ должно быть не меньше времени $\delta t_{\max}$. А различие между ними падает с ростом размаха модуляции (девиации) частоты.

В плане быстродействия эти времена (в первую очередь τ), на первый взгляд, дают вклад в запаздывание отклика U_{out} нелинейного элемента по отношению к воздействию U_{in}. Однако чисто формально, если считать фазовый модулятор и генератор с ЧУН безынерционными устройствами, то в обоих случаях сдвиг фаз сигналов на входах элемента с «готовой» ПХ возникает мгновенно. Поэтому сами величины $\delta t_{\max}$ и τ существенны не с точки зрения быстродействия систем, а лишь в плане конструктивных отличий и сложности реализации. Линия задержки во втором случае – постоянная, но с бóльшим временем запаздывания τ, а в первом случае $\delta t(t)$ есть переменная величина (связанная с режимом ФМ), зато приемлемы меньшие значения $\delta t_{\max}$.

Развёрнутые выше рассуждения о быстродействии сделаны в терминах допустимой скорости изменения фазового набега. Он есть «внутренняя» переменная нелинейного элемента. Поэтому желательно рассмотреть вопрос в терминах скорости изменения $U_{\mathrm{in}}(t)$ или $U_{\mathrm{out}}(t)$. Надо решить: как выбором величины $\tau_{\text{ФНЧ}}$ обеспечить достаточную медленность динамики в простейшей системе с обратной связью? То есть надо получить аналог выражения (5).

Для этого проведём рассуждения аналогичные тем, что выполнены в контексте получения формул (4) и (5). Предположим, что $\omega(\omega_c(U_{\mathrm{in}}(t)))=\omega(U_{\mathrm{in}}(t))=\omega_{\min}+K_\omega(U_{\mathrm{in}}(t)-U_{\mathrm{in\,min}})$, где $K_\omega=(\omega_{\max}-\omega_{\min})/(U_{\mathrm{in\,max}}-U_{\mathrm{in\,min}})$ –

крутизна модуляционной характеристики генератора с частотой, управляемой напряжением. Тогда (9) перепишется в виде

$$|K_\omega \mathrm{d}U_{in}(t)/\mathrm{d}t| << \omega_{min}/\tau, \quad (13)$$

а (10) – в виде

$$|K_\omega \mathrm{d}U_{in}(t)/\mathrm{d}t| << \mu\omega_{min}^2/|K|. \quad (14)$$

Снова предположим, что организована простейшая обратная связь: $U_{in}=\gamma U_{out}$. Используем оценку $|\mathrm{d}U_{in}/\mathrm{d}t| \le |\mathrm{d}U_{in}/\mathrm{d}t|_{max}=\gamma|\mathrm{d}U_{out}/\mathrm{d}t|_{max}=\gamma(U_{out\,max}-U_{out\,min})/\tau_{ФНЧ}$ и равенство $(U_{in\,max}-U_{in\,min})/\tau_{ФНЧ}=\gamma(U_{out\,max}-U_{out\,min})/\tau_{ФНЧ}$. Тогда преобразуем (13) к виду

$$\tau_{ФНЧ} >> \mu\tau, \quad (15)$$

а (14) – к виду

$$\tau_{ФНЧ} >> |K|/\omega_{min}. \quad (16)$$

Подчеркнём: в случае, когда девиация частоты обеспечивает лишь *желаемый* уровень нелинейности $|K|$, тогда $(\omega_{max}-\omega_{min})\tau=|K|$, следовательно, $|\mu\tau|=|K|/\omega_{min}$, т.е. (15) и (16) совпадают. Этот факт подкрепляет корректность расчётов.

Для сравнения неравенств (15) и (16), полученных для устройства на *рис. 3*, с условием (5) для устройства на *рис. 1* перепишем (5) в благоприятном случае ($\omega=\omega_{max}$, $T=T_{min}$) и с учётом оценки $\delta t(t) \le \delta t_{max}=|K|/\omega_{max}$

$$\tau_{ФНЧ} >> |K|/\omega_{max}. \quad (17)$$

Соотношения (15)–(17) позволяют корректно выбирать время $\tau_{ФНЧ}$ при конструировании простейших систем с обратной связью на базе нелинейных элементов с ФМ и ЧМ на *рис. 1* и *рис. 3*. Такой выбор гарантирует работу этих элементов в соответствии с моделью (1), иллюстрируемой *рис. 2*.

Напомним, что при обсуждении соотношении (5) сформулирован «принцип 1», связывающий уровень нелинейности системы с допустимым темпом изменения динамических переменных. Поскольку условие (16), справедливое для ЧМ, аналогично соотношению (17), полученному из (5), то, очевидно, что этот принцип справедлив и в случае ЧМ. Это подтверждает соображения об универсальности принципа.

Если же сопоставлять соотношения (16) и (17) для устройства с ФМ и с ЧМ, то очевидно, что смена терминов, в которых проводится рассмотрение (смена $\delta\varphi(t)$ на $U_{in}(t)$), не отражается на справедливости «принципа 4», сформулированного при обсуждении (9)–(11).

Например, для реализованного по схеме на *рис. 3* макета радиоэлектронного устройства запаздывание составляет $\tau \approx 403$ нс, а частота f_c на трёх пределах варьировалась в диапазонах: 2,432...7,384 МГц, 7,96...33,12 МГц, 12,72...58,88 МГц. То есть величина μ составляет 2,04, 3,16, 3,63, соответственно, а максимально достижимый коэффициент нелинейности $|K|$ достигает значений $|\mu\tau|\omega_{min}$: 12,56 рад, 63,66 рад, 116,86 рад. Тогда согласно (16) время $\tau_{ФНЧ}$ должно быть много больше, чем 32,43 мкс, 50,22 мкс, 57,70 мкс. На практике для наблюдения бифуркаций и хаоса вполне достаточно значений $|K|$ порядка 10. Тогда можно технически ограничить величину μ и ослабить требование на величину $\tau_{ФНЧ}$, например, до $\tau_{ФНЧ}$>>25,82 мкс, $\tau_{ФНЧ}$>>7,89 мкс, $\tau_{ФНЧ}$>>4,94 мкс.

Оказывается, что в этом макете замыкание цепи обратной связи, т.е. подача сигнала U_{out} с выхода нелинейного элемента на его вход в качестве U_{in}, вызывало режим мультистабильности. Наличие же запаздывания в этой цепи ($U_{out} \to U_{in}$) либо использование «тактируемого» устройства выборки-хранения создаёт периодические и хаотические колебания. При этом имеет место расширение спектра последних при использовании «криволинейной» нелинейности $N_0(\delta t)$, а не кусочно-линейной, например, изображённой на *рис. 2 е*, а не на *рис. 2 б*. Это свидетельствует о предпочтительности «криволинейной» нелинейности для генерации хаоса. Для получения последней в УВХ дополнительно использовался переход от интегрирования по времени t к интегрированию по машинной переменной *a la* АВМ [3].

Выводы. В контексте выдвинутой ранее концепции управляемой и самоуправляемой нелинейной передаточной характеристики преобразователей сигналов предложены два варианта построения простейших преобразователей сигналов (нелинейных элементов). Первый из них использует фазовый модулятор приходящего извне сигнала f_1. Второй – частотную модуляцию этого же сигнала f_1, но формируемого внутри преобразователя. При этом разнообразие получаемых передаточных характеристик в обоих случаях сопоставимо, поскольку зависит от разнообразия форм сигнала f_1, потенциально доступных для генерации. Однако в случае использования ФМ доступно дистанционное управление формой ПХ. Это имеет принципиальную практическую ценность. Дистанционность (в случае ФМ) выводит задачу генерации сигнала

f_1 за рамки синтеза нелинейного элемента как такового, что облегчает конструирование, добавляя ему гибкости. С другой стороны, создание фазового модулятора видится более сложной задачей, чем осуществление ЧМ сигнала f_1. Тем не менее, нелинейный элемент с ФМ потенциально более быстродействующий.

Доказанные в статье четыре принципа вкупе с сопоставлением нелинейных элементов в аспектах управления, конструирования, разнообразия получаемых передаточных характеристик очерчивают границы аналогии между свойствами этих элементов. Эти результаты доведены до уровня практико-ориентированных рекомендаций для проектирования нелинейных систем соответствующего класса. Эксперименты с радиоэлектронными устройствами демонстрируют возможность создавать нелинейные элементы согласно предложенным схемам и х способность служить основой генераторов детерминированного хаоса.

Список публикаций:

[1] Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н. Аксиоматическая схема исследования динамических систем: от критериев их растождествления к самоизменению. Томск: STT, 2011. 570 с.

[2] Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Детерминированный хаос в моделях нелинейного кольцевого интерферометра – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – 258 с.

[3] Тетельбаум И.М., Шнейдер Ю.Р. 400 схем для АВМ М.: Энергия, 1978. 248 с.