МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2020

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО
методической комиссией Института прикладной математики и компьютерных наук

Протокол № 1 от «6» февраля 2020 г.

Председатель МК ИПМКН Ю.Л. Костюк

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов ИПМКН, ФТФ и других факультетов, изучающих курс «Теория вероятностей и случайных процессов», и может быть полезным широкому кругу читателей, интересующихся решением вероятностных задач.

СОСТАВИТЕЛИ:
доцент, кандидат физико-математических наук ***О.Н. Галажинская***;
доцент, кандидат физико-математических наук ***Д.Д. Даммер***

Рецензенты:
профессор, доктор технических наук ***А.А. Назаров***;
профессор РАН, доктор физико-математических наук ***А.В. Галажинский***

© Галажинская О.Н., Даммер Д.Д., 2020
© Томский государственный университет, 2020

Часть I. Случайные события

Тема 1. Элементы комбинаторики

В комбинаторике рассматриваются *конечные множества* и *различные* их *подмножества*.

Каждое конкретное подмножество, составленное из элементов данного конечного множества, будем называть ***выборкой***. Выборки бывают ***упорядоченные*** и ***неупорядоченные***. В упорядоченной выборке важен порядок в котором следуют её элементы, иначе говоря изменив порядок, мы получим уже другую выборку. В неупорядоченной выборке важен только состав элементов выборки, т.е. две неупорядоченные выборки различны, если различен набор входящих в неё элементов.

В основе многих комбинаторных задач лежат два правила: ***правило суммы*** и ***правило произведения***.

Правило суммы

Пусть имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих соответственно $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов. Число способов, которым можно выбрать один элемент из всех множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, равно $m_1 + m_2 + ... + m_n$.

Правило произведения

Пусть имеется n множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих соответственно $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов. Число способов, которым можно выбрать по одному элементу из каждого множества $A_1, A_2, ..., A_n$, равно $m_1 \cdot m_2 \cdot .... \cdot m_n$.

Рассмотрим некоторое конечное множество $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, состоящее из n элементов. Из элементов множества *M*, можем сформировать выборки объёма m, т.е. получить $m-$ элементные подмножества.

Различают 2 способа формирования выборок:

1) ***Бесповторный***, выбранный элемент в исходное множество не возвращается, и выборка не содержит повторяющиеся элементы.

2) ***Повторный***, при котором выбранный элемент возвращается обратно в исходное множество и может быть выбран снова.

Выборки без повторения элементов

Перестановки

Определение 1: Различные ***упорядочения*** исходного n-элементного множества называются ***перестановками*** из n элементов**.**

$$P_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot......\cdot 2\cdot 1$$

Сочетания

Если формируемые $m-$элементные выборки различаются между собой только составом элементов, то такие комбинации элементов называются ***сочетаниями***. Их число находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Определение 2: Сочетанием из n элементов по m называется ***любое*** $m-$элементное подмножество исходного $n-$элементного множества.

Размещения

Если получаемые $m-$элементные выборки различаются между собой и порядком следования элементов, и составом элементов, в этом случае они называются ***размещениями***. Число размещений из n элементов по m определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Определение 3: Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное $m-$элементное подмножество исходного $n-$элементного множества.

Выборки с повторением элементов

Рассмотрим другой способ формирования выборок из $n-$элементного множества, когда во вновь получаемых соединениях, элементы могут повторяться. Такие выборки называют *выборками с повторением*.

Размещения с повторением

Пусть дано конечное множество $A=\{x_1,x_2,....,x_n\},n\geq 1$. Составим из элементов A упорядоченные подмножества следующим образом: произвольно (случайно) выберем первый элемент x_{i1}, зафиксируем его и вернём обратно, затем опять случайно выбираем второй элемент x_{i2} и возвращаем назад и так далее, процедуру выбора повторим k раз. В результате проведения данной процедуры получим выборку из k элементов $\{x_{i1},x_{i2},....,x_{ik}\},k\geq 1$, которая называется ***<u>размещением с повторением</u>***.

<u>Число размещений с повторениями</u> находится по формуле:

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

Перестановки с повторением

Пусть исходное множество содержит n элементов $A=\{x_1,x_2,....,x_n\}$. При этом:

элемент x_1 – повторяется n_1 раз;
элемент x_2 – повторяется n_2 раза;
…………………………………...
элемент x_k – повторяется n_k раз.

Определение 5. Перестановками с повторениями из n элементов называют различные упорядочения данного конечного множества, состоящего из n элементов k типов $(k<n)$.

Допустим, что среди n элементов конечного множества находится n_i элементов i-го типа, $i=1,...,k,\ n=\sum_{i=1}^{k} n_i$. Тогда число перестановок с повторениями из n элементов:

$$N_n(n_1,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!...n_k!}.$$

Сочетания с повторением

Определение 6. Сочетаниями с повторениями из n элементов по m элементов называются любые множества, содержащие ***m*** элементов, каждый из которых является элементом одного из ***n типов***.

Число сочетаний с повторениями в предположении, что число элементов каждого типа не меньше ***m***, определяется формулой:

$$\tilde{C}_n^m=\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}=C_{n+m-1}^{n-1}.$$

Задачи по теме 1

1.1. Сколькими способами можно расставить 7 бегунов на 7 дорожках?

1.2. Курьеру поручено разнести пакеты в 6 различных учреждений. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

1.3. В студенческой группе 20 человек. Каким числом способов можно выбрать 5 человек на конференцию?

1.4. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

1.5. Каким числом способов, можно сшить флаг (три горизонтальных полосы разного цвета и равной ширины), если имеется материал 5 цветов: красный (K), белый $(Б)$, голубой $(Г)$, зелёный $(З)$ и серый (C).

1.6. В корзине имеются 15 груш и 7 яблок. Нужно выбрать 5 груш и 3 яблока. Сколькими способами это можно сделать?

1.7. В комнате имеется 7 лампочек. Сколько существует различных способов освещения? (*Ответ*: 128).

1.8. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры не повторяются?

1.9. На собрание пришли 3 девушки и 4 юноши. Сколькими способами можно их рассадить, если девушки хотят сидеть рядом? (*Ответ*: 720).

1.10. Преступники решили ограбить дом, в котором проживает семья из пяти человек: муж, жена, двое детей и мать жены. Сколько различных ситуаций (по количеству людей, находящихся в доме) их может ожидать? (*Ответ*: 32).

1.11. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков и все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

1.12. Сколько словарей надо издать чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, украинского, английского, немецкого, португальского на любой другой из этих 5 языков.

1.13. На собрании должны выступать 5 человек: ***А, Б, В, Г, Д***. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если ***Б*** не должен выступать раньше ***А?***

1.14. Сколько существует пятизначных телефонных номеров, в каждом из которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля? (*Ответ*: 60).

1.15. Пять юношей и три девушки играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть хотя бы по одной девушке? (*Ответ*: 60).

1.16. Сколькими способами можно раздать 36 карт на 4 человека, при условии, что раздаётся сразу по 6 карт.

1.17. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

1.18. В театре 10 актёров и 8 актрис. Сколькими различными способами можно распределить роли в спектакле, в котором 6 мужских и 3 женских ролей.

1.19. Имеется n шаров, из них n_1 – красных, n_2 – черных. Скольким числом способов можно набрать группу из r шаров, из них k красных.

1.20. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? (*Ответ*: 28800).

1.21. Садовник должен в течение трех дней посадить 6 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее 1 дерева в день. Решит задачу 2 способами. (*Ответ:* 10).

1.22. Дано множество A, состоящее из 7 элементов 3 типов: $A=\{a,a,б,б,б,p,p\}$. Найти количество перестановок с повторениями из 7 элементов.

1.23. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

1.24. Сколькими способами можно разбить группу из 30 студентов на три подгруппы по 7, 8 и 15 человек соответственно?

1.25. Мать купила 3 вида сладостей: Две конфеты «Гулливер», четыре батончика «Сникерс» и пять «Марс». 12 дней подряд она будет давать сыну по 1 штуке. Сколькими способами это возможно сделать?

1.26. Рыбак поймал 3 леща, 2 карася и 4 щуки, посолил их и вывесил на солнце сушиться. Каким числом способов можно развесить рыбу на нитке?

1.27. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «тригонометрия»?

1.28. На узком участке трассы в линию движутся автогонщики. Из них 4 на российских автомобилях, 5 на американских и 3 на немецких. Сколько существует разных комбинаций машин на трассе, если нас интересует только принадлежность автомобиля к конкретной стране.

1.29. Дано множество $A=\{7,8,9\}$. Записать размещения с повторением по 3 элемента.

1.30. Пятеро студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

1.31. На почте имеются новогодние открытки 7 видов. Нужно купить 8 открыток. Каким числом способов это можно сделать?

1.32. В магазине имеются пирожные пяти сортов. Сколькими способами можно купить 9 пирожных? (*Ответ*: 715).

1.33. Сколько существует двузначных чисел, кратных либо 2, либо 5, либо тому и другому числу одновременно?

1.34. Десяти студентам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить студентов в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

1.35. Сколькими способами 3 черных шара, 3 белых шара и 3 синих шара могут быть разложены в 5 разных пакетов (некоторые пакеты могут быть пустыми)?

Тема 2. Алгебра событий. Вероятностное пространство

Пространство элементарных исходов

Определение 1. Пространством элементарных исходов называется множество Ω, содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента.

Элементы множества Ω называются ***элементарными событиями*** и обозначаются буквой ω: $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, ..., n, ...$.

Элементарный исход – это мельчайший неделимый результат эксперимента, а событие может состоять из одного или сразу нескольких исходов.

Определение 2. Любое подмножество $B \subseteq \Omega$, состоящее из элементарных событий, называется ***случайным событием***.

Говорят, что произошло событие ***B***, если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих во множество ***B***.

Достоверное и невозможное события

Согласно ***определению 2*** Ω также является событием, так как любое множество, является и собственным подмножеством. То есть $\Omega -$ это событие, которое наступает всегда (любой из выпавших элементарных исходов в опыте, благоприятствует его наступлению), поэтому оно называется ***достоверным*** событием.

Событие, наступлению которого не благоприятствует ни один элементарный исход, называется ***<u>невозможным</u>*** и обозначается Ø.

<u>Теоретико-множественные операции над событиями</u>

Определение 3. Говорят, что событие *A* ***<u>влечёт</u>*** событие *B* ($A \subset B$), если событие *B* наступает всегда, когда происходит событие *A*, т.е. $\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$.

Определение 4. События *A* и *B* называются ***<u>равносильными</u>*** (или ***эквивалентными***) если $A \subset B$ и $A \supset B$.

Определение 5. ***<u>Суммой событий</u>*** *A* и *B* называется событие: $S = A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$, наступающее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий: или событие A, или событие B, или оба вместе.

Определение 6. ***<u>Произведением событий</u>*** *A* и *B* называется событие $M = A \cap B = A \cdot B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$, наступающее тогда, когда наступают и событие *A*, и событие *B*.

Говорят, что события *A* и *B* ***<u>несовместные</u>***, если $A \cap B = \varnothing$.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются ***попарно несовместными***, если выполняется:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing, \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j;$$

И ***несовместными в совокупности*** если:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \varnothing.$$

Определение 7. События $A_1, \ldots, A_n$ образуют ***<u>полную группу попарно несовместных событий</u>***, если:

1) $A_i \cdot A_j = \varnothing, \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j;$ 2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$

Определение 8. ***<u>Разностью событий</u>*** *A* и *B*, называется событие $C = A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}$, наступающее тогда, когда происходит событие *A* и не происходит событие *B*.

Определение 9: ***<u>Симметрической разностью</u>*** (или ***дизъюнктивной суммой***) событий *A* и *B*, называется событие $C = A \Delta B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \cup B \text{ и } \omega \notin A \cap B\}$ наступающее тогда, когда наступает или *A* или *B* (но не оба вместе), т.е. $C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Определение 10. Событием, ***противоположным*** событию A, называется событие $\overline{A}$, наступающее тогда, когда событие A не происходит, $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega \setminus A$.

Свойства операций над событиями:

1) $A \cup B = B \cup A$; ***2)*** $A \cdot B = B \cdot A$; ***3)*** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; ***4)*** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

5) $(A \cup B) \cdot C = A \cdot C \cup B \cdot C$; ***6)*** $(A \cdot B) \cup C = (A \cup C) \cdot (B \cup C)$; ***7)*** $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \supset \overline{B}$;

8) $\overline{\overline{A}} = A$; ***9)*** $A \cup A = A \cdot A = A$; ***10)*** $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$; ***11)*** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; ***12)*** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

13) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots\ldots \cap \overline{A_n}$; ***14)*** $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \ldots\ldots \cup \overline{A_n}$.

Определение 11. ***Нижним пределом*** последовательности событий $\{A_n\}$ называется событие $\underline{\lim} A_n$, наступающее тогда, когда не происходит лишь конечное число событий из $\{A_n\}$,

$\underline{\lim} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Определение 12. ***Верхним пределом*** **последовательности** событий $\{A_n\}$ называется событие $\overline{\lim} A_n$, наступающее тогда, когда происходит бесконечное число событий из $\{A_n\}$,

$\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Определение 13. Последовательность событий $\{A_n\}$ называется ***монотонно убывающей***, если $\forall n$: $A_{n+1} \subset A_n$.

Определение 14. Последовательность событий $\{A_n\}$ называется ***монотонно возрастающей***, если $\forall n\ A_{n+1} \supset A_n$

Определение 15. Событие A является ***пределом последовательности*** событий $\{A_n\}$, если $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = A$.

Алгебра и сигма алгебра событий

Определение 16. Множество ***F***, элементами которого являются подмножества множества Ω, (не обязательно все) называется $\sigma -$ ***алгеброй F случайных событий,*** если выполняются следующие условия:

1. $\Omega \in F$;
2. $\forall A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$;
3. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in F$, то $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \in F$.

Событиями в любом случайном испытании, будем считать *только* элементы $\sigma -$ алгебры.

Определение 17. Множество ***F***, элементами которого являются подмножества множества Ω, (не обязательно все) называется *алгеброй **F** случайных событий*, если выполняются следующие условия:

1. $\Omega \in F$;
2. $\forall\, A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$;
3. Если $A_1, A_2, ..., A_n \in F$, *то* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_n \in F$.

Любая алгебра событий является также и $\sigma -$ алгеброй (обратное утверждение неверно).

Вероятностная мера

***Определение 18. Вероятностной* мерой (**или **вероятностью)** события A на пространстве случайных событий $\{\Omega, \mathrm{F}\}$ называется произвольная функция $P(A)$:

1. Неотрицательная: $\forall\, A \in F,\ P(A) \geq 0$;
2. Счетно-аддитивная: $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i),\ A_i \cdot A_j = \varnothing,\ \forall\, i \neq j$
3. Удовлетворяющая условию нормировки $P(\Omega) = 1$.

Основные свойства вероятности: 1) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, 2) $0 \leq P(A) \leq 1,\ \forall A \in F.$

Тройка (Ω, F, P) называется ***вероятностным пространством.***

Задачи по теме 2

2.1. Пусть A, B, C – произвольные события. Записать для эксперимента, в котором могут происходить события A, B, C следующие события:

а) произошло ровно одно событие; ***б)*** ни одно из событий не произошло;

в) произошло хотя бы одно событие; ***г)*** произошло не более двух событий;

д) хотя бы одно событие не произойдёт.

2.2. Пусть $A_i = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq i\}$. Что из себя представляют события $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_4 \cap A_6 \cap A_8 \cap A_{10}$ и $(A_1 \cup A_3) \cap A_6$.

2.3. Двое играют в настольный теннис 1 партию. Ничья невозможна. Пусть событие $A = \{\text{выиграл } 1 \text{ игрок}\}$, а событие $B = \{\text{выиграл } 2 \text{ игрок}\}$. Что означают события: $A \cup B; A \cap B; A \setminus B; \overline{A}; A \Delta \overline{B}; \overline{A \cdot B}$?

2.4. Двое играют в шахматы. Пусть событие $A=\{$ выиграл 1-ый игрок $\}$, а событие $B=\{$ выиграл 2-ой игрок $\}$. Что означают события: ***а)*** $\overline{B}\setminus A$; ***б)*** $A\cdot B\cup\overline{A}$; ***в)*** $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

2.5. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Пусть событие $A=\{$ первый стрелок попал в цель $\}$, а событие $B=\{$ второй стрелок попал в цель $\}$. Что означают события: ***а)*** $A\cup B$; ***б)*** $A\cdot B$; ***в)*** $A+\overline{B}$; ***г)*** $\overline{B}\setminus A$; ***д)*** $\Omega\setminus A\cup B$.

2.6. Пусть события $A=\{$ экзамен сдан $\}$, $B=\{$ экзамен сдан на отлично $\}$. Что означают события: ***а)*** $A\setminus B$; ***б)*** $A\setminus\overline{B}$; ***в)*** $\overline{A\setminus B}$.

2.7. Образуют ли полную группу событий следующие события:

а) $A=\{$ попадание при одном выстреле $\}$; $B=\{$ промах при одном выстреле $\}$;

б) $A=\{$ впал хотя бы один герб при подбрасывании двух монет $\}$;

$B=\{$ при подбрасывании двух монет выпали оба герба $\}$;

в) $D_1=\{$ при трёх выстрелах по мишени <u>ни одного попадания</u> $\}$; $D_2=\{$ при трёх выстрелах по мишени <u>одно попадание</u> $\}$; $D_3=\{$ при трёх выстрелах по мишени <u>два попадания</u> $\}$; $D_4=\{$ при трёх выстрелах по мишени <u>три попадания</u> $\}$.

2.8. Из урны по одному вытаскивают последовательно *n* шаров. Обозначим A_i событие «*i*-ый шар белый». Записать события: ***а)*** все шары белые; ***б)*** хотя бы один шар белый; ***в)*** только один шар белый.

2.9. Доказать, что события $A, \overline{A}B, \overline{A\cup B}$ образуют полную группу попарно несовместных событий.

2.10. Доказать равенства: ***а)*** $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$; ***б)*** $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

2.11. Доказать, что если $A\Delta B=C\Delta D$, то из этого следует, что $A\Delta C=B\Delta D$.

2.12. Упростить выражения: ***а)*** $A\cdot(B-A\cdot B)$; ***б)*** $(A+B)\cdot(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)$.

2.13. Доказать равенства: ***а)*** $\overline{A\Delta B}=(A\cdot B)\cup(\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}})$; ***б)*** $A\Delta B=(\overline{\overline{A\cdot\overline{B}}})\Delta(\overline{\overline{B\cdot\overline{A}}})$.

2.14. Доказать равенство событий: $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

2.15. Эксперимент состоит в выборе одной из перестановок чисел 1, …, *n*. Обозначим A_{ij} событие, состоящее в том, что в выбранной перестановке число *i* стоит на *j*-ом месте. Записать следующие события: ***а)*** число 1 стоит левее числа 2; ***б)*** число 1 стоит не далее *j*-ого места от начала перестановки.

2.16. Возможно ли, что: ***а***) число элементарных событий в Ω больше числа всех событий в $\sigma-$алгебре *F*, порождённой Ω? ***б***) число элементарных событий в Ω конечно, а число всех событий в $\sigma-$алгебре *F*, порождённой пространством Ω, бесконечно?

2.17. Является ли $F=\{\Omega,\varnothing\}$ $\sigma-$алгеброй?

2.18. Указать минимальное и максимальное значения для числа событий $\sigma-$алгебры *F*, порождённой Ω, если число элементарных событий в пространстве Ω равно *n*.

2.19. Из какого минимального числа подмножеств множества Ω состоит алгебра *F*, если в неё входят подмножества A и B, причём $A\cup B\neq\Omega,\ A\cap B\neq\varnothing$?

2.20. Построить вероятностное пространство для эксперимента, в котором кубик подбрасывается 2 раза.

2.21. Построить вероятностное пространство для эксперимента, в котором монета подбрасывается 2 раза.

2.22. Построить вероятностное пространство для эксперимента, в котором «идеальная» монета подбрасывается 3 раза.

2.23. Монета подбрасывается до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной стороной. Построить вероятностное пространство.

2.24. Монета подбрасывается до тех пор, пока «герб» не выпадет два раза подряд. Построить вероятностное пространство.

2.25. Пусть $A_n=\left[0,\dfrac{n}{n+1}\right),B_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$. Определить события $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n,\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

2.26. Найти нижний $\underline{\lim}\,A_n$ и верхний $\overline{\lim}\,A_n$ пределы последовательности событий $A_1,A_2,....,A_n,....$, если: $A_i\cap A_j=\varnothing,\ \forall i\neq j.$

2.27. Найти $\underline{\lim}\,A_n$ и $\overline{\lim}\,A_n$, если $A_{3n-2}=A,A_{3n-1}=B,A_{3n}=C$.

2.28. Дана последовательность событий: $A_n=\left\{\left[-\dfrac{1}{n};1\right]\right\},n\in N$. Найти ее верхний и нижний пределы.

2.29. Дана последовательность событий: $A_n=\left\{\left[1;3-\dfrac{1}{n}\right]\right\},\ n\in N$. Найти предел данной последовательности если он существует.

2.30. Найти $\underline{\lim}\,A_n$ и $\overline{\lim}\,A_n$, если:

а) события A_n состоят в том, что координаты точки (x,y) удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\leq 1+1/n$;

б) события A_n состоят в том, что координаты точки (x,y) удовлетворяют неравенствам $|x|,\ |y| \le 2-(1/n)$.

2.31. Найти $\underline{\lim} A_n$ и $\overline{\lim}\, A_n$, если $A_n = (-\infty, a_n)$, где $a_n -$ произвольная числовая последовательность.

2.32. Найти $\underline{\lim}\, C_n$ и $\overline{\lim}\, C_n$, где $C_{2n} = B_n$, $C_{2n-1} = A_n$ и $A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1\right]$, а $B_n = \left[1-\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right]$.

2.33. Доказать, что $\overline{\underline{\lim} A_n} = \overline{\lim}\,\overline{A_n}$.

2.34. Доказать, что $\overline{\overline{\lim} A_n} = \underline{\lim}\,\overline{A_n}$.

2.35. Доказать, что $\overline{\lim}(A_n \cup B_n) = \overline{\lim}\, A_n \cup \overline{\lim}\, B_n$, $\underline{\lim}(A_n \cap B_n) = \underline{\lim}\, A_n \cap \underline{\lim}\, B_n$.

Тема 3. Классическое определение вероятности

Простейшим пространством элементарных исходов Ω является такое пространство, которое конечно, и все N элементарных событий $\omega_i, i = \overline{1,N}$ некоторого случайного испытания:

1. Равновозможны.
2. Образуют полную группу попарно несовместных событий.

Вероятность любого события, в случае конечного пространства элементарных исходов равна:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|};$$

где $M = |A| -$ число элементарных событий эксперимента, благоприятствующих наступлению событию A, $N = |\Omega| -$ общее число исходов в данном эксперименте.

Применять эту модель можно только в тех случаях, когда априори понятно, что все элементарные исходы опыта равновероятны. Заключение о равновероятности обычно основано на умозрительных соображениях.

Задачи по теме 3

3.1. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: **а)** случайно названное число; **б)** случайно названное число, цифры которого различны.

3.2. Брошены две игральные кости. Какова вероятность: **а)** выпадения на двух костях в сумме не менее 9 очков? **б)** выпадения одного очка хотя бы на одной из костей?

3.3. На некотором малом предприятии работают 10 человек, в том числе одна семья - отец, мать и сын. В правление этого предприятия входят: председатель, коммерческий директор и бухгалтер. Предполагается, что никакие две из этих трёх должностей не может занимать один и тот же человек. Какова вероятность того, что в результате случайного выбора правления: **а)** в него попадут все члены семьи, причем председателем станет отец, коммерческим директором – сын, а бухгалтером – мать; **б)** в него попадут все члены семьи; **с)** бухгалтером станет кто-то из членов семьи?

3.4. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, извлечённого наудачу жетона, не содержит цифры 5. (*Ответ*: 0,81).

3.5. Из полной колоды карт (52) карты вынимают наугад сразу 3 карты. Найти вероятность того, что этими картами будут: **а)** тройка, семёрка, дама; **б)** три туза?

3.6. Бросаются n игральных костей. Найти вероятность того, что на всех костях выпало одинаковое количество очков.

3.7. Из последовательности чисел $1, 2, ..., n$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше, а другое больше k, если $1 < k < n$?

3.8. Из последовательности чисел $1, 2, ..., n$ наугад выбирают сначала одно число, затем второе. Какова вероятность того, что: **а)** первое число меньше второго; **б)** оба числа больше $n/2$; **в)** будут выбраны равные числа; **г)** сумма этих чисел будет меньше n; **д)** первое число окажется на 2 больше второго; **е)** первое число окажется меньше 4, а второе больше $n-4$?

3.9. Брошены 5 игральных костей. Найти вероятность следующих событий: **а)** на всех костях выпало разное число очков; **б)** сумма выпавших очков равна 7.

3.10. ***А***, ***В*** и ещё 8 человек стоят в очереди. Найти вероятность того, что А и В отделены друг от друга тремя лицами.

3.11. В очередь в кассу стоят 9 человек (трое мужчин, четыре женщины и двое детей). Какова вероятность, что между некоторыми двумя мужчинами будут стоять двое детей и одна женщина?

3.12. На полке случайным образом расставляются 8 книг. Найти вероятность того, что две определённые книги окажутся рядом. (*Ответ*: 0,25).

3.13. S человек, расположившись случайным образом: **а)** сидят на скамье; **б)** водят хоровод. Какова вероятность того, что два определённых лица не окажутся рядом?

3.14. В урне n белых и m черных шаров (m, n>1). Из урны без возвращения извлекают два шара. Найти вероятность того, что: **а)** шары одного цвета; **б)** шары разных цветов.

3.15. Собрание клуба филателистов (20 человек) должно выбрать председателя, его заместителя и казначея. Какова вероятность того, что при случайном выборе председателем станет либо А, либо В, заместителем председателя – либо В, либо С, а казначеем – либо С, либо А?

3.16. Из букв слова ***КОРОБКА*** наугад выбирают 5 букв. Вычислите вероятность того, что из выбранных букв можно составить слово: **а)** кобра; **б)** краб; **в)** бор.

3.17. Из букв слова ***ОХОТНИК*** наугад выбирают 5 букв. Вычислите вероятность того, что из выбранных букв можно составить слова: **а)** никто; **б)** кино; **в)** кит.

3.18. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.

3.19. В ящике 30 деталей, 4 из них бракованные. Какова вероятность того, что среди наугад взятых 5 деталей, бракованных не будет?

3.20. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

3.21. В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них может выйти равновозможно на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что: **а)** все пассажиры выйдут на седьмом этаже; **б)** все пассажиры выйдут одновременно; **в)** все пассажиры выйдут на разных этажах.

3.22. Найти вероятность того, что 20 студентов одной группы родились: **а)** в один день года; **б)** в разные дни года; **в)** в разные дни сентября; **г)** 8 марта; **д)** в октябре.

3.23. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что: **а)** только второй студент взял «хороший» билет; **б)** оба студента взяли «хорошие» билеты.

3.24. Семь человек вошли в лифт на первом этаже восьмиэтажного дома. Какова вероятность, что на одном этаже вышли два человека?

3.25. В поезде (10 вагонов) случайно оказались преступник и комиссар Мегрэ. Какова вероятность того, что они находятся: **а)** в одном вагоне; **б)** в соседних вагонах?

3.26. На шахматную доску ставятся наудачу две ладьи белого и чёрного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

3.27. В урне n белых и m черных шаров. Все шары без возвращения извлекаются из урны. Какое из событий более вероятно: **а)** «первый извлечённый шар оказался белым»; **б)** «последний извлечённый шар оказался белым»?

3.28. Колода из 52 карт раздаётся поровну четверым игрокам. Найти вероятность того, что: **а)** у каждого из игроков окажется по одному тузу; **б)** у одного из игроков все карты будут одной масти.

3.29. Имеется тщательно перетасованная колода из 52 карт. Найти вероятность того, что: **а)** первые четыре карты в колоде – тузы; **б)** первая и последняя карты – тузы.

3.30. 12 человек, среди которых Сидоров и Петров, размещаются в гостинице, в которой есть 4-местный, два 3-местных и один 2-местный номер. Какова вероятность события А, состоящего в том, что Сидоров и Петров попадут в 2-местный номер?

3.31. В шкафу находятся 10 разных пар ботинок. Случайно берутся 4 ботинка. Какова вероятность того, что среди них не будет парных?

3.32. Из всех подмножеств множества $X=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ выбирают наугад одно. Какова вероятность того, что оно содержит элемент $\{x_n\}$?

3.33. Имеется 5 шаров, которые случайным образом раскладываются по 7 пакетам. Найти вероятность того, что в первых 3 пакетах, будет ровно по одному шару.

3.34. 30 шаров случайным образом размещаются по 8 ящикам. Для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик. Найти вероятность того, что при этом будет 3 пустых ящика, 2 ящика – с тремя, 2 ящика – с шестью и один ящик – с двенадцатью шарами.

3.35. Имеется M шаров, которые случайным образом раскладываются по N пакетам $(N>M)$. Найти вероятность того, что в первый пакет попадёт ровно K_1 шар, во второй K_2 шара, …, в N–й попадёт K_N шаров $\left(\sum_{i=1}^{N} K_i = M\right)$.

Тема 4. Геометрическое определение вероятности

Применение классического определения вероятности события ограничено двумя условиями: число элементарных исходов конечно и все исходы равновозможны.

Геометрическое определение вероятности позволяет применить принцип равновозможности элементарных исходов в случае, когда пространство элементарных исходов имеет мощность континуума.

Рассмотрим некоторые области Ω (рис. 4.1) в пространствах R^1, R^2, R^3, имеющие меры $mes(\Omega)$, а внутри каждой области Ω область A с мерой $mes(A)$:

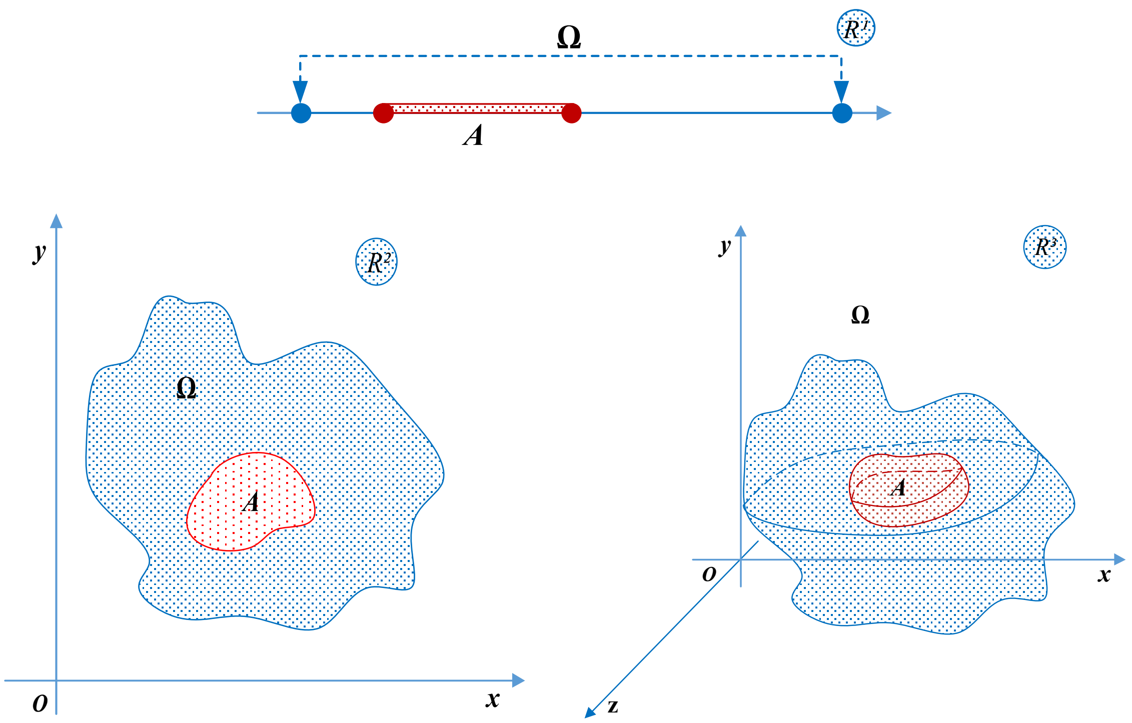

Рис. 4.1

В область Ω случайно бросается точка, попадание которой в Ω является достоверным событием, а в область A – случайным событием.

Полагается, что все точки области Ω равноправны, т.е. брошенная точка может попасть равновозможно в любую точку области Ω и вероятность $P(A)$ попадания точки в область A не зависит от формы или расположения A внутри Ω, а зависит лишь от меры области A и, следовательно, пропорциональна этой мере:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)},$$

Замечание 1: $mes()$ означает меру: длину, площадь, объем областей, в зависимости от размерности «рабочего» пространства.

Задачи по теме 4

4.1. Поезда в метро идут в данном направлении с интервалом 1 мин. Какова вероятность того, что пассажиру придётся ждать поезда, не больше 20 сек.

4.2. На отрезке [0, 5] случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц.

4.3. На отрезок AB длины α наудачу нанесена точка C. Найти вероятность того, что меньший из отрезков AC и CB имеет длину, большую чем $\alpha/6$?

4.4. На отрезке ***OA*** длиной 8 см наудачу выбрана точка В. Найти вероятность того, что отрезки ***OB*** и ***BA*** имеют длину, большую 2 см.

4.5. Испытание состоит в выборе на отрезке AB длиной l двух случайно выбранных точек C и D. Найти вероятность того, что средняя часть отрезка меньше левой части.

4.6. На отрезке ***AB*** наугад и независимо друг от друга отмечают две точки M и N. Вычислить вероятность того, что: **а)** $|AM|<|AN|$; **б)** $|AM|>|MN|$.

4.7. Точку бросают наугад в круг $\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$. Какова вероятность того, что: **а)** расстояние от точки до центра круга не превысит 0,5; **б)** абсцисса точки будет больше 0,5.

4.8. Стержень разломан в двух наугад выбранных точках. Какова вероятность того, что из образовавшихся трёх стержней можно составить треугольник?

4.9. В круг радиуса R вписаны: **а)** квадрат; **б)** правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в круг, окажется внутри вписанной области.

4.10. Минное заграждение состоит из мин, расположенных в одну линию на расстоянии 50 м одна от другой. Ширина корабля 20 м. Какова вероятность того, что корабль благополучно пройдёт через заграждение?

4.11. Пусть пол выложен: 1) треугольной, 2) четырёхугольной плиткой правильной формы со стороной 20 см, и на него с большой высоты падает монета радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета после падения будет полностью лежать на одной из плиток.

4.12. Точка случайно брошена в единичный квадрат. Найти вероятности следующих событий: **а)** расстояние от точки до фиксированной стороны квадрата не превосходит x; **б)** расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата не превосходит x; **в)** расстояние от точки до центра квадрата не превосходит x; **г)** расстояние от точки до заданной вершины квадрата не превосходит x.

4.13. В прямоугольник со сторонами 2 и 4 случайно бросают точку. Найти вероятность того, что расстояние ее до любой вершины прямоугольника больше 1.

4.14. В квадрат со стороной 1 случайно брошена точка. Пусть $x > 0$. Найти вероятность того расстояние от точки до каждой из диагоналей квадрата не превосходит x .

4.15. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что: **а)** точка, брошенная внутрь круга, попадёт в квадрат; **б)** из пяти брошенных точек одна окажется внутри квадрата и по одной внутри сегментов.

4.16. Кусок проволоки длиной 20 см был согнут наудачу в выбранной точке. После этого, перегнув проволоку ещё в двух местах, сделали прямоугольную рамку. Найти вероятность того, что площадь прямоугольника не превосходит 21 см.

4.17. На землю параллельно плоскости экватора падает поток метеоритов. Найти вероятность того, что упавший метеор попадёт между 15° и 45° северной широты.

4.18. Спутник Земли движется по орбите, заключённой между 60° северной и 60° южной широты. Считая падение спутника в любую точку земной поверхности в указанной полосе равновозможным, найти вероятность его падения выше 30° северной широты.

4.19. Два человека ***B*** и ***C*** условились встретиться в определённом месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждёт другого в течение 10 минут, после чего уходит. Найти вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого.

4.20. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причём поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью Т. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше $t, t < T$. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время Т, если каждое из устройств пошлёт по одному сигналу.

4.21. Противник в течение часа делает один десятиминутный налет на участок шоссе. В течение этого часа нужно преодолеть этот опасный участок шоссе. С какой вероятностью можно избежать налёта, если время преодоления опасного участка 5 минут?

4.22. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Моменты времени прихода обоих пароходов независимы и равновозможны в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – 1 час, а второго – 2 часа.

4.23. Расстояние от пункта A до пункта B пешеход проходит за 20 минут, а автобус – за 2 минуты. Интервал движения автобусов 30 минут. Пешеход в случайный момент времени отправляется из A в B. Какова вероятность того, что его в пути догонит автобус?

4.24. Три человека договорились встретиться с 12 до 13 часов дня. Пришедший первым ждёт остальных 10 минут и уходит. Найти вероятность встречи всех трех человек.

4.25. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение $x \cdot y$ будет не больше 1, а частное y/x не больше 2.

4.26. На отрезке $[0,3]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти два числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 3y \le 3x$.

4.27. Наудачу выбирают два числа из промежутка $[0,1]$. Какова вероятность того, что их сумма заключена между $1/4$ и 1?

4.28. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $(x+y)$ не превышает единицы, а произведение $(x \cdot y)$ не меньше 0,09.

4.29. Две точки a и b выбираются наудачу на отрезке $[-1,1]$. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет действительные корни.

4.30. На окружность радиуса R наудачу поставлены три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник $ABC-$ остроугольный.

4.31. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$, $l < a$. Найти вероятность того, что игла пересечёт какую-либо прямую (***Задача Бюффона***).

4.32. На плоскость, разграфлённую параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние a, брошена монета радиусом r, $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одну из проведённых прямых.

4.33. На окружности радиуса R наудачу выбираются 2 точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина хорды больше $R\sqrt{3}$.

4.34. В круге радиуса R выбирается точка. Эта точка служит серединой хорды, перпендикулярной проведённому через неё диаметру. Найти вероятность того, что полученная хорда превзойдёт по длине $R\sqrt{3}$.

4.35. В квадрат наудачу брошены точки ***A*** и ***B***. Найти вероятность того, что квадрат с диагональю ***AB*** целиком содержится в исходном квадрате.

Тема 5. Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Условная вероятность

Определение 1: Пусть A и B – два случайных события по отношению к некоторому пространству Ω, причём $P(B) \neq 0$. Равенство $P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ определяет вероятность события A при условии, что наступило событие B, или ***условную вероятность*** события A.

Теорема умножения вероятностей

Теорема 1: (теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения произвольного числа n событий: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ равна:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot ... \cdot P(A_n | A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$$

Независимые события

Определение 2: Событие A не зависит от B, если выполняется равенство: $P(A \setminus B) = P(A)$.

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Теорема 2: Вероятность произведения двух независимых событий: A и B равна:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема 3: Вероятность произведения произвольного числа n ***независимых*** событий: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ равна: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_n)$.

Пусть имеется n событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Определение 3: Если для любых двух событий A_i и A_j $\left(1 \le i, j \le n;\ i \ne j\right)$ выполняется $P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$, то события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ называются ***попарно независимыми событиями***.

Определение 4: События $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если для любой группы индексов $1 \le i_1 < i_2 < i_3 < .... < i_m \le n$ выполняется равенство:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} P\left(A_{i_k}\right).$$

Теорема сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей. $\forall\ A, B \in F$ вероятность суммы равна:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Обобщённая теорема сложения вероятностей. Для любых случайных событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in F$ выполняется равенство:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cdot A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - ..... + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot ..... \cdot A_n\right).$$

Определение 5. События A_i, A_j называются ***несовместными***, если выполняется:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing,\ i \ne j.$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема 3: Вероятность суммы произвольного числа n несовместных событий: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ равна: $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$.

Задачи по теме 5

5.1. Из колоды карт (36) вытаскивается наудачу одна. Зависимы ли события:

$A = \{$ достали даму $\}$ и $B = \{$ достали карту красной масти $\}$?

5.2. Для двух случайных событий A, B известны вероятности $P(A) = 0{,}8$; $P(A+B) = 0{,}9$; $P(B \setminus A) = 0{,}6$. Найти $P(B)$, $P(A \setminus B)$, $P(A \cdot B)$ и выяснить, зависимы ли события A и B?

5.3. Монету бросают 3 раза. Зависимы ли события:

$A = \{$ при первом бросании выпал герб $\}$ и $B = \{$ решка выпала хотя бы 1 раз $\}$?

5.4. Внутри круга радиуса R лежит квадрат с диагональю $a = R/2$. Найти вероятность того, что 3 точки, брошенные в круг, окажутся внутри квадрата.

5.5. В электрическом приборе последовательно подключены два предохранителя. Первый предохранитель выходит из строя с вероятностью равной 0,4, а второй с вероятностью 0,3. Найти вероятность прекращения питания.

5.6. В одной комнате находятся 4 девушки и 7 юношей, в другой 10 девушек и 5 юношей. Наудачу выбирают по одному человеку из каждой комнаты. Найти вероятность того, что оба они окажутся юношами или оба девушками.

5.7. В урне 12 красных, 8 зелёных и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?

5.8. Вероятность того, что изготовленный первой бригадой холодильник, будет первосортный, равна 0,8. При изготовлении такого же холодильника второй бригадой, эта вероятность равна 0,9. Первой бригадой изготовлено три телевизора, второй – четыре. Найти вероятность того, что все пять телевизоров первосортные.

5.9. Из букв *Г, А, А, А, К, К, Л, Т, И* разрезной азбуки составляется наудачу слово, состоящее из 9 букв. Какова вероятность того, что получится слово «***ГАЛАКТИКА***»?

5.10. Привести пример событий A, B, C попарно независимых, но не являющихся независимыми в совокупности.

5.11. Студент пришёл на зачёт, зная ответы на 24 вопроса из тридцати. С какой вероятностью он сдаст зачёт, если в случае его отказа отвечать на первый заданный вопрос, он получает ещё один вопрос?

5.12. Одновременно бросаются три игральные кости. Найти вероятность выпадения трёх «троек», если известно, что: **а)** на одной кости выпало три очка; **б)** по крайней мере на двух костях выпали «тройки»; **в)** на всех костях выпало одинаковое количество очков; **г)** на всех костях выпало нечётное количество очков.

5.13. Найти вероятность того, что при бросании трёх игральных костей хотя бы на одной выпадет 4 очка, при условии, что на всех костях выпали грани с чётным числом очков

5.14. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: **а)** оба студента; **б)** только первый; **в)** только один из них; **г)** хотя бы один из студентов.

5.15. В одном ящике 4 синих и 5 красных шаров, в другом – 3 синих и 7 белых шаров. Из каждого ящика вынуто по одному шару, найти вероятность того, что достали хотя бы один белый шар.

5.16. Результаты опроса 1000 случайно выбранных молодых людей таковы: 829 из них работают; 700 проживают в Томске; 405 учатся, 540 работающих томичей; 333 молодых людей работают и учатся одновременно, 360 учащихся томичей, 300 работающих и учащихся томичей. Содержится ли в этой информации ошибка?

5.17. Гардеробщица выдала номерки 4 лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала се шляпы, повесив их наугад. Найти вероятность следующих событий: **а)** каждому лицу выдадут его собственную шляпу; **б)** ровно одно лицо получит свою шляпу; **в)** всем выдадут чужие шляпы; **г)** ровно два лица получат свою шляпу; **д)** ровно три лица получат свою шляпу.

5.18. В лотерее n билетов, из них $l-$ выигрышных. Некто покупает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один выигрышный.

5.19. Монета бросается до первого появления герба. Какова вероятность того, что понадобится чётное число бросков?

5.20. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности того, что: **а)** опыт окончится до шестого бросания; **б)** потребуется чётное число бросаний. (*Ответ*: **а)** 15/16; **б)** 2/3).

5.21. Уходя из квартиры $\boldsymbol{N}$ гостей, имеющих одинаковые размеры обуви, надевают калоши в темноте, каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятность событий:

$A = \{$ каждый гость наденет свои калоши $\}$;

$B = \{$ наденет калоши, относящиеся к одной паре, но может быть и не свои $\}$.

5.22. Из 4 человек ***А***, ***Б***, ***В***, ***Г*** один ***А*** получил информацию в виде сигнала «да», «нет». Он сообщает ее второму ***Б***, второй третьему ***В***, третий сообщает четвёртому ***Г***, а последний объявляет результат полученной информации таким же образом, как и все другие. Известно, что каждый из них говорит правду только в одном случае из трёх. Какова вероятность, что первый сказал правду, если четвёртый сказал правду?

5.23. Шесть пассажиров садятся на остановке в трамвай, состоящий из трех вагонов. Какова вероятность того, что: **а)** все пассажиры сядут в один вагон; **б)** хотя бы в один вагон не сядет ни один пассажир; **в)** в каждый вагон сядут по два пассажира?

5.24. В электропоезд, состоящий из ***n*** вагонов, входят ***k*** пассажиров $(k \ge n)$, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдёт хотя бы один пассажир.

5.25. Показать, что если $P(A)$=0 или $P(A)$=1, то событие A и любое событие B независимы.

5.26. Доказать, что если события A и B независимы и $P(A \cup B) = 1$, то либо A, либо B являются достоверным событием.

5.27. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы вероятность того, что среди них хотя бы одно нечётное, была не меньше 0,99?

5.28. Вероятность того, что двое близнецов будут одного пола, приблизительно равна 0,64, а вероятность рождения в двойне первым мальчика – 0,51. Найти вероятность того, что второй из близнецов будет мальчиком при условии, что первый из них мальчик.

5.29. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков равная 12?

5.30. Найти вероятность того, что при бросании 6 игральных костей выпадет хотя бы одна чётная цифра и хотя бы одна нечётная цифра.

5.31. Из колоды карт (52 листа) двое поочерёдно по схеме с возвращением достают по одной карте. Выигрывает тот, у кого раньше выйдет туз. Определите вероятности победы для каждого игрока. Будет ли игра более справедливой, если требование достать туза заменить требованием достать туза пик? (*Ответ*: **а)** 13/25; **б)** 2/3).

5.32. 10 единиц, 10 двоек и 10 троек располагаются в ряд в случайном порядке, образуя некоторое тридцатизначное число. Какова вероятность, что это число делится на: **а)** 2; **б)** 3; **в)** 4?

5.33. N элементов размещены по ***N*** местам, а затем случайным образом переставлены. Найти вероятность P_N того, что хотя бы один элемент окажется на своём месте, и $\lim\limits_{N\to\infty} P_N$.

5.34. Пусть события A,B,C независимы в совокупности и их вероятности отличны от нуля и единицы. Могут ли быть события $A\cdot B$, $B\cdot C$ и $A\cdot C$: **а)** независимыми в совокупности; **б)** попарно независимыми?

5.35. Пусть $A,B,C,D-$ события, причём A и B не зависят от C и D. Доказать, что если $A\cap B=\varnothing$ и $C\cap D=\varnothing$, то $A\cup B$ не зависит от $C\cup D$.

Тема 6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности

Следствием двух основных теорем теории вероятностей – теоремы сложения и теоремы умножения – являются ***формула полной вероятности*** и ***формула Байеса***.

Пусть в результате некоторого опыта может наступить одно из событий $H_1,H_2,\ldots,H_n$. $H_i, i=\overline{1,n}-$ образуют полную группу попарно несовместных событий, т.е. для них выполняется:

$$\textbf{1)}\ H_i\cdot H_j=\varnothing,\ \forall i,j=\overline{1,n},\ i\neq j; \qquad \textbf{2)}\ \bigcup_{i=1}^{n} H_i=\sum_{i=1}^{n} H_i=\Omega.$$

В результате опыта только одно из событий $H_i, i=\overline{1,n}$ обязательно произойдёт.

События $H_1,H_2,\ldots,H_n$ называют ***<u>гипотезами</u>***.

Вероятности $H_1,H_2,\ldots,H_n$ оцениваются до проведения случайного испытания и называются ***<u>априорными (доопытными) вероятностями гипотез</u>***:

$$P(H_1),P(H_2),\ldots,P(H_n).$$

Пусть в данном опыте наряду с $H_1,H_2,\ldots,H_n$, может наступить некоторое событие A, зависящее от $H_i, i=\overline{1,n}$.

При известных условных вероятностях наступления события A:

$$P(A \backslash H_1), P(A \backslash H_2), \ldots, P(A \backslash H_n)$$

ставится задача вычислить безусловную вероятность события A.

Ее можно найти, используя ***формулу полной вероятности***:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \backslash H_i) P(H_i).$$

Формула Байеса

Пусть также в результате некоторого опыта может наступить одно из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ с вероятностями $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$.

Проводится случайное испытание в результате которого наступило событие A, условные вероятности которого $P(A \backslash H_1), P(A \backslash H_2), \ldots, P(A \backslash H_n)$ известны.

Вопрос: Какие вероятности имеют теперь гипотезы в связи с появлением события A?

Ответ даёт ***формула Байеса***, которая позволяет получить апостериорные (послеопытные) условные вероятности гипотез: $P(H_1 \backslash A), P(H_2 \backslash A), \ldots, P(H_n \backslash A)$:

$$P(H_i \backslash A) = \frac{P(A \backslash H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A \backslash H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \backslash H_i) \cdot P(H_i)}, \quad i = \overline{1, n}; \quad P(A) \neq 0.$$

Задачи по теме 6

6.1. Известно, что в среднем 95% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощённая схема контроля признает пригодной продукцию с вероятностью 0.96, если она стандартна, и с вероятностью 0.06, если она нестандартна. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие пройдёт упрощённый контроль.

6.2. В группе 30 студентов: 5 отличников, 10 хорошистов и 15 слабых студентов. Отличник сдаёт зачёт с первого раза с вероятностью $p_1 = 0.90$, хорошист – с вероятностью $p_2 = 0.75$, а слабый студент – с вероятностью $p_3 = 0.45$. Отвечают студенты в случайном порядке. Найти вероятность того, что первый отвечающий получит зачет. Найти вероятность того, что первый отвечавший был хорошист, если известно, что он получил зачет.

6.3. Имеются 2 одинаковые урны с шарами. В первой находится 3 белых и 4 черных шара, во второй 2 белых и 3 черных. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

6.4. Студент знает 24 билета из 30. В каком случае вероятность вытащить счастливый билет для него больше, если он идёт сдавать экзамен первым или вторым?

6.5. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин страдают дальтонизмом. Найти вероятность того, что случайно выбранный человек – дальтоник, если считать, что число всех мужчин равно числу всех женщин.

6.6. Имеются 2 ящика. В первом ящике четыре белых и три черных шара, во втором - пять белых и семь черных шаров. Из первого и второго ящика перекладывают по одному шару в третий ящик. Наугад из третьего ящика берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

6.7. Из полного набора 28 костей домино наугад извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлечённую кость можно приставить к первой.

6.8. Найти вероятность того, что кровь от случайно выбранного донора подойдёт для переливания нуждающемуся человеку, если в составе населения лица с I-ой группой крови составляют 33%, со II-ой – 37%, с III-ей – 22% и с IV-ой – 8%, а кровь некоторой группы можно переливать только лицам с той же или большей по номеру группой крови.

6.9. Имеются две урны. В первой – 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую перекладывают вслепую два шара. Найти вероятность того, что шар, взятый из второй урны после перекладывания, будет белым.

6.10. В белом ящике 12 красных и 6 синих шаров. В чёрном – 15 красных и 10 синих шаров. Бросают игральный кубик. Если выпадет количество очков, кратное 3, то наугад берут шар из белого ящика. Если выпадет любое другое количество очков, то наугад берут шар из чёрного ящика. Какова вероятность появления красного шара? (*Ответ*: $\approx 0{,}62$).

6.11. Урна содержит один шар, про который известно, что он либо белый, либо чёрный с одинаковыми вероятностями. В урну кладут один белый шар, а затем наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что в урне остался белый шар, если был извлечён белый шар.

6.12. В урне первоначально находились n белых и m черных шаров. Один шар был утерян, и цвет его неизвестен. Из урны без возвращения извлечены 2 шара, и оба оказались белыми. Найти вероятность того, что потерян белый шар.

6.13. Система обнаружения самолёта из-за наличия помех в зоне действия локатора может давать ложные показания с вероятностью 0.05, а при наличии цели в зоне система обнаруживает ее с вероятностью 0.9. Вероятность появления противника в зоне равна 0.25. Определить вероятность ложной тревоги.

6.14. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго – 0,02, для третьего – 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Какова вероятность того, что наудачу взятая из ящика деталь, будет бракованной? Производительность 1-го станка в 2 раза больше, чем второго, а третьего в 3 раза меньше, чем второго.

6.15. При попытке угона машины сигнализация первого вида подаёт сигнал тревоги с вероятностью 0,84, а сигнализация второго вида – с вероятностью 0,99. Вероятность того, что машина оборудована сигнализацией первого или второго вида соответственно равна 0.7 и 0.3. Какова вероятность подачи сигнала тревоги сигнализации на случайно выбранной машине. Сработала сигнализация на машине, какова вероятность того, что на ней сигнализация второго вида?

6.16. Для сдачи экзамена по правилам дорожного движения слушателям нужно было выучить 45 билетов. Из 30 слушателей 15 выучили все билеты; 8 – 30 билетов; 6 – 20 билетов и 1 – 10 билетов. Слушатель сдал экзамен. Найти вероятность того, что он знал всего 20 билетов?

6.17. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: 1 – практически не рискует, 2 – мало рискует, 3 – всегда рискует. Анализ застрахованных водителей предыдущих периодов показал, что 32% водителей принадлежит 1 классу; 48% – 2 классу; 20% – 3 классу. Вероятность попасть в течение года в аварию для водителей 1 класса равна 0.01, 2 класса – 0.015; 3 класса – 0,124; Какова вероятность того, что наугад выбранный водитель за год не попадёт в аварию? Водитель попал в аварию, какова вероятность, что это водитель 3 класса?

6.18. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и два белых шара, а в одной – пять белых и один чёрный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечён из урны, содержащей 5 белых шаров.

6.19. Для поисков самолёта, пропавшего в одном из двух возможных районов с вероятностями 0,8 и 0,2, для первого и второго районов соответственно, выделено десять независимых вертолётов. Как следует распределить вертолёты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолёта была наибольшей, если каждый вертолёт обнаруживает пропавший самолёт с вероятностью 0,2. Найти вероятность обнаружения самолёта при оптимальной процедуре поиска.

6.20. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трёх касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятности того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равны: для первой кассы P_1, для второй P_2, для третьей P_3. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрёл билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

6.21. В первой урне 10 белых и 20 черных шаров, во второй 10 белых и 10 чёрных шаров. Из первой урны наугад извлекают 4 шара, из второй - 6 шаров и перекладывают эти шары в третью, пустую урну. Какова вероятность того, что извлечённый наугад из третьей урны шар, окажется белым?

6.22. Имеется N одинаковых урн с m черными и n белыми шарами. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй в третью перекладывается один шар и т.д. Из последней урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что он белый?

6.23. Двое поочерёдно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша для каждого игрока.

6.24. Монету бросают до тех пор, пока герб не выпадет дважды подряд. Найдите вероятность того, что монету придётся бросать нечётное число раз.

6.25. Монету бросают до тех пор, пока не будет зафиксирована серия ***ГРГ*** (герб-решка-герб) Какова вероятность того, что монету придётся бросать нечётное число раз?

6.26. В каждом из n экзаменационных билетов 2 вопроса. Студент знает ответы лишь на k вопросов, $k < 2n$. Чтобы сдать экзамен, надо ответить либо на оба вопроса взятого билета, либо на один вопрос своего билета и на один вопрос из дополнительного билета. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан.

6.27. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить хороший билет будет меньше, когда он берет билет первым или последним?

6.28. У рыбака есть три излюбленных места для рыбалки, равновероятно им посещаемых. Если он закидывает удочку на первом месте, то рыба клюёт с вероятностью p_1, на втором – с вероятностью p_2, на третьем – с вероятностью p_3. Приехав на рыбалку, рыбак закинул удочку трижды, и рыба клюнула лишь один раз. Найти вероятность того, что он ловил рыбу на третьем месте.

6.29. В урне 5 шаров, цвет каждого из них равновероятно может быть черным или белым. Из неё извлекаются последовательно с возвращением 3 шара. Какова вероятность того, что в урне вообще все шары белые, если черные шары не извлекались?

6.30. Из урны, где имеется **n** шаров, причём цвет каждого из них равновероятно может быть черным или белым, извлекаются последовательно с возвращением ***k*** шаров. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались?

6.31. В кошельке лежат 4 монеты. Три монеты обычных, а у четвертой на той и другой стороне изображён герб. Наугад взяли монету и подбросили 3 раза. Все три раза выпал герб. Какова вероятность того, что и при четвёртом подбрасывании выпадет герб?

6.32. Из множества чисел $\{1,2,.....,99,100\}$ последовательно (без возвращения) извлекают 2 числа. Какова вероятность того, что первое число больше второго: **а)** на 20; **б)** не менее чем на 20?

6.33. В альбоме 7 негашёных и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекается 2 марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекаются 3 марки. Определить вероятность того, что все 3 марки чистые.

6.34. Принимая, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых, вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности одинаковы, а вероятности рождения мальчика и девочки равны соответственно 0,51 и 0,49, найти вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

6.35. Имеются три урны с белыми и черными шарами. Известно, что отношение числа белых шаров к числу черных равно b_1, b_2, b_3 для первой, второй и третьей урн соответственно. Наудачу выбирается урна и из неё вытаскивается шар. Какова вероятность того, что он белый?

Тема 7. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Предельные теоремы Муавра-Лапласа

Схема и формула Бернулли

Пусть производятся $\boldsymbol{n}$ независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A, с одной и той же вероятностью:

$$P(A) = p$$

Или в каждом из испытаний может наступать противоположное событие $\overline{A}$ с вероятностью:

$$P(\overline{A}) = q = 1 - p$$

По традиции исход опыта, в котором наступает событие A, называют ***успехом***, а не наступление A называют ***неудачей.***

Такого рода схема испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Вероятность того, что событие A наступит ровно $\boldsymbol{m}$ раз в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях, находится по ***формуле Бернулли***:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}\text{, где } m = \overline{1,n}$$

Отсюда в частности следует, что вероятность того, что в $\boldsymbol{n}$ испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие A наступит:

1) менее m раз равна: $P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(m-1)$;
2) более m раз равна: $P_n(m+1) + P_n(m+2) + \cdots + P_n(n)$;
3) хотя бы 1 раз равна: $P_n(m \geq 1) = 1 - q^n$;
4) не менее m_1 раз и не более m_2 раз равна:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + \cdots + P_n(m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$$

Наивероятнейшее число наступлений события *A*

$$m^* = [(n+1) \cdot p].$$

При $m = m^*$ вероятность $P_n(m)$ достигает своего наибольшего значения.

Формула Пуассона. Предельные теоремы Муавра-Лапласа

1. ***Формула Пуассона***: $P_n(m) \approx \dfrac{(np)^m e^{-np}}{m!}$. Используется в случаях, когда: $n \ge 30;\ p \le 0{,}1;\ 0{,}1 \le np \le 10$ (говоря просто: когда p мало, а n велико). Таблица значений функции $P_{\lambda=np}(m) \approx (\lambda)^m e^{-\lambda} \big/ m!$ в приложении 1.

2. ***Локальная формула Муавра-Лапласа:*** $P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\dfrac{(m-np)^2}{2npq}\right\}$. Используется в случаях когда: $n \ge 30;\ 0{,}1 \le p \le 0{,}9;\ npq \ge 9$.

Обозначив $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ и учитывая, что $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса, значения которой приводятся в таблице приложения 2. Можем переписать формулу в виде:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

При использовании таблицы значений, необходимо иметь в виду свойства функции Гаусса $\varphi(x)$: $\varphi(x) = \varphi(-x)$; при $x > 4,\ \varphi(x) \approx 0$.

3. В случаях, когда необходимо найти вероятность того, что событие наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, (другими словами определить вероятность попадания числа m наступлений события A в n опытах в заданный промежуток $[m_1, m_2]$ и $n \ge 30;\ 0{,}1 \le p \le 0{,}9;\ npq \ge 9$, используется ***интегральная формула Муавра-Лапласа***:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

Или обозначив: $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, можем переписать:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где значения функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\dfrac{t^2}{2}\right\} dt$, находят по таблице (см. приложение 3), учитывая свойства: $\Phi(0) = 0$; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, при $x > 4,\ \Phi(x) \approx 0{,}5$.

Задачи по теме 7

7.1. Всхожесть семян данного растения равна 80%. Найти вероятность того, что из четырёх посеянных семян взойдут три.

7.2. Стрелок производит 5 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что он попадёт 2 раза, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0.6. Найти вероятность попасть 2 раза из 5 и наивероятнейшее количество попаданий.

7.3. Какова вероятность, что при 5 подбрасываниях монеты герб выпадет: **а)** 2 раза; **б)** более 2 раз; **в)** не менее 2 раз.

7.4. В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, найти вероятность того, что в семье не менее трёх и не более восьми мальчиков. Найти наивероятнейшее число мальчиков в семье и вероятность этого числа.

7.5. С помощью датчика случайных чисел сгенерировано 200 двузначных чисел. Найти вероятность того, что среди них число 33 встретится три раза.

7.6. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: **а)** три договора; **б)** менее двух договоров.

7.7. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: **а)** менее 2 пакетов; **б)** не более двух; **в)** хотя бы 2; **г)** наивероятнейшее число пакетов.

7.8. Отрезок AB разделён точкой C в отношении $2:1$. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C, а две – правее.

7.9. С помощью наблюдений установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из наугад взятых в этом месяце 8 дней 3 будут дождливыми? Найти вероятность наивероятнейшего числа дней без дождя.

7.10. Стрелок в тире сделал 12 выстрелов по мишени, вероятность попадания в которую равна 0,4. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

7.11. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

7.12. Определить наиболее вероятное число выпадений герба при 25 подбрасываниях монеты.

7.13. Некий курящий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке останется k спичек, если первоначально в каждой коробке было n спичек.

7.14. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, n раз извлекаются по одному шары и возвращаются обратно в ящик. Найти наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз чёрный шар будет больше 0,5. (*Ответ*: 8).

7.15. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днём рождения одновременно четырёх студентов факультета?

7.16. Вероятность выхода из строя изделия во время испытания на надёжность равна 0,05. Найти вероятность того, что во время испытаний ста изделий на надёжность выйдут из строя от 5 до 20 изделий.

7.17. В одном из поселков Томской области из каждых 100 семей 80 имеют моторные лодки. Найти вероятность того, что от 300 до 360 (включительно) семей из 400 имеют моторные лодки.

7.18. В городе Томск из каждых 100 семей 80 имеют машины. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют свой автомобиль.

7.19. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: **а)** 480 предприятий; **б)** наивероятнейшее число предприятий; **в)** не менее 480; **г)** от 480 до 520.

7.20. Вероятность появления на занятиях студента равна 0.2. В семестре всего 385 занятий. Какова вероятность того, что студент будет присутствовать не менее чем на 78 занятиях?

7.21. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 70 раз.

7.22. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна $p = 10^{-8}$. В течение рабочей недели через банк проходят $n = 7,5 \cdot 10^{8}$ банкнот. Оценить вероятность встретить в ходе обработки три фальшивые банкноты. (*Ответ*: $\approx 0,039$).

7.23. Прядильщица обслуживает 1000 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,002. Какова вероятность того, что за одну минуту обрыв произойдёт не более чем на трёх веретёнах.

7.24. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года равна 0,001 и не зависит от других элементов. Какова вероятность отказа: **а)** двух элементов; **б)** не менее двух элементов за год?

7.25. Найти вероятность того, что хотя бы у трёх из случайно выбранных 300 человек день рождения придётся на 8 марта.

7.26. Вероятность выхода из строя изделия во время испытания на надёжность равна 0,03. Найти вероятность того, что во время испытаний 50 изделий на надёжность выйдут из строя от 7 до 10 изделий.

7.27. Вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов на лекции будут присутствовать не меньше 75 и не больше 90. (*Ответ*: $\approx 0{,}888$)

7.28. Какова вероятность того, что из ста монет, случайным образом разбросанных на столе, число монет, лежащих «гербом» вверх, будет от 45 до 55.

7.29. Производство даёт 1% брака. Найти вероятность того, что из наугад взятых 1000 изделий забраковано будет не более 17.

7.30. Французский ученый Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления герба отклонится от вероятности появления герба по абсолютной величине не более, чем в опыте Бюффона.

7.31. Вероятность появления успеха в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, что с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения частоты появления успеха от его вероятности не превысит ε.

7.32. В урне содержится 4 белых и один черный шары. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьше число извлечений $\boldsymbol{n}$, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более, чем 0,01?

7.33. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления «герба» от вероятности 0,5 окажется не более 0,01.

7.34. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,001. (*Ответ*: 0,182).

7.35. Сколько нужно провести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать, что частота выпадения герба отклонится от вероятности меньше, чем на 0,01? (*Ответ*: 7656).

Часть II. Случайные величины

Пусть (Ω, F, P) – произвольное вероятностное пространство, (R, B) – борелевская прямая.

Случайной величиной называется измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$, отображающая пространство элементарных событий Ω во множество действительных чисел R, т.е. функция, для которой прообраз $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ любого борелевского множества $B \in B$ принадлежит $\sigma -$ алгебре F.

Неформально случайной называют величину, которая в результате опыта принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.

Тема 8. Дискретные случайные величины

Ряд, многоугольник и функция распределения вероятностей дискретных случайных величин

Случайная величина называется **дискретной**, если множество ее значений конечно или счетно.

Рядом распределения вероятностей дискретной случайной величины называется соответствие $P\{\xi = \xi_i\} = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$, значениям ξ_i случайной величины ξ вероятностей p_i, с которыми эти значения принимаются. Ряд распределения можно представлять в виде ***таблицы*:**

ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	…..	ξ_n	…..
p_i	p_1	p_2	p_3	…..	p_n	…..

или графически в виде ***многоугольника распределения*** – плоской ломаной линии с узлами в точках (x_i, p_i), $i = 1, \ldots, n$. Вероятности p_i удовлетворяют условию нормировки $\sum\limits_i p_i = 1$.

Функцией распределения вероятностей дискретной случайной величины ξ называют функцию: $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \sum\limits_{k:\, x_k < x} p_k = 1$. Если известна функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины, то можно найти вероятность попадания значений случайной величины в промежуток $[a, b)$: $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Задачи по теме 8

8.1. В урне 3 белых и 2 черных шара. Шары поочередно без возвращения извлекаются из урны. Пусть ξ – число белых шаров, извлеченных до первого черного шара. Описать σ-алгебру, порождающую случайную величину ξ, и построить ряд распределения этой случайной величины.

8.2. В корзине 5 яблок и 20 груш. Опыт: берется один фрукт. Записать закон распределения случайной величины X – число вынутых из корзины груш.

8.3. Покупатель посещает магазины для приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Построить полигон распределения.

8.4. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

ξ	–2	–1	0	1	2
p	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

а) построить многоугольник распределения; **б)** построить график функции распределения; **в)** найти вероятность того, что ξ примет значение, не превосходящее единицы по абсолютной величине.

8.5. В урне 5 белых и 25 чёрных шаров. Вытащили один шар. Построить ряд распределения случайной величины ξ – числа вынутых белых шаров.

8.6. Построить ряд распределения случайной величины ξ, если ξ – это число появлений «герба» при n бросаниях монеты.

8.7. Из партии в 25 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбираются наугад 3 изделия для проверки качества. Построить ряд распределения случайной величины ξ – числа бракованных изделий в такой выборке.

8.8. Экзаменатор задаёт студенту дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна 0.9. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент не отвечает на вопрос. Построить ряд распределения случайной величины ξ – числа дополнительных вопросов, заданных студенту. Найти моду этого распределения.

8.9. Два стрелка делают по одному выстрелу каждый по своей мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна p_1, для второго – p_2. Случайные величины ξ_1, ξ_2 – число попаданий первого и второго стрелка соответственно. Построить ряд распределения разности $\xi_1 - \xi_2$.

8.10. Из двух орудий поочерёдно ведётся стрельба по мишени до первого попадания. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,3, для второго – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Построить ряды распределения дискретных случайных величин ξ и η – числа снарядов, выпущенных первым и вторым орудием соответственно.

8.11. Производится три независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое целое число от 0 до 9. Построить ряд распределения суммы полученных чисел.

8.12. Монету бросают 5 раз. Построить ряд распределения отношения числа появлений «герба» к числу появлений «решки».

8.13. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд и многоугольник распределения числа светофоров, пройденных автомашиной до первой остановки. Найти моду этого распределения.

8.14. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков каждого баскетболиста, если вероятность попадания для первого баскетболиста равна 0,4, а для второго – 0,6.

8.15. Проверить условие нормировки для вероятностей $P\{\xi = k\}$, если случайная величина ξ имеет распределение Пуассона.

8.16. Подбрасывается однократно кубик. Найти закон распределения случайной величины X – выпавшее число очков.

8.17. В системе, состоящей из шести равнонадежных занумерованных (1,2,3,4,5,6) приборов, отказал один какой-то прибор. Для его обнаружения и устранения неисправности приборы проверяются один за другим в порядке их нумерации. Построить закон распределения случайной величины X – номер отказавшего прибора.

8.18. В связке из трех ключей только один подходит к двери. Ключи перебираются до тех пор, пока не отыщут подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины X – число опробованных ключей. Построить функцию распределения для данной дискретной случайной величины. Изобразить ее графически.

8.19. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам M и T, равны соответственно 0.7 и 0.9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

8.20. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0.515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Построить полигон распределения, построить функцию распределения и изобразить ее графически.

8.21. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0.4. Составить закон распределения числа вызовов, если: **а)** число вызовов не более 3; записать функцию распределения данной случайной величины; **б)** число вызовов неограниченно.

8.22. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу четырех приборов. Записать функцию распределения данной случайной величины.

8.23. В 1-ой урне содержится 6 белых и 4 черных шара, а во второй 3 белых и 7 черных шаров. Из первой урны берут наудачу 2 шара и перекладывают в 2-ую урну, а затем из 2-ой урны берут наудачу один шар и перекладывают в 1-ую урну. Составить законы распределения числа белых шаров в 1-ой и 2-ой урне.

8.24. Монета подброшена 3 раза. Найти распределение вероятностей для числа появлений герба.

8.25. Три стрелка с вероятностями попадания в цель при отдельном выстреле 0.7;0.8;0.9 соответственно делают по одному выстрелу. Найти распределение вероятностей для общего числа попаданий.

8.26. Вероятность того, что лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0.1. Покупатель купил 5 билетов. Найти распределение вероятностей для числа выигрышей у владельца этих 5 билетов.

8.27. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0.7 при одном выстреле. Он стреляет до первого попадания, но делает не более трех выстрелов. Найти распределение вероятностей для числа выстрелов. Построить полигон распределения, построить функцию распределения и изобразить ее графически.

8.28. Два станка выпускают деталь с вероятностями брака 0.01 и 0.05 соответственно. В выборке одна деталь выпущена первым станком и две – вторым станком. Найти закон распределения для числа бракованных деталей в выборке.

8.29. Прибор комплектуется из двух деталей, вероятность брака для первой – 0.1; для второй – 0.05. Выбрано 4 прибора. Прибор считается бракованным, если в нем есть хотя бы одна бракованная деталь. Построить закон распределения для числа бракованных приборов среди выбранных четырех.

8.30. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X – числа комбайнов, работающих безотказно. Записать функцию распределения и построить ее график.

8.31. Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя.

8.32. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3 спортсменов. Составить закон распределения случайной величины X – числа мастеров спорта из отобранных спортсменов.

8.33. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X – число выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7.

8.34. Фирма выпустила 500 изделий. Вероятность того, что на гарантийных ремонт вернется определенное изделие, равна 0,001. Найти закон распределения случайной величины X – число изделий, которые принесли на гарантийный ремонт в определенный день.

8.35. Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1000 знаков, равна 0.05. Найти закон распределения случайной величины X – число ошибок, которое было допущено при наборе, если ошибок не более 3.

Тема 9. Непрерывные случайные величины

Функция распределения и плотность вероятности непрерывных случайных величин

Непрерывными называются случайные величины, множества значений которых имеют мощность континуума.

Функцией распределения вероятностей непрерывной случайной величины ξ называют монотонно неубывающую, непрерывную слева функцию $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$, обладающую свойствами: $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

Если существует функция $p_\xi(x)=\dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$, то она называется ***плотностью вероятности*** случайной величины ξ, а функция распределения случайной величины ξ при известной плотности вероятности может быть найдена по формуле $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\,du$.

Свойства плотности вероятности

1) $p_\xi(x)\ge 0\ \forall x$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = F_\xi(\infty)=1$ – ***условие нормировки***;

3) $P\{a\le\xi<b\}=\int\limits_{a}^{b} p_\xi(x)dx = F_\xi(b)-F_\xi(a)$.

Модой непрерывной случайной величины называется абсцисса точки «гладкого» максимума плотности вероятности этой случайной величины.

Квантилем порядка p случайной величины ξ называется корень x_p уравнения $F_\xi(x_p)=p$.

Медианой $Me\{\xi\}$ случайной величины ξ называется ее квантиль порядка *p*=0,5, т.е. число, определяемое равенством

$$P\{\xi<Me\{\xi\}\}=P\{\xi>Me\{\xi\}\}=0{,}5.$$

Задачи по теме 9

9.1. Найти функцию распределения случайной величины ξ, если её плотность вероятности $p_\xi(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ \lambda>0,\ x\ge 0$ (экспоненциальное распределение). Построить графики функции распределения и плотности вероятностей.

9.2. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: **а)** плотность вероятности случайной величины ξ; **б)** вероятность попадания значения случайной величины в интервал (1; 2,5).

9.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, x<3\\ C(x-3)^2, 3\le x\le 5\\ 1, x>5\end{cases}$$

Найти: **а)** коэффициент C; **б)** плотность распределения $p(x)$ и построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$; **в)** $P\{X\in[3,4)\}$.

9.4. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид $F(x)=A+B\cdot arctgx,\quad -\infty<x<\infty$ (распределение Коши).

Найти: **а)** постоянные A и B; **б)** плотность вероятности случайной величины ξ; **в)** построить график плотности вероятности.

9.5. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения и построить ее график. Найти моду и медиану распределения.

9.6. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x\le 0,\ x>\pi.\end{cases}$$

Найти функцию распределения ξ и определить вероятность попадания значения ξ в интервал $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

9.7. При каких значениях параметров k и b функция

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ kx+b, & -1<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$$

может быть функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X. Найти $P\{X\in(-2.3;1.5)\}$?

9.8. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi, \\ a(\cos x+c), & -\pi\le x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

Найти: **а)** значения постоянных a и c; **б)** плотность распределения $p(x)$;

в) $P_1\left\{X\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right\}, P_2\left\{X=\frac{\pi}{2008}\right\}$.

9.9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le A, \\ \frac{1}{2}\sqrt{x}-1, & A<x\le B, \\ 1, & x>B. \end{cases}$$

Найти: **а)** значения постоянных A и B; **б)** плотность распределения $p(x)$; **в)** $P\{X\in(3,5)\}$.

9.10. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид $p_\xi(x)=Ax^2e^{-\lambda x}, \lambda>0, x\ge 0$.

Найти коэффициент A; определить вероятность того, что ξ попадёт в интервал $\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$;

найти медиану распределения случайной величины ξ.

9.11. Проекция X радиус-вектора случайной точки окружности радиуса r на диаметр имеет следующую функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 1, x\ge r, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r}, -r<x<r, \\ 0, x\le -r. \end{cases} \text{(закон арксинуса).}$$

Найти: **а)** вероятность того, что X окажется в интервале $\left(-\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)$; **б)** квантиль $x_{0.75}$;

в) плотность вероятности случайной величины X.

9.12. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_\xi(x)=\begin{cases} \frac{3}{x^4}, x\ge 1 \\ 0, x<1. \end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения вероятностей $F(x)$; **б)** проверить условие нормировки; **в)** $P\{X \in (1;3)\}$.

9.13. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{4-x^2}}, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Найти: **а)** значение параметра c; **б)** функцию распределения вероятностей $F(x)$; **в)** проверить условие нормировки; г) $P\{X \in (1;5)\}$.

9.14. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0,25 \cdot A, & x \in [0,4], \\ 0, & x \notin [0,4]. \end{cases}$$

Найти: **а)** значение параметра A; **б)** функцию распределения вероятностей $F(x)$; **в)** проверить условие нормировки; г) $P\{X \in [0;1,1]\}$.

9.15. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная величина *X*, имеющая равномерное распределение на отрезке $[19,20]$. Найти вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 часов 22 минут до 19 часов 46 минут.

9.16. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$;

9.17. Средняя продолжительность телефонного разговора равна 3 мин. Найти вероятность того, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться не более 9 минут, считая, что время разговора является случайной величиной *X*, распределенной по показательному закону.

9.18. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0,2 \cdot e^{-0.2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения вероятностей $F_T(t)$; **б)** проверить условие нормировки; **в)** вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.

9.19. Нормально распределенная случайная величина задана своей плотностью

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Найти интервал, в который с вероятностью 0.9545 попадет случайная величина X в результате испытаний.

9.20. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3x^{-3x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения случайной величины X и начертить ее график; **б)** вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

9.21. Дана функция распределения нормированного нормального закона

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Найти плотность распределения $p(x)$.

9.22. Показать, что функция вида

$$p_\xi(x) = \begin{cases} ax^s \exp\left\{-\alpha^2 x^2\right\}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases},$$

где $\alpha > 0,\ a > 0$ – некоторые постоянные и s – натуральное число, обладает свойствами плотности вероятности.

9.23. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ C(2x - x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти: постоянную C, функцию распределения $F(x)$, вероятность $P\{0.5 < X < 1.5\}$.

9.24. Каково должно быть a, чтобы $p(x) = ae^{-x^2}$ являлось плотностью вероятности случайной величины X, изменяющейся в бесконечных пределах.

9.25. Функция распределения Вейбулла $F(x)=1-\exp\left\{-\dfrac{x^m}{x_0}\right\}, x\ge 0$ в ряде случаев характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры. Найти плотность вероятности $p(x)$ и квантиль порядка p.

Тема 10. Математическое ожидание, дисперсия, моменты случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число $M\{\xi\}=\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)P(d\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,dF_{\xi}(x)$, где первый интеграл является *интегралом Лебега*, а второй – *интегралом Римана-Стилтьеса*. Математическое ожидание является основной характеристикой положения распределения случайной величины ξ.

Измеримая функция $f(x)$ от случайной величины $\xi(\omega)$ также является случайной величиной $\eta(\omega)=f(\xi(\omega))$. Математическое ожидание функции случайной величины $f(\xi(\omega))$ будет иметь следующий вид:

$$M\{\eta(\omega)\}=M\{f(\xi(\omega))\}=\int\limits_{\Omega}f(\xi(\omega))P(d\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dF_{\xi}(x).$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной рядом распределения $P(\xi=x_k)=p_k$, вычисляется по формуле: $M\{\xi\}=\sum\limits_{k}x_k p_k$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью вероятности $p(x)$ вычисляется по формуле: $M\{\xi\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$.

Свойства математического ожидания

1) $M\{C\}=C$, где C – произвольная константа;

2) $M\{C\cdot\xi\}=C\cdot M\{\xi\}$, где C – произвольная константа;

3) $M\{\xi\pm\eta\}=M\{\xi\}\pm M\{\eta\}$;

4) Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$M\{\xi \cdot \eta\} = M\{\xi\} \cdot M\{\eta\}$$

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\{\xi\} = M\left\{(\xi - M\{\xi\})^2\right\}.$$

Дисперсия является основной характеристикой рассеяния случайной величины и определяет, насколько сильно может отклоняться случайная величина от своего математического ожидания. Величина $\sigma = \sqrt{D\{\xi\}}$ называется ***среднеквадратическим отклонением*** случайной величины ξ от ее математического ожидания.

Свойства дисперсии

1) $D\{C\} = 0$, где C – произвольная константа;

2) $D\{c\xi\} = c^2 D\{\xi\}$, где c – произвольная константа;

3) если случайные величины ξ и η независимы, то $D\{\xi \pm \eta\} = D\{\xi\} + D\{\eta\}$;

4) $D\{\xi\} = M\left\{\xi^2\right\} - (M\{\xi\})^2$.

Дисперсия дискретных случайных величин вычисляется по формуле $D\{\xi\} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2\{\xi\}$.

Дисперсия непрерывных случайных величин вычисляется по формуле $D\{\xi\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx - M^2\{\xi\}$

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется число

$$m_k = M\left\{\xi^k\right\}.$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется число

$$\mu_k = M\left\{(\xi - M\xi)^k\right\}.$$

Задачи по теме 10

10.1. Случайная величина принимает три возможных значения 4, 6 и ξ_3 с вероятностями 0.5, 0.3 и p_3 соответственно. Известно, что $M\{\xi\} = 8$. Найти ξ_3 и p_3.

10.2. Найти математическое ожидание случайной величины ζ, если $\zeta = 2\xi + 3\eta$ и $M\{\xi\} = 5, M\{\eta\} = 3$.

10.3. ξ и η – независимые случайные величины. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ζ, если $\zeta = 3\xi + 2\eta$, а $D\{\xi\} = 5$, $D\{\eta\} = 6$.

10.4. Брошены n игральных костей. Найти дисперсию суммы числа очков, которые появятся на всех выпавших гранях.

10.5. Из партии, содержащей 10 деталей, среди которых две бракованных, взяты наудачу три детали. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

10.6. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

10.7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа наступлений события A в серии из n независимых опытов, если вероятность наступления события A в одном опыте равна p.

10.8. Стрелок стреляет в цель до тех пор, пока не поразит её. Вероятность попадания равна p. Результаты выстрелов независимы. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа выстрелов.

10.9. В схеме Бернулли найти вероятность появления события A в каждом испытании, если дисперсия числа появлений события A в трёх независимых испытаниях равна 0.63.

10.10. Случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{\alpha X}$.

10.11. Доказать что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ положительны, независимы и одинаково распределены, то $M\left\{\dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}\right\} = \dfrac{1}{n}$.

10.12. Случайная величина имеет равномерное распределение

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$$

Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и четвертый начальный момент случайной величины.

10.13. Найти математическое ожидание и дисперсию экспоненциально распределенной случайной величины. Найти вероятность того, что ξ примет значение меньше своего математического ожидания.

10.14. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения двух независимых случайных величин ξ и η, если ξ равномерно распределена в промежутке $[0,1]$, а η – в $[1,3]$.

10.15. Случайная величина имеет распределение

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2].\end{cases}$$

Найти: функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и центральный момент третьего порядка случайной величины.

10.16. Диаметр круга X измерен приближенно, причем $a\le X\le b$. Рассматривая диаметр круга как случайную величину, распределенную равномерно в $[a,b]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

10.17. Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin x, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

Найти коэффициенты a,b, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

10.18. Пусть случайная величина $\zeta=\xi+\eta$, где ξ,η независимые случайные величины, имеющие центральные моменты 3-го порядка μ_3^{ξ}, μ_3^{η}. Доказать, что центральный момент 3-го порядка случайной величины ζ определяется так: $\mu_3=\mu_3^{\xi}+\mu_3^{\eta}$.

10.19. Показать, что начальные и центральные моменты случайной величины ξ связаны формулами: а) $\mu_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3$; б) $\mu_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4$.

10.20. Плотность вероятностей случайной величины имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0, x>2,\\ \frac{3}{2}x^2, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{2}(2-x)^2, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первых трёх порядков.

10.21. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{3}{4}(2x-x^2), & 0<x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

10.22. Точка, брошена наудачу внутрь круга радиуса *R*. Вероятность попадания в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки до центра круга.

10.23. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2(b+x)}{b(a+b)}, & -b < x \le 0, \\ \dfrac{2(a-x)}{a(a+b)}, & 0 < x \le a. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию ξ.

10.24. Случайная величина имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. При какой дисперсии вероятность попадания в интервал $0 < a < \xi < b$ будет наибольшей?

10.25. Мишень состоит из круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и двух концентрических колец с радиусами внешних окружностей 1 и $\sqrt{3}$. Попадание в центральный круг приносит 4 очка, в среднее кольцо – 3 очка, в крайнее кольцо – 2 очка. Случайное расстояние r между центром мишени и следом попавшей в мишень пули имеет распределение с плотностью вероятности $p(r) = \dfrac{2}{\pi(1+r^2)}$, $r \ge 0$. Найти математическое ожидание числа очков, выбитых при пяти выстрелах.

10.26. Пусть ξ – случайная величина, ограниченная с вероятностью равной единице, т.е. $P\{|\xi| \le c\} = 1$. Доказать, что $D\{\xi\} \le cM\{|\xi|\}$.

Тема 11. Законы распределения многомерных случайных величин. Зависимость случайных величин

Пусть на некотором вероятностном пространстве (Ω, *F*, *P*) определены *n* измеримых функций $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$. Совокупность этих функций $\xi(\omega)$ определяет отображение (Ω, *F*)$\to(R_n, B^n)$, где R_n – *n*-мерное евклидово пространство, B^n – σ-алгебра борелевских множеств на R_n. Такая совокупность $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ называется ***многомерной случайной величиной*** или ***случайным вектором.***

Функция $F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = P\{\xi_1(\omega) < x_1, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}$ называется ***n-мерной функцией распределения*** *n*-мерной случайной величины $\xi(\omega)$ и обладает следующими ***свойствами:***

1) $F\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ является неубывающей по всем аргументам;

2) $F\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ непрерывна слева по всем аргументам;

3) $F\left(-\infty, \ldots, -\infty\right) = 0$;

4) $F\left(+\infty, \ldots, +\infty\right) = 1$;

5) ***условие согласованности*** $F_{\xi}\left(x_1, ..., x_{k-1}, +\infty, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) = F_{\bar{\xi}}\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\right)$.

Функция распределения с меньшим числом переменных, полученная из $F_{\xi}(x_1, ..., x_n)$ с помощью условия согласованности, называется ***маргинальной.***

6) Приращение n-го порядка функции распределения n-мерного случайного вектора неотрицательно.

Если все случайные величины $\xi_i(\omega), i = \overline{1, n}$ дискретны, то n-мерную дискретную случайную величину удобно описывать n-мерным законом распределения $\mathrm{P}\{\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\} = p(x_1, ..., x_n)$, $\sum\limits_{x_1, ..., x_n} p(x_1, ..., x_n) = 1$.

Если все случайные величины $\xi_i(\omega), i = \overline{1, n}$ непрерывны и существует непрерывная производная $\dfrac{\partial^n F_{\xi}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = p_{\xi}(x_1, \ldots, x_n)$, то функция $p_{\xi}(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***n-мерной плотностью вероятностей*** случайной величины $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ и обладает следующими свойствами:

1) $p_{\xi}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$ – ***условие нормировки***;

3) ***условие согласованности***

$$p_{\xi_1, ..., \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \xi_n}\left(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}\left(x_1, ..., x_k, \ldots, x_n\right) dx_k;$$

4) $F_{\xi}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p_{\xi}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$;

5) $P\left\{\omega : (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \in (G)\right\} = \int\limits_{(G)} ... \int p_{\xi}\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 ... dx_n$.

Используя условие согласованности, из многомерного закона распределения случайной величины $\xi = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$ можно получить одномерные законы распределения всех ее компонент.

Пусть на некотором вероятностном пространстве (Ω , F, P) определены случайные величины ξ и η при определенном значении y зафиксировано событие $B=\{\omega:\eta(\omega)=y\}$. При этом условную вероятность $P(A|B)\ \forall A\in F$ можно использовать для построения нового вероятностного пространства (Ω , F, P_B), на котором определена случайная величина ξ с функцией распределения

$$F_{\xi}(x\,|\,y)=P\{\omega:\xi(\omega)<x\,|\,\omega\in B\},$$

называемая ***условной функцией распределения*** случайной величины ξ. Соответственно, функция $p_{\xi}(x\,|\,y)=\dfrac{dF_{\xi}(x\,|\,y)}{dx}$ называется ***условной плотностью вероятности*** случайной величины ξ. Эта ситуация может быть непосредственно обобщена для многомерных случайных величин ξ и η.

Условная плотность вероятности определяется равенством

$$p_{\xi}(x\,|\,y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\eta}(y)}.$$

Для того, чтобы случайные величины $\xi_1(\omega),\ldots,\xi_n(\omega)$ были ***независимы в совокупности***, необходимо и достаточно, чтобы

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}p_{\xi_i}\left(x_i\right)$$

или

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}F_{\xi_i}\left(x_i\right).$$

Задачи по теме 11

11.1. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F_{\xi\eta}\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ или } y<0,\\ \sin x\sin y, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\text{ или y}>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная точка (ξ,η) попадёт в прямоугольник

$$\left\{(x,y):0\le x\le\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\le y\le\frac{\pi}{3}\right\}.$$

11.2. Для случайной величины (ξ,η) с двумерной плотностью вероятности

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\pi}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le 4,\\ 0, & x^2+y^2>4.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания точки (ξ,η) в единичный круг с центром в начале координат.

11.3. Функция распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases}0, \quad x<0 \text{ или } y<0,\\ 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, \quad x\ge 0,\, y\ge 0\end{cases}.$$

Найти: **а)** вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1, x=2, y=3, y=5$; **б)** двумерную плотность вероятности; **в)** одномерные плотности вероятности компонент ξ и η. Выполняются ли условия нормировки для полученных плотностей вероятностей?

11.4. В двух ящиках находится по шесть шаров; в первом ящике: один шар с номером один, два шара с номером два, три шара с номером три; во втором ящике: два шара с номером один, три шара с номером два, один шар с номером три. Из каждого ящика наудачу вынули по шару. Пусть X – номер шара, вынутого из первого ящика, Y – номер шара, вынутого из второго ящика. Найти закон распределения случайной величины (X,Y).

11.5. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p. Рассматриваются две случайные величины: ξ – число попаданий, η – число промахов. Построить двумерный закон распределения случайной величины (ξ,η) и одномерные законы распределения ее компонент.

11.6. Случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятности:

$$p(x,y)=\frac{C}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Найти: **а)** коэффициент C; **б)** установить являются ли зависимыми величины ξ и η; **в)** найти вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в квадрат, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину равную двум.

11.7. Даны две независимые случайные величины: непрерывная X с плотностью вероятности $p_1(x)$ и дискретная Y со значениями $y_1, y_2,...y_n$, принимаемыми с вероятностями $p_1, p_2,...p_n$. Найти функцию распределения двумерной случайной величины (X,Y).

11.8. Пусть случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a=0, \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, η распределена равномерно на $[0,1]$. Найти плотность вероятности $p(x,y)$ случайной величины (ξ,η).

11.9. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятностей $p_{\xi\eta}(x,y)=C\cdot\exp(-x^2-2xy-4y^2)$. Найти постоянную *C*, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ – одномерные и $p(x\,|\,y)$, $p(y\,|\,x)$ – условные плотности вероятности компонент ξ и η.

11.10. Случайная величина (ξ,η) равномерно распределена внутри изображенного на рисунке квадрата. Найти двумерную и одномерные плотности вероятности этой случайной величины. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

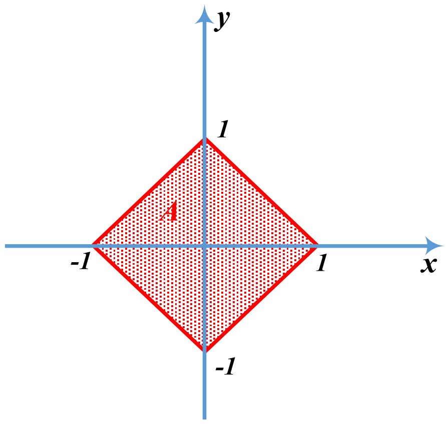

Рис. 11.1

11.11. Случайная величина (ξ,η) равномерно распределена внутри трапеции *ABCD* с вершинами *A*(-6,0), *B*(-3,4), *C*(3,4), *D*(6,0). Найти двумерную и одномерные плотности вероятности.

11.12. Трехмерная случайная величина (ξ,η,ς) распределена равномерно внутри шара радиуса R с центром в начале координат. Определить трехмерную плотность вероятности $p(x,y,z)$. Найти плотности вероятности $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, $p_\varsigma(z)$, $p_{\eta\varsigma}(y,z)$ и условную плотность вероятности $p_\xi(x\,|\,y,z)$. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ,η,ς) внутрь шара радиуса $\frac{R}{2}$ с центром в начале координат.

11.13. Система независимых случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ задана плотностями вероятностей $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$. Определить функцию распределению этой системы случайных величин.

11.14. Плотность распределения трехмерной случайной величины (ξ,η,ζ) равна:

$$p(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{6}{(1+x+y+z)^4}, & x,y,z>0\\ 0, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти одномерные плотности распределения.

11.15. Плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,η) равна:

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{2}, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, 0<y\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0,\ x\le 0, x>\dfrac{\pi}{2},\ y\le 0, y>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x,y)$.

11.16. Координаты (ξ,η) случайной точки на плоскости подчиняются нормальному закону:

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sigma_1^2\sigma_2^2}+\frac{(y-\overline{y})^2}{\sigma_2^2}\right\},$$

Найти: одномерные и условные плотности вероятности. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

11.17. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка, величина Y – число попаданий второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна p_1, для второго – p_2. Определить закон распределения и функцию распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y).

11.18. Плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид

$$p(x,y)=\begin{cases}C\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right), x^2+y^2\le R^2,\\ 0,\quad x^2+y^2>R^2.\end{cases}$$

Найти: **а)** постоянную C; **б)** одномерные плотности вероятностей $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$; **в)** условные плотности вероятностей $p_\xi(x\mid y)$, $p_\eta(y\mid x)$.

11.19. Определить плотность вероятности системы трех случайных величин (X,Y,Z) по заданной функции распределения:

$$F(x,y,z)=(1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz}),\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$$

11.20. В условиях предыдущей задачи определить геометрическое место точек, обладающих одинаковой плотностью:

$$p(x,y,z)=p_0,\ p_0\le abc.$$

11.21. По заданной функции распределения двумерной случайной величины определить плотность и найти вероятность попадания точки с координатами (X,Y) в область $\{1 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 1\}$. Найти значение коэффициента k.

$$F(x,y,z) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-ky^2} + a^{-x^2-ky^2}, & x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

11.22. Найти одномерные плотности, если известна плотность вероятности двумерной случайной величины (X,Y): $p(x,y) = \dfrac{2}{\pi\left(x^2+y^2+1\right)^3}$. Являются ли величины зависимыми?

11.23. Дана плотность вероятности координат случайной точки на плоскости:

$$p(x,y) = C \cdot \exp\left\{-\left[4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2\right]\right\}.$$

Найти постоянную C и одномерные плотности вероятностей.

11.24. Дана плотность вероятности системы двух случайных величин (X,Y):

$$p(x,y) = ke^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Найти: **а)** постоянную k; **б)** одномерные законы распределения $p(x)$, $p(y)$; **в)** условные законы распределения $p(x\,|\,y)$, $p(y\,|\,x)$.

11.25. Определить вероятность попадания случайной точки в указанную на рисунке заштрихованную область, если задана функция распределения $F(x,y)$:

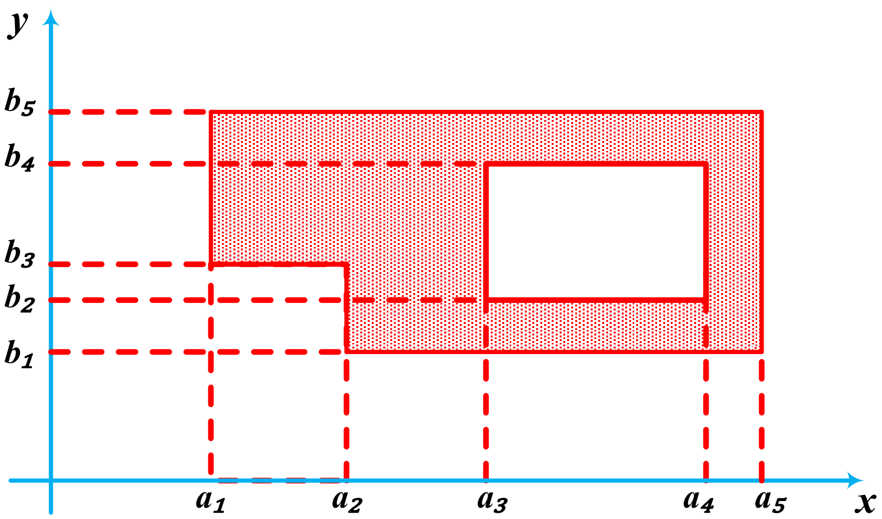

Рис. 11.2

11.26. Система случайных величин (X,Y) имеет плотность вероятности: $p(x,y)=\dfrac{A}{\pi^2\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)}$. Найти постоянную A и записать функцию распределения.

11.27. Пусть $u(x)$ – нечетная непрерывная функция на прямой, равная нулю вне интервала $\left[-1,1\right]$, причем $|u(x)|<\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. Доказать, что функция

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+u(x)u(y)$$

есть двумерная плотность распределения, которое не является нормальным, но его маргинальные распределения нормальны.

11.28. Координаты $\left(X_1,Y_1\right)$ и $\left(X_2,Y_2\right)$ случайных точек на плоскости подчинены нормальному закону распределения, причем математические ожидания всех координат равны нулю, дисперсии всех координат одинаковы и равны 10; корреляционные моменты между одноименными координатами $M\left\{X_1X_2\right\}$ $=M\left\{Y_1Y_2\right\}$=2; остальные пары координат не коррелированы. Найти плотность вероятности $p(x_1,y_1,x_2,y_2)$.

Тема 12. Числовые характеристики многомерных случайных величин

Математическое ожидание многомерной случайной величины $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n\right)$ – это вектор $M\xi=(M\xi_1,...,M\xi_n)$.

Если $\xi=\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$ – непрерывная случайная величина, $g(x_1,...,x_n)$ – измеримая функция, то математическое ожидание случайной величины $g(\xi_1,...,\xi_n)$ определяется формулой

$$Mg(\xi_1,...,\xi_n)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}...\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,...,x_n)\,p_\xi(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n\ .$$

Дисперсия многомерной случайной величины $\xi=\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$ – это вектор $D\xi=(D\xi_1,...,D\xi_n)$.

Ковариацией случайных величин ξ и η называется число

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M\{(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\}=M\left\{\xi\eta\right\}-M\xi\,M\eta\ .$$

Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется число $r_{\xi\eta}=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\,D\eta}}$.

Коэффициент корреляции является мерой ***линейной*** зависимости между случайными величинами ξ и η.

Свойства коэффициента корреляции

1) $|r_{\xi\eta}| \le 1$, $|r_{\xi\eta}| = 1$ тогда и только тогда, когда ξ и η связаны линейной зависимостью.

2) если случайные величины ξ и η независимы, то $r_{\xi\eta} = 0$. Обратное утверждение верно лишь в случае, когда ξ и η имеют нормальное распределение. При $r_{\xi\eta} = 0$ случайные величины ξ и η называют ***некоррелированными***. Некоррелированные случайные величины могут быть зависимыми.

Матрица ковариаций случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – это матрица попарных ковариаций компонент вектора $\left\|\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\right\|_{n\times n}$.

Корреляционной матрицей случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называют матрицу попарных коэффициентов корреляции $\left\| r_{\xi_i \xi_j} \right\|_{n\times n}$ компонент вектора.

Задачи по теме 12

12.1. Дана плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ, η)

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\sin x \sin y, & 0 \le x, y \le \pi, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции величин ξ и η. Зависимы ли эти случайные величины?

12.2. Из урны, в которой *a* белых, *b* черных и *c* красных шаров, вынимается один шар. Случайные величины *X*, *Y*, *Z* определяются следующими условиями:

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{если появится белый шар}, \\ 0, & \textit{если появится черный или красный шар}, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \textit{если появится черный шар}, \\ 0, & \textit{если появится белый или красный шар}, \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1, & \textit{если появится красный шар}, \\ 0, & \textit{если появится черный или белый шар}. \end{cases}$$

Построить матрицу ковариаций компонент случайного вектора (*X*,*Y*,*Z*).

12.3. Закон распределения случайной величины (ξ, η) представлен в следующей таблице

	ξ=20	ξ=40	ξ=60
η=10	3λ	λ	0
η=20	2λ	4λ	2λ
η=30	λ	2λ	5λ

Найти: **а)** величину λ; **б)** математические ожидания $M\{\xi\}, M\{\eta\}$; **в)** дисперсии $D\{\xi\}, D\{\eta\}$;

г) коэффициент корреляции случайных величин ξ, η.

12.4. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет плотность вероятности

$$p(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 \le x, y \le 1, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти математические ожидания $M\{\xi\}, M\{\eta\}$ и дисперсии $D\{\xi\}, D\{\eta\}$.

12.5. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет плотность вероятности

$$p(x, y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти $M\{\xi\}, M\{\eta\}, D\{\xi\}, D\{\eta\}$ и коэффициент корреляции величин ξ и η.

12.6. Закон распределения случайной величины (ξ, η) представлен таблицей

	$\xi = x_1$	$\xi = x_2$	$\xi = x_3$
$\eta = y_1$	0,15	0,12	0,09
$\eta = y_2$	0	0,35	0,21
$\eta = y_2$	0	0	0,08

Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$. Зависимы ли ξ и η?

12.7. Найти коэффициент корреляции случайных величин $\alpha\xi + \beta\eta$ и $\alpha\xi - \beta\eta$, если ξ и η независимые нормально распределённые случайные величины, α, β – положительные вещественные коэффициенты и $M\{\xi\} = M\{\eta\} = a$, $D\{\xi\} = D\{\eta\} = \sigma^2$.

12.8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ случайные величины и коэффициент корреляции двух из них равен ρ. Доказать, что для этого коэффициента корреляции справедливо неравенство $\rho \ge \frac{-1}{n-1}$.

12.9. Пусть ξ, η, ζ – независимые случайные величины с конечными положительными дисперсиями. Могут ли быть независимыми случайные величины $\xi + \zeta$ и $\eta + \zeta$?

12.10. Вычислить математическое ожидание и дисперсию определителя $\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}$, если все ξ_{ij} независимы, $M\{\xi_{ij}\} = 0$, $D\{\xi_{ij}\} = \sigma^2$.

12.11. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет функцию распределения $F(x, y) = 1 - e^{-ax} - e^{-bx} + e^{-ax-bx}$ $(a > 0,\ b > 0)$. Найти математическое ожидание и корреляционную матрицу этой двумерной случайной величины. Являются ли эти величины зависимыми?

12.12. Случайные величины ξ и η независимые и имеют конечные дисперсии. Доказать, что $D\{\xi\eta\} \geq D\xi \cdot D\eta$.

12.13. Какими характеристиками должны обладать независимые случайные величины, чтобы выполнялось равенство: $D\{\xi\eta\} = D\xi \cdot D\eta$.

12.14. а) Пусть ξ неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi \geq i\}$;

б) пусть ξ и η независимые случайные величины, принимающие неотрицательные целочисленные значения и с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что $M \min\{\xi,\eta\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi \geq i\} \mathrm{P}\{\eta \geq i\}$.

12.15. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (ξ,η)

$$p(x,y) = \begin{cases} 2xy\exp\{-x^2 - y^2\}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти одномерные плотности, математические ожидания и дисперсии величин ξ и η.

12.16. Достаточно ли попарной независимости случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ для выполнения свойства: $D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$.

12.17. Плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi R^3}\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right), & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Найти ковариацию компонент случайной величины (ξ,η).

12.18. Двумерная случайная величина (ξ,η) задана законом распределения:

	ξ=2	ξ=4	ξ=7
η=3	0,12	0,18	0,10
η=8	0,10	0,11	0,39

Найти ковариацию случайных величин ξ и η.

12.19. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятности

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{2}, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, 0<y\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0,\ x\le 0, x>\dfrac{\pi}{2},\ y\le 0, y>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти математические ожидания $M\{\xi\}, M\{\eta\}$, дисперсии $D\{\xi\}, D\{\eta\}$ и построить корреляционную матрицу.

12.20. $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ – случайные величины с конечными ненулевыми дисперсиями. Доказать, что условие $D\left(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n\right)=D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n$ выполняется тогда и только тогда, когда $r\left(\xi_i,\xi_j\right)=0$.

12.21. Определить математическое ожидание, дисперсию двумерной случайной величины (X,Y), если плотность вероятности имеет вид: $p(x,y)=\dfrac{2}{\pi\left(x^2+y^2+1\right)^3}$.

12.22. Даны математические ожидания двух нормальных величин $M\{X\}=26, M\{Y\}=-12$ и их ковариационная матрица: K=$\begin{bmatrix}196 & -91\\ -91 & 169\end{bmatrix}$. Определить плотность вероятности двумерной величины (X,Y).

12.23. В условиях задачи **11.23** записать ковариационную матрицу.

12.24. Определить в точке $x_1=2, x_2=2$ плотность вероятности системы двух нормальных величин $\left(X,Y\right)$, для которых: $M\{X\}=0, M\{Y\}=0$ и **K**=$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

12.25. Случайные величины $\left(X,Y\right)$ связаны соотношением: $mX+nY=c$, где $m\ne 0, n\ne 0$, c – неслучайные величины. Найти: **а)** коэффициент корреляции; **б)** отношение среднеквадратических отклонений.

Тема 13. Характеристическая и производящая функции случайных величин

Характеристической функцией случайной величины ξ называется комплекснозначная функция

$$g_\xi(u) = M\left\{e^{iu\xi(\omega)}\right\} = \int\limits_{\Omega} e^{iux} P(d\omega),$$

где i – мнимая единица, u – вещественная переменная.

Если функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ непрерывна, то характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности вероятности случайной величины ξ

$$g_\xi(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} p_\xi(x) dx,$$

и при известной характеристической функции $g_\xi(u)$ плотность вероятности случайной величины ξ может быть найдена как обратное преобразование Фурье функции $g_\xi(u)$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} g_\xi(u) du.$$

Если ξ – дискретная случайная величина, заданная рядом распределения $P\{\xi = x_k\} = p_k$, k=1,2,…, то $g_\xi(u) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{iux_k} p_k$.

Основные свойства характеристических функций

1) характеристическая функция случайной величины существует всегда, $\left|g_\xi(u)\right| \le 1 \; \forall u$ и $g_\xi(0) = 1$;

2) если $\eta = a\xi + b$, то $g_\eta(u) = e^{ibu} g_\xi(au)$;

3) если $\xi_1, ..., \xi_n$ – независимые случайные величины, то $g_{\xi_1+...+\xi_n}(u) = g_{\xi_1}(u) \cdot ... \cdot g_{\xi_n}(u)$;

4) если $M\left\{|\xi|^k\right\} < +\infty$ (т.е. начальный момент k-го порядка существует), то существует непрерывная k-ая производная характеристической функции, связанная с k-ым начальным моментом случайной величины ξ соотношением

$$g_\xi^{(k)}(0) = i^k M\left\{\xi^k\right\}.$$

Если случайная величина принимает лишь целые значения с вероятностями $p_k = P\{\xi = k\}$, $k = 0,1,\dots$, то ее характеристическую функцию $g_\xi(u) = M\left\{e^{iu\xi}\right\}$, рассматриваемую как функцию новой переменной $z = e^{iu}$, можно записать в виде $\psi_\xi(z) = M\left\{z^\xi\right\}$.

Производящей функцией случайной величины ξ называется функция $\psi_\xi(z) = M\left\{z^\xi\right\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k p_k$.

Основные свойства производящих функций

1) производящая функция $\psi_\xi(z) = g_\xi(e^{iu})$ периодична с периодом 2π как функция переменной u, и для описания характеристической функции $g_\xi(u)$ достаточно знать значения производящей функции $\psi_\xi(z)$ на единичной окружности $|z| = 1$;

2) $\psi_\xi(1) = 1$ (условие нормировки), $\psi_\xi(0) = p_0$;

3) зная производящую функцию, можно найти вероятности p_k :

$$p_k = \frac{1}{k!}\psi_\xi^{(k)}(0),\ k = 0, 1, ...$$

Задачи по теме 13

13.1. Пусть $g_\xi(u)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Найти характеристическую функцию случайной величины $-\xi$.

13.2. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Лапласа с плотностью вероятности $p_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

13.3. Найти характеристическую функцию для следующих распределений: **а)** биномиального; **б)** равномерного непрерывного; **в)** геометрического; **г)** распределения Коши.

13.4. Показать, что чётная характеристическая функция случайной величины с плотностью вероятности $p_\xi(x)$ представима в виде: $g(u) = 2\int\limits_0^\infty \cos(ux) p_\xi(x)\,dx$.

13.5. Показать, что вещественная функция, не являющаяся четной, не может быть характеристической функцией.

13.6. Пусть ξ и η независимые и одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $g(u)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi - \eta$.

13.7. Пусть случайные величины $\xi \sim N(a_1, \sigma_1^2)$ и $\eta \sim N(a_2, \sigma_2^2)$ независимы. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi + \eta$.

13.8. Доказать, что следующие функции не могут быть характеристическими: **а)** $e^{-i|u|}$;

б) $a_1\cos(u) + a_2\cos(2u) + \ldots + a_n\cos(nu) + b_1\sin(u) + b_2\sin(2u) + \ldots + b_n\sin(nu)$,

где $a_i, b_i, i = 1,2,...n$ – вещественные положительные числа.

13.9. Могут ли быть характеристическими функциями некоторых распределений следующие функции: **а)** $\sin(2t)$; **б)** e^{-t^4}; **в)** $\cos(t^2)$; **г)** $e^{-|t|}$?

13.10. Найти распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции: **а)** $\dfrac{1}{1+t^2}$; б) $\cos t$; **в)** $\cos^2 t$; **г)** e^{-t^2}; **д)** $\dfrac{\sin t}{t}$; **е)** $e^{-|t|}\cos t$; **ж)** $\dfrac{1}{1-it}$.

13.11. Показать, что характеристическая функция $g(u)=\dfrac{1}{2e^{-iu}-1}$ может соответствовать лишь дискретной случайной величине. Найти ряд распределения этой случайной величины.

13.12. Найти распределения, которым соответствуют производящие функции:

а) $\dfrac{1}{4}(1+z)^2$; **б)** $e^{\lambda(z-1)}, \lambda>0$.

13.13. С помощью производящих функций показать, что сумма независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

13.14. Пусть ξ – случайная величина с характеристической функцией $g_\xi(u)$, и для некоторого a имеет место неравенство $P\{\xi=a\}>0{,}5$. Доказать, что $g_\xi(u)$ не обращается в нуль на вещественной прямой.

13.15. Доказать, что всякая вещественная характеристическая функция обладает свойством

$$\forall u \quad 1-g_\xi(2u)\le 4\left(1-g_\xi(u)\right).$$

13.16. Доказать, что для любой вещественной характеристической функции выполняется неравенство:

$$\left|g_\xi(u)\right|\le\sqrt{\frac{1+g_\xi(2u)}{2}}.$$

13.17. Найти распределение, которому соответствует производящая функции:

$$\psi(z)=\frac{p}{1-(1-p)z}.$$

13.18. Найти характеристическую функцию экспоненциально распределенной случайной величины.

13.19. Найти характеристическую и производящую функции случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона: $P\{\xi=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\dots$

13.20. Найти плотность распределения, которой соответствует характеристическая функция

$$g(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

13.21. Найти характеристическую функцию Гамма-распределения, имеющего плотность:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

где $\alpha>0, \beta>0$ и $\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$, $\mathrm{Re}(z)>0$ – Гамма функция Эйлера.

13.22. Найти характеристическую функцию, соответствующую плотности:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{a-|x|}{a^2}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\ge a.\end{cases}$$

13.23. Доказать свойство характеристической функции:

$$|g(u+h)-g(u)|\le\sqrt{2\left(1-\mathrm{Re}\,g(h)\right)}.$$

13.24. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины X, подчиняющейся закону распределения Паскаля: $\mathrm{P}\left\{X=m\right\}=\dfrac{a^m}{(1+a)^{m+1}}$, $a>0$, и по ней найти MX, DX.

13.25. Убедиться, что функция $g(u)=\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}\cdot\dfrac{1+\alpha e^{-it}}{1-\beta e^{it}}$, $0<\alpha<\beta<1$, является характеристической, и найти закон распределения, соответствующий ей.

13.26. Найти характеристическую функцию случайной величины, плотность вероятностей которой имеет вид: $p(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$, $|x|<a$.

13.27. Пользуясь выражением $g(u)=\exp\left\{iua-\dfrac{u^2\sigma^2}{2}\right\}$ для характеристической функции закона нормального распределения случайной величины X, найти характеристическую функцию для случайной величины: **а)** $Y=\alpha X+\beta$; **б)** $Y=X-a$.

13.28. Даны характеристические функции: $g_1(u)=\dfrac{1+iu}{1+u^2}$, $g_2(u)=\dfrac{1-iu}{1+u^2}$. Определить соответствующие им плотности.

13.29. Убедиться, что функция $g(u)=\dfrac{3+\cos u}{4}$ является характеристической. Найти закон распределения, соответствующий этой характеристической функции.

13.30. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ … каждая из которых может принимать значения $+1$ и -1 с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$.

Пусть $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$, где a_k – постоянные.

а) Найти характеристическую функцию случайной величины η_n.

б) Полагая $a_k = \frac{1}{2^k}$, показать, что распределение η_n стремится при $n \to \infty$ к равномерному распределению на отрезке $[-1,1]$.

Тема 14. Функциональные преобразования случайных величин

Рассмотрим n-мерную случайную величину $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с совместной плотностью вероятностей $p_\xi(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть необходимо найти совместную плотность вероятностей m-мерной случайной величины $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, причём $\eta_1 = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta_2 = f_2(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, …, $\eta_m = f_m(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

1) Пусть $m = n$ и в области определения плотности вероятности $p_\xi(x_1, \ldots, x_n)$ все функции $f_k(x_1, \ldots, x_n), k = 1, \ldots, n$ дифференцируемы, а якобиан $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$. При этом система уравнений $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ может быть однозначно разрешена относительно переменных $x_1, \ldots x_n$: $x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_n)$, и совместная плотность вероятностей $p_\eta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ случайной величины η определяется по формуле:

$$p_\eta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_\xi(\varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots \varphi_n(y_1, \ldots, y_n)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right|.$$

2) Пусть $n > m$ и $rang \left\| \frac{\partial f_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n} = m$, тогда для определения плотности вероятности $p_\eta(y_1, \ldots, y_n)$ вводят дополнительные функции: $y_{m+1} = f_{m+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывно дифференцируемые, независимые в совокупности. Новая система n функций определяет n-мерную случайную величину $\overline{\eta}$, для которой совместная плотность вероятности $p_{\overline{\eta}}(y_1, \ldots, y_n)$ может быть найдена так же, как в предыдущем случае. Искомая плотность вероятности определяется из условия согласованности:

$$p_\eta(y_1, \ldots, y_m) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_{m+1} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\overline{\eta}}(y_1, \ldots, y_n) dy_n.$$

3) Пусть $m = n = 1$, т.е. требуется найти плотность вероятности $p_\eta(y)$ случайной величины $\eta = f(\xi)$ при известной плотности вероятности $p_\xi(x)$ случайной величины ξ. Если функция $y = f(x)$ кусочно монотонна, то на каждом промежутке монотонности определяется взаимно однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ и плотность вероятности $p_\eta(y)$ находится по формуле $p_\eta(y) = \sum_i p_\xi(\varphi_i(y))|\varphi_i'(y)|$, где индекс суммирования – это номер взаимно однозначной части обратной функции $x = \varphi(y)$.

Задачи по теме 14

14.1. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Найти ряд распределения случайной величины $\eta = \xi^2 + 1$.

14.2. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

ξ	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0.2	0.7	0.1

Найти ряд распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

14.3. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \sin\xi$.

14.4. Случайная величина ξ распределена экспоненциально с параметром единица. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = e^{-\xi}$.

14.5. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью вероятности $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти распределение случайной величины $\eta = \xi^2$.

14.6. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $p_\xi(x)$. Записать плотность вероятности случайной величины η, если **а)** $\eta = \mathrm{arctg}\,\xi$; **б)** $\eta = |\xi|$; **в)** $\eta = \frac{1}{\xi^2 + 1}$;

г) $\eta = \sqrt{R^2 - \xi^2}$; д) $\eta = e^{-\xi^2}$.

14.7. Диаметр круга ξ измерен приближенно. Считая величину ξ равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$, найти плотность вероятности площади круга.

14.8. Найти плотности вероятности произведения $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$ и частного $\zeta = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$ случайных величин ξ_1 и ξ_2, если известна совместная плотность вероятности $p_\xi(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

14.9. Найти плотность вероятности суммы, разности и частного независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.

14.10. Найти распределение вероятностей суммы независимых случайных величин ξ и η, если: **а)** обе случайные величины имеют распределение Пуассона с параметрами λ и μ соответственно; **б)** обе случайные величины имеют распределение Коши с параметром, равным единице.

14.11. Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей $p_\xi(x)$. Записать функцию распределения $F_{\xi\xi^2}(x,y)$ двумерной случайной величины $\left(\xi, \xi^2\right)$.

14.12. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, если:

а) обе случайные величины равномерно распределены на отрезке [0, 2];

б) обе случайные величины распределены по закону гиперболического секанса с плотностью вероятности

$$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \frac{2}{\pi\left(e^x + e^{-x}\right)}, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

в) случайная величина ξ имеет плотность вероятностей $p_\xi(x)$, а случайная величина η имеет ряд распределения $P\{\eta = y_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

г) случайная величина ξ принимает значения -2, 0, 2 с вероятностями соответственно 0,25, 0,5, 0,25, а случайная величина η принимает значения -1, 1 с вероятностью 0,5;

д) обе случайные величины одинаково распределены с плотностью вероятности $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$;

е) случайная величина ξ равномерно распределена на $[a, b]$, случайная величина η равномерно распределена на $[c, d]$, $b-a < d-c$;

ж) случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, случайная величина η равномерно распределена на отрезке $[a, b]$.

14.13. Найти плотности вероятности случайных величин $\xi \cdot \eta$ и $\frac{\xi}{\eta}$, если случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены в интервале (0, *b*).

14.14. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти распределение случайной величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$. Зависимы ли случайные величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ и $\xi+\eta$?

14.15. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти распределение случайной величины $\varsigma = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$.

14.16. Пусть случайные величины ξ, η, ς независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти распределение случайной величины $\frac{\xi+\eta}{\varsigma}$.

14.17. Пусть случайные величины $\xi_i, i = 1,...,n$ независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти плотность вероятности случайной величины $\frac{\xi_1}{\xi_1 + ... + \xi_n}$

14.18. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [-1, 2]. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi^2$.

14.19. Найти плотность вероятности суммы случайных величин $\eta = \xi_1 + \xi_2$, если известна совместная плотность вероятности $p_\xi(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

14.20. Найти плотность вероятности суммы независимых случайных величин, имеющих одинаковое экспоненциальное распределение с параметром λ.

14.21. Определить плотность вероятности случайной величины $\eta = |\xi|$, если ξ – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной E^2.

14.22. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[0, 1]$ и связана с η функциональной зависимостью $\mathrm{tg}\frac{\pi\eta}{2} = e^{\xi}$. Найти плотность вероятности случайной величины η.

14.23. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[0, 1]$. Определить распределение случайной величины η, если

$$\xi = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\eta - a}{b}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right].$$

14.24. Определить плотность распределения модуля радиус-вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если распределение двумерной случайной величины (X, Y) задается плотностью:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & x^2 + y^2 \le a^2 \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

14.25. Определить плотность распределения случайной величины $Z = \frac{X}{Y}$, если X и Y – независимые случайные величины, плотности вероятности которых равны:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x \in [0, \infty), \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}, \quad p(y) = \begin{cases} \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y \in [0, \infty), \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

14.26. Случайные величины ξ и η связаны функциональной зависимостью $\eta = F(\xi)$. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[a, b]$, а функция $F(x)$ – её функция распределения. Найти плотность вероятности случайной величины η.

14.27. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[0,1]$. Задана функция $f(t) \ge 0$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$. Случайные величины ξ и η связаны функциональной зависимостью: $\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f(t) dt$. Доказать, что функция $f(t)$ есть плотность вероятности случайной величины η.

14.28. В условиях задачи ***11.14*** найти распределение случайной величины $\xi + \eta + \zeta$.

Литература

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Академия, 2004. 448 с.

Галажинская О.Н., Марголис Н.Ю., Моисеева С.П., Цой С.А. Задачник по теории вероятностей : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2009. 79 с.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969. 448 с.

Даммер Д.Д. Теория вероятностей. (Часть 2. Случайные величины) : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2005. 30 с.

Донской Е.Н. Курс теории вероятностей с элементами случайных процессов и математической статистики. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. 288 с.

Емельянов Г.Е., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л. : Изд-во ЛГУ, 1967. 334 с.

Китаева А.В. Теория вероятностей (часть 1, случайные события) : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2000. 23 с.

Крупин В.Г, Павлов А.Л., Попов Л.Г. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы : учеб. пособие. М. : Издательский дом МЭИ, 2013. 368 с.

Крупкина Т.В., Пыжев А.И. Теория вероятностей, случайные процессы : учеб. пособие. Красноярск : Изд-во Сибирского федер. ун-та, 2007. 182 с.

Максимов Ю.Д. Математика. Теория вероятностей и случайных процессов. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2008. 384 с.

Маталыцкий М.А, Романюк Т.В. Теория вероятностей в примерах и задачах : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2002.248 с.

Назаров А.А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. 3-е изд. М. : Айрис-пресс, 2008. 290 с.

Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Наука, 1986. 328 с.

Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова. СПб. : Лань, 2007. 448 с.

Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика: промежуточный уровень : учеб. пособие. М. : Изд. дом. Высшей школы экономики, 2016. 280 с.

Приложения

Приложение 1

Таблица значений функции Пуассона: $P_\lambda(m) \approx (\lambda)^m e^{-\lambda} / m!$

λ / m	0,1	02	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

m	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$	$\lambda=6$	$\lambda=7$	$\lambda=8$	$\lambda=9$	$\lambda=10$
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 2

Таблица значений функции Гаусса: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14758	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08330	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07207	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05960	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04492
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03548	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02966	02899
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02240	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01889	01842	01797
2,5	01753	01710	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00910	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	00443	00327	00238	00172	00123	00084	00061	00043	00029	00020

Приложение 3

Таблица значений функции Лапласа: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt$

x	Сотые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	07776	05117	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07920	08317	08700	09095	09483	09871	10257	10642	11062	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	36371	17003	17365	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	16640	20540	20884	21226	21566	21904	22241
0,6	22575	22907	23237	20194	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	23565	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	26731	29955	302234	30511	30785	31057	31328
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40148
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42634	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43447	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45819	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47671
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48499	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48839	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	48202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49491	49506	49520
2,6	49535	49547	49560	49573	49586	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49737
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49865	49819	49825	49830	49836	49841	49846	49851	49897	49861
3,0	00443	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	00348	49899
x	Десятые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	49865	49903	49931	49952	49966	49977	49984	49989	49993	49995

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Составители:
ГАЛАЖИНСКАЯ Оксана Николаевна,
ДАММЕР Диана Дамировна

Издание подготовлено в авторской редакции

Компьютерная верстка А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 06.02.2020 г. Формат $60{\times}84^{1}/^{8}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Печ. л. 9,7. Усл. печ. л. 9,1.
Тираж 150 экз. Заказ № 4232.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru