НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Применение отрицательного биномиального распределения для аппроксимации стационарного распределения числа заявок в системе MAP|GI|∞

М.П. Зимин, А.Н. Моисеев, В.И. Бронер

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В работе рассматривается система массового обслуживания MAP|GI|∞ с неограниченным числом приборов, входящим MAP потоком заявок и рекуррентным обслуживанием. Анализируя качество аппроксимации характеристик систем массового обслуживания, авторы обратили внимание на ряд работ [1, 2], в которых в качестве «естественного» результата для стационарного распределения числа заявок в системе с повторными вызовами получалась аппроксимация, основанная на гамма-распределении. Поскольку результирующее распределение должно быть дискретным, то авторы называли его дискретным гамма-распределением, а по сути имели дело с так называемым отрицательным биномиальным распределением [3] (далее – ОБР) с действительными положительными значениями параметра, задающего число ожидаемых успехов (в зарубежной литературе термин «дискретное гамма-распределение» достаточно распространен и имеет указанный смысл).

В настоящей работе проводится анализ применимости ОБР в качестве аппроксимации стационарного распределения числа заявок в системе MAP|GI|∞.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, входящим MAP-потоком заявок и рекуррентным обслуживанием. MAP-поток задан представлением $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$ [4], где $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ – квадратные матрицы порядка M. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с заданной функцией распределения $B(t)$.

Ставится задача определения распределения числа заявок в системе в стационарном режиме ее функционирования.

Результаты асимптотического анализа

В [5, 6] с применением асимптотического анализа установлено, что в условиях высокой интенсивности входящего потока стационарное распределение числа заявок в системе является гауссовским, получены параметры этого гауссовского распределения. Характеристическую функция $h_2(u)$ стационарного распределения числа заявок в системе можно записать следующим образом:

$$h_2(u) = \exp\left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2}\left[N\lambda b + N\kappa\beta\right]\right\}, \qquad (1)$$

где $\lambda = \boldsymbol{\theta}\mathbf{D}_1\mathbf{e}$, $\mathbf{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц, $\boldsymbol{\theta}$ – вектор-строка, определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1\right) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\theta}\mathbf{e} = 1; \end{cases}$$

$b = \int_0^\infty [1 - B(\tau)]\, d\tau$ – среднее время обслуживания; $\beta = \int_0^\infty [1 - B(\tau)]^2\, d\tau$, величина κ вычисляется как $\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}$, а вектор-строка $\mathbf{g}$ удовлетворяет линейному матричному уравнению $\mathbf{gD} = \boldsymbol{\theta}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1)$. В данном случае входящий MAP-поток является высокоинтенсивным MAP-потоком [6] и задан представлением $(N\mathbf{D}_0, N\mathbf{D}_1)$, а параметр N определяет его высокую интенсивность (предполагается, что $N \to \infty$). Средняя интенсивность (fundamental rate) такого потока равна $N\lambda$.

Функцию (1) можно рассматривать в качестве аппроксимации для характеристической функции стационарного распределения числа заявок в системе MAP|GI|∞ при достаточно больших значениях параметра N, то есть в указанных условиях в качестве аппроксимации стационарного распределения числа заявок можно использовать нормальное распределение с математическим ожиданием $N\lambda b$ и дисперсией $[N\lambda b + N\kappa\beta]$ (точнее – его дискретный неотрицательный аналог).

В работе [6] также было проведено исследование данной системы с применением асимптотического анализа третьего порядка. В результате исследования была получена функция, которая, как было установлено, дает более точную, по сравнению с (1), аппроксимацию для характеристической функции числа заявок в системе в стационарном режиме.

Аппроксимация отрицательным биномиальным распределением

Отрицательное биномиальное распределение – это распределение дискретной случайной величины ξ, равной количеству неудач, произошедших в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха p до наступления r-го успеха. Для случаев действительных значений параметра r расределение можно переписать с использованием гамма-функции Эйлера в следующем виде:

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\Gamma(r+k)}{k!\Gamma(r)} p^r (1-p)^k .$$

Для использования ОБР в качестве аппроксимации для целей настоящей работы нам необходимо определить его параметры r и p таким образом, чтобы полученное распределение было максимально близко к реальному стационарному распределению числа заявок в системе. Для получения таких значений параметров очень удобно воспользоваться формулами для математического ожидания и дисперсии:

$$\mathrm{M}\{\xi\} = \frac{r(1-p)}{p}, \ \mathrm{D}\{\xi\} = \frac{r(1-p)}{p^2},$$

приравняв их к соответствующим значениям матожидания и дисперсии числа заявок в системе MAP|GI|∞ в стационарном режиме. Однако, к сожалению, указанные параметры получить аналитически не представляется возможным (по крайней мере, дисперсию), поэтому в качестве таких «опорных» значений будем использовать матожидание и дисперсию приведенной в предыдущем разделе гауссовской аппроксимации (известно, что математическое ожидание для реального распределения совпадает с указанным). Таким образом, можно записать следующую систему уравнений относительно неизвестных параметров ОБР r и p:

$$\begin{cases} N\lambda b = \dfrac{r(1-p)}{p}, \\ N\lambda b + N\kappa\beta = \dfrac{r(1-p)}{p^2}, \end{cases}$$

где параметры N, λ, b, κ, β описаны выше. Решая эту систему, получаем следующие выражения для вычисления параметров r и p:

$$r = \frac{\lambda b}{\lambda b + \kappa\beta}, \ p = \frac{N(\lambda b)^2}{\kappa\beta}. \qquad (2)$$

Анализ области применимости ОБР-аппроксимации

Выполним исследование области применимости полученной аппроксимации в виде отрицательного биномиального распределения с параметрами (2). Выражения (2) получены на основе гауссовской аппроксимации, которая, в свою очередь, была получена в асимптотических условиях высокой интенсивности входящего потока, то есть при $N \to \infty$. Таким образом, можно предполагать, что при увеличении параметра N в выражениях (2) ОБР-аппроксимация будет становиться точнее.

Ввиду отсутствия допредельных аналитических выражений для стационарного распределения числа заявок в системе MAP|GI|∞, анализ точности ОБР-аппроксимации будем выполнять путем ее сравнения с эмпирическим рядом распределения, построенным на основе результатов имитационного моделирования соответствующей системы массового обслуживания. Сравнение будем производить на основе вычисления расстояния Колмогорова между функциями распределений:

$$D_q = \sup_x \left| F_q(x) - F(x) \right|.$$

Здесь $F(x)$ – эмпирическая функция распределения; $F_q(x)$ – функция распределения для аппроксимации. Допустимой границей применимости аппроксимации будем считать значения $D_q \le 0.05$. Также выполним аналогичный анализ области применимости и для описанных аппроксимаций второго (гауссовской) и третьего порядка [5, 6].

Пусть система MAP|GI|∞ задана следующими параметрами. ($N\mathbf{D}_0$, $N\mathbf{D}_1$) есть представление входящего высокоинтенсивного MAP-потока [6] с матрицами

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -8,05 & 4,90 & 0,80 \\ 0,80 & -1,10 & 0,07 \\ 2,40 & 1,50 & -28,50 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0,05 & 2,10 & 0,20 \\ 0,00 & 0,20 & 0,03 \\ 3,60 & 1,00 & 20,00 \end{pmatrix}.$$

Длительности обслуживания на каждом приборе имеют гамма-распределение с параметрами $k = 0.5$, $\theta = 2$, где характеристическая функция гамма-распределения записана в виде $(1-\theta it)^{-k}$.

Моделирование выполнено при различных значениях параметра высокой интенсивности N, результаты представлены на рис. 1, а сравнение полученных значений расстояний Колмогорова для разных аппроксимаций приведены в таблице, полужирным шрифтом выделены допустимые значения для расстояния Колмогорова согласно выбранному критерию ($D_q \le 0.05$).

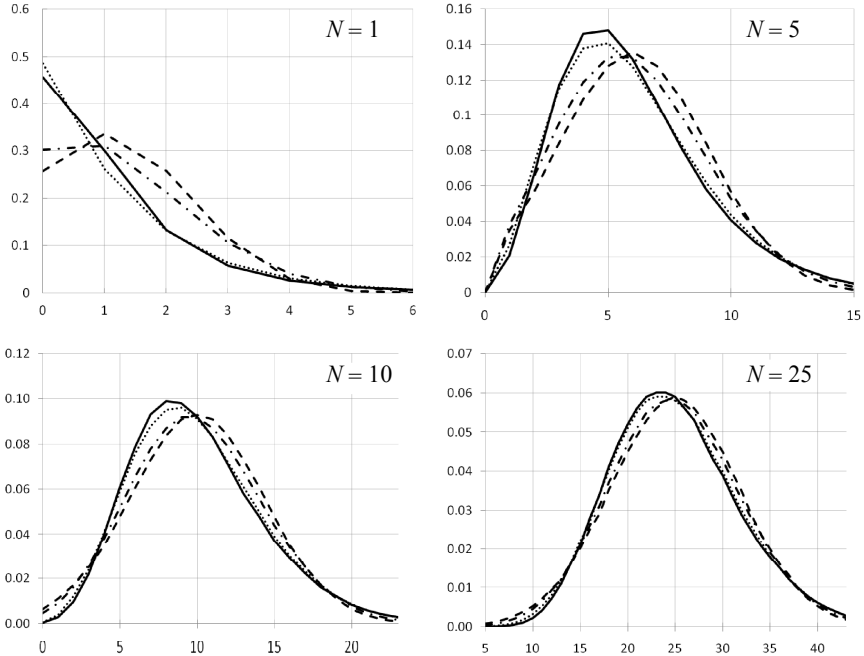

Рис. 1. Сравнение эмпирического ряда распределения (сплошная линия), ОБР-аппроксимации (точечная линия) и асимптотических распределений второго (пунктирная линия) и третьего (штрихпунктирная линия) порядков для стационарного распределения числа заявок системе при различных значениях интенсивности входящего потока N

Расстояние Колмогорова для различных аппроксимаций

Интенсивность входящего потока N	1	5	10	25
Гауссовская аппроксимация (второго порядка)	0.2451	0.0737	**0.0451**	**0.0319**
Аппроксимация третьего порядка	0.1816	0.0531	**0.0319**	**0.0148**
ОБР-аппроксимация	**0.0495**	**0.0159**	**0.0088**	**0.0034**

Как видим, аппроксимация, полученная с помощью ОБР, является более точной, чем аппроксимации второго (гауссовская) и третьего порядков. Получается, что ОБР-аппроксимация применима и при малых значениях параметра N, то есть может быть использована для систем типа MAP|GI|∞ при небольшой интенсивности входящего потока ($N \geq 1$).

Заключение

В работе выполнено исследование применимости отрицательного биномиального распределения в качестве аппроксимации для стационарного распределения числа заявок в системе массового обслуживания MAP|GI|∞. Проведен сравнительный анализ областей применимости различных аппроксимаций и установлено, что ОБР является наилучшей среди них.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fedorova E.* Quasi-geometric and gamma approximation for retrial queueing systems // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 123–136.
2. *Fedorova E.*, *Voytikov K.* Retrial Queue M/G/1 with Impatient Calls Under Heavy Load Condition // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 347–357.
3. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.
4. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
5. *Моисеев А.Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP/GI/∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3. С. 56–65.
6. *Моисеев А.Н.*, *Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 236 с.