



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

**МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.**

Часть 2



ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Анализ СМО ММРР/М/∞ в различных предельных условиях

**О.С. Бобкова, Е.В. Жукова,
С.П. Моисеева, А.С. Шкуркин**

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Огромное множество исследований реальных потоков в различных предметных областях, например телекоммуникационных потоков, потоков в экономических системах, показали неадекватность классических моделей потоков (пуассоновских и рекуррентных) реальным данным. Системы же, в которых наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, конфликты заявок, требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки множества классических систем массового обслуживания.

Исследование таких моделей выполняется, как правило, численными методами, либо имитационным моделированием, со всеми недостатками, вытекающими из этих методов. Альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа для исследования таких систем [1 – 3].

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания (в теории потоков) будем называть исследование уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы (потока) при выполнении некоторого асимптотического (предельного) условия, вид которого будет конкретизирован для различных моделей и поставленных задач исследования.

В работе рассмотрены СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов, характеристики которых исследуются при различных вариантах асимптотических условий: растущего времени обслуживания, большой интенсивности, предельно редких изменений состояний входящего потока в системах с неограниченным числом приборов. Рассмотрим бесконечнолинейную систему массового обслуживания, на вход которой поступает ММРР-поток, определяемый эргодической цепью Маркова $k(t)$ заданной матрицей $\mathbf{Q}$ – её инфинитезимальных характеристик $q_{k_1 k_2}$, набором неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$ и

набором вероятностей $d_{k_1 k_2}$ при всех $k_1 \neq k_2$. Время обслуживания на приборах случайное с экспоненциальной функцией распределения вероятностей с параметром μ . Пусть $i(t)$ – число занятых приборов в системе, занятых в момент времени t .

Так как для рассматриваемой системы процесс $\{k(t), i(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, то для стационарного распределения $P(k, i)$ можно записать систему уравнений Колмогорова

$$-P(k, i)\lambda_k - P(k, i)i\mu + P(k, i-1)\lambda_k + P(k, i+1)(i+1)\mu + \sum_v P(v, i)q_{vk} = 0.$$

Тогда для частичных характеристических функций

$$H(k, i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P(k, i),$$

получим систему уравнений

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial H(k, u)}{\partial u} = (e^{ju} - 1)H(k, u)\lambda_k + \sum_v H(v, u)q_{vk} \{1 + (e^{ju} - 1)d_{vk}\}.$$

Эту систему запишем в виде матричного уравнения

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}(u)}{\partial u} = \mathbf{h}(u) \{ \mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} \}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{r}, \quad (1)$$

где $\mathbf{h}(u) = [h(1, u), \dots, h(K, u)]$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_k]$, $\mathbf{r}$ – вектор стационарного распределения, определяемый системой алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = 0, \\ \mathbf{re} = 1. \end{cases}$$

Дифференцируя по u уравнение (1), нетрудно получить аналитические выражения для начальных моментов числа занятых приборов в системе. Так, первый и второй моменты определяются выражениями

$$M\{i\} = \frac{1}{\mu} \mathbf{r\Lambda e} = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$M\{i^2\} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{r\Lambda} \{ -(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I})^{-1} (2\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{I})\mathbf{e} + \mathbf{e} \} = \kappa_2.$$

Полученные точные характеристики позволяют построить аппроксимации распределений вероятностей числа занятых приборов, подставляя их значения для нахождения параметров известных распределений.

На численных примерах показано, что наиболее удачным является применение отрицательного биномиального распределения

$$\Pi_i = P\{i = k\} = \frac{\Gamma(r+k)}{k! \Gamma(r)} p^r (1-p)^k,$$

для которого параметры r и p определяются выражениями

$$p = \frac{\lambda}{\mu(\kappa_2 - \lambda^2)}, \quad r = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{(\kappa_2 - \lambda^2)\mu - \lambda}.$$

В работе приводятся результаты исследований асимптотических характеристик при предельных условиях: растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменениях состояний управляющей Цепи Маркова (ПЧИС), растущего времени обслуживания и предельно редких изменениях состояний (ПРИС) управляющей цепи Маркова.

Асимптотический анализа системы ММРР | М | ∞ в условии растущей интенсивности и ПЧИС

Под условием предельно частых изменений состояния потока будем понимать такие значения параметров потока, при которых время пребывания управляющей цепи Маркова в каждом состоянии достаточно малое, то есть стремится к нулю.

Длина интервала времени, когда цепь Маркова находится в k -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром: $-q_{kk}$, то есть среднее время пребывания равно $M\{\tau\} = -1/q_{kk}$. Таким образом, условие предельно частых изменений состояния потока можно записать как $q_{kk} \rightarrow \infty$.

Условие растущей интенсивности и ПЧИС определим следующими заменами: $\mathbf{Q} = N\mathbf{Q}_1$ $\mathbf{A} = N\mathbf{A}_1$, где $N \rightarrow \infty$, тогда (1) запишется в виде

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}(u)}{\partial u} = \mathbf{h}(u) \{N\mathbf{Q}_1 + (e^{ju} - 1)N\mathbf{A}_1\}, \mathbf{h}(0) = \mathbf{r}.$$

Для построения гауссовской аппроксимации будем искать решение в виде $\mathbf{h}(u) = \mathbf{h}_2(u) \exp\{ju\lambda/\mu\}$, тогда для $\mathbf{h}_2(u)$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}_2(u)}{\partial u} = \mathbf{h}(u) \{N\mathbf{Q}_1 + (e^{ju} - 1)N\mathbf{A}_1 + \lambda(e^{-ju} - 1)\mathbf{I}\}.$$

Для нахождения асимптотического решения введем замены

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \quad u = \varepsilon w, \quad h_2(u) = f_2(w, \varepsilon) = \Phi(w) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \} + O(\varepsilon^2),$$

где $\mathbf{g}$ – некоторая вектор-строка, а $\Phi(w)$ – скалярная функция;

$$\begin{aligned} j\mu(e^{-j\varepsilon w} - 1)\varepsilon \frac{\partial(\Phi(w) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \})}{\partial w} = \\ = \Phi(w) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \} \{ \mathbf{Q}_1 + (e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{A}_1 + \lambda(e^{-j\varepsilon w} - 1)\mathbf{I} \}. \end{aligned}$$

Отсюда, раскладывая экспоненты в ряд и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях ε , получаем систему алгебраических уравнений для $\mathbf{g}$:

$$\begin{cases} \mathbf{g}\mathbf{Q} + \mathbf{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \\ \mathbf{g}\mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

Решая дифференциальное уравнение для $\Phi(w)$ с начальным условием $\Phi_2(0) = 1$, получаем

$$\Phi_2(w) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \mathbf{f}\mathbf{A}\mathbf{e}) \right\}.$$

В силу обратных замен асимптотическая характеристическая функция принимает следующий вид:

$$\mathbf{h}(u) = \mathbf{h}_2(u) \exp \{ ju \lambda / \mu \} = \exp \left\{ ju \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{(\lambda + \mathbf{f}\mathbf{A}\mathbf{e})}{\mu} \right\}.$$

Асимптотический анализ в условии растущего времени обслуживания

Для асимптотического условия растущего времени обслуживания, то есть при $\mu \rightarrow 0$, получены аналогичные результаты, то есть доказано, что стационарное распределение вероятностей числа приборов, занятых в системе обслуживания, можно аппроксимировать гауссовским распределением с параметрами

$$a = Mi(t) = \lambda / \mu, \quad \sigma^2 = M \{ (i(t) - a)^2 \} = \kappa_2 / \mu.$$

Асимптотический анализ в условии предельно редких изменений состояний управляющей потоком цепи Маркова

Под условием предельно редких изменений состояния потока будем понимать такие значения параметров потока, при которых время пребывания управляющей цепи Маркова в каждом состоянии достаточно большое, то есть стремится к бесконечности. Таким образом, условие предельно частых изменений состояния потока можно записать как $q_{kk} \rightarrow 0$.

Условие ПРИС определим следующими заменами: $\mathbf{Q} = \varepsilon \mathbf{Q}_1$, где ε – некоторый малый положительный параметр, тогда (1) запишется в виде

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}(u)}{\partial u} = \mathbf{h}(u) \{ \varepsilon \mathbf{Q}_1 + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda}_1 \}, \mathbf{h}(0) = \mathbf{r}.$$

Перепишем системы уравнений в виде

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial h(k, u)}{\partial u} = \sum_v h(v, u) q_{vk}^{(1)} \varepsilon + h(k, u) \lambda_k.$$

Выполнив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$h(k, u) = r(k) \exp \left\{ (e^{ju} - 1) \frac{\lambda_k}{\mu} \right\},$$

откуда характеристическая функция числа занятых приборов в системе имеет вид

$$h(u) = \sum_k r(k) \exp \left\{ (e^{ju} - 1) \frac{\lambda_k}{\mu} \right\}.$$

Переходя к производящим функциям, имеем

$$\begin{aligned} M \{ z^i \} &= \sum_k r(k) \exp \left\{ (z - 1) \frac{\lambda_k}{\mu} \right\} = \sum_k r(k) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \left(\frac{\lambda_k}{\mu} \right)^i e^{-\frac{\lambda_k}{\mu}} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \sum_k r(k) \left(\frac{\lambda_k}{\mu} \right)^i e^{-\frac{\lambda_k}{\mu}}. \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическое стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов является взвешенной суммой пуассоновских распределений:

$$\Pi(i) = \sum_k r(k) \frac{\rho_k^i}{i!} e^{-\rho_k}, \quad \rho_k = \lambda_k / \mu.$$

Заключение

В работе выполнено исследование характеристик числа занятых приборов в системе массового обслуживания $MMPR|M|_{\infty}$ при различных асимптотических условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев А.Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания $MAR/GI/\infty$ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3. С. 56–65.
2. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 236 с.
3. *Моисеева С.П., Назаров А.А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.