Всероссийская молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики»

(23–27 апреля 2019 г.)

Сборник тезисов докладов

(Тезисы представлены в авторской редакции)

Быстрое преобразование Фурье

Тронина А.А., Зюзьков В.М.

ТГУ, Томск

e-mail: tronina.anya@gmail.com

Многочлен над кольцом R вещественных чисел степени не выше $n-1$ имеет вид $A(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, и его можно задать одним из двух способов: 1) коэффициентами $a_0, \ldots, a_{n-1}$; 2) значениями $A(x_0), \ldots, A(x_{n-1})$ в любых n различных точках. Второе представление более удобное для умножения – если многочлены задаются своими значениями, то их умножение занимает линейное время. Многочлены обычно даны нам в виде списка коэффициентов, поэтому быстрое умножение будет в три этапа: сначала мы перейдем от коэффициентов к значениям в точках, т.е. вычислим значения многочлена в этих точках (преобразование Фурье). После этого найдем значения произведения в точках и, наконец, произведем интерполяцию, т.е. восстановим коэффициенты произведения по его значениям (обратное преобразование Фурье). Быстрое преобразование Фурье (БПФ) осуществляет первый и третий этапы за время $O(n \log n)$. Ускорение происходит за счет выбора специальных точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$: это комплексные корни n-й степени из единицы [1]. Алгоритм БПФ произвел революцию в цифровой обработке сигналов.

Похожий алгоритм применим к кольцам $\mathbf{Z}_m$ целых чисел по модулю m, где значение m такое, что в кольце существует примитивный корень n-й степени из единицы. В работе был рассмотрен случай, когда n – степень числа 2 и число m равно 2^n [2, стр. 298–304].

Отметим, что в системе *Mathematica* имеется функция *Fourier* для БПФ в кольце **R**. В данной работе реализованы в виде программ на языке *Wolfram* описанные рекурсивные алгоритмы для колец **R** и $\mathbf{Z}_m$, причем для кольца **R** программа работает и для многочленов с символьными коэффициентами, в отличие от функции *Fourier*.

Список литературы

[1] Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2014. – 320 с.

[2] Ахо У., Хопрофт Д., Ульман Д. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М : Издательство «Мир», 1979. – 536 с.