МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Все грани математики и механики»

(23–27 апреля 2019 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2019

Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем

Киреенко С. Г., Гриншпон Я.С.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: svkireenko@mail.ru

Аннотация. Не всякое уравнение или неравенство преобразованиями сводится к уравнению или неравенству, имеющему стандартный алгоритм решения. В таких случаях ключевую роль могут сыграть такие свойства функций, входящих в уравнение или неравенство, как область определения (для уравнений и неравенств вместо термина «область определения» принято употреблять термин «область допустимых значений» или «ОДЗ»), непрерывность, ограниченность, четность, монотонность, периодичность и др.

Применение теоретических знаний о свойствах функций в самых порой неожиданных ситуациях позволяет, с одной стороны, более прочно овладеть материалом по теме «Функции», а с другой стороны, научиться переносить знания из одной тематической области в другую.

Ключевые слова: функция, область определения функции, область значений функции, непрерывность, ограниченность, четность, монотонность, периодичность.

Целью данной работы является формирование компетентностного мышления школьников через использование функциональных методов решения задач.

Отметим, что довольно часто использование свойств функций позволяет качественно выполнять задания высокого уровня сложности ЕГЭ по математике, а также различных математических олимпиад и конкурсов, где встречаются нетрадиционные формулировки и предусматриваются нестандартные подходы к решению.

Литературы, в которой бы данный материал был систематизирован и сопровожден достаточным количеством примеров, практически нет, а в большинстве школьных учебников нет даже и упоминания о применении функциональных методов решения задач.

При выполнении работы были поставлены следующие задачи:

1) Изучить и систематизировать функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем.

2) Научить школьников распознавать и решать задачи, в которых является целесообразным использование свойств функций.

3) Создать банк подобных задач и классифицировать их по методам решения.

4) Выпустить методическое пособие по теме, разработать специальный курс для классов физико-математического профиля.

Рассмотрим ряд примеров на применение некоторых функциональных методов.

I. Уравнения, неравенства и системы имеют свою *область допустимых значений* (ОДЗ), и анализ условий,

определяющих ее, часто является необходимой частью решения. Иногда подобный анализ позволяет существенно сократить количество рассматриваемых случаев и найти решения уравнения (или неравенства) непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ, либо доказать, что решений нет.

Задание 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-2x-3}-\sqrt{3x-x^2}=\sqrt{x-3}.$$

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-2x-3\geq 0, \\ 3x-x^2\geq 0, \\ x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty), \\ x\in[0;3], \\ x\in[3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

$x=3$ — единственное допустимое значение переменной.

Проверим, является ли $x=3$ корнем уравнения:

$$\sqrt{3^2-2\cdot 3-3}-\sqrt{3\cdot 3-3^2}=\sqrt{3-3},$$

$\sqrt{0}-\sqrt{0}=\sqrt{0}$ (верно).

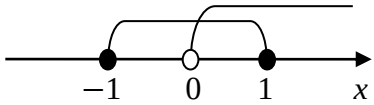
Значит, $x=3$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

Задание 2. Решите неравенство $\log_5 x<\sqrt{1-x^2}$.

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases}$



$x\in(0;1]$.

При $x=1$ получаем: $\log_5 1=\sqrt{1-1}$, т.е. левая часть неравенства равна правой и неравенство не выполняется.

Во всех точках ОДЗ, кроме $x = 1$, верны неравенства $f(x) = \log_5 x < 0$, а $f(x) = \sqrt{1 - x^2} > 0$. Значит, на интервале $(0; 1)$ выполняется неравенство $\log_5 x < \sqrt{1 - x^2}$.

Ответ: $x \in (0; 1)$.

II. При решении уравнений и неравенств свойство *ограниченности* снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль. В этом случае решение основывается на следующих соображениях и утверждениях [1].

Утверждение 1. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Утверждение 2. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Задание. Решите уравнение $2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$.

Решение

ОДЗ: $4x - x^2 - 2 > 0$.

Оценим множители, находящиеся в левой части уравнения.

1) $0 < 2^{-|x-2|} \leq 1$.

2) $4x - x^2 - 2 = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -(x-2)^2 + 2$
$\leq 2;$

3) $\log_2(4x - x^2 - 2) \leq \log_2 2 = 1;$

Из 1) и 3) следует, что исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2^{-|x-2|} = 1, \\ \log_2(4x - x^2 - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-|x-2|} = 2^0, \\ \log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0, \\ 4x - x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 8 - 4 - 2 = 2 \text{ (верно)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

III. Из определения *чётной функции* следует, что если $x = c$ является корнем уравнения $f(x) = a$, где $f(x) -$ четная функция, то и $x = -c$ тоже корень. Следствием этого является то, что уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное количество корней тогда и только тогда, когда $x = 0$ является одним из корней уравнения. Аналогично, если количество корней четно, то $x = 0$ не принадлежит множеству корней.

Чётность может встречаться и в системах уравнений и неравенств. В таких случаях чётность может быть как относительно всех переменных, так и относительно части из них.

Задание [2]. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x\,, \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственную пару решений?

Решение

Данная система уравнений содержит функции четные относительно переменной x. Следовательно, если пара $(x_0; y_0)$ – решение данной системы, то и пара $(-x_0; y_0)$ также является решением.

Следовательно, если решение единственное, то $x = 0$ является единственным возможным значением переменной x.

$$\begin{cases}(|0|+1)a = y + \cos 0,\\ \sin^2 0 + y^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = y + 1,\\ y^2 = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = a - 1,\\ (a-1)^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 0;\\ a = 2.\end{array}\right.$$

При найденных значениях параметра пара (0; y) является одним из решений. Проверим, будет ли оно единственным.

1) Пусть $a = 0$, тогда

$$\begin{cases}y + \cos x = 0,\\ \sin^2 x + y^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -\cos x,\\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = -\cos x,\\ x \in \mathbb{R}.\end{cases}$$

Получили бесконечное количество решений, что противоречит условию задачи.

2) Пусть $a = 2$, тогда

$$\begin{cases}2(|x|+1) = y + \cos x;\\ \sin^2 x + y^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2(|x|+1) - \cos x,\\ \sin^2 x + (2(|x|+1) - \cos x)^2 = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = 2(|x|+1) - \cos x,\\ 4(|x|+1)^2 = 4(|x|+1)\cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2(|x|+1) - \cos x,\\ |x| + 1 = \cos x.\end{cases}$$

В левой части второго уравнения $|x| + 1 \geq 1$, а в правой – $\cos x \leq 1$.

Значит, уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда верна система:

$$\begin{cases} |x| + 1 = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 - \text{единственное решение.}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 2(0 + 1) - \cos 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким образом, пара $(0; 1)$ является единственным решением данной системы при $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

IV. При использовании *монотонности функций* часто применяется теорема о корне и её следствия [3]:

Теорема о корне. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке A, число b – любое из значений, принимаемых $f(x)$ на этом промежутке, тогда уравнение $f(x) = b$ имеет единственный корень на промежутке A.

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке A, тогда уравнение $f(x) = b$ имеет не более 1 корня на промежутке A.

Следствие 2. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке A, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Следствие 3. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке A, то уравнение $f(x_1) = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in A$, может иметь решение только при $x_1 = x_2$.

Задание 1. Решить уравнение $\log_2(|x-1| + 1) + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 2$.

Решение

Каждая из двух функций $f(x) = \log_2(|x-1| + 1)$ и $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ убывает при $x \leq 1$ и возрастает при $x \geq 1$, следовательно, уравнение $f(x) + g(x) = 2$ имеет не более двух корней, причем $x_1 \in (-\infty; 1], x_2 \in [1; \infty)$, где x_1, x_2 - возможные корни уравнения.

$x = 0$ — корень уравнения, так как $\log_2 2 + \sqrt[3]{1} = 2$,

$x = 2$ — корень уравнения, так как $\log_2 2 + \sqrt[3]{1} = 2$.

Как доказано выше, уравнение имеет не более двух корней.

Ответ: $x \in \{0; 2\}$

Задание 2 [4]. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $|x+1| + 2|x+a| > 3 - 2x$ выполняется для любого x.

Решение. Неравенство преобразуется к виду

$f(x) > 3$, где $f(x) = |x+1| + 2|x+a| + 2x$.

Точки (-1) и $(-a)$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при любом раскрытии модуля). На левом интервале $(x \leq -1,\ x \leq -a)$ функция принимает вид $f(x) = -x - 2a - 1$ и является убывающей. На правом промежутке $(x \geq -1,\ x \geq$

$-a)$ функция имеет вид $f(x) = 5x + 2a + 1$ и является возрастающей. Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей прямых. Точки (-1) и $(-a)$ являются точками излома, поэтому в одной из этих точек функция принимает наименьшее значение.

Значит, все значения функции $f(x)$ больше 3 тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} f(-1) > 3, \\ f(-a) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|-1+a| - 2 > 3, \\ |-a+1| - 2a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-1| > \dfrac{a}{2}, \\ |a-1| > 2a+3 \end{cases} \Leftrightarrow a < -1{,}5.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1{,}5)$.

Без использования свойств функций решение подобных заданий может оказаться весьма затруднительным (сложным технически), а порой и невозможным.

Список литературы

[1] Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справ. Пособие по математике. Мн.: ООО «Асар». - 2002.

[2] Диагностические работы и тексты пробных ЕГЭ по математике 2015-2018 гг. // http://alexlarin.net/.

[3] Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Математика: решение задач: 11 кл. М.: Просвещение. - 2007.

[4] Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ 2012. Функция и параметр // http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.html.