НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Оценивание параметра непродлевающегося мёртвого времени случайной длительности в обобщённом асинхронном потоке событий

Л.А. Нежельская, А.А. Першина

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В связи с интенсивным развитием сетей связи модель простейшего потока событий перестала быть адекватной реальным информационным потокам. Требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков [1, 2] в качестве математической модели реальных потоков событий в компьютерных сетях.

Многие авторы рассматривают математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие создает период мёртвого времени [3], в течение которого другие события потока становятся ненаблюдаемыми. При этом, чтобы оценить потери потока, необходимо оценить значение его длительности. Период ненаблюдаемости потока может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным. Задачи по оценке параметров и состояний потока событий в условиях мёртвого времени фиксированной длительности, рассматривались в работах [4, 5].

Достаточно открытым остается вопрос изучения потоков событий, когда мёртвое время является случайной величиной. Здесь отметим работу [6], в которой решается задача оценки параметров асинхронного потока событий в условиях случайного мертвого времени, и работу [7], в которой находятся формулы для начальных моментов общего периода ненаблюдаемости в пуассоновском потоке событий при продлевающемся случайном мёртвом времени. В настоящей статье рассматривается обобщённый асинхронный поток событий (обобщённый MMPP-поток) в условиях непродлевающегося случайного мёртвого времени, распределённого по равномерному закону. Методом моментов находится параметр равномерного распределения, приводятся результаты статистического эксперимента.

Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i, $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p $(0 \leq p \leq 1)$ дополнительное событие во втором состоянии. Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q $(0 \leq q \leq 1)$ дополнительное событие в первом состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мёртвого времени случайной длительности, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мёртвого времени (периода ненаблюдаемости), недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мёртвое время). Принимается, что случайная длительность мёртвого времени распределена по равномерному закону с плотностью $p(T) = 1/T^*$, $0 \leq T \leq T^*$.

Рассматривается стационарный режим функционирования ненаблюдаемого потока событий (переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0 , t]$, пренебрегаем). Необходимо в момент времени t на основании выборки $t_1, t_2,\ldots, t_n$ наблюдённых моментов наступления событий оценить методом моментов T^* (ММ-оценка).

ММ-оценка параметра T^*

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2,\ldots$, значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Плотность вероятности значений длительности k-го интервала есть $p_{T*}(\tau_k) = p_{T*}(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k, т.е. момент наступления события

есть $\tau = 0$. В [4] получено выражение для плотности $p(\tau|T)$, когда длительность мёртвого времени является детерминированной величиной:

$$p(\tau|T)=0\,,\ 0\le\tau<T\,;\ p(\tau|T)=\gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)}+[1-\gamma(T)]z_2e^{-z_2(\tau-T)}\,,\ \tau\ge T;$$

$$\gamma(T)=[z_2-(\lambda_1+p\alpha_1)\pi_1(T)-(\lambda_2+q\alpha_2)\pi_2(T)]/(z_2-z_1)\,; \qquad (1)$$

$$\pi_1(T)=\pi_1+[\pi_2-\pi_2(0\,|\,T)]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\,,\ \pi_2(T)=1-\pi_1(T)\,;$$

$$\pi_2(0\,|\,T)=(p_{12}+\delta\pi_2[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}])/(1-\delta e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T})\,,$$

$$\delta=(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)/z_1z_2\,;$$

$$\pi_1=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)\,,\ \pi_2=1-\pi_1\,;\ p_{12}=\alpha_1(\lambda_2+p\alpha_2)/z_1z_2\,;$$

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2)\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right].$$

Тогда плотность $p_{T*}(\tau)$ примет вид (для упрощения индекс T^* опустим):

$$p(\tau)=\int\limits_{(T)}p(T)p(\tau\,|\,T)dT=\begin{cases}p_1(\tau)=\int\limits_0^{\tau}p(T)p(\tau\,|\,T)dT,0\le\tau<T^*;\\ p_2(\tau)=\int\limits_0^{T^*}p(T)p(\tau\,|\,T)dT,\tau\ge T^*.\end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя в (2) выражение (1), учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, находим

$$p_1(\tau)=A_1+A_2(\tau)e^{-z_1\tau}+A_3(\tau)e^{-z_2\tau}\,,\ 0\le\tau<T^*; \qquad (3)$$

$$p_2(\tau)=B_1(\tau)e^{-z_1\tau}+B_2(\tau)e^{-z_2\tau}\,,\ \tau\ge T^*; \qquad (4)$$

$$A_1=1/T^*;\ A_2(\tau)=-c[z_2(\alpha_1+\alpha_2)-a+b\cdot f_1(\tau)/z_2(\alpha_1+\alpha_2)];$$

$$A_3(\tau)=c[z_1(\alpha_1+\alpha_2)-a+b\cdot f_2(\tau)/z_1(\alpha_1+\alpha_2)];$$

$$B_1=-c\{[z_2(\alpha_1+\alpha_2)-a](1-e^{z_1T^*})+b\cdot f_1(T^*)/z_2(\alpha_1+\alpha_2)\}\,;$$

$$B_2=c\{[z_1(\alpha_1+\alpha_2)-a](1-e^{z_2T^*})+b\cdot f_2(T^*)/z_1(\alpha_1+\alpha_2)\}\,;$$

$$a=\alpha_1(\lambda_2+q\alpha_2)+\alpha_2(\lambda_1+p\alpha_1)\,;\ c=1/T^*(z_2-z_1)(\alpha_1+\alpha_2)\,;$$

$$b = \alpha_1\alpha_2(\lambda_1 + p\alpha_1 - \lambda_2 - q\alpha_2)(\lambda_1 + q\alpha_1 - \lambda_2 - p\alpha_2)\ ;$$

$$f_1(y) = \int\limits_{e^{-(\alpha_1+\alpha_2)y}}^{1} \frac{x^{-\frac{z_1}{\alpha_1+\alpha_2}}dx}{1-\delta x};\ f_2(y) = \int\limits_{e^{-(\alpha_1+\alpha_2)y}}^{1} \frac{x^{-\frac{z_2}{\alpha_1+\alpha_2}}dx}{1-\delta x},\ y = \tau,\ y = T^*.$$

Получим оценку T^* методом моментов [8]. Математическое ожидание длительности $\boldsymbol{\tau}$ интервала между соседними событиями есть

$$M(\boldsymbol{\tau}\,|\,T^*) = \int\limits_0^{\infty} \tau p(\tau)d\tau = \int\limits_0^{T^*} \tau p_1(\tau)d\tau + \int\limits_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau)d\tau\,. \tag{5}$$

Подставляя в (5) выражения (3), (4), получаем

$$M(\boldsymbol{\tau}\,|\,T^*) = a_1 + (T^*/2) - (a_2/z_2T^*)\int\limits_0^{T^*} \tau f_1(\tau)e^{-z_1\tau}d\tau -$$

$$-(a_2/z_1z_2)[1 + (1/z_1T^*)]e^{-z_1T^*}f_1(T^*) + (a_2/z_1T^*)\int\limits_0^{T^*} \tau f_2(\tau)e^{-z_2\tau}d\tau + \tag{6}$$

$$+(a_2/z_1z_2)[1 + (1/z_2T^*)]e^{-z_2T^*}f_2(T^*),$$

$$a_1 = [\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 - (p+q)\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1+\alpha_2)^2]/z_1z_2(\alpha_1+\alpha_2)\,,$$

$$a_2 = b/(z_2 - z_1)(\alpha_1+\alpha_2)^2\,,$$

где $f_i(\tau), f_i(T^*)$, $i = 1, 2$, определены в (3), (4); z_1, z_2 – в (1).

Подчеркнём, что при $T^* = 0$ из (6) следует

$$M(\tau|T^*) = (\alpha_1 + \alpha_2)/z_1z_2(1-\delta) > 0,$$

что совпадает с формулой, приведённой в [9].

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1, \ldots,\ \tau_n = t_{n+1} - t_n\ \ \tau_1 > 0, \ldots, \tau_n > 0 -$ последовательность измеренных в течение полуинтервала наблюдения (0, t] значений длительностей интервалов между соседними событиями. Тогда статистика $C_1 = (1/n)\sum_{k=1}^{n}\tau_k$ есть оценка $\hat{M}(\boldsymbol{\tau})$ математического ожидания (6). В этом случае уравнение моментов для T^* выпишется в виде $M(\boldsymbol{\tau}\,|\,T^*) = C_1$. Можно показать, что уравнение моментов имеет единственное решение.

Результаты статистических экспериментов

С целью установления качества получаемых оценок параметра T^* методом моментов поставлен статистический эксперимент.

Отдельный j-й эксперимент ($j = 1,\ldots,N$) заключается в следующем:

1) При заданных значениях λ_i, α_i, $i = 1, 2$, p, q, T^*, Tm осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока; выходом имитационной модели является последовательность значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$;

2) численно решается уравнение $M(\boldsymbol{\tau} \mid T^*) = C_1$, т.е. находится оценка $\hat{T}_j^*$;

3) осуществляется повторение N раз шагов 1, 2. Результатом алгоритма является выборка ($\hat{T}_1^*, \ldots, \hat{T}_N^*$), на основании которой вычисляются

$$\hat{M}(\hat{\boldsymbol{T}}^*) = (1/N)\sum_{j=1}^{N} \hat{T}_j^*,$$

$$\hat{V}(\hat{\boldsymbol{T}}^*) = (1/N)\sum_{j=1}^{N} [\hat{T}_j^* - T^*]^2.$$

T^* – известное из имитационной модели значение параметра.

При проведении статистического эксперимента выбраны следующие параметры имитационной модели $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.5$, $p = 0.5$, $q = 0.5$, $T^* = 1$. Ниже приведены результаты эксперимента ($N = 100$).

Результаты статистического эксперимента

Tm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{M}(\hat{\boldsymbol{T}}^*)$	0.9985	1.0029	0.9981	0.9884	0.9940	0.9897	0.9963	0.9907	0.9951	0.9973
$\hat{V}(\hat{\boldsymbol{T}}^*)$	0.0089	0.0040	0.0026	0.0017	0.0019	0.0015	0.0012	0.0011	0.0008	0.0009

Анализ численных результатов показывает, что в смысле введённого критерия (выборочная вариация оценки $\hat{\boldsymbol{T}}^*$) стационарный режим устанавливается при $Tm \geq 500$ ед. времени.

Заключение

По результатам проведённого исследования можно сделать следующие выводы: 1) аналитически показано, что уравнение моментов имеет единственное решение; 2) метод моментов обеспечивает приемлемые оценки параметра T^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г.П.*, *Кокотушкин В.А.*, *Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи // Изв.АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. *Neuts M.F.* A versatile Markovian point process // J. Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764 –779.
3. *Апанасович В.В.*, *Коляда А.А.*, *Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Университетское, 1988. 256 с.
4. *Горцев А.М.*, *Леонова М.А.*, *Нежельская Л.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мёртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
5. *Nezhel'skaya*, *L.A.* Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Sciences. 2014. V. 487. P. 342–350.
6. *Васильева Л.А.* Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мёртвого времени // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 9–13.
7. *Глухова Е.В.*, *Терпугов А.Ф.* Оценка интенсивности пуассоновского потока событий при наличии продлевающегося мёртвого времени // Изв. вузов. Физика. 1995. Т. 38. № 3. С. 22–31.
8. *Шуленин В.П.* Математическая статистика. Ч. 1. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.
9. *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.* Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 59–65.