ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 60, № 12 ФИЗИКА 2017

УДК 530.12

А.В. ШАПОВАЛОВ[1,2]

ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА – ПЛАНКА С КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫМ КВАЗИЛОКАЛЬНЫМ ДРЕЙФОМ*

Уравнение Фоккера – Планка в одномерном пространстве-времени с квадратично-нелинейным нелокальным дрейфом в квазилокальном приближении с помощью скейлинга координат и времени редуцируется к уравнению в частных производных с третьей производной по пространственной переменной. Приведены определяющие уравнения для симметрий редуцированного уравнения и найдены лиевские симметрии. Рассмотрено инвариантно-групповое решение вида бегущей волны. В рамках итерационного метода Адомяна получены первые итерации приближенного решения задачи Коши. Найдены два иллюстративных примера точных решений.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение Фоккера – Планка, квазилокальное приближение, лиевские симметрии, бегущие волны, метод разложения Адомяна, точные решения.*

Введение

В неравновесной статистической механике сложных систем развиваются феноменологические подходы, основанные на нелинейных обобщениях известного в теории броуновского движения линейного уравнения Фоккера – Планка (ФП) [1] и описывающие ансамбли взаимодействующих частиц (подсистем) с различными потенциалами взаимодействия. Частицы ансамбля находятся в окружающей среде и испытывают случайные воздействия со стороны хаотически движущихся частиц окружающей среды (термостата).

Нелинейным уравнениям ФП посвящена обширная библиография (см., например, [2–6] и цитированную там литературу). В одномерном случае нелинейное уравнение ФП, описывающее эволюцию во времени t одночастичной функции распределения $p(x,t)$ переменной x, характеризующей состояние отдельной частицы (подсистемы) ансамбля, можно записать в виде [2]

$$\partial_t p(x,t) = -\partial_x D_1(x,t,p)p(x,t) + \partial_{xx} D_2(x,t,p)p(x,t)\,. \tag{1}$$

Здесь используются обозначения для частных производных: $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$; $D_1(x,t,p)$ и $D_2(x,t,p)$ – коэффициенты дрейфа и диффузии соответственно, зависящие от p. Нелинейность в уравнении (1) отражает влияние на выделенную частицу (подсистему) остальных частиц ансамбля (подсистем) в терминах среднего поля [2, 3]. В случае дальнодействия в ансамбле частиц системы нелинейное уравнение ФП становится нелокальным. В качестве примера приведем нелокальное уравнение ФП для систем с самоорганизацией [2, 3]

$$\partial_t p(x,t) = -\partial_x D_1(x,t,m)p(x,t) + \partial_{xx} D_2(x,t,m)p(x,t)\,,$$

с коэффициентами D_1, D_2, зависящими от среднего $m = \langle x \rangle$ по распределению $p(x,t)$. В более общем случае коэффициенты D_1, D_2 зависят от взвешенного среднего

$$m = m(x,t,p) = \int_{-\infty}^{\infty} b(x,x')p(x',t)dx' \tag{2}$$

с весовой функцией $b(x,x')$. Все встречающиеся функции предполагаются гладкими, такими, что интегралы вида (2) существуют.

В [7, 8] для одномерного уравнения ФП с квадратичным нелокальным дрейфом

$$\partial_t p(x,t) = -\partial_x \left[k_1(t) + k_2(t)m(x,t,p)\right]p(x,t) + D\partial_{xx} p(x,t)\,, \tag{3}$$

* Работа частично поддержана Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров и Программой повышения конкурентоспособности ТПУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

где $k_1(t)$, $k_2(t)$ – заданные гладкие функции времени t, а D – постоянный коэффициент диффузии, строились приближенные решения в квазиклассическом по малому параметру D приближении для функции $b(x,x')$ общего вида.

В данной работе рассматривается задача интегрирования уравнения (3) в квазилокальном приближении, т.е. при условии, что функция $b(x,x')$ имеет вид

$$b(x,x') = \frac{1}{2\varepsilon}\begin{cases} 1, & x' \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon], \\ 0, & x' \notin [x-\varepsilon, x+\varepsilon], \end{cases} \tag{4}$$

где ε – малый параметр, характеризующий размер области локализации взаимодействия.

Квазилокальное приближение (4) представляет в упрощенной форме дальнодействие между частицами рассматриваемого ансамбля как среднее действие на выделенную частицу, находящуюся в точке x, других частиц ансамбля, находящихся на отрезке $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Функция $b(x,x')$ вида (4) с точностью до множителя $(2\varepsilon)^{-1}$ представляет собой индикаторную функцию отрезка $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

В п. 1 уравнение ФП (3), (4) с учетом малости параметра ε и преобразований переменных x, t приводится к уравнению с локальной нелинейностью и частными производными высшего порядка. С помощью введения потенциальной функции для $p(x,t)$ и перехода к «быстрым переменным» полученное уравнение редуцируется к уравнению в частных производных третьего порядка по пространственной переменной с точностью $o(\varepsilon^2)$. Далее рассматриваются методы построения решений для редуцированного уравнения.

В п. 2 к полученному редуцированному уравнению применяется симметрийный анализ дифференциальных уравнений [9–12]. Записывается определяющее уравнение для симметрий и находятся лиевские симметрии. В контексте лиевских симметрий рассматривается инвариантно-групповое решение вида бегущей волны.

В п. 3 к редуцированному уравнению применяется итерационный метод разложения Адомяна, позволяющий строить приближенные решения задачи Коши в виде итерационного ряда. Найдены выражения для первых членов ряда для начальной функции общего вида. Для двух начальных функций специального вида найдены примеры точных решений.

1. Редукция квазилокального уравнения Фоккера – Планка

Запишем разложение уравнения (2), (3) с функцией $b(x,x')$ вида (4) в степенной ряд по ε с точностью $o(\varepsilon^2)$. Разложим в ряд по ε интеграл:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p(x',t)\,dx' = p(x,t)\cdot 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}\partial_{xx}p(x,t) + o(\varepsilon^3). \tag{5}$$

Подставив (2), (4), (5) в (3), получим с точностью $o(\varepsilon^2)$ уравнение

$$\partial_t p(x,t) = -k_1(t)\partial_x p(x,t) - k_2(t)\partial_x\left[p^2(x,t) + \frac{\varepsilon^2}{6}p(x,t)\partial_{xx}p(x,t)\right] + D\partial_{xx}p(x,t). \tag{6}$$

Преобразованием координат по формулам

$$\tau = t,\ \xi = x - r(t),$$

где функция $r(t)$ выбирается из условия $dr(t)/dt = k_1(t)$, приведем уравнение (6) к виду

$$-\partial_\tau \tilde{p}(\xi,\tau) - k_2(\tau)\partial_\xi\left(\tilde{p}^2(\xi,\tau) + \frac{\varepsilon^2}{6}\tilde{p}(\xi,\tau)\partial_{\xi\xi}\tilde{p}(\xi,\tau)\right) + D\partial_{\xi\xi}\tilde{p}(\xi,\tau) = 0. \tag{7}$$

Здесь обозначено: $p(x,t) = p(\xi + r(\tau),\tau) = \tilde{p}(\xi,\tau)$.

Введем потенциал $w(\xi,\tau)$ для $\tilde{p}(\xi,\tau)$, положив $w(\xi,\tau) = \partial_\xi^{-1}\tilde{p}(\xi,\tau)$. Подставив $\tilde{p}(\xi,\tau) = \partial_\xi w(\xi,\tau)$ в (7) и проинтегрировав полученное уравнение по ξ, получим

$$-w_\tau(\xi,\tau)-k_2(\tau)\left(w_\xi^2(\xi,\tau)+\frac{\varepsilon^2}{6}w_\xi(\xi,\tau)w_{\xi\xi\xi}(\xi,\tau)\right)+Dw_{\xi\xi}(\xi,\tau)+\varphi(\tau)=0\,, \tag{8}$$

где $\varphi(\tau)$ – произвольная функция, возникающая при интегрировании. Здесь и далее используются следующе обозначения для частных производных в виде нижних индексов: $w_\tau(\xi,\tau)=\partial_\tau w(\xi,\tau)$, $w_\xi(\xi,\tau)=\partial_\xi w(\xi,\tau)$, $w_{\xi\xi}(\xi,\tau)=\partial_{\xi\xi}w(\xi,\tau)$, и т.д. Переопределением потенциала: $w(\xi,\tau)\to w(\xi,\tau)+$ $+\int\varphi(\tau)d\tau$ функцию $\varphi(\tau)$ можно исключить из уравнения без потери общности.

Перейдем в уравнении (8) от переменных (ξ,τ) к «быстрым переменным» (x',t') с помощью скейлингового преобразования по формулам $t'=\varepsilon^{-2}\tau$, $x'=\varepsilon^{-1}\xi$, тогда $\partial_\tau=\varepsilon^{-2}\partial_{t'}$, $\partial_\xi=\varepsilon^{-1}\partial_{x'}$. Введя обозначения $u(x',t')=w(\varepsilon x',\varepsilon^2 t')$, $b(t')=-k_2(\varepsilon^2 t')/6$, приведем уравнение (8) к следующему виду:

$$-u_{t'}(x',t')+Du_{x'x'}(x',t')+b(t')\left(6u_{x'}^2(x',t')+u_{x'}(x',t')u_{x'x'x'}(x',t')\right)=0\,. \tag{9}$$

Из (9) видно, что переходом к переменным (x',t') параметр ε исключается из уравнения (8). Будем называть уравнение (9) редуцированным уравнением нелокального уравнения ФП (3), (2), (4).

Отметим, что учет высших членов разложения в (5) и соответственно в квазилокальном уравнении ФП (3), (4) по изложенной выше схеме добавляет в редуцированное уравнение (9) члены с высшими производными четного порядка, причем параметр ε по-прежнему не входит в результирующее уравнение.

Дальнейшей целью данной работы является задача интегрирования (точного и приближенного) редуцированного уравнения (9). Для упрощения обозначений штрих у переменных (x',t') в уравнении (9) будем опускать, перейдя к обозначениям $x'\to x$, $t'\to t$.

2. Лиевские симметрии

Приведем минимально необходимые понятия и определения, поясняющие нахождение симметрий уравнения (9) на основе определяющих уравнений.

Подробное изложение теории группового (симметрийного) анализа дифференциальных уравнений можно найти в многочисленных публикациях (например, [9–12]). Далее будем следовать работам [9–12].

Введем пространство струй $J^{(r)}$ порядка r, $r\in Z_+$ – множество целых положительных чисел. Точка z_r пространства $J^{(r)}$, по определению, задается набором вещественных независимых переменных $t,x,u,u_1,u_2,\dots,u_r\in R^1$, $z_r=(t,x,u,u_1,u_2,\dots,u_r)\in J^{(r)}$. Естественным образом определяется вложение пространства $J^{(r)}$ в $J^{(r+m)}$, $r,m\in Z_+$: точка z_r пространства $J^{(r)}$ рассматривается как точка пространства $J^{(r+m)}$, если дополнить недостающие координаты нулями, т.е. $z_r=(t,x,u,u_1,u_2,\dots,u_r,\underbrace{0,0,\dots,0}_{m})\in J^{(r+m)}$. Введем также расширенное пространство $J^{(r,1)}$, $z_{r,1}=(t,x,u,u_{(1)},u_1,u_2,\dots,u_r)\in J^{(r,1)}$, где $u_{(1)}$ – вещественная переменная, $u_{(1)}\in R^1$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{F}$ гладких функций $f(z_r)=f(t,x,u,u_1,u_2,\dots,u_r)$ на пространстве струй $J^{(r)}$. Введем оператор полного дифференцирования функций $f(z_r)$:

$$\hat{D}_x=\frac{\partial}{\partial x}+u_1\frac{\partial}{\partial u}+u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+u_3\frac{\partial}{\partial u_2}+\dots \tag{10}$$

Непосредственно проверяется, что $u_1=\hat{D}_x u$, $u_2=\hat{D}_x u_1$, … $u_{i+1}=\hat{D}_x u_i$.

Запишем уравнение (9) в следующем виде:

$$-u_t(x,t)+\hat{H}(u)(x,t)=0\,, \tag{11}$$

где оператор $\hat{H}$ определяется выражением

$$\hat{H}(u)(x,t)=Du_{xx}(x,t)+b(t)\left(6u_x^2(x,t)+u_x(x,t)u_{xxx}(x,t)\right). \tag{12}$$

Дифференциальное уравнение (11) естественным образом представляется в геометрических терминах как некоторое многообразие в пространстве $J^{(r,1)}$. Связь точки пространства $J^{(r)}$ с величинами, входящими в дифференциальное уравнение, определяется следующим условием: если переменную u выбрать как функцию, зависящую от независимых переменных t и x, т.е. $u = u(x,t)$, то переменные $u_{(1)}$ и u_i, $i = 1, \dots, r$, становятся производными:

$$u_{(1)} = u_t(x,t), \quad u_1 = u_x(x,t), \quad u_2 = u_{xx}(x,t), \dots, \quad u_r = u_{\underbrace{xx\dots x}_{r}}(x,t). \tag{13}$$

Оператору уравнения (11) сопоставим функцию $f(z)$ на $J^{(r,1)}$, положив

$$f(z_{r,1}) = -u_{(1)} + H(u), \tag{14}$$

где

$$H(u) = Du_2 + b(t)(6u_1^2 + u_1 u_3). \tag{15}$$

Функция $f(z_{r,1})$ вида (14) является символом оператора уравнения (11): подставив (13) в (14) и положив $f(t,x,u(x,t),u_t(x,t),u_x(x,t),u_{xx}(x,t),u_{xxx}(x,t)) = 0$, получим уравнение (11). В пространстве $J^{(r,1)}$ уравнению (11) соответствует подмногообразие, задаваемое условием

$$f(z_{r,1}) = -u_{(1)} + H(u) = 0. \tag{16}$$

Отметим, что $H(u)$ является символом оператора $\hat{H}$ вида (12).

Симметрия уравнения (11) представляет собой вещественную функцию $\sigma(z_{r,1}) = \sigma(t,x,u,u_{(1)},u_1,u_2,\dots)$ на $J^{(r,1)}$, с помощью которой можно построить генератор группы Ли преобразований пространства струй, оставляющих инвариантным многообразие (16). Симметрии определены с точностью до функции $f(z_{r,1})$, задающей уравнение. Поэтому, не уменьшая общности, можно исключить переменную $u_{(1)}$ из $\sigma(t,x,u,u_{(1)},u_1,u_2,\dots)$ с помощью (16) и рассматривать только симметрии, являющиеся функциями, заданными на $J^{(r)}$, т.е. $\sigma = \sigma(t,x,u,u_1,u_2,\dots,u_r)$. Определяющее уравнения для таких симметрий имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sum_{k=0} \hat{D}_x^{\,k}(H)\frac{\partial\sigma}{\partial u_k} - \sum_{k=0} \hat{D}_x^{\,k}(\sigma)\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0, \tag{17}$$

где $H = H(u)$ дается выражением (15).

С помощью симметрий можно находить семейства частных решений уравнения, например инвариантно-групповые решения. Если по генератору группы удается в явном виде построить соответствующее преобразование группы Ли, то каждому такому преобразованию отвечает оператор симметрии уравнения (11), переводящий любое решение уравнения в некоторое его решение. Нахождение симметрий и операторов симметрии уравнения является одной из основных задач симметрийного анализа.

Симметрии, по которым в явном виде находятся преобразования группы Ли, называют лиевскими. К таковым относятся симметрии, зависящие от переменных $t,x,u,u_{(1)},u_1$, т.е. $\sigma(t,x,u,u_{(1)},u_1)$. Чтобы найти такие симметрии из определяющего уравнения (17), следует искать решения этого уравнения, включающие зависимость от переменной u_3, $\sigma = \sigma(t,x,u,u_1,u_2,u_3)$. В таком решении следует заменить u_3 из уравнений (15), (16). Отметим, что, как правило, зависимость от u_2 при подстановке u_3 также исчезает. В результате получаются лиевские симметрии $\sigma = \sigma(t,x,u,u_{(1)},u_1)$.

Нахождение $\sigma = \sigma(t,x,u,u_1,u_2,u_3)$ из уравнения (17) приводит к следующему результату:

$$\sigma = \alpha H(u) + \beta u_1 + \gamma u; \tag{18}$$

$$\alpha \dot{b}(t) = \gamma b(t). \tag{19}$$

Здесь α, β, γ – постоянные; $H(u)$ имеет вид (15); точкой обозначена производная по t, $\dot{b}(t) = db(t)/dt$.

Уравнение (17) линейно относительно симметрий σ, поэтому множество симметрий образует линейное пространство: если σ_1, σ_2 – два решения уравнения (17), то их линейная комбинация $c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2$ с произвольными константами c_1, c_2 также будет симметрией – решением уравнения (17).

Рассмотрим линейно независимые лиевские симметрии для различных функций $b(t)$, следующих из (18), (19):

1. Пусть $b(t)$ – произвольная функция t, $(\dot{b}(t) \neq 0)$, тогда из (19) следует $\alpha = \gamma = 0$ и соответственно из (18) имеем $\sigma = u_1$. Данной симметрии, согласно [9–12], соответствует генератор $X = \partial_x$ группы Ли преобразований независимых и зависимой переменных (t,x,u), оставляющих инвариантным уравнение (11). Группа преобразований от переменных (t,x,u) к переменным $(\overline{t},\overline{x},\overline{u})$ есть группа трансляций по x: $\overline{t} = t$, $\overline{x} = x + a$, $\overline{u} = u$, a – групповой параметр. Инвариантно-групповое решение есть $u(t,x) = u(t)$ – однородное решение.

2. Пусть $\dot{b}(t) \neq 0$, $\alpha \neq 0$, тогда из (19) находим $b(t) = b_0 \exp(\gamma t/\alpha)$, b_0 – постоянная. В данном случае постоянные b_0, α, γ входят в (12) и являются заданными параметрами уравнения. Выражение (18) представляет собой линейную комбинацию $\sigma_1 = \alpha H(u) + \gamma u$ и $\sigma_2 = u_1$ с произвольной постоянной β. Подставив в σ_1 вместо $H(u)$ переменную $u_{(1)}$ из (16), получим симметрию первого порядка $\sigma_1 = \alpha u_{(1)} + \gamma u$. Симметрии σ_1 и σ_2 образуют базис линейного пространства лиевских симметрий.

3. Пусть $\dot{b}(t) = 0$ в (19), т.е. b – произвольная $(\neq 0)$ постоянная, тогда $\gamma = 0$ и $\sigma = \alpha H(u) + \beta u_1$, где α, β – произвольные постоянные. Подставив вместо $H(u)$ переменную $u_{(1)}$ из (16), получим симметрию первого порядка $\sigma = \alpha u_{(1)} + \beta u_1$, представляющую собой линейную комбинацию $\sigma_1 = u_{(1)}$ и $\sigma_2 = u_1$, которые образуют базис линейного пространства лиевских симметрий в данном случае. Симметрии σ_2, как и в предыдущем случае, отвечает преобразование сдвига по x. Аналогично, симметрии $\sigma_1 = u_{(1)}$ отвечает преобразование сдвига по времени t, соответственно инвариантно-групповым решением будет $u(t,x) = u(x)$ – стационарное решение. Если взять линейную комбинацию $\sigma = u_{(1)} + cu_1$, где c – постоянная, то данной симметрии отвечает генератор $X = \partial_t + c\partial_x$, а соответствующее инвариантно-групповое решение будет иметь вид бегущей волны:

$$u(x,t) = u(\eta)\ ,\ \eta = x - ct\ . \tag{20}$$

Как видно из (18), (19), лиевские симметрии уравнения (11), (12) составляют весьма узкий класс симметрий. Из соответствующих инвариантно-групповых решений определенный интерес могут представлять решения в виде бегущей волны. Подстановка (20) в уравнение (11), (12) приводит его к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$cu' + Du'' + b\left(6(u')^2 + u'u'''\right) = 0\,, \tag{21}$$

где штрихом обозначена производная по η, $u' = du(\eta)/d\eta$.

Уравнение (21) допускает двойное понижение порядка с помощью подстановки $s(\eta) = u'(\eta)$ и введения новой искомой функции $g(s)$ вместо $u(\eta)$ из условия $s'(\eta) = g(s)$. В результате (21) приводится к уравнению первого порядка на функцию $g(s)$:

$$s\,g(s)\frac{dg(s)}{ds} + \mu g(s) + 6s^2 + c_1 s = 0\,, \tag{22}$$

где параметры μ и c_1 определены условиями $D = \mu b$, $c = c_1 b$.

Уравнение (22) заменой переменных сводится к уравнению Абеля [13], которое в общем случае не интегрируется в замкнутой форме. Детальное исследование решений уравнения (22) требует специального рассмотрения и выходит за рамки данной работы.

3. Итерационный метод Адомяна

К решению задачи Коши для уравнения (11), (12) применим один из асимптотических методов, активно используемых в последние десятилетия для нахождения приближенных решений нелинейных уравнений (см., например, обзор [14]), а именно итерационный метод разложения, разработанный Дж. Адомяном (Adomian decomposition method) [15–17].

Рассмотрим задачу Коши для уравнений (11), (12):

$$\partial_t u(x,t) = Du_{xx}(x,t) + b(t)\hat{N}(u)(x,t), \qquad u(x,0) = g(x). \tag{23}$$

Здесь $g(x)$ – начальная функция; $\hat{N}$ – нелинейный оператор, входящий в (12):

$$\hat{N}(u) = 6u_x{}^2 + u_x u_{xxx}. \tag{24}$$

Введем оператор, обратный к ∂_t, выражением $\partial_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)\,dt$ и проинтегрируем (23) по t:

$$u(x,t) = g(x) + \partial_t^{-1}\left[Du_{xx}(x,t) + b(t)\hat{N}(u)(x,t)\right]. \tag{25}$$

Следуя [15–17], будем искать решение уравнения (25) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \tag{26}$$

а действие нелинейного оператора (24) на ряд (26) представим как сумму

$$\hat{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(u(x,t)\right), \tag{27}$$

где $A_n(u)$, $n = 0,1,\ldots$, – полиномы Адомяна, определяемые выражением

$$A_n(u) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\hat{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]\Bigg|_{\lambda-0}. \tag{28}$$

Согласно методу Адомяна, итерационная процедура построения ряда (26), с учетом (25) – (28), представляется следующим образом:

$$u_0(x,t) = g(x); \tag{29}$$

$$u_{n+1}(x,t) = \partial_t^{-1} Du_{n\,xx}(x,t) + \partial_t^{-1} b(t) A_n\left(u(x,t)\right). \tag{30}$$

Построим первые члены асимптотического ряда (26). Приведем первые три полинома Адомяна для нелинейного оператора (24) (для краткости аргументы функций не указываются):

$$\begin{gathered}
A_0(u) = 6u_{0\,x}{}^2 + u_{0\,x}u_{0\,xxx} = A_0(g) = 6g_x{}^2 + g_x g_{xxx},\\
A_1(u) = 12u_{0\,x}u_{1\,x} + u_{0\,xxx}u_{1\,x} + u_{0\,x}u_{1\,xxx} = h\,u_{1\,x} + g_x u_{1\,xxx},\\
A_2(u) = 6u_{1x}{}^2 + 12u_{0\,x}u_{2\,x} + u_{0\,xxx}u_{2\,x} + u_{0\,x}u_{2\,xxx} + u_{1\,x}u_{1\,xxx} =\\
= 6u_{1x}{}^2 + u_{1\,x}u_{1\,xxx} + h\,u_{2\,x} + g_x u_{2\,xxx}.
\end{gathered} \tag{31}$$

Здесь и далее $h = h(x) = \partial A_0 / \partial g_x = 12g_x + g_{xxx}$.

Подставив полиномы (31) в (30), находим следующие выражения для первых членов асимптотического ряда в терминах $g(x)$, $A_0(g(x))$:

$$u_1 = Dg_{xx}\,t + A_0\,B(t) = Dg_{xx}\,t + (6g_x{}^2 + g_x g_{xxx})B(t); \tag{32}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}D^2\frac{d^4 g}{dx^4}t^2 + DA_{0\,xx}B_0(t) + \left(h\,A_{0\,x} + g_x A_{0\,xxx}\right)B_1(t) + D\left(g_{xxx}h + g_x\frac{d^5 g}{dx^5}\right)b_1(t), \tag{33}$$

где обозначено: $B(t) = \int_0^t b(t)dt$; $B_0(t) = \int\limits_0^t B(t)dt$; $B_1(t) = \int\limits_0^t b(t)B(t)dt$; $b_1(t) = \int\limits_0^t tb(t)dt$.

Чтобы записать выражение для u_3, вычислим вспомогательную функцию:

$$w(x,t)=\int_0^t b(t)u_2\,dt=\frac{1}{2}D^2\frac{d^4g}{dx^4}b_2(t)+DA_{0xx}B_{01}(t)+\left(hA_{0x}+g_xA_{0xxx}\right)B_2(t)+$$
$$+D\left(g_{xxx}h+g_x\frac{d^5g}{dx^5}\right)b_{01}(t), \tag{34}$$

где $B_{01}(t)=\int_0^t b(t)B_0(t)dt$, $B_2(t)=\int_0^t b(t)B_1(t)dt$, $b_2(t)=\int_0^t t^2b(t)dt$, $b_{01}(t)=\int_0^t b(t)b_1(t)dt$. Тогда

$$u_3=\frac{1}{3!}D^3\frac{d^6g}{dx^6}t^3+D^2\frac{d^4A_0}{dx^4}\int_0^t B_0(t)dt+D\frac{d^2}{dx^2}\left(hA_{0x}+g_xA_{0xxx}\right)\int_0^t B_1(t)dt+$$
$$+D^2\frac{d^2}{dx^2}\left(g_{xxx}h+g_x\frac{d^5g}{dx^5}\right)\int_0^t b_1(t)dt+D^2g_{xxx}\left(6g_{xxx}+\frac{d^5g}{dx^5}\right)b_2(t)+$$
$$+D\left(g_{xxx}A_{0xxx}+h_{xx}A_{0x}\right)\int_0^t tb(t)B(t)dt+A_{0x}\left(6A_{0x}+A_{0xxx}\right)\int_0^t b(t)B^2(t)dt+ \tag{35}$$
$$+hw_x+g_xw_{xxx}.$$

Полученные выражения для членов асимптотического ряда (26) позволяют строить приближенное решение задачи (29), (30) для начальной функции $g(x)$ и функции $b(t)$ общего вида.

В некоторых случаях метод может приводить к точным решениям. Это возможно, например, если итерационный ряд (26) обрывается или удается использовать закономерность формирования членов ряда. Рассмотрим два простых примера, иллюстрирующих подобную ситуацию:

Пример 1. Зададим начальную функцию в виде $u(x,0)=g(x)=x$. Из (31), (32) находим: $A_0=6$, $u_1=6B(t)$. Из (33) имеем $u_2=0$. Далее непосредственной проверкой можно убедиться, что $u_n=0,\ n>1$, т.е. ряд (26) обрывается и точное решение задачи Коши имеет следующий вид: $u(x,t)=x+6B(t)$.

Пример 2. Рассмотрим начальную функцию

$$u(x,0)=g(x)=\frac{1}{2}x^2. \tag{36}$$

Из (31), (32) находим полином $A_0=6x^2$ и первую итерацию $u_1=Dt+6x^2B(t)$ соответственно. Далее из (33), (34) находим следующие итерации: $u_2=12DB_0(t)+12^2x^2B_1(t)$, $u_3=2\cdot12^2D\int_0^t B_1(t)dt+$ $+12^2x^2\left(6\int_0^t b(t)B^2(t)dt+24B_2(t)\right)$. Из вида найденных итерационных членов ряда (26) можно предположить, что решение (26) имеет следующую структуру:

$$u(x,t)=\alpha(t)+\beta(t)x^2, \tag{37}$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – некоторые функции t, удовлетворяющие начальным условиям

$$\alpha(0)=0\ ,\qquad \beta(0)=\frac{1}{2}. \tag{38}$$

Подстановка (37) в (23), (24) приводит к уравнениям

$$\dot\alpha(t)=2D\beta(t)\ ,\qquad \dot\beta(t)=24b(t)\beta^2(t). \tag{39}$$

Интегрирование системы (39) с начальными условиями (38) дает

$$\beta(t)=\frac{1}{2\left(1-12B(t)\right)},\qquad \alpha(t)=2D\int_0^t\frac{dt}{2\left(1-12B(t)\right)}. \tag{40}$$

Таким образом, точное решение задачи Коши (23), (24) с начальной функцией (36) имеет вид (37), где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ определены из условий (40).

Заключение

В работе исследуется нелинейное уравнение Фоккера – Планка в одномерном пространстве-времени с нелокальным дрейфом, представляющее собой нелинейное интегродифференциальное уравнение диффузионного типа. В квазилокальном приближении по малому параметру, характеризующему размер области локализации, исходное уравнение редуцируется к уравнению в частных производных. Основная цель работы заключалась в применении методов симметрийного анализа и метода разложения Адомяна к редуцированному уравнению (9).

Вычисление лиевских симметрий показало, что их множество весьма ограничено. Из соответствующего им набора инвариантно-групповых решений рассмотрено решение вида бегущей волны. Нахождение данного решения сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Абеля.

К исследованию симметрий нелокального уравнения ФП (2), (3) можно применять и другие подходы. Так, в [18] уравнение ФП (2), (3) в квазиклассическом приближении редуцировалось к объединенной системе, состоящей из уравнения диффузионного типа и динамической системы моментов, входящих в коэффициенты уравнения. Симметрии вычислялись для объединенной системы. Таким образом, подход на основе квазилокального приближения, предложенного в данной работе, и подход работы [18] позволяют исследовать симметрии нелокального уравнения ФП с различных точек зрения.

Итерационным методом Адомяна в работе вычислены первые члены асимптотического ряда, представляющего решение задачи Коши для редуцированного уравнения (11), (12). Найдено два примера точного решения задачи Коши для линейной и квадратичной начальных функций.

Отметим, что можно исследовать уравнение (6) без введения потенциала $w(\xi,\tau)$. В этом случае исключить параметр ε из уравнения можно с помощью преобразования $t' = \varepsilon^{-1}\tau$, $x' = \varepsilon^{-1}\xi$ и условия малости коэффициента диффузии D, $D = \varepsilon C$, где C – постоянная. Эта и другие схемы квазилокальной редукции выходят за рамки данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Risken H. The Fokker-Planck Equation. – N. Y.: Springer, 1989.
2. Frank T.D. Nonlinear Fokker-Planck Equations. Springer Series in Synergetic: – N. Y.: Springer Verlag, 2005.
3. Chavanis P.-H. // Comptes Rendus Physique. – 2006. – V. 7. – No. 3. – P. 318–330.
4. Chavanis P.-H. // Physica A. – 2004. – V. 340. – P. 57–65.
5. Otten D.L. and Vedula P. // J. Stat. Mech.: Theor. Exp. – 2011. – V. 2011. – P. 09031.
6. Wedemann R.S., Plastino A.R., and Tsallis C. // Phys. Rev. E. – 2016. – V. 94 (6-1). – No. 062105.
7. Bellucci S. and Trifonov A.Yu. // J. Phys. A. – 2005. – V. 38. – P. L103–L114.
8. Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 9. – С. 14–23.
9. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
10. Ibragimov N.H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Mathematics and its Applications (Soviet Series). – Dordrecht: D. Reidel Publ., 1985.
11. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. – N. Y.: Springer, 1986.
12. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. – 5-е изд. – М.: Наука, 1976.
14. He Ji-Huan // Abstract Appl. Anal. – 2012. – V. 2012. – Article ID 916793. – 130 p.
15. Adomian G. // J. Math. Anal. Appl. – 1988. – V. 135. – P. 501–544.
16. Adomian G. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. Ser. Fundamental Theories of Physics. V. 60. – Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1994.
17. Adomian G. and Rach R. // J. Math. Anal. Appl. – 1993. – V. 174. – P. 118–137.
18. Левченко Е.А., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 2017. – Т. 60. – № 2. – С. 79–84.

[1] Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
[2] Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 31.07.17.

Шаповалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. теоретической физики НИ ТГУ, профессор каф. высшей математики и математической физики ФТИ ТПУ, e-mail: shpv@phys.tsu.ru.