ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Математика и механика № 55

УДК 517.54 MSC 35C15
DOI 10.17223/19988621/55/2

О.В. Задорожная, В.К. Кочетков

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛОВ ВТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

В геометрической теории функций комплексного переменного наряду с различными общими проблемами рассматриваются многие частные, являющиеся предметом исследования в настоящее время. Авторы исследуют специальные дифференциальные уравнения, результаты сформулированы в виде теорем, утверждений, лемм, в которых отмечены структурные составляющие интегралов рассматриваемых дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *геометрическая теория функций комплексного переменного, дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева.*

1. Классы функций. Формула И.Е. Базилевича. Леммы

1.1. Классы функций

Введем следующие классы функций:

C – множество функций $p(z), p(0)\neq 0$, регулярных в $E=\{z:|z|<1\}$ и отображающих единичный круг E на область, расположенную в правой полуплоскости, то есть удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}[p(z)]>0$ в E;

P – множество функций $p(z)\in C$ и удовлетворяющих условию $p(0)=1$;

C(T) – множество функций $p(z,t)$, регулярных в E, непрерывных в $T=\{t:0\le t<+\infty\}$ и принадлежащих классу C при каждом фиксированном $t\in T$;

S – множество функций $f(z), f(0)=0, f'(0)=1$, регулярных и однолистных в E;

S^* – множество функций $f(z)$ класса S, отображающих круг E на звездообразную область, являющихся решением дифференциального уравнения

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=p(z)\in P$$

и представимых в E в виде

$$f(z)=ze^{\int_0^z (p(z)-1)\frac{dz}{z}};$$

S^0 – множество функций $\varphi(z)\in S$, отображающих круг E на выпуклую область, являющихся решением дифференциального уравнения

$$1+\frac{z\varphi''(z)}{\varphi'(z)}=p(z)\in P$$

и представимых в E в виде

$$\varphi(z)=\int_0^z e^{\int_0^z (p(z)-1)\frac{dz}{z}}dz.$$

Заметим, что функции $f(z)\in S^*$ и функции $\varphi(z)\in S^0$ связаны равенством $f(z)=z\varphi'(z)$.

В теории однолистных функций хорошо известно первое

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-f(z,t)p(f,t) \qquad (1.1)$$

и второе

$$\frac{z\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z}}{\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial t}}=p(z,t) \qquad (1.2)$$

дифференциальные уравнения Левнера – Куфарева, где

$$p(s,t)\in C(T), s\in E, t\in T,$$

обобщающие соответствующее уравнение Левнера [1 – 4].

1.2. Формула И.Е. Базилевича

При рассмотрении первого дифференциального уравнения Левнера – Куфарева (1.1) в частном случае И.Е. Базилевич вывел формулу, которую оформим в виде теоремы.

Теорема 1: Пусть функции $p_1(z), p_2(z)\in C$.

Тогда функция

$$f(z)=\left(\alpha\, b(z)\right)^{\frac{1}{p_2(0)}}, \qquad (1.3)$$

где

$$\alpha=\frac{p_2(0)}{p_1(0)},\ b(z)=\int_0^z p_1(z)z^{p_2(0)-1}v(z)dz, \qquad (1.4)$$

$$v(z)=e^{\int_0^z (p_2(z)-p_2(0))\frac{dz}{z}}, \qquad (1.5)$$

регулярна и однолистна в E, если под $f(z)$ понимать ту ветвь многозначной функции, которая имеет разложение

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots .$$

Функция $f(z)$ в (1.3), при обозначениях (1.4), (1.5), включает известные функции: звездообразные, выпуклые, спиралеобразные, почти-выпуклые, класс функций с ограниченным вращением. Напомним, что данную формулу И.Е. Базилевич получил в результате применения первой формулы Левнера – Куфарева (1.1) [1 – 4].

1.3. Леммы

Сформулируем и докажем следующую лемму:

Лемма 1. Пусть функции $p_1(z), p_2(z) \in C$.

Тогда имеют место эквивалентные соотношения

$$a_1(z) + ta_2(z) \neq 0, \quad t + \frac{a_1(z)}{a_2(z)} \neq 0, \quad t\frac{a_2(z)}{a_1(z)} + 1 \neq 0 \tag{1.6}$$

в E при любом $t \geq 0$, где

$$a_2(z) = z^{p_2(0)} v(z) . \tag{1.7}$$

Функция $v(z)$ имеет вид (1.5), а $a_1(z)$ определяется по формуле

$$a_1(z) = \int p_1(z) z^{-1} a_2(z) dz = \int p_1(z) z^{p_2(0)-1} v(z) dz = b(z) . \tag{1.8}$$

Доказательство. В отличие от И.Е. Базилевича к функции (1.3) можно прийти при применении второго уравнения Левнера – Куфарева. Действительно, относительно функции

$$F(z,t) = \left(a_1(z) + ta_2(z)\right)^{\frac{1}{p_2(0)}} \tag{1.9}$$

составим отношение вида

$$\frac{zF_z'}{F_t'} = \frac{za_1'(z)}{a_2(z)} + t\frac{za_2'(z)}{a_2(z)} \tag{1.10}$$

или
$$\frac{zF_z'}{F_t'} = p_1(z) + tp_2(z), p_1(z), p_2(z) \in C , \tag{1.11}$$

где
$$p_1(z) = \frac{za_1'(z)}{a_2(z)} , \tag{1.12}$$

$$p_2(z) = \frac{za_2'(z)}{a_2(z)} . \tag{1.13}$$

Из (1.12), (1.13) находим $a_2(z)$ вида (1.7) и $a_1(z)$ в виде (1.8) при обозначениях (1.5), (1.7). Дифференциальное уравнение (1.10) или (1.11) является дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева второго типа вида (1.2).

Функция

$$\phi(z,t) = \frac{F(z,t)}{F_z'(0,t)} \in S$$

при каждом $a_2(z)$, при этом $\phi(z,\infty) \in S^*$, а $\phi(z,0)$ является функцией И.Е. Базилевича (1.3) – (1.5). Из регулярности и однолистности в E при каждом $a_2(z)$ функций $\phi(z,t)$ и $F(z,t)$, $t \in [0,+\infty)$ в (1.9), с учетом (1.10) – (1.13), (1.5) – (1.8) следуют неравенства (1.6). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Неравенства (1.6) можно установить другими способами без рассмотрения второго дифференциального уравнения (1.2) в виде (1.11).

Следствие леммы 1. Пусть $p_1(z), p_2(z) \in C$. Тогда в E

$$A(z) = \frac{a_1(z)}{a_2(z)} = \frac{\int_0^z p_1(z) z^{p_2(0)-1} v(z) dz}{z^{p_2(0)} v(z)} \neq 0 .$$

Пусть $k_1(z), k_2(z), k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z)$ регулярные в E функции и таковы, что

$$A(z) = k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z) .$$

Очевидно, что существует множество пар $h_1(z), h_2(z), h(z) = h_1(z) \cdot h_2(z)$, таковых, что выполняется соотношение

$$k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z) = h(z) = h_1(z) \cdot h_2(z) = A(z) .$$

В дальнейшем считаем, что $k_1(z), k_2(z) \in C$ и таковы, что выполняется вышеуказанное соотношение. В этом случае при фиксированном $k_1(z)$ имеем

$$k_2(z) = \frac{A(z)}{k_1(z)} .$$

Лемма 2. Пусть $k_1(z), k_2(z) \in C,\ k(z) = k_1(z) \cdot k_2(z).$ Тогда функции

$$e_1(z,t) = \frac{k_1(z)t + k_2(z)}{t + k(z)}; \tag{1.14}$$

$$e_2(z,t) = \frac{k_1(z)t^2 + k_2(z)t + k_1(z) + k_2(z)}{t + k(z)} \tag{1.15}$$

принадлежат классу $C(t)$ в E при всех $t \geq 0$.

Доказательство. Умножив числитель и знаменатель в правой части (1.14), (1.15) на $t + \overline{k}$, непосредственно убедимся, что $\mathrm{Re}[e_i(z,t)] > 0$ в E при любых $t \geq 0$, i=1, 2. Например, в случае $e_1(z,t)$ в (1.14) имеем

$$e_1(z,t) = \frac{k_1 t^2 + t(k_2 + |k_1|^2 \cdot k_2) + k_1 |k_2|^2}{|t + k(z)|^2} .$$

Откуда следует, что $\mathrm{Re}\left[e_1(z.t)\right] > 0$ в E при каждом $t \geq 0$, что означает, по определению, что $e_1(z,t) \in C(T).$ Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Из (1.10) – (1.13) можно видеть, что в случае линейных правых частей (1.10), (1.11) установить соответствие между ними не представляет проблемы. Однако при рассмотрении в следующем параграфе нелинейных правых частей задача построения правой части с положительной вещественной частью в общем случае представляет трудность. Применение вышеизложенных лемм способствует облегчению проблем.

2. Уравнение вида $\frac{zF'_z}{F'_t}=\frac{b_2(z)t^2+b_1(z)t+b_0(z)}{d_1(z)t+d_0(z)}$ в пространстве $\mathbb{C}$. Второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева $\frac{zF_z}{F'_t}=p_2(z)t+\frac{p_1(z)t+p_0(z)}{t+\frac{p_1(z)}{p_0(z)}}, z\in E, t\in T=[0,\infty)$, с основной нелинейной составляющей вида $g(z,t)=e^{ct}\cdot(at+b)$

Теорема 2. Пусть

1) $p_0=p_0(z)$, $p_1=p_1(z)$, $p_2=p_2(z)$ принадлежат классу C;

2) функция $c=c(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{zc'(z)}{c(z)}=p_2(z)\in C \tag{2.1}$$

и представима в E в виде

$$c(z)=z^{p_2(0)}\cdot e^{\int\limits_0^z (p_2(z)-p_2(0))\frac{dz}{z}},\quad z\in E\ ; \tag{2.2}$$

3) функция $a(z)$ представима в E в виде

$$a(z)=c(z)\cdot e^{\int\limits_0^z c(z)\cdot p_1(z)\frac{dz}{z}}\ ; \tag{2.3}$$

4) функция $b(z)$ представима в E в виде

$$b(z)=\int\limits_0^z c(z)\cdot a(z)\cdot p_0(z)\frac{dz}{z}\,; \tag{2.4}$$

5) функции $p_0(z), p_1(z), p_2(z)$ удовлетворяют соотношению

$$z\left(\frac{p_1}{p_0}\right)'+\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{za'}{a}-\frac{1}{c}\left(\frac{za'}{a}-\frac{zc'}{c}\right)=c\cdot p_0\,. \tag{2.5}$$

Тогда функция

$$F(z,t)=(g(z,t))^{\frac{1}{2p_2(0)}}=\left(e^{ct}\cdot(at+b)\right)^{\frac{1}{2p_2(0)}}=c_1(t)z+c_2(t)z^2+\ldots \tag{2.6}$$

удовлетворяет уравнению Левнера – Куфарева вида

$$\frac{zF_z}{F'_t}=p_2(z)t+\frac{p_1(z)t+p_0(z)}{t+\frac{p_1(z)}{p_0(z)}}, z\in E, t\in T=[0,\infty)\,. \tag{2.7}$$

Доказательство. Применительно к функции $F(z,t)$ в (2.6) составим отношение

$$\frac{zF_z}{F'_t}=\frac{z(g(z,t))'_z}{(g(z,t))'_t}=\frac{zac't^2+t(zbc'+za')+zb'}{act+bc+a}\,. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.1) является уравнением с разделяющими переменными, решением которого является функция $c(z)$ вида (2.2). Делением числителя на знаменатель в правой части (2.8), используя (2.1) и полагая

$$\frac{bc+a}{ac}=\frac{p_1}{p_0}, \tag{2.9}$$

$$\frac{zbc'+za'-p_2(bc+a)}{ac}=p_1, \tag{2.10}$$

$$\frac{zb'}{ac}=p_0, \tag{2.11}$$

перепишем выражение (2.8) в виде (2.7).

Так как функция $p(z,t)$ в правой части (2.7) принадлежит классу $C(t)$, $z\in E, t\in T=[0,\infty)$, то дифференциальное уравнение (2.7) является вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Из (2.9) следует

$$bc+a=\frac{p_1}{p_0}ac,$$

откуда

$$b=\frac{p_1}{p_2}a-\frac{a}{c}. \tag{2.12}$$

Дифференцируя выражение (2.12), получим

$$b'=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)'a+\frac{p_1}{p_2}a'-\frac{a'}{c}+\frac{ac'}{c^2}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.9) и (2.12) в (2.10), получим дифференциальное уравнение относительно $a=a(z)$, интегрируя которое, получим (2.3).

Из (2.11) имеем

$$b'=ac\frac{p_0}{z}. \tag{2.14}$$

Выражения в (2.13) и (2.14) совместимы при выполнении соотношения (2.5).

При выполнении равенства (2.5), из (2.14) имеем

$$b(z)=\int_0^z a(z)c(z)\frac{p_0(z)}{z}dz.$$

Последнее выражение совпадает с (2.4). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. При каждом фиксированном $t\in[0,\infty)$ функция $F(z,t)$ в (2.6) будет являться функцией переменной $z\in E$. В ситуации (2.6) ветвь степени определяется фиксированием коэффициента $c_1(z)$ при z в разложении функции в ряд Тейлора.

3. Уравнение вида $\frac{zF'_z}{F'_t}=\frac{b_2(z)t^2+b_1(z)t+b_0(z)}{d_1(z)t+d_0(z)}$ в пространстве $\mathbb{C}$. Второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева $\frac{zF_z}{F'_t}=p_2(z)t+\frac{p_1(z)t+p_0(z)}{t+\frac{p_1(z)}{p_2(z)}}, z\in E, t\in T=[0,\infty)$, с основной нелинейной составляющей вида $g(z,t)=a_2(z)t^2+a_1(z)t+a_0(z)$

Теорема 3. Пусть

1) $p_2(z), p_1(z)\in C$;

2) $v(z)=e^{\int_0^z \frac{p_2(z)-p_2(0)}{z}dz}$;

3) $k(z)=\int_0^z p_1(z)\cdot z^{p_2(0)-1}v(z)dz$;

4) $a_2(z)=z^{2p_2(0)}\cdot v^2(z)$;

5) $p_0(z)=\frac{k(z)}{z^{p_2(z)}v(z)p_1(z)}\in C$.

Тогда функция

$$F(z,t)=\left\{a_2(z)t^2+a_1(z)t+a_0(z)\right\}^{\frac{1}{2p_2(0)}}=c_1(t)z+c_2(t)z^2+\dots,$$

где

$$a_1(z)=z^{p_2(0)}\cdot v(z)2k(z),$$

$$a_0(z)=2\int_0^z p_0(z)\cdot z^{2p_2(0)-1}v^2(z)dz$$

регулярна и однолистна в E при каждом $t,\ t\ge 0$.

С учетом результатов, полученных во втором параграфе, и выражения $g(z,t)=a_2(z)t^2+a_1(z)t+a_0(z)$ имеем

$$\frac{zF'_z}{F'_t}=\frac{z(g(z,t))'_z}{(g(z,t))'_t}p(z,t)=\frac{\frac{za'_2(z)}{2a_2(z)}t^2+\frac{za'_1(z)}{2a_2(z)}t+\frac{za'_0(z)}{2a_2(z)}}{t+\frac{a_1(z)}{2a_2(z)}}. \tag{3.1}$$

Полагая

$$\frac{za'_2(z)}{2a_2(z)}=p_2(z)\in C,\quad a_2(z)=z^{2p_2(0)}\cdot \nu^2(z), \tag{3.2}$$

с последующим делением в (3.1) числителя на знаменатель, получим

$$p(z,t)=p_2(z)t+\frac{\frac{za'_1(z)-p_2(z)a_1(z)}{2a_2(z)}t+\frac{za'_0(z)}{2a_2(z)}}{t+\frac{a_1(z)}{2a_2(z)}}. \tag{3.3}$$

Обозначив

$$\frac{za_1'(z)-p_2(z)a_1(z)}{2a_2(z)}=p_1(z)\in C\,, \tag{3.4}$$

имеем

$$za_1'(z)-p_2(z)a_1(z)=p_1(z)\cdot 2a_2(z)\,. \tag{3.5}$$

Интегрирование относительно $a_1(z)$ уравнения (3.5) дает

$$a_1(z)=z^{p_2(0)}\cdot v(z)\cdot\left(c+2\int_0^z p_1(z)\cdot z^{p_2(0)-1}v(z)dz\right). \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.2) имеем

$$\frac{a_1(z)}{2a_2(z)}=\frac{\int p_1(z)\cdot z^{p_2(0)-1}\cdot \nu(z)dz}{z^{p_2(0)-1}\cdot \nu(z)}=A(z)\,. \tag{3.6$'$}$$

Пусть

$$p_0(z)=\frac{A(z)}{p_1(z)}\in C\,. \tag{3.7}$$

В случае соотношения (3.7) имеет место равенство

$$A(z)=p_1(z)\cdot p_0(z)\,. \tag{3.8}$$

С учетом (3.1) – (3.8) выражение в (3.3) перепишется в виде

$$p(z,t)=p_2(z)t+\frac{p_1(z)t+p_0(z)}{t+p_1(z)\cdot p_0(z)}\,. \tag{3.9}$$

Выражение в (3.9) несколько отличается от соответствующего выражения в теореме 1. Функции $p(z,t)$ в (3.9) и

$$e(z,t)=\frac{p_1(z)t+p_0(z)}{t+p_1(z)\cdot p_0(z)} \tag{3.10}$$

в (3.10) принадлежат классу $C(T)$, и, следовательно, соответствующее дифференциальное уравнение является вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Положим

$$\frac{za_0'(z)}{2a_2'(z)}=p_0(z)\in C\,, \tag{3.11}$$

где $p_0(z)$ определяется соотношением (3.7) при условии (3.6).

Рассмотрением (3.11) указываем выражение $a_0(z)$:

$$a_0(z)=2\int p_0(z)\cdot z^{2p_2(0)-1}\cdot \nu^2(z)dz\,. \tag{3.12}$$

Заметим, что функция

$$e(z,t)=\frac{p_1(z)t+a_0p_0(z)+a_1p_1(z)}{t+p_1(z)\cdot p_0(z)} \tag{3.13}$$

также будет принадлежать классу $C(T)$.

Поэтому вместо (3.11) мы можем полагать

$$\frac{za_0'(z)}{2a_2(z)} = a_0 p_0(z) + a_1 p_1(z), a_0 \geq 0, a_1 \geq 0\,, \tag{3.14}$$

где a_0, a_1 удовлетворяют условию $a_0 + a_1 \neq 0$.

В ситуации (3.14) выражение в (3.12) перепишется в виде

$$a_0(z) = 2\int (a_0 p_0(z) + a_1 p_1(z)) z^{2p_2(0)-1} \cdot v^2(z) dz\,.$$

Объединяя вышеизложенное, получим результат, указанный в формулировке теоремы 3.

Функции $F(z,t)$, $\varphi(z,t) = \dfrac{F(z,t)}{F_z'(0,t)}, \varphi(z,0), \varphi(z,\infty)$ удовлетворяют всем условиям, являющимся достаточными для утверждений теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

К числу различных важных направлений исследований относятся обратные задачи. Понятия «обратная функция», «обратная задача» связаны с понятиями взаимнооднозначного, биективного, однолистного отображений, однолистной функции, рассмотренных в [1–5]. Со времен Ж. Лиувилля, доказавшего неразрешимость в квадратурах дифференциальных уравнений некоторых типов, актуальной остается задача указаний случаев интегрируемости дифференциальных уравнений. В данной статье, таким образом, мы указали структуру интеграла и условия, при которых функция определенного вида является решением дифференциального уравнения Левнера – Куфарева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск.: Томский государственный университет, 2001. 220 с.
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. *Авхадиев Ф.Г.*, *Аксентьев А.А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. 1975. Т. 30. Вып. 4(184). С. 3–60.
4. *Базилевич И.Е.* Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера – Куфарева // Матем. сб. 1955. Т. 37. № 3. С. 471–476.
5. *Кочетков В.К.*, *Задорожная О.В.* Некоторые вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений и геометрической теории функций комплексного переменного. Элиста: Издательство Калм. ун-та, 2014. 160 с.

Статья поступила 24.04.2018 г.

Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2018) THE STRUCTURE OF INTEGRALS OF THE SECOND LOEWNER–KUFAREV DIFFERENTIAL EQUATION IN A PARTICULAR CASE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 12–21

DOI 10.17223/19988621/55/2

Keywords: geometric theory of functions of a complex variable, Loewner–Kufarev differential equation.

In the geometric theory of functions of a complex variable, the first and the second Loewner–Kufarev differential equations are well known. Considering the first one of them, I. E. Bazilevich pointed out the class of univalent functions in a unit circle, now known as I. E. Bazilevich's class.

This paper shows that I. E. Bazilevich's formula can be derived by considering the second Loewner–Kufarev equation with a linear right-hand side. We have also studied a differential equation with a nonlinear right-hand side, rational in a particular case. The problem point in the latter case is to specify a parametric family of regular functions with a positive real part in the unit circle at each fixed value of the parameter. The two lemmas proved in the paper simplify the problem of constructing a right-hand side with a positive real part when considering nonlinear right-hand sides.

AMS Mathematical Subject Classification: 35C15

ZADOROZHNAYA Olga Vladimirovna (Candidate of pedagogics, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: ovz_70@mail.ru

KOCHETKOV Vladimir Konstantinovich (Candidate of Physics and Mathematics, Kalmyk State University, Elista, Russian Federation). E-mail: kvk1106@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of the geometric theory of analytical functions]. Tomsk: Tomsk State University Publ. 220 p.
2. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [*Parametric continuations in the theory of univalent functions*]. Moscow: Nauka. 344 p.
3. Avkhadiev F.G. et al. (1975) The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht. *Russian Mathematical Surveys*. 30 (4). pp. 1–63.
4. Bazilevich I.E. (1955). Ob odnom sluchae integriruemosti v kvadraturakh uravneniya Levnera – Kufareva [On one case of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev equation]. *Math. USSR Sb*.37(3). pp. 471–476.
5. Kochetkov V.K., Zadorozhnaya O.V. (2014) *Nekotorye voprosy analiticheskoy teorii different-sial'nykh uravneniy i geometricheskoy teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Some problems of the analytical theory of differential equations and geometric theory of functions of a complex variable]. Elista: KalmSU. 160 p.