

* *
*

УДК 537.874

В.В. ФИСАНОВ^{1,2}

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИМПЕДАНС ИЗОТРОПНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ*

Импедансное условие Леонтовича рассматривается применительно к границе с внешней изотропной средой, характеризуемой эффективными параметрами метаматериалов. Поверхностный импеданс зависит не только от комплексной диэлектрической и комплексной магнитной проницаемости вещества, но и от типа эванесцентной плоской волны. Рассмотрены частные случаи прозрачных сред, сред с балансом электрических и магнитных потерь. Уточнены условия применимости импедансного приближения.

Ключевые слова: изотропные среды, метаматериалы, комплексная диэлектрическая проницаемость, комплексная магнитная проницаемость, прямые и обратные плоские волны, волновой вектор, показатель преломления, волновое сопротивление, комплексный поверхностный импеданс.

Векторное соотношение

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = -Z\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{H}), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряжённости электрического и магнитного полей, а Z – скалярный или тензорный параметр, имеющий размерность сопротивления в системе единиц СИ, стало известно в электродинамике и геофизике с конца 30-х годов XX столетия и получило название «импедансное граничное условие Леонтовича». Оно выполняется на гладкой поверхности S с внешней нормалью $\hat{n}$, ограничивающей объём V , в котором рассматривается электромагнитное поле. Условие (1) нашло применение во многих задачах теории и приложений дифракции, распространения, излучения электромагнитных волн, приобрело широкую известность в СССР и за рубежом, о чём свидетельствуют обзорные и памятные статьи, приуроченные к 70- и 75-летию его первого упоминания [1–3]. Сам М.А. Леонтович опубликовал исследования в этом направлении несколько позже [4, 5]. (Он применял гауссову систему единиц и поэтому предпочитал не пользоваться термином «импеданс» [6].)

В случае сложно построенной границы (например, периодическая щелевая или гребенчатая структура, шероховатая поверхность) условие (1) ставится на более простой виртуальной импедансной поверхности и называется эквивалентным граничным условием. Если полагать, что поверхностный импеданс не зависит от структуры поля в области V («сторонний» импеданс), то условие (1) является приближённым. Значение стороннего импеданса определяется как свойствами среды за пределами выделенного объёма пространства V (слоистая, анизотропная и т.д.), так и свойствами самой граничной поверхности.

Граничное условие (1) вместе с условием излучения (в случае открытой области V) и условием на ребре (при наличии изломов поверхности S) обеспечивает единственность решения краевой задачи для уравнений Максвелла [7]. Двумерная электродинамическая задача относительно одной из скалярных полевых величин с импедансным условием Леонтовича классифицируется как задача математической физики для волнового дифференциального уравнения с граничным условием третьего рода, которая допускает строгое математическое решение, физически корректное в рамках принятого импедансного приближения.

Исходной канонической задачей для обоснования граничного условия Леонтовича служит задача о нормальном падении однородной плоской волны на плоскую поверхность раздела пустого полупространства и изотропной среды. Условие (1) выполняется при этом точно, и поверхностный импеданс совпадает с полевым характеристическим импедансом распространяющейся от границы в глубь волны. Значение характеристического импеданса задаётся на волновом фронте, конгру-

* Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

энтном границе среды [8]. Если среда обладает большим показателем преломления, то и при наклонном падении прошедшая волна почти не отклоняется от нормали. Следовательно, зафиксированное значение характеристического импеданса приобретает смысл стороннего поверхностного импеданса в приближённом условии Леонтовича. Формула (1) является применимой также для неплоской поверхности S и неоднородной внешней среды при условии, что «глубина проникновения в тело и длина волны в нём малы по сравнению с длиной волны в окружающем пространстве, по сравнению с расстояниями от источников поля и по сравнению с радиусами кривизны поверхности тела», а также, что «изменения ε и μ тела на длине, равной... глубине проникновения, малы» [5].

Уточнение обоснования применимости условия (1) требуется в том варианте, если порождающая сторонний поверхностный импеданс среда представляет собой электромагнитный метаматериал. Метаматериалы являются искусственными композитными веществами, они получили известность в самом начале 2000-х годов. В качестве основной фазы композита выступает обычный диэлектрик, тогда как второй фазой являются малые по сравнению с длиной волны резонансные вкрапления (метаатомы). Метаатомы обычно образуют пространственную периодическую решётку, а их форма и состав обеспечивают создание искусственной электрической и магнитной восприимчивости в материале. В наиболее общем случае взаимодействия с электромагнитным полем они проявляют себя как бианизотропные частицы. Например, на сверхвысоких частотах часто применяются сочетания двойных кольцевых резонаторов с разрезами и прямолинейных проволоочных элементов. Несмотря на сложное микроскопическое построение, электромагнитные метаматериалы при определённых условиях описываются эффективными материальными параметрами как сплошные среды. Такой подход позволяет рассматривать метаматериалы в рамках макроскопической электродинамики. В дальнейшем принимается, что метаматериальная среда является изотропной, то есть она полностью характеризуется двумя скалярными комплексными величинами – диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$ и магнитной проницаемостью $\mu = \mu_r + i\mu_i$. Действительные части проницаемостей метаматериалов ε_r , μ_r могут принимать не только положительные, но и отрицательные значения. У монохроматического электромагнитного поля с круговой частотой ω и временным фактором $\exp(-i\omega t)$ мнимые части проницаемостей ε_i , μ_i должны быть положительными в реальных (поглощающих) средах, но могут быть и отрицательными, если среда обладает способностью усиливать поле.

В настоящее время значительный интерес для приложений представляют так называемые «левые» вещества [9], именуемые также «дважды отрицательными» средами или «средами Веселаго». В пренебрежении малыми потерями среда Веселаго обладает обеими действительными отрицательными проницаемостями и является прозрачной для электромагнитных волн. Однако нормальные плоские однородные волны в ней оказываются обратными волнами в том отношении, что направления волнового вектора (орт $\hat{\mathbf{k}}$) и вектора плотности потока энергии (вектора Умова – Пойнтинга, орт $\hat{\mathbf{s}}$) являются взаимно противоположными: $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{s}}$. В среде с положительными проницаемостями нормальные волны являются прямыми ($\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{s}}$). Введение идентификатора типа волны по формуле

$$a = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \quad (2)$$

даёт возможность унифицировать описание волновых процессов в изотропных средах, а также избежать затруднений, которые возникают в связи с внедрением нового термина «отрицательный показатель преломления вещества» [10]. Показатель преломления является, как известно [11], модулем вектора рефракции, то есть положительной величиной. Попытка преодолеть парадокс и связать этот термин не со средой, а только с нормальной волной [12] не может быть признана удачной, потому что автор статьи предлагает пользоваться неизвестными математическими терминами «количественное равенство» и «качественное равенство».

Для плоской волны с пространственным фактором $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, уравнения Максвелла принимают вид векторных соотношений

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{k} = \omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3)$$

Имея в виду, что поток энергии распространяющейся в среде волны должен быть направлен вглубь от границы ($\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{n}}$), представим волновой вектор $\mathbf{k}$ следующим образом:

$$\mathbf{k} = ak\hat{\mathbf{n}}, \quad (4)$$

где $k = |\mathbf{k}|$ – волновое число (положительная величина), и подставим в формулы (3):

$$ak\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}, \quad ak\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = \omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (5)$$

После векторного умножения на орт $\hat{\mathbf{n}}$ второе соотношение в (5) приводится к виду

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = -\frac{ak}{\omega\varepsilon} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}). \quad (6)$$

Формула (6) полностью соответствует формуле (1), если положить $Z = ak/(\omega\varepsilon)$. Принимая во внимание, что волновое число в изотропной среде имеет значение $k = \omega(\varepsilon\mu)^{1/2}$, для поверхностного импеданса получим

$$Z = a \frac{\omega(\varepsilon\mu)^{1/2}}{\omega\varepsilon} = aZ_c \operatorname{sgn} \varepsilon, \quad (7)$$

где применено обозначение $Z_c = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ для характеристического импеданса изотропной среды (положительная величина). В формуле (7) следует учесть, что обратной волне соответствует значение идентификатора $a = -1$ и что обратная волна в среде Веселаго существует при отрицательных значениях обеих проницаемостей, то есть $a = \operatorname{sgn} \varepsilon = \operatorname{sgn} \mu$. Следовательно, для любой изотропной идеальной среды поверхностный импеданс равен характеристическому импедансу: $Z = Z_c = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$. Действительный характеристический импеданс называют иногда волновым сопротивлением среды [8]. Если поглощения нет, то импедансное приближение будет применимо, как известно, для однородного полупространства с плоской границей и большим показателем преломления «...только тогда, когда источники находятся на расстояниях от тела, больших по сравнению с длиной волны в вакууме» [5].

В тех случаях, когда в среде имеются потери и, возможно, созданы условия для усиления поля («отрицательные потери»), следует воспользоваться результатами работы [13]. Плоские волны в непрозрачной среде являются эванесцентными, но остаются однородными, если $\operatorname{Re} \mathbf{k}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{k}$ комплексного волнового вектора $\mathbf{k}$ параллельны. Прямая и обратная эванесцентные волны, которые распространяются в одном и том же направлении, изменяются противоположным образом (амплитудный декремент переходит в инкремент). Поэтому однородная плоская эванесцентная волна обобщённо характеризуется комплексным волновым числом вида $k = k_r + iak_i$, где $k_r > 0$ и $k_i > 0$. В реальных средах волны обоих типов подчиняются принципу погашаемости Фока – Матюжинца (принципа предельного поглощения) [14], согласно которому распространение в глубине вещества сопровождается затуханием волны. При этом фазовые фронты прямой и обратной волн движутся в противоположных направлениях.

Из формул (5) следуют соотношения

$$k\eta = \omega\mu, \quad k\zeta = \omega\varepsilon, \quad (8)$$

где $\eta = \zeta^{-1} = aZ_c$ – волновой характеристический импеданс (относящийся к волновому фронту с направляющим ортом $\hat{\mathbf{k}}$), и все величины за исключением частоты ω являются теперь комплексными. После перехода к унимодулярным величинам $K = k/|k|$, $H = \eta/|\eta|$, $E = \varepsilon/|\varepsilon|$, $M = \mu/|\mu|$, где

$$|k| = \omega\sqrt{|\varepsilon\mu|} = \omega\sqrt{|\varepsilon_r\mu_r|} \sqrt{(1+\delta_\varepsilon^2)(1+\delta_\mu^2)}, \quad |\eta| = \sqrt{\frac{|\mu|}{|\varepsilon|}} = \sqrt{\frac{|\mu_r|}{|\varepsilon_r|}} \sqrt{\frac{1+\delta_\mu^2}{1+\delta_\varepsilon^2}}, \quad \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}, \quad \delta_\mu = \frac{\mu_i}{\mu_r}, \quad (9)$$

формулы (8) преобразуются к четырём алгебраическим уравнениям

$$KH = M, \quad K/H = E, \quad K^2 = ME, \quad H^2 = M/E, \quad (10)$$

при решении которых выполняется разделение действительных и мнимых частей в формулах (10). Идентификатор типа волны был получен в двух эквивалентных формах:

$$a = \operatorname{sgn}[(M_r + E_r)(M_i + E_i)] = \operatorname{sgn}[(E_r - M_r)(M_i - E_i)]. \quad (11)$$

Вводя обозначения $\varphi_\varepsilon = \arg \varepsilon$, $\varphi_\mu = \arg \mu$ и учитывая, что $E = E_r + iE_i = \exp(i\varphi_\varepsilon)$, $M = M_r + iM_i = \exp(i\varphi_\mu)$, несложно привести (11) к виду

$$a = \operatorname{sgn} \left[\sin(\varphi_\varepsilon + \varphi_\mu) \right] = \operatorname{sgn}(\varepsilon_r \mu_i + \varepsilon_i \mu_r) = \operatorname{sgn} \left[\varepsilon_r \mu_r (\delta_\varepsilon + \delta_\mu) \right]. \quad (12)$$

Согласно (12), тип волны в реальной среде определяется балансом аргументов комплексных значений ε и μ . Идентификатор равен произведению знаков действительной части диэлектрической проницаемости ε_r , действительной части магнитной проницаемости μ_r и знака арифметического среднего относительных величин δ_ε и δ_μ . В частности, если рассматривается хорошо проводящая немагнитная среда (удельная проводимость $\sigma \gg \omega \varepsilon_r$, $\varepsilon_r \approx 0$, $\varepsilon_i = \sigma/\omega$, $\mu_r = \mu_0 > 0$, $\mu_i = 0$), имеем $a = +1$ – эванесцентная волна является прямой волной.

Характеристический полевой (волновой) импеданс $\eta = \eta_r + i\eta_i = |\eta|H$ рассчитывается по формулам [13]

$$H = H_r + iH_i = |H_r| \operatorname{sgn}(|\varepsilon| \mu_r + |\mu| \varepsilon_r) + i |H_i| \operatorname{sgn}(|\varepsilon| \mu_i - |\mu| \varepsilon_i); \quad (13)$$

$$|H_r| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{(1 + \delta_\mu \delta_\varepsilon) \operatorname{sgn}(\mu_r \varepsilon_r)}{\sqrt{(1 + \delta_\mu^2)(1 + \delta_\varepsilon^2)}}}, \quad |H_i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{(1 + \delta_\mu \delta_\varepsilon) \operatorname{sgn}(\mu_r \varepsilon_r)}{\sqrt{(1 + \delta_\mu^2)(1 + \delta_\varepsilon^2)}}}. \quad (14)$$

Модуль импеданса $|\eta|$ вычисляется по формуле (9). Структура формул (14) такова, что при равенстве электрических и магнитных потерь ($\delta_\varepsilon = \delta_\mu$) одна из величин $|H_r|$, $|H_i|$ обращается в нуль, в зависимости от знака произведения $\mu_r \varepsilon_r$. Поверхностный импеданс, в свою очередь, определяется выражением

$$Z = Z_r + iZ_i = a|\eta|(H_r + iH_i) = |\eta| \left[|H_r| \operatorname{sgn}(|\varepsilon| \mu_i + |\mu| \varepsilon_i) + i |H_i| \operatorname{sgn}(|\mu| \varepsilon_r - |\varepsilon| \mu_r) \right]. \quad (15)$$

В полностью поглощающей среде ($\varepsilon_i > 0$ и $\mu_i > 0$), как следует из формулы (15), действительная часть поверхностного импеданса Z_r является положительной величиной. В отличие от общепринятой радиотехнической терминологии с временной зависимостью вида $\exp(+j\omega t)$, здесь положительные значения мнимой части поверхностного импеданса Z_i соответствуют импедансу ёмкостного, а не индуктивного типа. В согласии с принятой классификацией [15], назовём поверхностный импеданс *слабоиндуктивным*, если $-\pi/4 < \arg Z < 0$ для положительных значений Z_r , $-\pi < \arg Z < -3\pi/4$ для отрицательных значений Z_r , и *сильноиндуктивным*, если $-3\pi/4 < \arg Z < -\pi/4$. *Слабоёмкостному* поверхностному импедансу соответствуют значения аргумента из интервала $0 < \arg Z < \pi/4$ для $Z_r > 0$ и из интервала $3\pi/4 < \arg Z < \pi$ для $Z_r < 0$, тогда как *сильноёмкостному* поверхностному импедансу соответствуют значения аргумента из интервала $\pi/4 < \arg Z < 3\pi/4$.

Для того чтобы характеристический импеданс мог использоваться в качестве поверхностного импеданса в условии Леонтовича (1), требуется, чтобы глубина проникновения поля с граничной поверхности внутрь тела была небольшой по сравнению с длиной волны, а волна распространялась в направлении нормали к границе. Эти требования выполняются при большом модуле показателя преломления среды: $|n| = |k|/k_0 \gg 1$, где $k_0 = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ – волновое число в вакууме. В соответствии с формулой (9) имеем

$$|n| = \sqrt{|\varepsilon \mu|} = \sqrt{\frac{|\varepsilon_r \mu_r|}{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{(1 + \delta_\varepsilon^2)(1 + \delta_\mu^2)}. \quad (16)$$

Из формулы (16) следует, что увеличение потерь и рост абсолютных значений действительных частей проницаемостей способствуют применимости импедансного приближения. При больших

потерях ($|\delta_\varepsilon| \gg 1, |\delta_\mu| \gg 1$) вклад действительных частей проницаемостей становится несущественным, так как $|n| \approx \sqrt{|\varepsilon_i \mu_i| / (\varepsilon_0 \mu_0)}$.

Специальный случай $\delta_\varepsilon = \delta_\mu = \delta$ реализуется, если между проницаемостями среды существует пропорциональная зависимость $\mu = \alpha \varepsilon$, причём размерный постоянный коэффициент α является действительной величиной. Если коэффициент пропорциональности $\alpha > 0$, то $|H_i| = 0$ и поверхностный импеданс оказывается, согласно формулам (12) – (15), действительной величиной:

$$Z = \alpha^{1/2} \operatorname{sgn} \varepsilon_i. \quad (17)$$

Отрицательные значения поверхностного импеданса относятся к усиливающей среде ($\varepsilon_i < 0, \mu_i < 0$), которая неизбежно должна быть пространственно ограниченной. Если коэффициент α отрицательный, то поверхностный импеданс является чисто мнимой величиной:

$$Z = i|\alpha|^{1/2} \operatorname{sgn} \varepsilon_r. \quad (18)$$

Плоская поверхность с индуктивным поверхностным импедансом обладает способностью поддерживать незатухающую поверхностную волну.

Если проницаемости среды связаны соотношением $\mu = \alpha \varepsilon^*$, где символ « $*$ » используется для обозначения комплексно сопряжённой величины, то реализуется специальный случай $\delta_\varepsilon = -\delta_\mu = \delta$. В зависимости от знака величины $\mu_r \varepsilon_r$ волновое число, а также показатель преломления оказывается либо действительным, либо чисто мнимым. Как следует из формулы (16), условие применимости импедансного приближения при этом не изменяется. Для отрицательных значений параметра α поверхностный импеданс является комплексной величиной, он принимает вид

$$Z = i \frac{|\alpha|^{1/2}}{|\varepsilon|} \varepsilon^* = -i \frac{|\alpha|^{1/2}}{|\mu|} \mu. \quad (19)$$

При положительных значениях коэффициента пропорциональности α волновое число оказывается действительным: $k = \omega \alpha^{1/2} |\varepsilon|$ за счёт того, что потери по одному из материальных параметров полностью компенсируются усилением по другому параметру [16]. Комплексный поверхностный импеданс должен вычисляться по формуле

$$Z = a \frac{|\alpha|^{1/2}}{|\varepsilon|} \varepsilon^* = a \frac{|\alpha|^{1/2}}{|\mu|} \mu. \quad (20)$$

Как следует из формулы (12), идентификатор типа волны в этом случае оказывается неопределённым. Ему можно придать значение $a = +1$, если в процессе перехода к «псевдопассивной» среде первоначально положительная величина $\varepsilon_r \mu_i + \varepsilon_i \mu_r$ стремится к нулю, оставаясь положительной.

Условие применимости импедансного приближения $|n| \gg 1$, где модуль показателя преломления представлен формулой (16), справедливо в предположении, что объём V , в котором исследуется электромагнитное поле, не заполнен каким-либо веществом, то есть характеризуется электрической постоянной ε_0 и магнитной постоянной μ_0 . Его можно обобщить, опираясь на закон Снеллиуса. Он гласит, что отношение синусов углов преломления и падения равно отношению показателя преломления n_1 вещества в объёме V к показателю преломления внешней среды n_2 . Угол преломления будет близок к нулю при условии, если $|n_2/n_1| \gg 1$. Имея в виду формулы (8), это условие можно представить относительно волнового импеданса в виде

$$|n_2| \gg \frac{|\varepsilon_1|}{|\varepsilon_2|} |\eta_1| \quad \text{или в виде} \quad |n_2| \ll \frac{|\mu_2|}{|\mu_1|} |\eta_1|, \quad (21)$$

где по-прежнему индекс 2 относится к внешней среде, а индекс 1 – к среде объёма V .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гульельми А. В. // Физика Земли. – 2009. – Т. 45. – № 9. – С. 12–15.
2. Альшиц В. И., Любимов В. Н. // УФН. – 2010. – Т. 180. – Вып. 1. – С. 106.
3. Бердник С. Л., Пенкин Д. Ю., Катрич В. А. и др. // Радиофизика и радиоастрономия. – 2014. – Т. 19. – № 1. – С. 57–80.
4. Леонтович М. А. // Известия АН СССР. Сер. физич. – 1944. – Т. 8. – № 1. – С. 16–22.
5. Леонтович М. А. // Исследования по распространению радиоволн. Сб. 2-й. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 5–12.
6. Миллер М. А. Леонтович – Левин. Творческое взаимодействие. – Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1993. – 55 с. (Препринт ИПФ № 344).
7. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. I. – М.: Мир, 1978. – 548 с.
8. Пермитин Г. В., Миллер М. А. // Физическая энциклопедия. Т. 2. – М.: Советская энциклопедия, 1990. – С. 127–129.
9. Веселаго В. Г. // ФТТ. – 1966. – Т. 8. – № 12. – С. 3571–3573.
10. Фисанов В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2014. – Т. 57. – № 5. – С. 111–116.
11. Фёдоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. – Минск: Изд-во АН БССР, 1958. – 384 с.
12. Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48. – № 10. – С. 1202–1207.
13. Фисанов В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2017. – Т. 60. – № 5. – С. 47–51.
14. Малюжинец Г. Д. // УФН. – 1959. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 321–334.
15. Макаров Г. И., Новиков В. В., Рыбачек С. Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. – М.: Наука, 1991. – 196 с.
16. Dragoman D. // Opt. Commun. – 2011. – V. 284. – No. 8. – P. 2095–2098.

¹ Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова
Томского государственного университета, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 29.01.18.

² Институт физического материаловедения СО РАН, г. Улан-Удэ, Россия