П. А. Крылов, А. А. Туганбаев

Кольца формальных матриц и модули над ними

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 512
ББК 22.14
К85

Крылов П. А., Туганбаев А. А.
К85 Кольца формальных матриц и модули над ними. — М.: МЦНМО, 2017. — 192 с.

ISBN 978-5-4439-1115-1

Данная книга является первой, где систематически изучаются формальные матрицы. Элементы этих матриц принадлежат нескольким (в общем случае разным) кольцам и бимодулям. Частным случаем формальных матриц второго порядка являются контексты Мориты, поначалу предназначавшиеся для описания эквивалентностей между категориями модулей. Они также очень удобны для переноса свойств с одного кольца на другое. Существуют аналоги контекстов Мориты для полуколец, хопфовых и квазихопфовых алгебр, коколец и категорий. Формальные матрицы весьма полезны для построения колец с односторонними несимметричными свойствами. Подробно исследуются инъективные, плоские, проективные и наследственные модули над кольцами формальных матриц. Вводится и изучается понятие определителя формальной матрицы над коммутативным кольцом. Его свойства могут отличаться в некоторых случаях от свойств обычного определителя. Также группы Гротендика и Уайтхеда кольца формальных матриц выражаются через соответствующие группы колец с главной диагонали.

ББК 22.14

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (*проект* 16–11–10013).

ISBN 978-5-4439-1115-1

© Крылов П. А., Туганбаев А. А., 2017
© МЦНМО, 2017

Содержание

Предисловие 5

Список обозначений 9

Глава 1. Кольца формальных матриц **11**

§ 1. Построение колец формальных матриц порядка 2 11
§ 2. Примеры колец формальных матриц порядка 2 16
§ 3. Кольца формальных матриц порядка $n \geqslant 2$ 19
§ 4. Некоторые идеалы колец формальных матриц 23
§ 5. Кольцевые свойства 27
§ 6. Аддитивные задачи 33

Глава 2. Модули над кольцами формальных матриц **41**

§ 7. Первоначальные свойства модулей над кольцами формальных матриц 41
§ 8. Малые и существенные подмодули 55
§ 9. Цоколь и радикал 60
§ 10. Инъективные модули и инъективные оболочки 64
§ 11. Максимальное кольцо частных 72
§ 12. Плоские модули 79
§ 13. Проективные и наследственные модули и кольца 86
§ 14. Эквивалентности между категориями R-mod, S-mod и K-mod 93
§ 15. Наследственные кольца эндоморфизмов абелевых групп 103

Глава 3. Кольца формальных матриц над данным кольцом . **109**

§ 16. Кольца формальных матриц над кольцом R 109
§ 17. Некоторые свойства колец формальных матриц над R 118
§ 18. Характеризация матриц множителей 121
§ 19. Классификация колец формальных матриц 127
§ 20. Проблема изоморфизма 135

§ 21. Определители формальных матриц 140
§ 22. Некоторые теоремы о формальных матрицах 148

Глава 4. Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц 157

§ 23. Эквивалентность двух категорий проективных модулей 157
§ 24. Группа $K_0(A, B)$ 162
§ 25. Группа K_0 кольца формальных матриц 167
§ 26. Группа K_1 кольца формальных матриц 172
§ 27. Группы K_0 и K_1 колец матриц порядка $n \geqslant 2$ 176

Литература 181

Предметный указатель 189

Предметный указатель 189

Предисловие

Большое значение матриц для математики и её приложений общеизвестно. Прежде всего это относится к числовым матрицам. Активно изучаются и используются также матрицы со значениями в кольцах (см., например, [19] и [79]), полукольцах (см., например, [35]), булевых алгебрах (см., например, [60]), полугруппах и решётках. Рассматриваемые в этой книге матрицы называются *формальными матрицами* или *обобщёнными матрицами*. Что это за матрицы? Предварительно поясним, что элементы этих матриц принадлежат нескольким (в общем случае разным) кольцам и бимодулям.

В своей известной работе [81] Морита ввёл то, что сейчас называют *контекстом Мориты* или *ситуацией предэквивалентности*. Контекст Мориты $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ состоит из колец R и S, бимодулей M и N, а также связанных между собой определённым образом бимодульных гомоморфизмов φ и ψ. Первоначально контексты Мориты предназначались для описания эквивалентностей между категориями модулей. Они также очень удобны для переноса свойств с одного кольца R на другое кольцо S; см., например, [5, 58, 109].

Контексты Мориты были предметом исследований большого числа публикаций. Существуют аналоги контекстов Мориты для полуколец, хопфовых и квазихопфовых алгебр, коколец и категорий. По данному контексту Мориты $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ можно естественным образом построить кольцо матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ с обычными матричными операциями. Это кольцо называется *кольцом контекста Мориты*, или *кольцом формальных матриц* (порядка 2), или *кольцом обобщённых матриц*. Эта вторая точка зрения на контекст Мориты как на матричное кольцо и преобладает в книге. Не составляет большого труда определить кольцо формальных матриц любого порядка n. Итак, мы уделяем основное внимание кольцам формальных матриц и модулям над такими кольцами.

Кольца формальных матриц постоянно появляются в теории колец и модулей, теории конечномерных алгебр (см., например, [8], [9]) и при изучении колец эндоморфизмов абелевых групп (см., напри-

мер, [64]). Они встречаются в функциональном анализе, прежде всего в связи с операторными алгебрами (см., например, [14] и [28]).

Среди колец формальных матриц выделяются кольца треугольных матриц или более общие объекты — кольца блочных треугольных матриц. Они нередко возникают при исследовании некоторых конечномерных алгебр и операторных алгебр. Помимо прочего, кольца формальных треугольных матриц служат источником примеров колец с асимметричными свойствами.

Книга содержит далеко не все существующие результаты о кольцах формальных матриц. Однако авторы уверены, что содержание книги достаточно для того, чтобы читатель смог составить представление о существующих направлениях исследований в этой области. Здесь впервые систематически изложена теория колец формальных матриц и модулей над ними.

В книге четыре главы. Первая глава посвящена кольцам формальных матриц порядка 2 и иногда произвольного порядка n. В главе 2 рассматриваются модули над кольцом формальных матриц порядка 2. Подробно исследуются инъективные, плоские, проективные и наследственные модули. В главе 3 вводится и изучается один частный вид колец формальных матриц — кольца формальных матриц над данным кольцом. Здесь много внимания уделяется свойствам отдельных матриц. С одной стороны, кольца формальных матриц порядка n над кольцом R наиболее близки к обычному кольцу $M(n, R)$ всех $(n \times n)$-матриц над R. В то же время они приобретают особенности, отсутствующие у кольца $M(n, R)$. Например, два кольца формальных матриц одного порядка над данным кольцом могут быть не изоморфными; см. теорему 20.3. Кроме того, определитель формальной матрицы A над коммутативным кольцом не всегда совпадает с определителем транспонированной матрицы к A; см. свойство 7 из § 21. Далее, если F — поле, то по классической теореме Нётер — Сколема каждый автоморфизм F-алгебры $M(n, F)$ является внутренним. Но существуют кольца формальных матриц порядка n над F, у которых группа внешних автоморфизмов содержит симметрическую группу S_m для некоторого m, где $2 \leqslant m \leqslant n$; см. пункт А из § 16.

В главе 4 группы Гротендика и Уайтхеда кольца формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ выражаются через соответствующие группы колец R и S.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули считаются унитарными левыми, если не оговорено противное. Гомоморфизмы пишем слева от аргументов. За исключением

§ 15, композиция отображений $\alpha\colon X \to Y$ и $\beta\colon Y \to Z$ обозначается через $\alpha\beta$. Таким образом, $(\alpha\beta)(x) = \beta(\alpha(x))$ для всех $x \in X$. (В § 15 предполагается, что $(\beta\alpha)(x) = \beta(\alpha(x))$.)

В книге используются стандартные понятия и обозначения теории колец и модулей; см., например, [71, 90, 100, 102, 111]. Если R — кольцо, то $J(R)$ — его радикал Джекобсона, $C(R)$ — его центр, $M(n, R)$ — кольцо всех $(n \times n)$-матриц над R, R-mod — категория всех левых R-модулей. Если A — R-модуль, то $\mathrm{End}_R A$ или $\mathrm{End}_R(A)$ — его кольцо эндоморфизмов.

Список обозначений

E_{ij}	— матричная единица
$\|A\|$	— определитель матрицы A
$d(A)$	— определитель формальной матрицы A
$A \otimes B$	— кронекерово произведение матриц A и B
$M(n, R)$	— кольцо всех $(n \times n)$-матриц над кольцом R
$M(n, R, \{s_{ijk}\})$ или $M(n, R, \Sigma)$	— кольцо всех формальных матриц порядка n над кольцом R с системой множителей $\{s_{ijk}\} = \Sigma$
$M(n, R, s)$	— кольцо всех формальных матриц порядка n над кольцом R с множителем s
R°	— противоположное кольцо к кольцу R
$P(R)$	— первичный радикал кольца R
$J(R)$	— радикал Джекобсона кольца R
$C(R)$	— центр кольца R
$Q(R)$	— максимальное левое кольцо частных кольца R
$R \times S$	— прямое произведение колец R и S
$A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$	— прямая сумма модулей $A_1, \ldots, A_n$
$\operatorname{Ker} \varphi$ или $\operatorname{Ker}(\varphi)$	— ядро гомоморфизма φ
$\operatorname{Im} \varphi$ или $\operatorname{Im}(\varphi)$	— образ гомоморфизма φ
$\operatorname{Rad} A$	— радикал модуля A
$\operatorname{Soc} A$	— цоколь модуля A
$\bar{Z}$	— замыкание подмодуля Z модуля A
$\widehat{A}$	— инъективная оболочка модуля A
A^*	— модуль характеров модуля A
$\varinjlim_I A_i$	— предел прямого спектра модулей A_i
R-mod (mod-R)	— категория левых (правых) модулей над кольцом R

$P(R)$ — категория конечно порожденных проективных R-модулей

$P(A)$ — категория конечно A-проективных модулей

$\mathrm{End}_R A$ или $\mathrm{End}_R(A)$ — кольцо эндоморфизмов R-модуля A

$\mathrm{Biend}_R A$ — кольцо биэндоморфизмов R-модуля A

$\mathrm{End}\, G$ — кольцо эндоморфизмов абелевой группы G

$\mathrm{Hom}_R(A, B)$ — группа гомоморфизмов из R-модуля A в R-модуль B

$\mathrm{Hom}(G, H)$ — группа гомоморфизмов из абелевой группы G в абелеву группу H

$M \otimes_R N$ — тензорное произведение правого R-модуля M на левый R-модуль N

$K_0(R)$ — группа Гротендика кольца R

$K_0(A)$ — группа Гротендика категории конечно A-проективных модулей

$K_1(R)$ — группа Уайтхеда кольца R

Глава 1

Кольца формальных матриц

Определяются кольца формальных матриц порядка 2 и произвольного порядка n, рассматриваются их основные свойства, приводятся примеры таких колец, указываются связи колец формальных матриц с кольцами эндоморфизмов модулей и системами ортогональных идемпотентов колец.

Вычисляются радикал Джекобсона и первичный радикал кольца формальных матриц. Выясняется, когда кольцо формальных матриц артиново, нётерово, имеет стабильный ранг 1, регулярно или обратимо-регулярно.

Последний параграф 6 посвящён чистым и k-хорошим матричным кольцам.

§ 1. Построение колец формальных матриц порядка 2

Пусть даны два кольца R и S, R-S-бимодуль M и S-R-бимодуль N. Обозначим через K множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \quad \text{где } r \in R,\ s \in S,\ m \in M,\ n \in N.$$

Относительно матричного сложения K является абелевой группой. Чтобы превратить K в кольцо, нужно уметь вычислять «произведение» $mn \in R$ и «произведение» $nm \in S$. Корректно это можно сделать следующим образом.

Предположим, что даны бимодульные гомоморфизмы $\varphi : M \otimes_S N \to R$ и $\psi : N \otimes_R M \to S$. Полагаем $\varphi(m \otimes n) = mn$ и $\psi(n \otimes m) = nm$ для всех $m \in M$ и $n \in N$. Теперь матрицы из K можно умножать, как в обычном кольце матриц:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr_1 + mn_1 & rm_1 + ms_1 \\ nr_1 + sn_1 & nm_1 + ss_1 \end{pmatrix},$$

$$r, r_1 \in R, \quad s, s_1 \in S, \quad m, m_1 \in M, \quad n, n_1 \in N.$$

Уточним, что rm_1, ms_1, nr_1, sn_1 — это соответствующие модульные произведения. Пусть также для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполнены равенства ассоциативности $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$. Тогда относительно указанных операций сложения и умножения K является кольцом. При проверке аксиом кольца нужно также учесть основные свойства тензорного произведения и бимодульность гомоморфизмов φ и ψ. Верно и обратное: если K — кольцо, то выполнены указанные соотношения ассоциативности. Кольцо K называется *кольцом формальных матриц* (порядка 2) и обозначается через $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. Используется также термин *кольцо обобщённых матриц*. Иногда мы будем просто писать «кольцо матриц».

Если $N = 0$ или $M = 0$, то K — *кольцо формальных верхних или нижних треугольных матриц*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix} \quad \text{соответственно.}$$

Для его задания гомоморфизмы φ и ψ не нужны.

Образы I и J гомоморфизмов φ и ψ являются идеалами колец R и S соответственно. Они называются *идеалами следа* кольца K. Будем говорить, что K — *кольцо с нулевыми идеалами следа* или *тривиальное* кольцо, в случае, когда $\varphi = 0 = \psi$, то есть $I = 0 = J$. Конечно, кольцо формальных треугольных матриц является кольцом с нулевыми идеалами следа.

Договоримся через MN (соответственно NM) обозначать множество всех конечных сумм элементов вида mn (соответственно nm). Выполнены равенства

$$I = MN, \quad J = NM, \quad IM = MJ, \quad NI = JN.$$

Как правильно сформулировать проблему изучения колец формальных матриц? Под изучением кольца $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ естественно понимать выяснение того, как свойства этого кольца зависят от свойств колец R и S, бимодулей M и N, гомоморфизмов φ и ψ.

Иногда удобно отождествлять матрицы с соответствующими элементами. Например, матрицу $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ можно отождествлять с элементом $r \in R$ и т. п. Аналогичные соглашения принимаются для множеств матриц. Например, множество матриц $\left(\begin{smallmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ записывается в виде (X, Y) (или просто X при $Y = 0$). Аналогичные правила действуют для матриц с нулевой верхней строкой.

Пусть T — некоторое кольцо. Сохраним в T прежнее сложение и определим новое умножение $\circ$ формулой $x \circ y = yx$, $x, y \in T$. В результате мы получим новое кольцо T°, называемое *противоположным* к T. Непосредственно проверяется, что противоположное кольцо к $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ изоморфно кольцу формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R^\circ & N \\ M & S^\circ \end{smallmatrix}\right)$, где N рассматривается как R°-S°-бимодуль, а M рассматривается как S°-R°-бимодуль. Попутно заметим, что

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} S & N \\ M & R \end{pmatrix}.$$

Если V — правый T-модуль, то соотношение $tv = vt$, $t \in T$, $v \in V$, задаёт на V структуру левого T°-модуля, и наоборот.

Если $M = 0 = N$, то кольцо K можно отождествить с прямым произведением $R \times S$. Обычно мы считаем, что произведение $R \times S$ — кольцо матриц.

Пусть K — некоторое кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ формальных матриц. Используя соглашение о записях матриц, можно записать равенство

$$K = \begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. При таком подходе действие соответствующих гомоморфизмов φ и ψ совпадает с умножением в кольце K.

В определённом смысле верно обратное. Именно, пусть абстрактное кольцо T содержит идемпотент e, не равный нулю или единице. Можно образовать кольцо формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} eTe & eT(1-e) \\ (1-e)Te & (1-e)T(1-e) \end{pmatrix}.$$

Кольца T и K изоморфны. Соответствие

$$t \to \begin{pmatrix} ete & et(1-e) \\ (1-e)te & (1-e)t(1-e) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

задаёт соответствующий изоморфизм.

Пусть K — некоторое кольцо формальных матриц, записанное в виде (1). Нетрудно указать строение идеалов и факторколец кольца K (см. также окончание § 4 и предложения 17.3 и 17.4).

Если L — некоторый идеал кольца K, то непосредственно проверяется, что L совпадает с множеством матриц

$$\begin{pmatrix} eLe & eL(1-e) \\ (1-e)Le & (1-e)L(1-e) \end{pmatrix},$$

где eLe и $(1-e)L(1-e)$ — идеалы колец R и S соответственно, $eL(1-e)$ и $(1-e)Le$ — подбимодули в M и N соответственно. Подгруппы, находящиеся в одной из четырёх позиций в L, совпадают с множествами соответствующих компонент элементов из L.

Образуем группу матриц $\overline{K}$:

$$\begin{pmatrix} eKe/eLe & eK(1-e)/eL(1-e) \\ (1-e)Ke/(1-e)Le & (1-e)K(1-e)/(1-e)L(1-e) \end{pmatrix}.$$

В действительности мы имеем кольцо формальных матриц $\overline{K}$, понимаемое в том широком смысле, о котором мы условились. Умножение матриц в $\overline{K}$ индуцируется умножением в K. Непосредственно проверяется, что отображение

$$K/L \to \overline{K}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} + L \to \begin{pmatrix} \bar{r} & \overline{m} \\ \bar{n} & \bar{s} \end{pmatrix},$$

является кольцевым изоморфизмом, где черта обозначает соответствующий смежный класс.

Конкретное кольцо формальных матриц определяется с помощью двух бимодульных гомоморфизмов φ и ψ. Выбор иной пары гомоморфизмов приводит в общем случае к другому кольцу. Можно сформулировать задачу о классификации колец формальных матриц в зависимости от соответствующих пар бимодульных гомоморфизмов. С этой задачей связана следующая **проблема изоморфизма**.

Пусть K и K_1 — два кольца формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами φ, ψ и φ_1, ψ_1 соответственно. Как должны быть связаны гомоморфизмы φ, ψ и φ_1, ψ_1, чтобы существовал изоморфизм $K \cong K_1$?

Насколько много колец формальных матриц? Из изложенного выше следует, что класс колец формальных матриц совпадает с классом колец, имеющих нетривиальные идемпотенты (если считать прямые произведения колец кольцами матриц).

Класс колец формальных матриц также совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму. Действительно, пусть $G = A \oplus B$ — правый модуль над некоторым кольцом T. Его кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} \mathrm{End}_T A & \mathrm{Hom}_T(B, A) \\ \mathrm{Hom}_T(A, B) & \mathrm{End}_T B \end{pmatrix}$$

с обычными операциями сложения и умножения матриц (в качестве произведения гомоморфизмов берётся их композиция). И наоборот,

для кольца $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ можно записать разложение

$$K_K = (R, M) \oplus (N, S)$$

в прямую сумму правых идеалов и убедиться, что кольцо $\mathrm{End}_K(K)$ изоморфно кольцу $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$.

Есть много видов колец, которые не обязательно имеют матричное происхождение, но являются близкими к кольцам формальных матриц. В частности, встречаются разнообразные кольца треугольных матриц. В работе [32] изучались так называемые *тривиальные расширения* колец, определяемые следующим образом. Если R — кольцо, а M — R-R-бимодуль, то обозначим через T прямую сумму абелевых групп R и M, $T = \{(r, m) \mid r \in R,\ m \in M\}$. Группа T становится кольцом, если умножение задаётся правилом $(r, m)(r_1, m_1) = (rr_1, rm_1 + mr_1)$. Это кольцо и является тривиальным расширением кольца R с помощью бимодуля M.

Рассмотрим теперь кольцо треугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ и в нём подкольцо $\Gamma = \{\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \mid r \in R,\ m \in M\}$. Кольца T и Γ изоморфны при соответствии $(r, m) \to \left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, тривиальные расширения состоят из треугольных матриц.

Любое кольцо формальных треугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ является тривиальным расширением. Действительно, M можно рассматривать как $(R \times S)$-$(R \times S)$-бимодуль, считая, что $(r, s)m = rm$, $m(r, s) = ms$. Возьмём тривиальное расширение $T = \{((r, s), m) \mid r \in R,\ s \in S,\ m \in M\}$ кольца $R \times S$. Соответствие $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) \to ((r, s), m)$ задаёт изоморфизм колец K и T. Впрочем, имеется класс колец треугольных матриц, содержащий тривиальные расширения. Пусть $f : R \to S$ — кольцевой гомоморфизм. Тогда в кольце $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ все матрицы вида $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & f(r) \end{smallmatrix}\right)$ образуют подкольцо.

Приведём более общую конструкцию расширения колец (см. [87]). Пусть снова M — R-R-бимодуль, а $\Phi : M \otimes_R M \to R$ — некоторый R-R-бимодульный гомоморфизм. Определим умножение в $R \oplus M$ правилом

$$(r, m)(r_1, m_1) = (rr_1 + \Phi(m \otimes m_1), rm_1 + mr_1).$$

Это умножение ассоциативно в точности тогда, когда

$$\Phi(m \otimes m_1)m_2 = m\,\Phi(m_1 \otimes m_2) \tag{2}$$

для всех $m, m_1, m_2 \in M$. В таком случае $R \oplus M$ является кольцом. Это кольцо обозначается $R \times_\Phi M$ и называется *полутривиальным расширением* кольца R с помощью M и Φ.

Кольца формальных матриц являются полутривиальными расширениями. Пусть $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц с бимодульными

гомоморфизмами φ и ψ. Обозначим $T = R \times S$, $V = M \times N$ и рассмотрим V как естественный T-T-бимодуль. Через Ф обозначим T-T-бимодульный гомоморфизм

$$(\varphi, \psi) : V \otimes_T V \to T.$$

Он удовлетворяет соответствующему равенству (2). Следовательно, имеем полутривиальное расширение $T \times_\Phi V$. Кольца $T \times_\Phi V$ и $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ изоморфны при соответствии

$$(r, s) + (m, n) \to \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, любое полутривиальное расширение вкладывается в подходящее кольцо формальных матриц. В самом деле, пусть $T \times_\Phi V$ — полутривиальное расширение. Равенство, соответствующее (2), означает, что существует кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} T & V \\ V & T \end{smallmatrix}\right)$. Его бимодульные гомоморфизмы совпадают с Ф. Отображение

$$T \times_\Phi V \to \begin{pmatrix} T & V \\ V & T \end{pmatrix}, \quad (t, v) \to \begin{pmatrix} t & v \\ v & t \end{pmatrix},$$

является вложением колец. Таким образом, можно отождествить $T \times_\Phi V$ с кольцом матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} t & v \\ v & t \end{smallmatrix}\right)$.

Пусть T — некоторое коммутативное кольцо. Если кольца R и S являются T-алгебрами, то кольцо $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ также является T-алгеброй. В этом случае говорят, что K — *алгебра формальных матриц*.

§ 2. Примеры колец формальных матриц порядка 2

Приведём примеры колец формальных матриц.

1. Пусть M — правый модуль над некоторым кольцом S, $R = \mathrm{End}_S M$, $M^* = \mathrm{Hom}_S(M, S)$. Тогда M — R-S-бимодуль и M^* — S-R-бимодуль, где

$$(s\alpha)m = s\alpha(m), \quad (\alpha r)m = \alpha(r(m)),$$
$$\alpha \in M^*, \quad s \in S, \quad r \in R, \quad m \in M.$$

Существуют R-R-бимодульный гомоморфизм $\varphi : M \otimes_S M^* \to R$ и S-S-бимодульный гомоморфизм $\psi : M^* \otimes_R M \to S$, определяемые правилами

$$\Big(\varphi\Big(\sum m_i \otimes \alpha_i\Big)\Big)(m) = \sum m_i \alpha_i(m), \quad \psi\Big(\sum \alpha_i \otimes m_i\Big) = \sum \alpha_i(m_i),$$

где $m_i, m \in M$ и $\alpha_i \in M^*$. Для φ и ψ выполняются два закона ассоциативности. Следовательно, получаем кольцо матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ M^* & S \end{smallmatrix}\right)$.

2. Пусть X и Y — левый и правый идеалы кольца R соответственно. Далее, пусть S — любое подкольцо в R, удовлетворяющее условию $YX \subseteq S \subseteq X \cap Y$. Тогда $\left(\begin{smallmatrix} R & X \\ Y & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц, для которого действия отображений φ и ψ сводятся к умножению в R. В качестве специального случая получаем кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & Re \\ eR & eRe \end{smallmatrix}\right)$, где e — некоторый идемпотент.

3. Пусть Y — правый идеал кольца R, и пусть S — любое подкольцо в R, которое содержит Y в качестве идеала. Тогда S называется *подыдеализатором* идеала Y в R и $\left(\begin{smallmatrix} R & R \\ Y & S \end{smallmatrix}\right)$ является кольцом формальных матриц.

4. Кольца эндоморфизмов абелевых групп. Если абелева группа G является прямой суммой, $G = A \oplus B$, то её кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} G$ будет кольцом формальных матриц; см. § 1. Абелевы группы предоставляют много интересных и полезных примеров колец формальных матриц. Прежде всего, это кольца треугольных матриц. Так, кольца эндоморфизмов групп $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}$ изоморфны кольцам

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{Z}}_p & A_p \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

соответственно, где $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, A_p — поле p-адических чисел.

Кольцо эндоморфизмов p-группы $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^m)$, $n < m$, является содержательной иллюстрацией к понятию кольца формальных матриц. Его можно отождествить с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^m} \end{pmatrix}.$$

Обозначим это кольцо через K или $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$.

Как умножаются матрицы в кольце K? Прежде всего заметим, что $\mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}_{p^m}/(p^{m-n} \cdot 1)$. Поэтому кольца R и S действуют на M и N обычным, единственно возможным способом. Далее, перейдём к гомоморфизмам $\varphi : M \otimes_S N \to R$ и $\psi : N \otimes_R M \to S$. Если рассмотреть K как исходное кольцо эндоморфизмов, то действие φ и ψ сведётся к композиции соответствующих гомоморфизмов. Принимая это во внимание, приходим к следующему. Если $\bar{a} \in M$ и $\bar{b} \in N$, где черта обозначает класс вычетов, то

$$\varphi(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \bar{a} \circ \bar{b} = p^{m-n}\bar{a}\bar{b}.$$

Далее, имеем

$$\psi(\bar{b} \otimes \bar{a}) = \bar{b} \circ \bar{a} = p^{m-n}\bar{b}\bar{a},$$

где последние символы $\bar{b}$ и $\bar{a}$ обозначают классы вычетов в $\mathbb{Z}_{p^m}$ с представителями b и a.

Получается, что идеалы следа I и J кольца K равны идеалу $(p^{m-n}\cdot 1)$ кольца $\mathbb{Z}_{p^n}$ и идеалу $(p^{m-n}\cdot 1)$ кольца $\mathbb{Z}_{p^m}$ соответственно. Отсюда следует, что $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Существует сюръективный гомоморфизм $e\colon S \to R$, $e(\bar{y}) = \bar{y}$, $\bar{y} \in S$. Кроме того, $\operatorname{Ker}(e) \subseteq J(S)$, и верно равенство $e(\bar{b} \circ \bar{a}) = \bar{a} \circ \bar{b}$.

В работе [25] детально рассматривается случай $n = 1$ и $m = 2$. Найдены все обратимые матрицы кольца K. Это используется для построения криптосистемы.

5. Полные кольца матриц. Пусть R — некоторое кольцо. Полное кольцо матриц $M(n, R)$ может быть представлено в виде кольца формальных матриц порядка 2

$$M(n,R) = \begin{pmatrix} R & M(1\times(n-1),R) \\ M((n-1)\times 1,R) & M(n-1,R) \end{pmatrix}.$$

Это кольцо даёт пример кольца блочных матриц. Более общая ситуация появится в доказательстве предложения 3.3 и в первом абзаце после этого доказательства.

6. (См. [26].) Пусть R — кольцо, G — конечная подгруппа группы автоморфизмов кольца R, а R^G — кольцо инвариантов кольца R, т. е. R^G — подкольцо $\{x \in R \mid x^g = x \text{ для всех } g \in G\}$. Рассмотрим косое групповое кольцо $R * G$, состоящее из всех формальных сумм вида

$$\sum_{g\in G} r_g g, \quad r_g \in R.$$

Суммы складываются покомпонентно, при умножении используются закон дистрибутивности и соотношение

$$rg \cdot sh = rs^{g^{-1}} gh$$

для всех $r, s \in R$ и $g, h \in G$. Ясно, что R является левым и правым R^G-модулем. Можно также рассматривать R как левый и правый $R * G$-модуль следующим образом: для любых элементов $x = \sum_{g\in G} r_g g \in R * G$ и $r \in R$ полагаем

$$x \cdot r = \sum_{g\in G} r_g r^{g^{-1}}, \quad r \cdot x = \sum_{g\in G} (r r_g)^g.$$

Отображения

$$\varphi\colon R \otimes_{R*G} R \to R^G \quad \text{и} \quad \psi\colon R \otimes_{R^G} R \to R * G$$

определяются с помощью соотношений

$$\varphi(x \otimes y) = \sum_{g \in G} (xy)^g \quad \text{и} \quad \psi(y \otimes x) = \sum_{g \in G} yx^{g^{-1}} g$$

соответственно.

Два условия ассоциативности выполняются, и в итоге получаем кольцо

$$\begin{pmatrix} R^G & R \\ R & R * G \end{pmatrix}.$$

§ 3. Кольца формальных матриц порядка $n \geqslant 2$

Приведём ряд замечаний о кольцах формальных матриц произвольного порядка n. Рассмотренный в § 1 случай $n = 2$ достаточен для понимания того, как надо определять такие кольца.

Фиксируем натуральное число $n \geqslant 2$. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — кольца, а M_{ij} — R_i-R_j-бимодули, причём $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что для любых таких $i, j, k = 1, \ldots, n$, что $i \neq j$, $j \neq k$, задан R_i-R_k-бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk} \colon M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}.$$

Для индексов $i = j$ и $j = k$ считаем, что φ_{iik} и φ_{ikk} — это канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \to M_{ik}, \quad M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \to M_{ij}.$$

Вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ пишем $a \circ b$ или просто ab. Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$, $c \in M_{k\ell}$ и индексов i, j, k, ℓ.

Обозначим через K множество всех матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij}. Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K является кольцом. Его можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & R_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Говорят, что K — *кольцо формальных матриц порядка* n. Если $M_{ij} = 0$ для всех i, j, удовлетворяющих условию $i < j$ (соответственно $j < i$), то мы говорим, что имеется *кольцо формальных нижних* (соответственно *верхних*) *треугольных матриц*.

Для каждого $k = 1, \dots, n$ положим

$$I_k = \sum_{i \neq k} \operatorname{Im}(\varphi_{kik}), \quad \text{где } \varphi_{kik} \colon M_{ki} \otimes_{R_i} M_{ik} \to R_k,$$

или, по-другому, $I_k = \sum_{i \neq k} M_{ki} M_{ik}$, где $M_{ki} M_{ik}$ — множество всех конечных сумм элементов вида ab, $a \in M_{ki}$, $b \in M_{ik}$. Тогда I_k — идеал кольца R_k. Назовём эти идеалы $I_1, \dots, I_n$ *идеалами следа* кольца K.

Для лучшего понимания строения колец формальных матриц проясним их связь с идемпотентами и кольцами эндоморфизмов.

Предложение 3.1. *Некоторое кольцо K является кольцом формальных матриц порядка $n \geqslant 2$ в точности тогда, когда в K существует полная ортогональная система из n ненулевых идемпотентов.*

Доказательство. Если K — кольцо формальных матриц порядка n, то матричные единицы $E_{11}, \dots, E_{nn}$ (см. § 16) образуют нужную систему идемпотентов кольца K.

Обратно, если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — полная ортогональная система ненулевых идемпотентов некоторого кольца T, то T изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} e_1Te_1 & e_1Te_2 & \dots & e_1Te_n \\ e_2Te_1 & e_2Te_2 & \dots & e_2Te_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ e_nTe_1 & e_nTe_2 & \dots & e_nTe_n \end{pmatrix};$$

в связи с таким кольцом см. § 1. □

Случай прямых сумм двух модулей, рассмотренный в § 1, можно перенести на прямые суммы любого конечного числа слагаемых.

Предложение 3.2. *Класс колец формальных матриц порядка n совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму n ненулевых слагаемых.*

В конкретных задачах могут появляться кольца формальных матриц любого порядка n. В общей теории обычно изучаются кольца формальных матриц порядка 2 в основном по причине технического удобства. Случай $n > 2$ иногда можно в определённом смысле свести к случаю матриц порядка 2.

Предложение 3.3. *Кольцо формальных матриц порядка $n > 2$ изоморфно некоторому кольцу формальных матриц порядка k для каждого $k = 2, \dots, n-1$.*

Доказательство. Утверждение становится вполне понятным, если рассмотреть представление колец матриц с помощью идемпотентов или колец эндоморфизмов; см. предложения 3.1 и 3.2. Достаточно определённым образом «укрупнять» идемпотенты или прямые слагаемые. Есть, конечно, и прямое доказательство. Например, возьмём $k=2$. Введём следующие обозначения для множеств матриц. Положим $R = R_1$, $M = (M_{12}, \ldots, M_{1n})$,

$$N = \begin{pmatrix} M_{21} \\ \vdots \\ M_{n1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} R_2 & M_{23} & \ldots & M_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ M_{n2} & M_{n3} & \ldots & R_n \end{pmatrix}.$$

Здесь S — кольцо формальных матриц порядка $n-1$, M — R-S-бимодуль, N — S-R-бимодуль, причём модульные умножения определяются как произведения строк и столбцов на матрицы. Гомоморфизмы φ_{ijk}, задающие умножение в K, индуцируют бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$. При этом верны два нужных закона ассоциативности. В результате имеем кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ и изоморфизм $K \cong \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. Изоморфизм получается путём разбиения каждой матрицы на четыре блока:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a_{11}) & (a_{12} \ldots a_{1n}) \\ \begin{pmatrix} a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

В доказательстве предложения мы фактически пришли к тому, что формальные матрицы можно, как и обычные, разбивать на блоки, т. е. представлять их в виде блочных матриц. Действия над блочными матрицами производятся по тем же правилам, что и в случае, когда вместо блоков имеем отдельные элементы. Умножение блочных матриц одного порядка всегда выполнимо, когда сомножители имеют одинаковые блочные разбиения.

Таким образом, любое кольцо формальных матриц можно рассматривать как кольцо (формальных) блочных матриц. Естественным образом появляются кольца блочных верхних (нижних) треугольных матриц. Кольца (формальных) блочных матриц используются в теории конечномерных алгебр. Естественным образом в этой теории, в частности, появляются кольца блочных треугольных матриц над полями; см. [9].

Существуют различные конструкции, позволяющие, наоборот, исходя из данного кольца формальных матриц строить кольца формальных матриц бóльшего порядка. Рассмотрим первый способ.

Пусть дано кольцо формальных матриц вида (3). Зафиксируем некоторую последовательность натуральных чисел $s_1, \ldots, s_n$. Обозначим через $\overline{M}_{ij}$ множество матриц размера $s_i \times s_j$ с элементами из M_{ij} (напомним, что $M_{ii} = R$). Далее, пусть $\overline{K}$ — множество всех блочных матриц $(\overline{M}_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Определим операции сложения и умножения этих матриц обычным образом, т. е. сложение покомпонентно, а относительно умножения заметим, что $A_{ij} \cdot A_{jk} \in \overline{M}_{ik}$ для любых матриц $A_{ij} \in \overline{M}_{ij}$, $A_{jk} \in \overline{M}_{jk}$. Тогда $\overline{K}$ превращается в кольцо формальных блочных матриц и одновременно $\overline{K}$ — кольцо формальных матриц порядка $s_1 + \ldots + s_n$.

В дальнейшем мы будем применять второй простой способ построения колец формальных матриц бóльшего порядка. Пусть дано кольцо формальных матриц порядка 2, $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$.

Покажем, что существует кольцо формальных матриц

$$K_4 = \begin{pmatrix} K & \binom{M}{S} \\ (N \;\; S) & S \end{pmatrix}.$$

Прежде всего, $\binom{M}{S}$ естественным образом является K-S-бимодулем, а $(N \;\; S)$ является S-K-бимодулем. Отображение

$$\varphi : \binom{M}{S} \otimes_S (N \;\; S) \to K, \quad \binom{m}{x} \otimes (n, y) \to \begin{pmatrix} mn & my \\ xn & xy \end{pmatrix},$$

является K-K-бимодульным гомоморфизмом, а отображение

$$\psi : (N \quad S) \otimes_K \binom{M}{S} \to S, \quad (n, y) \otimes \binom{m}{x} \to nm + yx,$$

является S-S-бимодульным гомоморфизмом. Выполняются два известных тождества ассоциативности для φ и ψ из § 1. Следовательно, указанное кольцо K_4 существует. Таким же способом определяется кольцо

$$K_2 = \begin{pmatrix} K & \binom{R}{N} \\ (R \;\; M) & R \end{pmatrix}.$$

Теперь заметим, что наряду с кольцом K всегда имеется кольцо

$$L = \begin{pmatrix} S & N \\ M & R \end{pmatrix}.$$

Эти кольца изоморфны при соответствии

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} s & n \\ m & r \end{pmatrix}.$$

Поэтому вместе с кольцами K_4 и K_2 существуют кольца K_3 и K_1, изоморфные им. Впрочем, их можно построить и непосредственно.

Обратим на время внимание на кольца верхних треугольных матриц порядка 3 (они снова появятся в § 7). Такое кольцо Γ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix},$$

где R, S, T — кольца, M — R-S-бимодуль, L — R-T-бимодуль, N — S-T-бимодуль. Из бимодульных гомоморфизмов остаются ненулевыми только $M \otimes_S N \to L$ и естественные изоморфизмы вида $R \otimes_R M \to M$ и т. п. Можно двумя способами превратить Γ в кольцо треугольных матриц порядка 2. При первом способе

$$\begin{pmatrix} r & m & \ell \\ 0 & s & n \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \ell \\ n \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 0) & (t) \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\left(\begin{smallmatrix} L \\ N \end{smallmatrix}\right)$ является $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$-$T$-бимодулем. При втором способе (M, L) — R-$\left(\begin{smallmatrix} S & N \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$-бимодуль.

§ 4. Некоторые идеалы колец формальных матриц

Найдём радикал Джекобсона и первичный радикал кольца формальных матриц порядка n. Сначала рассмотрим случай $n = 2$.

Пусть дано кольцо

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Определим четыре подбимодуля бимодулей M и N. Обозначим

$$J_\ell(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq J(S)\}, \quad J_r(M) = \{m \in M \mid mN \subseteq J(R)\},$$
$$J_\ell(N) = \{n \in N \mid Mn \subseteq J(R)\}, \quad J_r(N) = \{n \in N \mid nM \subseteq J(S)\}.$$

Теперь образуем следующие множества матриц:

$$J_\ell(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_\ell(M) \\ J_\ell(N) & J(S) \end{pmatrix}, \quad J_r(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_r(M) \\ J_r(N) & J(S) \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что получены левый и правый идеалы кольца K.

Теорема 4.1 [92]. *Верны равенства* $J_\ell(K) = J(K) = J_r(K)$.

Доказательство. Запишем

$$J(K) = \begin{pmatrix} X & B \\ C & Y \end{pmatrix},$$

где X и Y — идеалы колец R и S соответственно, B и C — подбимодули в M и N соответственно (см. § 1). Верны равенства

$$X = eJ(K)e = J(eKe) = J(R), \quad \text{где } e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем, что $Y = J(S)$. Далее, имеем

$$B \subseteq J_\ell(M) \cap J_r(M), \quad C \subseteq J_\ell(N) \cap J_r(N).$$

Доказано, что $J(K) \subseteq J_\ell(K) \cap J_r(K)$.

Теперь возьмём произвольную матрицу $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ n & s \end{smallmatrix}\right)$ в $J_r(K)$ и единичную матрицу E. Матрицы $E - \left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ n & s \end{smallmatrix}\right)$ обратимы справа в K. Их правыми обратными будут матрицы $\left(\begin{smallmatrix} x & xm \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ yn & y \end{smallmatrix}\right)$ соответственно, где x и y — правые обратные к $1-r$ и $1-s$ соответственно. Следовательно, матрицы $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ n & s \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ n & s \end{smallmatrix}\right)$ лежат в $J(K)$. Поэтому $J_r(K) \subseteq J(K)$. Аналогично $J_\ell(K) \subseteq J(K)$. □

Получается, что $J_\ell(M) = J_r(M)$ и $J_\ell(N) = J_r(N)$. Будем обозначать эти идеалы через $J(M)$ и $J(N)$ соответственно. Таким образом, верно равенство

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(S) \end{pmatrix}.$$

Для произвольного кольца T пересечение всех его первичных идеалов называется *первичным радикалом* и обозначается через $P(T)$.

Хорошо известно, что первичный радикал кольца T совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов кольца T. Напомним, что элемент $a \in T$ называется *строго нильпотентным*, если все члены любой такой последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, что $a_0 = a$, $a_{n+1} \in a_n T a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, равны нулю начиная с некоторого номера.

Определим идеалы $P_\ell(M)$, $P_r(M)$, $P_\ell(N)$ и $P_r(N)$, аналогичные идеалам $J_\ell(M)$, $J_r(M)$, $J_\ell(N)$ и $J_r(N)$ соответственно. Ограничимся «левосторонним» случаем. Обозначим

$$P_\ell(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq P(S)\},$$
$$P_r(M) = \{m \in M \mid mN \subseteq P(R)\}.$$

Далее, пусть

$$P_\ell(K) = \begin{pmatrix} P(R) & P_\ell(M) \\ P_\ell(N) & P(S) \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.2 [92]. *Верны равенства* $P_\ell(K) = P(K) = P_r(K)$.

Доказательство теоремы 4.2 состоит в проверке записанных равенств с помощью определения строго нильпотентных элементов.

Совпадающие идеалы $P_\ell(M)$ и $P_r(M)$ можно обозначить через $P(M)$, а совпадающие идеалы $P_\ell(N)$ и $P_r(N)$ можно обозначить через $P(N)$.

Теперь перейдём к кольцу K формальных матриц любого порядка n вида (3) из § 3. Для любых индексов i и j определим подбимодули

$$J_\ell(M_{ij}) = \{x \in M_{ij} \mid M_{ji}x \subseteq J(R_j)\},$$
$$J_r(M_{ij}) = \{x \in M_{ij} \mid xM_{ji} \subseteq J(R_i)\}.$$

При $i = j$ получаем $J_\ell(R_i) = J_r(R_i) = J(R_i)$.

Теорема 4.3. *Имеют место равенство*

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R_1) & J_\ell(M_{12}) & \dots & J_\ell(M_{1n}) \\ J_\ell(M_{21}) & J(R_2) & \dots & J_\ell(M_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_\ell(M_{n1}) & J_\ell(M_{n2}) & \dots & J(R_n) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

и аналогичное равенство с заменой индекса ℓ *на* r.

Доказательство. Случай $n = 2$ — это теорема 4.1. Пусть K — кольцо формальных матриц порядка $n \geqslant 3$. Представим K как кольцо блочных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & R_n \end{smallmatrix}\right)$, где R — кольцо формальных матриц порядка $n-1$ и M, N — соответствующие бимодули (см. доказательство предложения 3.3). Согласно теореме 4.1 имеем

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(R_n) \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции радикал $J(R)$ имеет вид, указанный в теореме. Надо показать, что множество из правой части равенства $(*)$ совпадает с $\left(\begin{smallmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(R_n) \end{smallmatrix}\right)$. Достаточно проверить, что

$$\begin{pmatrix} J_\ell(M_{1\,n}) \\ \dots \\ J_\ell(M_{n-1\,n}) \end{pmatrix} = J(M) \quad \text{и} \quad (J_\ell(M_{n1}), \dots, J_\ell(M_{n\,n-1})) = J(N),$$

где

$$J(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq J(R_n)\},$$
$$J(N) = \{n \in N \mid Mn \subseteq J(R)\}.$$

Требуемое утверждение вытекает из определения подбимодулей $J_\ell(M_{ij})$. Только уточним следующий момент. Если $x \in J_\ell(M_{nj})$, то

$$M_{in}x \subseteq J_\ell(M_{ij})$$

для всех различных $i, j = 1, \ldots, n$. Действительно, имеем

$$M_{ji}M_{in}x \subseteq M_{jn}x \subseteq J(R_j).$$

Доказательство аналога равенства $(*)$ для «индекса r» симметрично приведённому выше доказательству. □

Имеем $J_\ell(M_{ij}) = J_r(M_{ij})$ для различных i и j. Обозначим этот подбимодуль через $J(M_{ij})$.

Первичный радикал $P(K)$ имеет аналогичное строение. Подобно подбимодулям $J_\ell(M_{ij})$ и $J_r(M_{ij})$ определим подбимодули $P_\ell(M_{ij})$ и $P_r(M_{ij})$. Верен следующий результат.

Теорема 4.4. *Имеют место равенство*

$$P(K) = \begin{pmatrix} P(R_1) & P_\ell(M_{12}) & \ldots & P_\ell(M_{1n}) \\ P_\ell(M_{21}) & P(R_2) & \ldots & P_\ell(M_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_\ell(M_{n1}) & P_\ell(M_{n2}) & \ldots & P(R_n) \end{pmatrix}$$

и аналогичное равенство, в котором индекс ℓ заменён на индекс r.

Остановимся на строении идеалов кольца K. Всё сказанное в § 1 об идеалах и факторкольцах распространяется на кольца формальных матриц любого порядка n. Идеал L кольца K равен

$$\begin{pmatrix} I_1 & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & I_2 & \ldots & A_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & I_n \end{pmatrix},$$

где I_i — идеал кольца R, а A_{ij} — подбимодуль в M_{ij}. Между этими идеалами и подбимодулями существуют определённые связи, которые нетрудно найти (в одном частном случае они указаны в § 17). Множество матриц

$$\begin{pmatrix} R_1/I_1 & M_{12}/A_{12} & \ldots & M_{1n}/A_{1n} \\ M_{21}/A_{21} & R_2/I_2 & \ldots & M_{2n}/A_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{n1}/A_{n1} & M_{n2}/A_{n2} & \ldots & R_n/I_n \end{pmatrix}$$

естественным образом образует кольцо формальных матриц, которое канонически изоморфно факторкольцу K/L.

В конце параграфа найдём центр кольца формальных матриц. Напомним, что центр некоторого кольца T обозначается через $C(T)$.

Лемма 4.5. *Центр кольца формальных матриц K состоит из всех таких диагональных матриц* $\operatorname{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, *что* $r_i \in C(R_i)$ *и* $r_i m = m r_j$ *для всех* $m \in M_{ij}$ *и различных* i *и* j.

Доказательство. Понятно, что диагональные матрицы с указанным строением лежат в $C(K)$.

Допустим, что матрица $D = (d_{ij})$ лежит в $C(K)$. Из равенства $DE_{kk} = E_{kk}D$ следует, что $d_{ik} = 0 = d_{kj}$ при $i \neq k$, $k \neq j$. Поэтому $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и D — диагональная матрица.

Теперь зафиксируем индексы i, j и элемент $m \in M_{ij}$. Пусть A_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит m, а на остальных позициях стоят нули. Из равенства $DA_{ij} = A_{ij}D$ следует, что $d_i m = m d_j$. В частности, при $i = j$ получаем, что $d_i \in C(R_i)$. □

§ 5. Кольцевые свойства

Выясним, когда кольцо формальных матриц порядка 2 является артиновым, нётеровым, регулярным или обратимо-регулярным.

Теорема 5.1 [96]. *Кольцо формальных матриц* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ *является артиновым слева в точности тогда, когда R и S — артиновы слева кольца и* ${}_RM$, ${}_SN$ *— артиновы модули.*

Аналогичные утверждения верны для артинова справа кольца K и для нётерова слева или справа кольца K.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепь левых идеалов кольца R и $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепь R-подмодулей модуля M. Тогда имеем следующие убывающие цепи в K:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ NA_1 & 0 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ NA_2 & 0 \end{pmatrix} \ldots, \qquad \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ 0 & NC_1 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 0 & C_2 \\ 0 & NC_2 \end{pmatrix} \ldots$$

По предположению существует такой индекс n, что $A_n = A_{n+1} = \ldots$ и $C_n = C_{n+1} = \ldots$ Следовательно, ${}_RR$ и ${}_RM$ — артиновы модули. Аналогично ${}_SS$ и ${}_SN$ — артиновы модули.

$\Leftarrow$. Кольцо K, рассматриваемое как левый K-модуль, является парой $(R \oplus M, N \oplus S)$, где $R \oplus M$ — левый R-модуль и $N \oplus S$ — левый S-модуль (строение K рассматривается в § 7). Пусть $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепь левых идеалов кольца K. Используя материал § 7, можно записать $L_k = (X_k, Y_k)$, где X_k — подмодуль артинова модуля $R \oplus M$ и Y_k — подмодуль артинова модуля $N \oplus S$. Кроме того, верны включения $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ и $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ Следовательно, две последние

цепи стабилизируются. Поэтому цепь левых идеалов $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots$ тоже стабилизируется. Следовательно, K — артиново слева кольцо.

Оставшиеся утверждения доказываются аналогично. □

Говорят, что кольцо T *имеет стабильный ранг* 1, если для любых двух элементов $a, b \in T$, удовлетворяющих условию $aT + bT = T$, существует такой элемент $z \in T$, что $a + bz$ — обратимый элемент.

Для любых двух элементов $a, b \in K$ обозначим

$$\operatorname{diag}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad T_{12}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{21}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.2 [23]. *Кольцо* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ *имеет стабильный ранг* 1 *в точности тогда, когда кольца* R *и* S *имеют стабильный ранг* 1.

Доказательство. $\Rightarrow$. Обозначим $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда

$$R \cong eKe, \quad S \cong (1-e)K(1-e),$$

и непосредственно проверяется, что R и S имеют стабильный ранг 1.

$\Leftarrow$. Возьмём произвольные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ n_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & m_2 \\ n_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & m \\ n & x_2 \end{pmatrix}$$

и допустим, что $AX + B$ — единичная матрица E кольца K.

Матрица

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ -E & X \end{pmatrix}$$

порядка 2 над K является обратимой матрицей с обратной матрицей

$$\begin{pmatrix} X & XA - E \\ E & A \end{pmatrix}.$$

В частности, в кольце R верно равенство $a_1x_1 + m_1n + b_1 = 1$. Так как кольцо R имеет стабильный ранг 1, существует такой элемент $r \in R$, что $a_1 + m_1nr + b_1r = u$, где u — обратимый элемент. Далее, существует такой элемент $n' \in N'$, что

$$G \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nr & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u & m_1 \\ n' & a_2 \end{pmatrix} & B \\ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & X \end{pmatrix}$$

(здесь и далее $(*)$ обозначает несущественный для нас элемент). Можно проверить, что существуют такие элементы $s_1, s_2 \in S$, $n'' \in N$, две

обратимые диагональные матрицы и одна матрица $T_{21}(*)$ в $M(2,K)$, что

$$\operatorname{diag}(*,*)\cdot G\cdot\operatorname{diag}(*,*)\cdot T_{21}(*)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}u & m_1\\ 0 & s_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_1 & m_2\\ n'' & s_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} & X\end{pmatrix}=H.$$

Аналогично найдутся такие элементы $s_3, s_4 \in S$ и $m', m'' \in M$, что

$$s_1s_3+n''m''+s_2s_4=1$$

в S. Поскольку S имеет стабильный ранг 1, существуют такие элементы $s, v \in S$, что элемент v обратим и $s_1+n''m''s+s_2s_4s=v$.

Существует такая матрица $T_{21}(*)$, что

$$H\cdot T_{21}(*)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}u & *\\ 0 & v\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_1 & m_2\\ n'' & s_2\end{pmatrix}\\ * & X\end{pmatrix}=V.$$

Поскольку V и $\left(\begin{smallmatrix}u & *\\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)$ — обратимые матрицы, можно представить V в виде

$$V=\operatorname{diag}(*,*)\cdot T_{21}(*)\cdot T_{12}(*),$$

где диагональная матрица обратима.

В результате приходим к равенству

$$\operatorname{diag}(*,*)\cdot G\cdot\operatorname{diag}(*,*)\cdot T_{21}(*)\cdot T_{21}(*)=\operatorname{diag}(*,*)\cdot T_{21}(*)\cdot T_{12}(*),$$

или

$$G\cdot\operatorname{diag}(*,*)\cdot T_{21}(*)=\operatorname{diag}(*,*)\cdot T_{21}(*)\cdot T_{12}(*).$$

Следовательно, существуют такая матрица Y и такие обратимые матрицы U, V, W, P в $M(2,K)$, что

$$G\cdot\operatorname{diag}(V,W)\cdot T_{21}(Y)=\operatorname{diag}(U,P)\cdot T_{21}(*)\cdot T_{12}(*).$$

Далее получаем равенства

$$AV+BWY=U,\quad A+B(WYV^{-1})=UV^{-1},$$

где UV^{-1} — обратимая матрица, что и требуется. □

Приведём несколько известных определений.

Вплоть до теоремы 5.6 *буква* R *обозначает произвольное кольцо.*

Элемент $r \in R$ называется *регулярным*, если найдётся такой элемент $x \in R$, что $r = rxr$; кольцо R называется *регулярным*, если каждый его элемент регулярен.

Элемент $r \in R$ называется *обратимо-регулярным*, если найдётся такой обратимый элемент $v \in R$, что $r = rvr$; элемент r обратимо-регулярен в точности тогда, когда $r = ue_1 = e_2u$, где e_1, e_2 — идемпотенты и u — обратимый элемент. Кольцо R называется *обратимо-регулярным*, если каждый его элемент обратимо-регулярен.

Если $r = rxr$, то элементы rx и xr — идемпотенты кольца R. Поэтому непосредственно проверяется, что каждый главный левый (правый) идеал регулярного кольца R порождается идемпотентом. Следовательно, каждый главный левый (правый) идеал регулярного кольца R является прямым слагаемым левого (правого) R-модуля R.

Лемма 5.3. *Если R — кольцо и y — такой элемент в R, что элемент $a - aya$ — регулярный, то элемент a тоже регулярен.*

Доказательство. Существует такой элемент $z \in R$, что

$$(a - aya)z(a - aya) = a - aya.$$

Обозначим

$$x = z - zay - yaz + yazay + y.$$

Непосредственно проверяется, что $axa = a$; поэтому a — регулярный элемент. □

Если $x \in R$, то $r(x)$ обозначает *правый аннулятор* элемента x, т. е. $r(x)$ — это правый идеал $\{y \in R \mid xy = 0\}$.

Предложение 5.4 [37]. *Для регулярного кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — обратимо-регулярное кольцо*;

2) *$(1-e)R \cong (1-f)R$ для любых таких идемпотентов $e, f \in R$, что $eR \cong fR$*;

3) *$r(x) \cong R/xR$ для любого элемента $x \in R$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть e и f — такие идемпотенты в R, что $eR \cong fR$. Имеются прямые разложения

$$R_R = eR \oplus (1-e)R, \quad R_R = fR \oplus (1-f)R.$$

Пусть x — такой элемент в R, что $x(1-e)R = 0$ и левое умножение на x является изоморфизмом $eR \to fR$. Существует такой обратимый элемент $u \in R$, что $xux = x$. Поскольку $x(ux-1) = 0$, имеем

$$R \subseteq uxR + (1-e)R = ufR + (1-e)R.$$

Кроме того,

$$xuR = xR = fR \quad \text{и} \quad (xu)^2 = xu.$$

Поэтому

$$ufR \cap (1-e)R = 0 \quad \text{и} \quad R = ufR \oplus u(1-e)R.$$

Поскольку u — обратимый элемент, мы также имеем

$$R = ufR \oplus u(1-f)R.$$

И наконец, получаем

$$(1-e)R \cong u(1-f)R \cong (1-f)R.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $x \in R$. Существует такой элемент $y \in R$, что $xyx = x$. Так как xy и yx — идемпотенты, существуют прямые разложения

$$R_R = yxR \oplus r(x) = xR \oplus (1-xy)R.$$

Умножение правого идеала yxR слева на x задаёт изоморфизм $yxR \to xR$. Из условия 2 вытекает, что

$$r(x) \cong (1-xy)R \cong R/xR.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Для данного элемента $x \in R$ существует такой элемент $y \in R$, что $xyx = x$. Как и выше, имеем прямые разложения

$$R_R = yxR \oplus r(x) = xR \oplus (1-xy)R.$$

Из условия 3 получаем

$$r(x) \cong R/xR \cong (1-xy)R.$$

Умножение правого идеала yxR слева на x задаёт изоморфизм $yxR \to xR$. В итоге имеется изоморфизм $\varphi : R_R \to R_R$. Пусть u — такой обратимый элемент в R, что левое умножение на u является обратным изоморфизмом к φ. Тогда $ux = yx$ и $xux = xyx = x$. □

Предложение 5.5 [37]. *Регулярное кольцо R имеет стабильный ранг 1 в точности тогда, когда R — обратимо-регулярное кольцо.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $a \in R$. Тогда $axa = a$ для некоторого $x \in R$ и $R_R = aR \oplus (1-ax)R$; см. доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 3) из предложения 5.4. Так как R имеет стабильный ранг 1, элемент $a + (1-ax)y$ является обратимым для некоторого элемента $y \in R$. Поэтому $(a + (1-ax)y)u = 1$, где u — обратимый элемент. Теперь получаем

$$a = axa = ax(a + (1-ax)y)ua = axaua = aua.$$

Следовательно, R — обратимо-регулярное кольцо.

$\Leftarrow$. Пусть дано равенство $aR + bR = R$. Все главные правые идеалы регулярного кольца R являются прямыми слагаемыми в R_R. Возьмём некоторое прямое разложение $R_R = aR \oplus I$ и рассмотрим ограничение проекции $R_R \to I$ на bR. Тогда $bR = (aR \cap bR) \oplus J$ для некоторого правого идеала J. Далее получаем прямое разложение $R_R = aR \oplus J$. Также имеем прямое разложение $R_R = L \oplus K$, где $K = r(a)$; см. доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 3) из предложения 5.4. Поскольку $L \cong aR$, по предложению 5.4 имеем $K \cong J$. Следовательно, существует такой элемент $c \in R$, что $cL = 0$ и левое умножение на c индуцирует изоморфизм K на J. Таким образом, $cR = J \subseteq bR$ и $c = by$ для некоторого элемента $y \in R$. Также получаем, что левое умножение на a индуцирует изоморфизм L на aR. Учитывая равенства $aK = 0 = cL$, получаем, что умножение слева на $a + c$ индуцирует изоморфизм $L \oplus K = R_R$ на $aR \oplus J = R_R$. Следовательно, $a + by = a + c$ — обратимый элемент кольца R. □

Статья Брауна и Маккоя [18] содержит элементарное доказательство того, что кольцо матриц $M(n, R)$ над регулярным кольцом R является регулярным кольцом. Мы перенесём это доказательство на кольца формальных матриц порядка 2. Также отметим, что для кольца формальных матриц любого порядка утверждение 1 следующей теоремы 5.6 можно доказать с помощью леммы 1.6 книги [37]; см. также [96].

Теорема 5.6. *Для кольца формальных матриц* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ *верны следующие утверждения*:

1) *кольцо K регулярно в точности тогда, когда R и S — регулярные кольца и $x \in xNx$, $y \in yMy$ для всех $x \in M$ и $y \in N$;*

2) *кольцо K обратимо-регулярно в точности тогда, когда R и S — обратимо-регулярные кольца и $x \in xNx$, $y \in yMy$ для всех $x \in M$ и $y \in N$.*

Доказательство. 1. $\Rightarrow$. Непосредственно проверяется, что R и S — регулярные кольца и $x \in xNx$, $y \in yMy$ для всех $x \in M$ и $y \in N$. Для любого $x \in M$ существует такая матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & x' \\ y & b \end{smallmatrix}\right) \in K$, что

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x' \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что $x = xyx \in xNx$. Аналогично получаем, что $y \in yMy$ для всех $y \in N$.

$\Leftarrow$. Если $a \in R$, то через a' обозначается произвольный элемент, удовлетворяющий условию $aa'a = a$. Обозначения b', x', y' имеют аналогичный смысл, где $b \in S$, $x \in M$ и $y \in N$.

Обозначим $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ x' & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $B = A - AXA$. Матрица B имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ z & d \end{smallmatrix}\right)$. Далее, составим матрицу $Y = \left(\begin{smallmatrix} c' & 0 \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)$ и вычислим

$$B - BYB = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $n \in N$. Наконец, возьмём матрицу $Z = \left(\begin{smallmatrix} 0 & n' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и увидим, что $C = CZC$. Это означает, что C — регулярный элемент в K. По лемме 5.3 матрицы B и A также являются регулярными элементами.

2. Утверждение вытекает из утверждения 1, теоремы 5.2 и предложения 5.5. □

§ 6. Аддитивные задачи

Радикал Джекобсона кольца R по-прежнему обозначается через $J(R)$.

Пусть R — некоторое кольцо. Элемент $r \in R$ называется *чистым*, если его можно записать в виде $r = u + e$, где e — идемпотент и u — обратимый элемент. Кольцо R называется *чистым*, если каждый его элемент является чистым. Базовые сведения о чистых кольцах имеются в статье [85] и книгах [99, 111].

Обратимые или идемпотентные элементы являются чистыми. Если $x \in J(R)$, то $x = (x-1)+1$, где $x-1$ — обратимый элемент. Следовательно, x — чистый элемент. Поэтому каждое локальное кольцо является чистым кольцом.

Лемма 6.1 [48]. *Пусть R — кольцо, e — такой идемпотент в R, что eRe и $(1-e)R(1-e)$ — чистые кольца. Тогда R — чистое кольцо.*

Доказательство. Отождествим кольцо R с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{pmatrix};$$

см. § 1.

Теперь возьмём матрицу $A = \left(\begin{smallmatrix} a & x \\ y & b \end{smallmatrix}\right) \in R$. Существует разложение $a = u + f$, где u — обратимый элемент кольца eRe и $f = f^2 \in eRe$. Тогда

$$b - yu^{-1}x \in (1-e)R(1-e).$$

Поэтому кольцо $(1-e)R(1-e)$ содержит такие идемпотент g и обратимый элемент v, что $b - yu^{-1}x = v + g$. Имеем равенства

$$A = \begin{pmatrix} u+f & x \\ y & v+g+yu^{-1}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu^{-1}x \end{pmatrix}.$$

Тогда $\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{smallmatrix}\right)$ — идемпотент кольца R. Осталось проверить, что

$$\begin{pmatrix} u & x \\ y & v + yu^{-1}x \end{pmatrix}$$

— обратимая матрица. Верны равенства

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ -yu^{-1} & 1-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu^{-1}x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & -u^{-1}x \\ 0 & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},$$

в которых первая матрица и две последние матрицы обратимы. □

С помощью индукции несложно проверить следующее предложение.

Предложение 6.2. *Пусть R — кольцо и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — такие попарно ортогональные идемпотенты кольца R, что $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ и все $e_i R e_i$ — чистые кольца. Тогда R — чистое кольцо.*

С помощью предложения 6.2 и предложения 3.1 о соответствии между кольцами формальных матриц и ортогональными системами идемпотентов можно доказать следующий результат.

Следствие 6.3. *Пусть K — кольцо формальных матриц порядка n и все кольца $R_1, R_2, \ldots, R_n$ являются чистыми. Тогда K — чистое кольцо.*

Есть другой способ доказательства следствия 6.3. Сначала применяем лемму 6.1 к кольцу $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. Кольцо формальных матриц порядка $n > 2$ является кольцом формальных блочных матриц порядка 2. Поэтому можно использовать индукцию по n.

Предложение 6.4 [85]. *Кольцо R с радикалом Джекобсона $J(R)$ является чистым в точности тогда, когда $R/J(R)$ — чистое кольцо и идемпотенты можно поднимать по модулю $J(R)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Гомоморфные образы чистых колец являются чистыми кольцами.

Пусть x — произвольный элемент кольца R. Запишем x в виде $x = u + e$, где u — обратимый элемент и e — идемпотент. Верны равенства

$$u(x - u^{-1}(1-e)u) = ue + u^2 - u + eu = x^2 - x,$$
$$x - u^{-1}(1-e)u = u^{-1}(x^2 - x).$$

Возьмём в качестве x такой элемент $f \in R$, что $f^2 - f \in J(R)$. Из соотношений

$$f - u^{-1}(1-e)u = u^{-1}(f^2 - f) \in J(R)$$

вытекает, что идемпотенты можно поднимать по модулю $J(R)$.

$\Leftarrow$. Пусть x — произвольный элемент в R. Через $\bar{x}$ обозначается естественный образ элемента x в факторкольце $R/J(R)$. Существуют такие элементы $e, u, v \in R$, что $\bar{e}^2 = \bar{e}$ и

$$\bar{u}\,\bar{v} = \bar{v}\,\bar{u} = \bar{1}, \quad \bar{x} = \bar{u} + \bar{e}.$$

Так как идемпотенты можно поднимать по модулю $J(R)$, можно считать, что $e^2 = e$. Кроме того, $uv = 1 + s$ и $vu = 1 + t$ для некоторых элементов $s, t \in J(R)$. Так как элементы $1 + s$ и $1 + t$ обратимы, uv и vu — обратимые элементы. Поэтому u и v — обратимые элементы. Тогда $x = u + r + e$ для некоторого элемента $r \in J(R)$, причём $u + r$ — обратимый элемент. □

Пусть k — натуральное число. Элемент a кольца R называется *k-хорошим*, если a является суммой k обратимых элементов кольца R. Кольцо называется *k-хорошим*, если каждый его элемент является k-хорошим.

Предложение 6.5. *Если K — кольцо формальных матриц порядка n и все кольца $R_1, R_2, \ldots, R_n$ являются k-хорошими, то K — k-хорошее кольцо.*

Доказательство. Рассмотрим только случай $k = 2$. По соображениям, приведённым после следствия 6.3, считаем, что $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$.

Рассмотрим произвольную матрицу $X = \left(\begin{smallmatrix} r & m \\ n & s \end{smallmatrix}\right)$ в кольце K. Обозначим через A, B и C следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как R и S — 2-хорошие кольца, имеем $B = U + V$, где

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

— обратимые матрицы. Положим

$$A' = A + U = \begin{pmatrix} u_1 & m \\ 0 & v_1 \end{pmatrix}, \quad C' = C + V = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ n & v_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь получаем

$$X = A + B + C = A' + C',$$

где A' и C' — обратимые матрицы. □

Имеется интересная связь между чистыми и 2-хорошими кольцами.

Элемент $s \in R$ называется *инволюцией*, если $s^2 = 1$. Когда мы говорим, что 2 *обратимо в R*, мы считаем, что $2 \cdot 1_R$ — обратимый элемент. Вместо $r \cdot 2^{-1}$ будем писать $r/2$.

Предложение 6.6 [20]. *Пусть 2 обратимо в R. Кольцо R является чистым в точности тогда, когда каждый элемент x кольца R является суммой обратимого элемента и инволюции* (*следовательно, x — 2-хороший элемент*).

Доказательство. Допустим, что R — чистое кольцо и $x \in R$. Тогда $(x+1)/2 = u + e$, где $e = e^2$ и u — обратимый элемент. Следовательно, $x = 2u + (2e-1)$, где $2u$ — обратимый элемент и $(2e-1)^2 = 1$.

Обратно, допустим, что каждый элемент кольца R является суммой обратимого элемента и инволюции. Для данного $x \in R$ элемент $2x-1$ представим в виде $2x-1 = u+s$, где u — обратимый элемент и $s^2 = 1$. Тогда $x = u/2 + (s+1)/2$, где $u/2$ — обратимый элемент и $(s+1)/2$ — идемпотент. □

Напомним, что буквы I и J обозначают идеалы следа кольца

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

определённые в § 1; а именно, $I = MN$ и $J = NM$. Для колец K, удовлетворяющих условиям $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$, некоторые записанные выше утверждения можно обратить. Сначала сформулируем несколько общих фактов.

Лемма 6.7. *Пусть K — такое кольцо формальных матриц, что $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $J(K) = \left(\begin{smallmatrix} J(R) & M \\ N & J(S) \end{smallmatrix}\right)$ *и* $K/J(K) \cong R/J(R) \times S/J(S)$;

2) *матрица* $\left(\begin{smallmatrix} a & x \\ y & b \end{smallmatrix}\right)$ *обратима в K в точности тогда, когда элементы a и b обратимы в R и S соответственно.*

Доказательство. 1. Утверждение непосредственно следует из теоремы 4.1.

2. Нужно учесть, что для любого обратимого элемента u некоторого кольца T и каждого $t \in J(T)$ элемент $u+t$ обратим в T. □

Кольцо T называется *прямо-конечным*, если $ba = 1$ для любых элементов a, b, удовлетворяющих условию $ab = 1$.

Теорема 6.8 [96]. *Пусть $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — такое кольцо формальных матриц, что $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *K является чистым кольцом в точности тогда, когда R и S — чистые кольца*;

2) *K является 2-хорошим кольцом в точности тогда, когда R и S — 2-хорошие кольца*;

3) *K является прямо-конечным кольцом в точности тогда, когда R и S — прямо-конечные кольца*.

Доказательство. Из следствия 6.3 и предложения 6.5 вытекает, что в пунктах 1 и 2 надо доказывать только необходимость условий.

1. $\Rightarrow$. Из предложения 6.4 с учётом изоморфизма из леммы 6.7 вытекает, что $R/J(R)$ — чистое кольцо. Так как K — чистое кольцо, из доказательства предложения 6.4 вытекает, что для любой матрицы X из K существует такая идемпотентная матрица W, что $X-W\in K(X^2-X)$. Допустим, что аналогичное свойство верно для всех элементов кольца R. Тогда из доказательства предложения 6.4 вытекает, что идемпотенты поднимаются по модулю $J(R)$ и R — чистое кольцо по предложению 6.4. Аналогично проверяется, что S — чистое кольцо.

Итак, пусть $x\in R$. Существует такая идемпотентная матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, что

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K\left(\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = K\begin{pmatrix} x^2-x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R(x^2-x) & 0 \\ N(x^2-x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $b=0=d$, откуда следует, что $a^2=a$, т. е. a — идемпотент. Тогда $x-a\in R(x^2-x)$, что и требуется.

2. $\Rightarrow$. Для элемента $r\in R$ имеем

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & a \\ b & v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 & c \\ d & v_2 \end{pmatrix},$$

где две последние матрицы обратимы. Следовательно, $r=u_1+u_2$, где элементы u_1 и u_2 обратимы по лемме 6.7.

3. Необходимость условия проверяется непосредственно, причём включения $I\subseteq J(R)$ и $J\subseteq J(S)$ не нужны.

Теперь пусть

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{в } K.$$

Тогда $aa'+xy'=1$ в R и $yx'+bb'=1$ в S. Поскольку $xy'\in J(R)$ и $yx'\in J(S)$, произведения aa' и bb' обратимы в R и S соответственно. Так как R и S — прямо-конечные кольца, a и b — обратимые элементы. По лемме 6.7 матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & x \\ y & b \end{smallmatrix}\right)$ обратимая, а значит,

$$\begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} = 1. \qquad \square$$

В § 3 определены идеалы следа $I_1, \dots, I_n$ кольца формальных матриц K порядка n. Для такого кольца K можно доказать аналог теоремы 6.8, если выполняются условия $I_k \subseteq J(R_k)$, $k = 1, \dots, n$. Можно провести индукцию по n, представляя K в виде кольца формальных блочных матриц порядка 2.

Изложим некоторые интересные результаты Хенриксена о хороших обычных кольцах матриц $M(n, R)$ над произвольным кольцом R.

Лемма 6.9 [48]. *При $n > 1$ каждая диагональная матрица из $M(n, R)$ является 2-хорошей.*

Доказательство. Пусть $D = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — диагональная матрица. Составим матрицы

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований строк или столбцов матрицы U и V могут быть приведены к единичной матрице. Следовательно, U и V — обратимые матрицы. Кроме того, $D = U + V$. □

Лемма 6.10 (Капланский). *Для любого $n \geqslant 1$ каждая матрица из $M(n, R)$ является суммой диагональной и обратимой матриц.*

Доказательство. Используем индукцию по n. Если $n = 1$ и $a \in R$, то $a = (a-1) + 1$; утверждение верно.

Допустим, что утверждение верно для некоторого $n \geqslant 1$. Если $A' \in M(n+1, R)$, то представим матрицу A' в следующем блочном виде:

$$A' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix},$$

где $A \in M(n, R)$, $d \in R$, B — вектор-столбец и C — вектор-строка. По предположению индукции $A = D + V$, где $D, V \in M(n, R)$, D — диаго-

нальная матрица и V — обратимая матрица. Составим матрицы

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & d - 1 - CV^{-1}B \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} V & B \\ C & 1 + CV^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Тогда $A' = D' + V'$, где D' — диагональная матрица. Пусть E — единичная матрица в $M(n, R)$ и

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CV^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} V^{-1} & V^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $PV'Q$ — единичная матрица в $M(n+1, R)$ и P, Q — обратимые матрицы в $M(n+1, R)$. Поэтому V' — обратимая матрица, что и требовалось. □

Комбинируя две последние леммы, получаем следующий результат.

Теорема 6.11 [51]. *При $n > 1$ кольцо матриц $M(n, R)$ является 3-хорошим кольцом для любого кольца R.*

Можно показать, что $M(n, R)$ является также 4-хорошим кольцом.

Кольцо матриц $M(n, R)$ не всегда является 2-хорошим кольцом. В работе [51] показано, что если $n > 1$, F — произвольное поле и $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов, то кольцо $M(n, R)$ содержит матрицы, не являющиеся 2-хорошими.

Конечно, существуют такие кольца R, что $M(n, R)$ — 2-хорошее кольцо для любого $n > 1$. Кольцо R называется *диагонализируемым кольцом*, если для любого n любая матрица $A \in M(n, R)$ эквивалентна некоторой диагональной матрице D, т. е. $UAV = D$ для некоторых обратимых матриц U и V. Например, коммутативные кольца главных идеалов и коммутативные кольца нормирования являются диагонализируемыми кольцами.

Из леммы 6.9 и определения диагонализируемого кольца вытекает следующий результат.

Теорема 6.12. *Если R — диагонализируемое кольцо и $n > 1$, то $M(n, R)$ — 2-хорошее кольцо.*

Любая формальная матрица является суммой диагональной матрицы и обратимой матрицы, т. е. для неё верна лемма Капланского 6.10. Доказательство леммы 6.10 непосредственно переносится на формальные матрицы. Для произвольных формальных матриц аналог леммы 6.9 неверен. Например, это следует из теоремы 6.8(2).

В литературе встречаются различные понятия, близкие к понятиям чистого элемента и чистого кольца. Элемент $r \in R$ называется

строго чистым, если можно представить элемент r в виде $r = u + e$, где u — обратимый элемент, e — идемпотент и $ue = eu$. Кольцо R называется *строго чистым*, если каждый его элемент является строго чистым.

Во многих работах изучались строго чистые матричные кольца и отдельные матрицы над локальными кольцами. В статье [16] получена полная характеризация таких коммутативных локальных колец R, что $M(n, R)$ — строго чистое кольцо. Для произвольного локального кольца R в работах [105] и [98] выяснено, когда $M(2, R)$ — строго чистое кольцо и $M(2, R, s)$ — строго чистое кольцо соответственно (о кольце $M(2, R, s)$ см. конец § 16).

Глава 2

Модули над кольцами формальных матриц

После изложения основ теории модулей над кольцами формальных матриц рассматривается строение некоторых подмодулей (малые и существенные подмодули, цоколь и радикал). Много внимания уделяется инъективным, плоским и проективным модулям над кольцами формальных матриц порядка 2.

В качестве приложения находится максимальное кольцо частных кольца формальных матриц порядка 2 и приводятся примеры абелевых групп, у которых кольца эндоморфизмов наследственны.

Также устанавливаются эквивалентности между категорией модулей над кольцом формальных матриц порядка 2 и категориями модулей над исходными кольцами.

§ 7. Первоначальные свойства модулей над кольцами формальных матриц

Как устроены модули над кольцом формальных матриц $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$? Их можно конструировать исходя из R-модулей и S-модулей. Пусть X и Y — R-модуль и S-модуль соответственно. Предположим, что даны гомоморфизмы R-модулей $f\colon M \otimes_S Y \to X$ и S-модулей $g\colon N \otimes_R X \to Y$, для которых выполнены равенства

$$m(nx) = (mn)x, \quad n(my) = (nm)y, \quad m \in M,\ n \in N,\ x \in X,\ y \in Y,$$

где мы считаем, что nx — это $g(n \otimes x)$, а my — это $f(m \otimes y)$. Группа вектор-столбцов $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ превращается в K-модуль, если в качестве модульного умножения взять произведение матрицы на столбец,

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx + my \\ nx + sy \end{pmatrix}.$$

Гомоморфизмы f и g назовём *гомоморфизмами модульного умножения*.

Любой K-модуль имеет вид модуля столбцов. Говоря точнее, его можно получить указанным способом. Пусть V — K-модуль и $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда eV — R-модуль, $(1-e)V$ — S-модуль, $\left(\begin{smallmatrix} eV \\ (1-e)V \end{smallmatrix}\right)$ — K-модуль. Всё это становится понятным, если вспомнить о соглашениях из § 1 о записи матриц и множеств матриц. Например, можно считать, что K имеет вид

$$\begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}.$$

И тогда модульные умножения в указанных модулях выполняются естественным образом, а гомоморфизмы модульного умножения

$$M \otimes_S (1-e)V \to eV, \quad N \otimes_R eV \to (1-e)V$$

— это «ограничения» канонического изоморфизма $K \otimes_K V \to V$ на соответствующих подмодулях. Соответствие элементов

$$v \to \begin{pmatrix} ev \\ (1-e)v \end{pmatrix}, \quad v \in V,$$

будет изоморфизмом K-модулей V и $\left(\begin{smallmatrix} eV \\ (1-e)V \end{smallmatrix}\right)$. В частности, K как левый K-модуль имеет форму $\left(\begin{smallmatrix} (R,M) \\ (N,S) \end{smallmatrix}\right)$ с гомоморфизмами модульного умножения

$$m \otimes (n,s) \to (mn, ms), \quad n \otimes (r,m) \to (nr, nm).$$

Аналогичные соображения верны для правых K-модулей. Любой правый K-модуль имеет вид модуля вектор-строк (X,Y), где X — правый R-модуль и Y — правый S-модуль. С этим K-модулем ассоциируются модульные гомоморфизмы $Y \otimes_S N \to X$ и $X \otimes_R M \to Y$, удовлетворяющие соответствующим соотношениям ассоциативности. Модульное умножение есть произведение строки на матрицу. Все свойства левых K-модулей имеют правосторонние аналоги. Их можно и механически вывести путём перехода к правым модулям над противоположным кольцом K° (см. § 1). Как замечено в § 1, кольцо K° также является кольцом формальных матриц.

Обратим особое внимание на то, что левый K-модуль вида $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ и его элементы далее также записываются как строки.

Для (правых или левых) K-модулей принимаем договорённость о записи матриц, действующую для самого кольца K. Например, $\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $(X,0)$ записываем как X, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $(x,0)$ записываем как x и т. п.

Пусть (X,Y) — некоторый (левый) K-модуль. Положим $MY = \operatorname{Im} f$ и $NX = \operatorname{Im} g$. Понятно, что MY и NX — множества всех конечных сумм

элементов вида my и nx соответственно. Имеют место включения $IX \subseteq MY$ и $JY \subseteq NX$. Обозначения, подобные MN, MY, NX, будем использовать и в случае, когда рассматриваются подгруппы в M, N, Y, X.

Вместо гомоморфизмов модульного умножения $f\colon M \otimes_S Y \to X$, $g\colon N \otimes_R X \to Y$ иногда удобнее использовать S-гомоморфизм f' и R-гомоморфизм g':

$$f'\colon Y \to \mathrm{Hom}_R(M, X), \quad f'(y)(m) = f(m \otimes y) = my, \quad y \in Y,\ m \in M,$$
$$g'\colon X \to \mathrm{Hom}_S(N, Y), \quad g'(x)(n) = g(n \otimes x) = nx, \quad x \in X,\ n \in N.$$

Гомоморфизмы f' и g' соответствуют гомоморфизмам f и g при естественных изоморфизмах абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_S Y, X) \cong \mathrm{Hom}_S(Y, \mathrm{Hom}_R(M, X))$$

и

$$\mathrm{Hom}_S(N \otimes_R X, Y) \cong \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_S(N, Y)).$$

Разумеется, при задании K-модулей можно исходить из гомоморфизмов f' и g', что совершенно равносильно первоначальному подходу. Поэтому f' и g' можно также называть *гомоморфизмами модульного умножения*.

Гомоморфизмы K-модулей можно представлять парами, состоящими из гомоморфизмов R-модулей и S-модулей. Пусть даны K-модули (X, Y) и (X_1, Y_1). Допустим, что $\alpha\colon X \to X_1$ и $\beta\colon Y \to Y_1$ — R-гомоморфизм и S-гомоморфизм соответственно, причём

$$\alpha(my) = m\beta(y), \quad \beta(nx) = n\alpha(x)$$

для всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$. Тогда отображение $(X, Y) \to (X_1, Y_1)$, $(x, y) \to (\alpha(x), \beta(y))$, есть K-гомоморфизм. Пусть теперь дан некоторый K-гомоморфизм $\Phi\colon (X, Y) \to (X_1, Y_1)$. Из равенств

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(x, y)\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Phi(x, y),$$
$$\Phi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(x, y)\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Phi(x, y)$$

следует, что Φ действует как $\Phi(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$, где α и β — отображения $X \to X_1$ и $Y \to Y_1$ соответственно. Непосредственно проверяется, что α — R-гомоморфизм, β — S-гомоморфизм и $\alpha(my) = m\beta(y)$, $\beta(nx) = n\alpha(x)$ для всех элементов из этих равенств. Таким образом, мы имеем основание записывать гомоморфизмы K-модулей в виде пар (α, β).

Изложенный материал о строении K-модулей можно представить в категорной форме. Мы докажем, что категория K-модулей эквивалентна некоторой категории «четвёрок». Определим категорию $\mathscr{A}(K)$. Её объекты — это выражения (X, Y, f, g), где X — R-модуль, Y — S-модуль, $f\colon M\otimes_S Y\to X$ — R-гомоморфизм, $g\colon N\otimes_R X\to Y$ — S-гомоморфизм, причём следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccccc} M\otimes_S N\otimes_R X & \xrightarrow{1\otimes g} & M\otimes_S Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi\otimes 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle 1_X} \\ R\otimes_R X & & \xrightarrow{\qquad\mu\qquad} & & X, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} N\otimes_R M\otimes_S Y & \xrightarrow{1\otimes f} & N\otimes_R X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \psi\otimes 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle 1_Y} \\ S\otimes_S Y & & \xrightarrow{\qquad\nu\qquad} & & Y, \end{array} \tag{1}$$

где μ и ν — канонические гомоморфизмы. Морфизмы $(X, Y, f, g)\to$ $\to (X_1, Y_1, f_1, g_1)$ суть пары (α, β), где $\alpha\in \mathrm{Hom}_R(X, X_1)$, $\beta\in \mathrm{Hom}_S(Y, Y_1)$, причём следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_S Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\beta} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ M\otimes_S Y_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N\otimes_R X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ N\otimes_R X_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1. \end{array} \tag{2}$$

Теорема 7.1 [38, 87]. *Категории K-*mod *и $\mathscr{A}(K)$ эквивалентны.*

Доказательство. Определим функтор $F\colon K\text{-mod}\to \mathscr{A}(K)$. Для K-модуля V в качестве $F(V)$ возьмём $(eV, (1-e)V, f, g)$, где $e=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, eV и $(1-e)V$ — соответствующие модули из начала параграфа,

$$f\colon M\otimes_S (1-e)V\to eV \quad \text{и} \quad g\colon N\otimes_R eV\to (1-e)V$$

— «ограничения» канонического изоморфизма $K\otimes_K V\to V$. Диаграммы (1) будут коммутативными. Пусть $\Phi\colon V\to W$ — гомоморфизм K-модулей. Тогда $F(\Phi)\colon F(V)\to F(W)$ есть пара (α, β), где α — ограничение Φ на eV, β — ограничение Φ на $(1-e)V$. Заметим, что

$$\Phi(eV)=e\Phi(eV)\subseteq eW$$

и аналогично для $(1-e)V$. Непосредственно проверяется, что диаграммы (2) коммутативны.

Теперь определим функтор $G\colon \mathscr{A}(K) \to K\text{-mod}$. Пусть $(X, Y, f, g) \in \in \mathscr{A}(K)$. Полагаем, что $G(X, Y, f, g)$ — это группа вектор-строк

$$\{(x, y) \mid X \in X,\ y \in Y\}.$$

Действие K на $G(X, Y, f, g)$ зададим как

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}(x, y) = (rx + f(m \otimes y),\ g(n \otimes x) + sy).$$

В результате получаем K-модуль $G(X, Y, f, g)$. Если

$$(\alpha, \beta)\colon (X, Y, f, g) \to (X_1, Y_1, f_1, g_1)$$

— морфизм в $\mathscr{A}(K)$, то определим $G(\alpha, \beta)$ равенством

$$G(\alpha, \beta) = (\alpha(x), \beta(y)), \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Опять непосредственно проверяется, что $G(\alpha, \beta)$ — K-гомоморфизм.

Остаётся убедиться, что функторы F и G определяют эквивалентность категорий K-mod и $\mathscr{A}(K)$. А именно, композиция GF естественно эквивалентна тождественному функтору категории K-mod, а композиция FG естественно эквивалентна тождественному функтору категории $\mathscr{A}(K)$. Определим естественные преобразования σ и τ функторов следующим образом. Если V — некоторый K-модуль, то согласно нашим определениям $GF(V)$ есть K-модуль $(eV, (1-e)V)$. Отображение

$$\sigma_V\colon GF(V) \to V, \quad \sigma_V(ev, (1-e)v) = v, \quad v \in V,$$

является K-изоморфизмом. При этом если $\varphi\colon V \to W$ — гомоморфизм K-модулей, то $GF(\varphi)\sigma_W = \sigma_V\varphi$. Следовательно, σ — естественная эквивалентность.

Возьмём теперь объект $A = (X, Y, f, g)$ категории $\mathscr{A}(K)$. Тогда $FG(A)$ фактически есть A и в качестве морфизма $\tau_A\colon FG(A) \to A$ можно взять тождественный морфизм объекта A. Если A' — ещё один объект категории $\mathscr{A}(K)$ и $\psi\colon A \to A'$ — морфизм, то непосредственно проверяется, что диаграмма объектов в $\mathscr{A}(K)$

$$\begin{array}{ccc} FG(A) & \xrightarrow{FG(\psi)} & FG(A') \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_A} & & \downarrow{\scriptstyle \tau'_A} \\ A & \xrightarrow{\psi} & A', \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, τ — естественная эквивалентность, и теорема доказана. □

Есть простые, но весьма полезные конструкции K-модулей на основе тензорного произведения и группы Hom. Пусть X — R-модуль. Группа вектор-строк $(X, N \otimes_R X)$ является K-модулем (мы рассматриваем $N \otimes_R X$ как канонический S-модуль), у которого гомоморфизмами модульного умножения являются гомоморфизм

$$M \otimes_S (N \otimes_R X) \to X, \quad m(n \otimes x) \to (mn)x,$$

и тождественный автоморфизм $N \otimes_R X \to N \otimes_R X$. Таким образом, в принятых нами обозначениях $m(n \otimes x) = (mn)x$ и $nx = n \otimes x$. Аналогичным образом исходя из S-модуля Y определяется K-модуль $(M \otimes_S Y, Y)$. Будем использовать обозначения $T(X) = N \otimes_R X$ и $T(Y) = M \otimes_S Y$. Модули $(X, T(X))$ и $(T(Y), Y)$ обладают одним характерным свойством.

Лемма 7.2. *Пусть даны R-модуль X, K-модуль (A, B) и R-гомоморфизм $\alpha\colon X \to A$. Тогда существует единственный такой S-гомоморфизм $\beta\colon T(X) \to B$, что $(\alpha, \beta)\colon (X, T(X)) \to (A, B)$ — гомоморфизм K-модулей.*

Аналогичное утверждение верно для S-модуля Y, S-гомоморфизма $Y \to B$ и K-модулей (A, B), $(T(Y), Y)$.

Доказательство. Отображение $N \times X \to B$, $(n, x) \to n\alpha(x)$, $n \in N$, $x \in X$, сбалансировано над S. Следовательно, существует S-гомоморфизм $\beta\colon T(X) \to B$, действующий на образующих элементах как

$$\beta(n \otimes x) = n\alpha(x).$$

Пара (α, β) определяет K-гомоморфизм, поскольку

$$\alpha(m(n \otimes x)) = m\beta(n \otimes x) \quad \text{и} \quad \beta(nx) = n\alpha(x)$$

для всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$.

Единственность β понимается в указанном ниже смысле. Если $(\alpha, \gamma)\colon (X, T(X)) \to (A, B)$ — какой-нибудь K-гомоморфизм, то $\gamma = \beta$. Действительно, согласно определению модуля $(X, T(X))$ имеем

$$\gamma(n \otimes x) = \gamma(nx) = n\alpha(x) = \beta(n \otimes x), \quad \gamma = \beta.$$

Для модулей (A, B) и $(T(Y), Y)$ доказательство проводится аналогично. □

Теперь образуем группу вектор-строк $(X, \mathrm{Hom}_R(M, X))$, где мы стандартным образом рассматриваем группу $\mathrm{Hom}_R(M, X)$ как S-модуль. На самом деле мы имеем K-модуль с гомоморфизмами модуль-

ного умножения

$$M \otimes_S \mathrm{Hom}_R(M, X) \to X, \quad m \otimes \alpha \to \alpha(m),$$
$$N \otimes_R X \to \mathrm{Hom}_R(M, X), \quad n \otimes x \to \beta,$$

где

$$\beta(m) = (mn)x, \quad m \in M,\ n \in N,\ x \in X, \quad \alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, X).$$

В соответствии с соглашениями о записи имеем равенства $m\alpha = \alpha(m)$ и $(nx)(m) = (mn)x$. Аналогично из S-модуля Y получаем K-модуль $(\mathrm{Hom}_S(N, Y), Y)$ с модульными умножениями

$$n\gamma = \gamma(n), \quad (my)(n) = (nm)y,$$
$$n \in N, \quad m \in M, \quad y \in Y, \quad \gamma \in \mathrm{Hom}_S(N, Y).$$

Будем писать $H(X)$ вместо $\mathrm{Hom}_R(M, X)$ и $H(Y)$ вместо $\mathrm{Hom}_S(N, Y)$. Модули $(X, H(X))$ и $(H(Y), Y)$ имеют одно важное свойство, связанное с гомоморфизмами.

Лемма 7.3. *Пусть даны R-модуль X, K-модуль (A, B) и R-гомоморфизм $\alpha\colon A \to X$. Определим отображение $\beta\colon B \to H(X)$ формулой $\beta(b)(m) = \alpha(mb)$, $b \in B$, $m \in M$. Тогда β — S-гомоморфизм, а (α, β) — K-гомоморфизм $(A, B) \to (X, H(X))$. Такой гомоморфизм β находится единственным образом.*

Аналогичное утверждение верно для S-модуля Y, S-гомоморфизма $B \to Y$ и K-модулей (A, B), $(H(Y), Y)$.

Доказательство. Отображение β является гомоморфизмом абелевых групп. Кроме того, для произвольных $s \in S$, $b \in B$ и $m \in M$ имеем

$$\beta(sb)(m) = \alpha(m(sb)), \quad (s\beta(b))(m) = \beta(b)(ms) = \alpha((ms)b).$$

Так как $m(sb) = (ms)b$, получаем, что $\beta(sb) = s\beta(b)$. Поэтому β — S-гомоморфизм.

Для того чтобы пара (α, β) была K-гомоморфизмом, достаточно выполнения равенств

$$\alpha(mb) = m\beta(b), \quad \beta(na) = n\alpha(a), \quad m \in M,\ n \in N,\ a \in A,\ b \in B.$$

Эти равенства следуют из того, что $m\beta(b) = \beta(b)(m) = \alpha(mb)$. Далее,

$$\beta(na)(m) = \alpha(m(na)) = \alpha((mn)a)) = mn\alpha(a) = (n\alpha(a))(m),$$
$$\beta(na) = n\alpha(a).$$

Предположим, что $(\alpha, \gamma)\colon (A, B) \to (X, H(X))$ — некоторый K-гомоморфизм. Согласно определению модуля $(X, H(X))$ имеем $\gamma(b)(m) = m\gamma(b)$,

$b \in B$, $m \in M$. С другой стороны, $m\gamma(b) = \alpha(mb)$ и $\beta(b)(m) = \alpha(mb)$, а значит, $\gamma(b)(m) = \beta(b)(m)$ и $\gamma = \beta$.

Для модулей (A, B) и $(T(Y), Y)$ доказательство проводится аналогично. □

Следствие 7.4. *Для любого R-модуля X имеют место канонические кольцевые изоморфизмы*

$$\mathrm{End}_K(X, T(X)) \cong \mathrm{End}_R(X) \cong \mathrm{End}_K(X, H(X)).$$

Аналогичное утверждение верно для колец эндоморфизмов модулей Y, $(T(Y), Y)$ и $(H(Y), Y)$.

Пусть дан K-модуль (X, Y) с гомоморфизмами модульного умножения

$$g\colon N \otimes_R X \to Y, \quad f\colon M \otimes_S Y \to X.$$

Рассмотрим ещё один вид K-модулей. Именно, определим K-модуль $(T(Y), T(X))$. Нужно указать соответствующие гомоморфизмы модульного умножения, которые мы обозначим f' и g'. Положим

$$f' = 1 \otimes f\colon N \otimes_R T(Y) \to T(X), \quad f'(n \otimes (m \otimes y)) = n \otimes my,$$
$$g' = 1 \otimes g\colon M \otimes_S T(X) \to T(Y), \quad g'(m \otimes (n \otimes x)) = m \otimes nx.$$

Используя принятые ранее соглашения о записи, считаем, что nx' — это $f'(n \otimes x')$ и my' — это $g'(m \otimes y')$. Теперь можно записать равенства

$$m(n \otimes x) = g'(m \otimes (n \otimes x)) = m \otimes nx, \quad n(m \otimes y) = n \otimes my.$$

Мы должны проверить свойства ассоциативности, т. е. равенства

$$(m'n')x' = m'(n'x'), \quad (n'm')y' = n'(m'y')$$

для любых элементов $m' \in M$, $n' \in N$, $x' \in T(Y)$, $y' \in T(X)$.

Конечно, можно считать, что $x = m \otimes y$ и $y' = n \otimes x$ для некоторых $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$. Вычисляя, убеждаемся, что верны равенства

$$\begin{aligned} m'(n'x') &= m'(n'(m \otimes y)) = m'(n' \otimes my) = m' \otimes n'(my) = \\ &= m' \otimes (n'm)y = m'(n'm)y = (m'n')my = (m'n')m \otimes y, \\ (m'n')x' &= (m'n')(m \otimes y) = (m'n')m \otimes y. \end{aligned}$$

Второе равенство проверяется аналогично.

Итак, существует K-модуль $(T(Y), T(X))$ с гомоморфизмами модульного умножения f' и g'. Верны равенства

$$n(m \otimes y) = n \otimes my, \quad m(n \otimes x) = m \otimes nx$$

для всех букв, входящих в эти равенства. Можно проверить, что отображение

$$(f, g)\colon (T(Y), T(X)) \to (X, Y)$$

является K-гомоморфизмом.

Замечания. 1. Для любого модуля (X, Y) можно записать следующие четыре гомоморфизма:

$$(1, g)\colon (X, T(X)) \to (X, Y), \quad (f, 1)\colon (T(Y), Y) \to (X, Y),$$
$$(1, f')\colon (X, Y) \to (X, H(X)), \quad (g', 1)\colon (X, Y) \to (H(Y), Y).$$

На основании лемм 7.2 и 7.3 заключаем, что f, g и f', g' являются единственно возможными гомоморфизмами при условии, что второе отображение — тождественное отображение. Эти гомоморфизмы будут весьма полезны в дальнейшем.

2. Правосторонний вариант конструкции K-модулей $(X, H(X))$ и $(H(Y), Y)$ из § 2 выглядит следующим образом. Если Z — правый R-модуль, то группа вектор-строк $(Z, \mathrm{Hom}_R(N, Z))$ является правым K-модулем. Гомоморфизмы модульного умножения определяются аналогично случаю левых модулей. Точно так же правый S-модуль Z приводит к правому K-модулю $(\mathrm{Hom}_S(M, Z), Z)$.

Укажем некоторые функторы, действующие между категориями K-mod, R-mod и S-mod. Для любого кольца K формальных матриц существует кольцевой гомоморфизм

$$R \times S \to K, \quad (r, s) \to \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждый K-модуль можно считать $R \times S$-модулем. Это даёт «забывающий» функтор $E\colon K\text{-mod} \to R \times S\text{-mod}$. Отметим, что если K — кольцо формальных матриц с нулевыми идеалами следа, то «диагональное» отображение

$$K \to R \times S, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \to (r, s),$$

является гомоморфизмом; следовательно, в этом случае любой $R \times S$-модуль является K-модулем. Теперь определим два функтора T и H из $R \times S$-mod в K-mod. Функторы T и H сопоставляют $R \times S$-модулю (X, Y) K-модули $(X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$ и $(X, H(X)) \oplus (H(Y), Y)$ соответственно. Если $(\alpha, \beta)\colon (X, Y) \to (X_1, Y_1)$ — гомоморфизм $R \times S$-модулей, то $T(\alpha, \beta)$ и $H(\alpha, \beta)$ — определённые очевидным образом индуцирован-

ные гомоморфизмы $T(X,Y) \to T(X_1,Y_1)$ и $H(X,Y) \to H(X_1,Y_1)$ соответственно. Фактически T есть функтор $K \otimes_{R\times S} (-)$, где

$$T(X,Y) = K \otimes_{R\times S} (X,Y),$$

а H есть функтор $\mathrm{Hom}_{R\times S}(K,-)$, где

$$H(X,Y) = \mathrm{Hom}_{R\times S}(K,(X,Y)).$$

Функторы T и H переводят гомоморфизмы $R \times S$-модулей в соответствующие индуцированные гомоморфизмы K-модулей. Функтор T (функтор H) сопряжён слева (сопряжён справа) к функтору E. Эти ситуации сопряжённости появляются в леммах 7.2 и 7.3.

Функторы T и H также связаны между собой определённым образом. Речь идёт о существовании естественного преобразования $\theta\colon T \to H$. Соответствующий естественный гомоморфизм

$$\theta(X,Y)\colon T(X,Y) \to H(X,Y)$$

есть сумма гомоморфизмов $(1,h) + (h',1)$, где $h\colon T(X) \to H(X)$ отображает $n \otimes x$ в гомоморфизм $m \to (mn)x$. Аналогично определяется

$$(h',1)\colon (T(Y),Y) \to (H(Y),Y).$$

Зададим функтор $T_N = N \otimes_R (-)\colon R\text{-mod} \to S\text{-mod}$ равенством

$$T_N(X) = N \otimes_R X$$

для любого R-модуля X. Гомоморфизмы R-модулей функтор T_N переводит в индуцированные гомоморфизмы S-модулей. Аналогично определяется функтор T_M.

Существуют также функторы

$$(1,T_N)\colon R\text{-mod} \to K\text{-mod} \quad \text{и} \quad (1,0)\colon K\text{-mod} \to R\text{-mod}.$$

Первый функтор фактически является ограничением функтора T, введённого выше. А именно, $(1,T_N)X = (X,T_N(X))$ и $(1,0)(X,Y) = X$ для любого R-модуля X и каждого K-модуля (X,Y). Оба функтора переводят гомоморфизмы в индуцированные гомоморфизмы. Имеем равенства

$$((1,0)(1,T_N))X = X \quad \text{и} \quad ((1,T_N)(1,0))(X,Y) = (X,T_N(X)).$$

Имеются также аналогичные функторы $(T_M,1)\colon S\text{-mod} \to K\text{-mod}$ и $(0,1)\colon K\text{-mod} \to S\text{-mod}$.

Наконец, определим функтор (T, T) из категории T-mod в ту же категорию. Функтор (T, T) переводит модуль (X, Y) в модуль $(T(Y), T(X))$, а гомоморфизм $(\alpha, \beta)\colon (X, Y) \to (X', Y')$ переводится в гомоморфизм

$$(T(\beta), T(\alpha))\colon (T(Y), T(X)) \to (T(Y'), T(X')).$$

То, что отображение $(T(\beta), T(\alpha))$ является K-гомоморфизмом, проверяется так. Используя равенства $\alpha(my) = m\beta(y)$ и $\beta(nx) = n\alpha(x)$, выведем равенства $T(\beta)(my') = mT(\alpha)(y')$ и $T(\alpha)(nx') = nT(\beta)(x')$, где $y' = n \otimes x$ и $x' = m \otimes y$. Можно записать равенства

$$T(\beta)(my') = T(\beta)(m(n \otimes x)) = T(\beta)(m \otimes nx) = m \otimes \beta(nx) =$$
$$= m \otimes n\alpha(x) = m(n \otimes \alpha(x)) = m((1 \otimes \alpha)(n \otimes x)) = mT(\alpha)(y').$$

Второе равенство получается аналогично.

Теперь рассмотрим вид подмодулей и фактормодулей K-модулей. Это нетрудно сделать, поскольку мы знаем строение самих K-модулей. Пусть дан модуль $V = (X, Y)$ над кольцом K. Подмножество $W \subseteq V$ является подмодулем модуля V в точности тогда, когда в R-модулях X и Y существуют такие подмодули A и B, что $W = (A, B)$, $MB \subseteq A$, $NA \subseteq B$. Следующая ситуация является важным частным случаем. Для подмодулей A и B модулей X и Y соответственно множества (A, NA) и (MB, B) всегда являются подмодулями в (X, Y). Если кольцо K имеет нулевые идеалы следа (т. е. $I = 0 = J$), то получаем подмодули $(MB, 0)$ и $(0, NA)$. Связь модулей (A, NA), (MB, B) с модулями $(A, T(A))$, $(T(B), B)$ и $(A, H(A))$, $(H(B), B)$ ясна из замечаний после следствия 7.4.

Пусть $W = (A, B)$ — подмодуль K-модуля $V = (X, Y)$. Группа вектор-строк $(X/A, Y/B)$ является K-модулем. Гомоморфизмы модульного умножения

$$M \otimes_S Y/B \to X/A, \quad N \otimes_R X/A \to Y/B$$

индуцируются гомоморфизмами модульного умножения модуля (X, Y). А именно, $m\overline{y} = \overline{my}$, где $\overline{y} = y + B$, $\overline{my} = my + A$, причём аналогичная ситуация имеет место для второго гомоморфизма. Фактормодуль V/W можно отождествить с модулем $(X/A, Y/B)$. Более точно, сопоставление $(x, y) + W \to (x + A, y + B)$ является изоморфизмом между этими модулями.

При работе с модулями над кольцом формальных треугольных матриц появляются некоторые особенности. Их нетрудно выявить, рассмотрев предыдущий текст при условии $N = 0$. Остановимся только на некоторых деталях. Пусть (X, Y) — K-модуль. Из двух гомоморфизмов модульного умножения f и g остаётся только f (в том смысле, что

$g = 0$). Два равенства ассоциативности выполняются автоматически. Важная особенность «треугольного случая» заключается в том, что для любого R-модуля X имеем K-модуль $(X, 0)$. Гомоморфизм K-модулей $(X, Y) \to (X_1, Y_1)$ есть пара (α, β), состоящая из R-гомоморфизма $\alpha\colon X \to X_1$ и S-гомоморфизма $\beta\colon Y \to Y_1$, удовлетворяющих условию $\alpha(my) = m\beta(y)$ для всех $m \in M$ и $y \in Y$. Категория $\mathscr{A}(K)$ из теоремы 7.1 превращается в категорию «троек» вида (X, Y, f). Диаграммы (1) всегда коммутативны, а в (2) остаётся только первая диаграмма. Если X — R-модуль и Y — S-модуль, то K-модули $(X, T(X))$ и $(H(Y), Y)$ из лемм 7.2 и 7.3 имеют вид $(X, 0)$ и $(0, Y)$ соответственно.

Модули над кольцом формальных матриц порядка $n > 2$ устроены так же, как в случае $n = 2$. Такой модуль представляет собой модуль вектор-столбцов высоты n, а модульное умножение выполняется по правилу «умножение матрицы на столбец». Нет особой надобности приводить подробности. Собственно, все детали ясны из разобранного случая $n = 2$. Более внимательно рассмотрим модули над кольцом формальных треугольных матриц

$$\Gamma = \begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

порядка 3 (об этом кольце см. конец § 3). Пусть $\varphi\colon M \otimes_S N \to L$ — R-T-бимодульный гомоморфизм, участвующий в определении кольца Γ. Как и раньше, мы пишем mn вместо $\varphi(m \otimes n)$. Предположим, что даны R-модуль X, S-модуль Y, T-модуль Z, R-модульные гомоморфизмы $f\colon M \otimes_S Y \to X$ и $h\colon L \otimes_T Z \to X$ и S-модульный гомоморфизм $g\colon N \otimes_T Z \to Y$, причём сохраняются прежние обозначения и $m(nz) = (mn)z$ для всех $m \in M$, $n \in N$, $z \in Z$. Тогда (X, Y, Z) — Γ-модуль с модульным умножением типа «матрица на столбец». Таким способом можно получить любой Γ-модуль.

Гомоморфизмы Γ-модулей действуют покоординатно. Гомоморфизм $(X, Y, Z) \to (X_1, Y_1, Z_1)$ есть тройка (α, β, γ), где $\alpha\colon X \to X_1$, $\beta\colon Y \to Y_1$, $\gamma\colon Z \to Z_1$ — гомоморфизмы соответствующих модулей. Кроме того, должны выполняться равенства

$$\alpha(my) = m\beta(y), \quad \alpha(\ell z) = \ell\gamma(z), \quad \beta(nz) = n\gamma(z)$$

для всех значений m, n, ℓ, y, z.

Аналогично категории $\mathscr{A}(K)$ введём категорию $\mathscr{A}(\Gamma)$. Её объекты — выражения (X, Y, Z, f, g, h), а морфизмы — тройки (α, β, γ), для которых коммутативны диаграммы, подобные диаграммам (2) перед

теоремой 7.1. Категории Γ-mod и $\mathscr{A}(\Gamma)$ эквивалентны [38]. Это можно доказать прямыми рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства теоремы 7.1. Можно также дважды применить теорему 7.1. Детализируем второе утверждение.

Кольцо Γ естественным образом изоморфно двум кольцам Δ и Λ треугольных матриц порядка 2 (см. конец § 3). В свою очередь, Γ-модуль (X, Y, Z) с гомоморфизмами f, g, h можно рассматривать как Δ-модуль $((X, Y), Z)$ вектор-строк длины 2, состоящих из блоков (x, y) и z. Здесь (X, Y) есть $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$-модуль, получаемый с помощью гомоморфизма $f\colon M \otimes_S Y \to X$, а гомоморфизм $\left(\begin{smallmatrix} L \\ N \end{smallmatrix}\right) \otimes_T Z \to (X, Y)$ есть $h + g$. Модульное умножение Γ-модуля (X, Y, Z) индуцирует модульное умножение Δ-модуля $((X, Y), Z)$, выполняемое над блоками. Аналогично Γ-модуль (X, Y, Z) превращается в Λ-модуль $(X, (Y, Z))$ таким образом, что (Y, Z) есть $\left(\begin{smallmatrix} S & N \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$-модуль, получаемый с помощью гомоморфизма $g\colon N \otimes_T Z \to Y$, а гомоморфизм

$$(M, L) \otimes_{\left(\begin{smallmatrix} S & N \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)} (Y, Z) \to X$$

есть $f + h$ (учесть, что $m(nz) = (mn)z$). Можно практически не различать Γ-модуль (X, Y, Z) и Δ-модуль $((X, Y), Z)$. При более строгом подходе можно сказать, что категории Γ-mod и Δ-mod эквивалентны. Теперь понятно, как можно получить эквивалентность категорий Γ-mod и $\mathscr{A}(\Gamma)$, дважды применяя теорему 7.1.

Интересны и важны результаты в другом направлении: сведение изучения модуля над произвольным кольцом $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ к изучению модулей над каким-то кольцом треугольных матриц. Приведём одну простую теорему довольно общего характера на эту тему.

Пусть $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$. Зафиксируем некоторый идеал L кольца R, содержащий идеал следа I (например, $L = I$ или $L = R$). Тогда существует кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

порядка 3. Такие кольца только что рассматривались. В качестве бимодульного гомоморфизма $M \otimes_S N \to L$ берём φ, что корректно, поскольку $\operatorname{Im}\varphi = I \subseteq L$.

Пусть $V = (X, Y)$ — некоторый K-модуль с гомоморфизмами модульного умножения $f\colon M \otimes_S Y \to X$ и $g\colon N \otimes_R X \to Y$. Можно сконструировать Γ-модуль $W = (X, Y, X)$ с гомоморфизмами модульного умно-

жения $f\colon M\otimes_S Y\to X$, $h\colon L\otimes_R X\to X$ и $g\colon N\otimes_R X\to Y$, где h — канонический гомоморфизм $\ell\otimes x\to \ell x$, $\ell\in L$, $x\in X$. Равенство $m(nz)=(mn)z$ справедливо, так как оно превращается в равенство $m(nx)=(mn)x$, верное в силу существования K-модуля (X,Y).

Выясним, какова связь между гомоморфизмами K-модулей и гомоморфизмами Г-модулей. Пусть $(\alpha,\beta)\colon (X,Y)\to(X_1,Y_1)$ — гомоморфизм K-модулей. Покажем, что $(\alpha,\beta,\alpha)\colon (X,Y,X)\to(X_1,Y_1,X_1)$ — гомоморфизм Г-модулей. Действительно, выполнены три нужных равенства

$$\alpha(my)=m\beta(y),\quad \beta(nx)=n\alpha(x),\quad \alpha(\ell x)=\ell\alpha(x).$$

Наоборот, предположим, что $(\alpha,\beta,\gamma)\colon (X,Y,X)\to(X_1,Y_1,X_1)$ — гомоморфизм Г-модулей, причём считаем, что $L=R$. Тогда

$$r\alpha(x)=\alpha(rx)=r\gamma(x)\quad \text{для всех } r\in R,\ x\in X.$$

Отсюда следует, что $\gamma=\alpha$. Таким образом, каждый гомоморфизм $(X,Y,X)\to(X_1,Y_1,X_1)$ есть «тройка» (α,β,α).

Оформим найденную связь между K-модулями и Г-модулями в категорном виде. В качестве Г возьмём кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M & R\\ 0 & S & N\\ 0 & 0 & R\end{pmatrix}.$$

Определим ковариантный функтор $F\colon K\text{-mod}\to\Gamma\text{-mod}$. Функтор F переводит K-модуль $V=(X,Y)$ в Г-модуль $F(V)=(X,Y,X)$. Функтор F переводит K-модульный гомоморфизм (α,β) в Г-модульный гомоморфизм (α,β,α).

Теорема 7.5. *Функтор F осуществляет полное вложение категории K-mod в категорию* Г-mod.

Доказательство. Имеется в виду, что F определяет эквивалентность между K-mod и полной подкатегорией категории Г-mod, состоящей из модулей вида (X,Y,X). Всё необходимое для доказательства этого утверждения приведено в тексте перед теоремой 7.5. □

Следствие 7.6. *Пусть V — K-модуль. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *кольца эндоморфизмов K-модуля V и* Г*-модуля $F(V)$ изоморфны*;

2) *K-модуль V неразложим в точности тогда, когда* Г*-модуль $F(V)$ неразложим*.

В работе [53] детально изучаются представления Г-модулей, где Г — произвольное кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}.$$

При этом Г-модули рассматриваются как модули над каждым из двух колец треугольных матриц порядка 2, указанных в § 3. Статья [38] содержит интересное исследование проблемы, затронутой в теореме 7.5. В частности, построено несколько функторов из категории K-модулей в категорию модулей над различными кольцами треугольных матриц порядка 3. Автор пытается подобрать Г так, чтобы K и Г одновременно имели конечный (бесконечный) тип представлений.

Модули над кольцом формальных матриц порядка $n > 2$ устроены так же, как в случае $n = 2$. Такой модуль представляет собой модуль вектор-столбцов высоты n, а модульное умножение — это умножение матрицы на столбец. Конкретный K-модуль X имеет вид

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix},$$

где X_i — R_i-модуль, $i = 1, \dots, n$. Кроме того, для любого k существуют гомоморфизмы $f_{ki} : M_{ki} \otimes_{R_i} X_i \to X_k$, $i = 1, \dots, n$, и выполняются очевидные равенства ассоциативности. Положим $f_{ki}(a \otimes x) = ax$, где $a \in M_{ki}$ и $x \in X_i$. Обычно мы записываем модуль X и его элементы как строки.

Все функторы, определённые для $n = 2$, имеют аналоги для $n > 2$. Определим только аналог функтора T. Обозначим через L кольцевое прямое произведение $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$. Диагональное вложение $i : L \to K$ индуцирует функтор $T = T(i) = K \otimes_L (-) : L\text{-mod} \to K\text{-mod}$. Если $X = (X_1, \dots, X_n)$ — L-модуль, то

$$T(X) = (X_1, T(X_1), \dots, T(X_1)) \oplus (T(X_2), X_2, \dots, T(X_2)) \oplus \dots \\ \dots \oplus (T(X_n), T(X_n), \dots, X_n).$$

Или, используя краткие обозначения, можно писать (см. [30])

$$T(X) = (X_1, T(X_1)) \oplus \dots \oplus (T(X_n), X_n).$$

§ 8. Малые и существенные подмодули

Продемонстрируем некоторые приёмы работы с модулями над кольцами формальных матриц.

Пусть $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц, а (X, Y) — K-модуль. Некоторые подмодули модуля (X, Y) играют исключительно важную роль в различных вопросах. К ним относятся подмодули MY и NX, введённые в § 7. Определим ещё два подмодуля, положив $L(X) = \{x \in X \mid nx = 0$ для каждого $n \in N\}$ и $L(Y) = \{y \in Y \mid my = 0$ для каждого $m \in M\}$. Если кольцо K имеет нулевые идеалы следа, то $MY \subseteq L(X)$ и $NX \subseteq L(Y)$.

В данном параграфе мы считаем, что K — кольцо с нулевыми идеалами следа, т. е. идеалы следа I и J кольца K равны нулю. В этом случае $mn = 0 = nm$ для всех $m \in M$ и $n \in N$.

Кроме малых и существенных подмодулей мы приведём описание конечно порождённых, пустотелых и равномерных K-модулей. Здесь уместно записать замечание, подобное сделанному в § 1 о характере исследования кольца K. Когда мы ведём речь об описании некоторого K-модуля (X, Y), разумно искать это описание в терминах R-модуля X, S-модуля Y и действий бимодулей M и N на Y и X соответственно.

Предложение 8.1. *K-модуль (X, Y) конечно порождён в точности тогда, когда R-модуль X/MY и S-модуль Y/NX конечно порождены.*

Доказательство. Пусть (X, Y) — конечно порождённый K-модуль с системой образующих $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$. Возьмём произвольный элемент $x \in X$ и запишем

$$(x, 0) = t_1(x_1, y_1) + \ldots + t_k(x_k, y_k),$$

где

$$t_i = \begin{pmatrix} r_i & m_i \\ n_i & s_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{k} (r_i x_i + m_i y_i), \quad x + MY = r_1(x_1 + MY) + \ldots + r_k(x_k + MY).$$

Следовательно, $\{x_i + MY\}_{i=1}^k$ и $\{y_i + NX\}_{i=1}^k$ — системы образующих для X/MY и Y/NX соответственно.

Предположим теперь, что модули X/MY и Y/NX конечно порождены и $\{x_i + MY\}_{i=1}^k$ и $\{y_i + NX\}_{i=1}^\ell$ — их системы образующих. Докажем, что $\{(x_i, 0),\ (0, y_j) \mid i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, \ell\}$ есть система образующих K-модуля (X, Y). Достаточно проверить, что все элементы вида $(x, 0)$ и $(0, y)$ являются линейными комбинациями элементов представленной системы. Для $(x, 0)$ это получается так (для $(0, y)$ аналогично).

Имеем

$$x = r_1x_1 + \ldots + r_kx_k + m_1b_1 + \ldots + m_ib_i,$$

где $r \in R$, $m \in M$, $b \in Y$ для всех значений индексов. В свою очередь, каждый из элементов $b_1, \ldots, b_i$ равен сумме вида

$$s_1y_1 + \ldots + s_\ell y_\ell + n_1a_1 + \ldots + n_ja_j,$$

где $s \in S$, $n \in N$, $a \in X$ для всех значений индексов. Подставим эти суммы в выражение для x и учтём, что всегда $mn = 0$. Получим, что

$$x = r_1x_1 + \ldots + r_kx_k + c_1y_1 + \ldots + c_\ell y_\ell$$

для некоторых $c_1, \ldots, c_\ell \in M$. Теперь понятно, как записать $(x, 0)$ в нужном виде. Отметим лишь, что, например,

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(0, y_1) = (c_1y_1, 0). \qquad \square$$

Обозначим через (σ, τ) канонический гомоморфизм

$$(X, Y) \to (X/MY, Y/NX).$$

Уточним, что (MY, NX) есть подмодуль в (X, Y), а фактормодуль

$$(X, Y)/(MY, NX)$$

можно отождествить с модулем $(X/MY, Y/NX)$, как мы договорились в § 7.

Подмодуль A некоторого модуля V называется *малым*, если $B = V$ для любого такого подмодуля B в V, что $A + B = V$.

Предложение 8.2. *Пусть (X, Y) — K-модуль. Подмодуль (A, B) является малым в (X, Y) в точности тогда, когда σA — малый подмодуль в X/MY и τB — малый подмодуль в Y/NX.*

Доказательство. Предположим, что (A, B) — малый подмодуль в (X, Y). Пусть дано равенство $\sigma A + C/MY = X/MY$ для некоторого подмодуля C в X. Поскольку $\sigma A = (A + MY)/MY$, получаем, что

$$A + C = X, \quad (A, B) + (C, Y) = (X, Y), \quad (C, Y) = (X, Y), \quad C = X.$$

Поэтому σA — малый подмодуль в X/MY. Аналогично доказывается, что τB — малый подмодуль в Y/NX.

Теперь допустим, что σA — малый подмодуль в X/MY и τB — малый подмодуль в Y/NX. Пусть

$$(A, B) + (C, D) = (X, Y)$$

для некоторого подмодуля (C, D) в (X, Y). Тогда

$$A + C = X, \quad B + D = Y, \quad \sigma A + (C + MY)/MY = X/MY,$$
$$\tau B + (D + NX)/NX = Y/NX.$$

Так как σA — малый подмодуль в X/MY и τB — малый подмодуль в Y/NX, получаем, что $C + MY = X$ и $D + NX = Y$. Умножим последние равенства на N и M соответственно. Получим $NC = NX$ и $MD = MY$. Теперь находим $MY = MD \subseteq C$ и $NX = NC \subseteq D$. Поэтому $C = X$, $D = Y$ и (A, B) — малый подмодуль в (X, Y). □

Модуль M называется *пустотелым*, если он не равен нулю и все его подмодули малы в M.

Следствие 8.3. *Ненулевой модуль (X, Y) является пустотелым в точности тогда, когда либо X/MY — пустотелый модуль и $Y = NX$, либо Y/NX — пустотелый модуль и $X = MY$.*

Доказательство. Сначала заметим, что равенства $X = MY$ и $Y = NX$ не могут выполняться одновременно.

Предположим, что (X, Y) — пустотелый модуль. Рассмотрим два возможных случая для модуля (X, NX).

1. $(X, NX) = (X, Y)$. Тогда $Y = NX$ и $X \neq MY$. Возьмём некоторый подмодуль A/MY в X/MY, где $A \neq X$. По условию (A, NA) — малый подмодуль в (X, Y). Из предложения 8.2 следует, что A/MY — малый подмодуль в X/MY. Поэтому X/MY — пустотелый модуль.

2. $(X, NX) \neq (X, Y)$. Из предложения 8.2 следует, что X/MY — малый подмодуль в X/MY, а значит, $X = MY$. Тогда $(MY, Y) = (X, Y)$ и аналогично случаю 1 получаем, что Y/NX — пустотелый модуль.

Теперь допустим, что X/MY — пустотелый модуль и $Y = NX$. (Случай, когда Y/NX — пустотелый модуль и $X = MY$, рассматривается аналогично.) Возьмём некоторый собственный подмодуль (A, B) в (X, Y). Ясно, что $A \neq X$. По условию σA — малый подмодуль в X/MY, причём очевидно, что τB — малый подмодуль в Y/NX. Из предложения 8.2 следует, что (A, B) — малый подмодуль в (X, Y). Поэтому (X, Y) — пустотелый модуль. □

Модуль называется *локальным*, если он конечно порождён и имеет ровно один максимальный подмодуль. Нетрудно проверить, что локальные модули совпадают с конечно порождёнными пустотелыми модулями. Из предложения 8.1 и следствия 8.3 вытекает следующий результат.

Следствие 8.4. *Модуль (X, Y) является локальным в точности тогда, когда либо X/MY — локальный модуль и $Y = NX$, либо Y/NX — локальный модуль и $X = MY$.*

Подмодуль A модуля V называется *существенным* (или *большим*), если A имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым подмодулем модуля V. В этом случае V называется *существенным расширением* модуля A.

Предложение 8.5. *Подмодуль (A, B) модуля (X, Y) является существенным в точности тогда, когда $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$ и $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$.*

Доказательство. Пусть (A, B) — существенный подмодуль в (X, Y). Проверим, что $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$. Для ненулевого элемента $x \in L(X)$ существует такая матрица $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ n & s \end{smallmatrix}\right)$, что

$$0 \neq \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}(x, 0) \in (A, B), \quad \text{или} \quad (rx, nx) \in (A, B).$$

Кроме того, $nx = 0$, поскольку $x \in L(X)$. Тогда $rx \neq 0$, $rx \in A \cap L(X)$ и $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$. Аналогично $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$.

Допустим теперь, что $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$, $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$ и (x, y) — ненулевой элемент в (X, Y). Докажем, что $K(x, y) \cap (A, B) \neq 0$. Если $y \neq 0$, то можно считать, что $x = 0$. Рассмотрим случай, когда $y \notin L(Y)$. Тогда $my \neq 0$ для некоторого $m \in M$. Так как $my \in L(X)$ и $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$, получаем, что $0 \neq rmy \in A \cap L(X)$ для некоторого $r \in R$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & rm \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(0, y) = (rmy, 0) \in (A, B).$$

Если же $y \in L(Y)$, то $0 \neq sy \in B \cap L(Y)$, где $s \in S$, поскольку $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$. Тогда $s(0, y) = (0, sy) \in (A, B)$. Случай $y = 0$ рассматривается аналогично. □

Модуль называется *равномерным*, если пересечение любых его двух ненулевых подмодулей не равно нулю.

Следствие 8.6. *Модуль (X, Y) равномерен в точности тогда, когда либо $L(X) = 0$ и Y равномерен, либо $L(Y) = 0$ и X равномерен.*

Доказательство. Пусть (X, Y) — равномерный модуль. Пересечение подмодулей $(L(X), 0)$ и $(0, L(Y))$ равно нулю. Поэтому хотя бы один из модулей $L(X)$, $L(Y)$ равен нулю. Если, например, $L(X) = 0$, то

$L(Y) = Y$, поскольку $MY \subseteq L(X) = 0$. Возьмём произвольный ненулевой подмодуль B в Y. Так как (MB, B) — существенный подмодуль в (X, Y), из предложения 8.5 следует, что $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$. Поэтому Y — существенное расширение модуля B и модуль Y равномерен. Если $L(Y) = 0$, то рассуждаем аналогично.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $L(X) = 0$ и модуль Y равномерен. Как и выше, $L(Y) = Y$. Пусть (A, B) — произвольный ненулевой подмодуль в (X, Y). Тогда $B \neq 0$, поскольку в противном случае $A \neq 0$ и $A \subseteq L(X)$, что невозможно. Из предложения 8.5 следует, что (A, B) — существенный подмодуль в (X, Y). Поэтому модуль (X, Y) равномерен. □

Замечание. Все результаты этого параграфа применимы к модулям над кольцом $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ треугольных матриц (см. [47]). Надо только сделать соответствующие уточнения, учитывая, что для модуля (X, Y) над таким кольцом всегда верны равенства $NX = 0$ и $L(X) = X$. Например,

(X, Y) — пустотелый модуль в точности тогда, когда либо X — пустотелый модуль и $Y = 0$, либо Y — пустотелый модуль и $X = MY$;

(X, Y) — равномерный модуль в точности тогда, когда либо $X = 0$ и Y — равномерный модуль, либо $L(Y) = 0$ и X — равномерный модуль.

§ 9. Цоколь и радикал

В этом параграфе K — произвольное кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. Сначала мы опишем простые K-модули. Затем применим это описание и выясним строение минимальных и максимальных подмодулей, цоколя и радикала.

Ненулевой модуль называется *простым*, если он не имеет нетривиальных подмодулей.

Предложение 9.1. *Модуль (X, Y) является простым в точности тогда, когда либо X и Y — простые модули и $X = MY$, $Y = NX$, либо X — простой модуль и $Y = 0$, либо $X = 0$ и Y — простой модуль.*

Прежде чем доказывать предложение 9.1, сделаем следующее замечание.

Так как всегда верны включения $IX \subseteq MY$ и $JY \subseteq NX$ (см. § 7), из равенств $X = IX$ и $Y = JY$ следуют равенства $X = MY$ и $Y = NX$. Верно и обратное. Аналогично условие $IX, JY \neq 0$ равносильно

тому, что $MY, NX \neq 0$. Поэтому в предложении 9.1 можно также писать $X = IX$, $Y = JY$, или $IX, JY \neq 0$, или $MY, NX \neq 0$.

Доказательство предложения 9.1. Пусть (X, Y) — простой модуль и $X, Y \neq 0$. Для любых ненулевых подмодулей A в X и B в Y верно, что (A, NA) и (MB, B) суть подмодули в (X, Y). Поэтому $A = X$, $B = Y$ и X, Y — простые модули. В частности, $X = MY$ и $Y = NX$. Если один из модулей X, Y равен нулю, то ясно, что второй модуль должен быть простым.

Допустим теперь, что X и Y — простые модули и $X = MY$, $Y = NX$. Нетривиальный подмодуль в (X, Y) может быть только вида $(X, 0)$ или $(0, Y)$. Это невозможно в силу равенств $X = MY$ и $Y = NX$. Если же один из модулей X, Y прост, а второй модуль равен нулю, то ясно, что (X, Y) — простой модуль. □

Следствие 9.2. *Пусть (X, Y) — K-модуль.*

1. *Если $L(X) = 0 = L(Y)$, то модуль (X, Y) является простым в точности тогда, когда X и Y — простые модули.*

2. *Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то модуль (X, Y) является простым в точности тогда, когда либо модуль X прост и $Y = 0$, либо $X = 0$ и модуль Y прост.*

Ненулевой (соответственно собственный) подмодуль модуля V называется *минимальным* (соответственно *максимальным*), если он является минимальным (соответственно максимальным) элементом в решётке всех подмодулей модуля V.

Следствие 9.3. *Пусть (A, B) — подмодуль K-модуля (X, Y).*

1. *Подмодуль (A, B) минимальный в точности тогда, когда либо A и B минимальные и $A = MB$, $B = NA$, либо A минимальный и $B = 0$ (тогда $NA = 0$), либо $A = 0$ (тогда $MB = 0$) и B минимальный.*

2. *Подмодуль (A, B) максимальный в точности тогда, когда либо A и B максимальные и $MY \not\subseteq A$, $NX \not\subseteq B$ (это равносильно тому, что $IX \not\subseteq A$ и $JY \not\subseteq B$), либо A максимальный и $B = Y$ (тогда $MY \subseteq A$), либо $A = X$ (тогда $NX \subseteq B$) и B максимальный.*

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из предложения 9.1, поскольку каждый минимальный подмодуль является простым модулем. По поводу утверждения 2 заметим, что (A, B) — максимальный подмодуль в точности тогда, когда

$$(X, Y)/(A, B) = (X/A, Y/B)$$

— простой модуль. И снова можно применить предложение 9.1. Если выполнена первая возможность из этого предложения, то $X/A = M(Y/B)$ и $Y/B = N(X/A)$. Так как $M(Y/B) = (MY + A)/A$, имеем $X = MY + A$ и $MY \not\subseteq A$ в силу максимальности A. Кроме того, $NX \not\subseteq B$. Аналогично доказывается, что $IX \not\subseteq A$ и $JY \not\subseteq B$; это выводится также из замечания после предложения 9.1. □

Сумма всех минимальных подмодулей модуля V называется *цоколем* модуля V и обозначается $\operatorname{Soc} V$. Если V не имеет минимальных подмодулей, то $\operatorname{Soc} V = 0$ по определению.

Следствие 9.4. *Пусть (X, Y) — некоторый модуль. Его цоколь равен $(\operatorname{Soc} L(X), \operatorname{Soc} L(Y)) + \sum(A, NA)$, где суммирование производится по всем таким минимальным подмодулям A в X, что $IA \neq 0$ и NA — минимальный подмодуль в B. Последнее слагаемое также равно $\sum(MB, B)$, где суммирование производится по всем таким минимальным подмодулям B в Y, что $JB \neq 0$ и MB — минимальный подмодуль в A; это слагаемое также равно $\sum(A, B)$, где суммирование производится по всем вышеупомянутым A и B.*

Доказательство. Так как имеется три вида минимальных подмодулей, можно рассмотреть три суммы соответствующих минимальных подмодулей и записать

$$\operatorname{Soc}(X, Y) = \sum(A, 0) + \sum(0, B) + \sum(A, B).$$

Первое слагаемое есть $\operatorname{Soc} L(X)$, второе слагаемое есть $\operatorname{Soc} L(Y)$, третье слагаемое совпадает с каждой из трёх сумм, указанных в следствии. □

Следствие 9.5. *Пусть (X, Y) — K-модуль.*

1. *Если $L(X) = 0 = L(Y)$, то $\operatorname{Soc}(X, Y) = (\operatorname{Soc} X, \operatorname{Soc} Y)$.*

2. *Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то $\operatorname{Soc}(X, Y) = (\operatorname{Soc} L(X), \operatorname{Soc} L(Y))$, причём (X, Y) — существенное расширение цоколя $\operatorname{Soc}(X, Y)$ в точности тогда, когда X — существенное расширение цоколя $\operatorname{Soc} L(X)$ и Y — существенное расширение цоколя $\operatorname{Soc} L(Y)$.*

Пересечение всех максимальных подмодулей модуля V называется *радикалом* модуля V и обозначается через $\operatorname{Rad} V$. Если V не имеет максимальных подмодулей, то $\operatorname{Rad} V = V$ по определению.

Ниже через (σ, τ) обозначается канонический гомоморфизм

$$(X, Y) \to (X/MY, Y/NX).$$

Следствие 9.6. *Радикал модуля* (X, Y) *равен*

$$\left(\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X/MY), \tau^{-1}(\operatorname{Rad} Y/NX)\right) \cap \left(\bigcap (A, B)\right),$$

где пересечение берётся по всем таким подмодулям (A, B) *в* (X, Y), *что* A *и* B *— максимальные подмодули в* X *и* Y *соответственно, причём* $MY \not\subseteq A$, $NX \not\subseteq B$.

Доказательство. Мы знаем, что максимальные подмодули в (X, Y) могут быть трёх видов. Поэтому можно рассмотреть три группы соответствующих максимальных подмодулей и записать

$$\operatorname{Rad}(X, Y) = \left(\bigcap (A, Y)\right) \cap \left(\bigcap (X, B)\right) \cap \left(\bigcap (A, B)\right),$$
$$\bigcap (A, Y) = (\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X/MY), Y),$$
$$\bigcap (X, B) = (X, \tau^{-1}(\operatorname{Rad} Y/NX)).$$

□

Следствие 9.7. *Пусть* (X, Y) *—* K*-модуль.*

1. *Если* $NX = Y$ *и* $MY = X$, *то* $\operatorname{Rad}(X, Y) = (\operatorname{Rad} X, \operatorname{Rad} Y)$.

2. *Если* K *— кольцо с нулевыми идеалами следа, то* $\operatorname{Rad}(X, Y) = (\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X/MY), \tau^{-1}(\operatorname{Rad} Y/NX))$, *причём* $\operatorname{Rad}(X, Y)$ *— малый подмодуль в* (X, Y) *в точности тогда, когда* $\operatorname{Rad} X/MY$ *— малый подмодуль в* X/MY *и* $\operatorname{Rad} Y/NX$ *— малый подмодуль в* Y/NX.

Доказательство. 1. Из следствия 9.6 вытекает, что

$$\operatorname{Rad}(X, Y) = \bigcap (A, B),$$

где (A, B) — такие подмодули в (X, Y), что A и B — максимальные подмодули. Не очевидно, что это пересечение совпадает с $(\operatorname{Rad} X, \operatorname{Rad} Y)$. Поскольку

$$\bigcap (A, B) = \left(\bigcap A, \bigcap B\right),$$

достаточно доказать, что для каждого максимального подмодуля A в X существует максимальный подмодуль B в Y с тем свойством, что (A, B) есть подмодуль в (X, Y) (тогда (A, B) максимален), а также доказать аналогичное утверждение для каждого максимального подмодуля B в Y.

Пусть A — некоторый максимальный подмодуль в X. Подмножество (A, Y) не образует подмодуль (ввиду равенства $MY = X$). Поэтому множество всех подмодулей вида (A, D) индуктивно и непусто (поскольку оно содержит подмодуль (A, NA)). По лемме Цорна это множество содержит максимальный элемент (A, B). Этот подмодуль является максимальным подмодулем в (X, Y) (мы учитываем равенство $NX = Y$). Из следствия 9.3 вытекает, что B — максимальный подмодуль

в Y, что и утверждалось. Для максимального подмодуля B в Y можно провести аналогичные рассуждения.

2. Если (A, B) — такой подмодуль в (X, Y), что A и B максимальны и $MY \not\subseteq A$, $NX \not\subseteq B$, то $IX \not\subseteq A$ и $JY \not\subseteq B$. Так как $I = 0 = J$, пересечение $\bigcap(A, B)$ из следствия 9.6 равно нулю. Критерий малости радикала вытекает из предложения 8.2. □

Замечание. Все результаты этого параграфа применимы к модулям над кольцом $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ треугольных матриц (см. также конец предыдущего параграфа). Соответствующие результаты получены в статье [47]. Например,

$$\operatorname{Soc}(X, Y) = (\operatorname{Soc} X, \operatorname{Soc} L(Y)),$$
$$\operatorname{Rad}(X, Y) = (\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X / MY), \operatorname{Rad} Y).$$

§ 10. Инъективные модули и инъективные оболочки

Выясним строение инъективных модулей над кольцом формальных матриц. В этом параграфе K — произвольное кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. В этом и следующих двух параграфах мы обычно работаем с K-модулем, обозначаемым (A, B).

Пусть X — R-модуль и Y — S-модуль. Далее очень важную роль будут играть K-модули $(X, \operatorname{Hom}_R(M, X))$ и $(\operatorname{Hom}_S(N, Y), Y)$, рассматривавшиеся перед леммой 7.3. Мы договорились обозначать эти модули $(X, H(X))$ и $(H(Y), Y)$ соответственно. Будем постоянно использовать лемму 7.3. Например, следующий результат фактически является следствием этой леммы.

Предложение 10.1. *Модуль $(X, H(X))$ является инъективным K-модулем в точности тогда, когда X — инъективный R-модуль. Аналогичное утверждение верно для S-модуля Y и K-модуля $(H(Y), Y)$.*

Доказательство. Пусть X — инъективный R-модуль. Допустим, что у нас имеются K-модульный мономорфизм $(i, j)\colon (A, B) \to (C, D)$ и K-модульный гомоморфизм $(\alpha, \beta)\colon (A, B) \to (X, H(X))$. Так как модуль X инъективен, существует такой гомоморфизм $\gamma\colon C \to X$, что $i\gamma = \alpha$. По лемме 7.3 найдётся гомоморфизм $\delta\colon D \to H(X)$, для которого $(\gamma, \delta)\colon (C, D) \to (X, H(X))$ — гомоморфизм K-модулей. Опять в силу леммы 7.3 получаем, что $j\delta = \beta$. Следовательно, $(i, j)(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta)$, и модуль $(X, H(X))$ инъективен.

Обратно, пусть $(X, H(X))$ — инъективный модуль. Допустим, что $i\colon A \to C$ — мономорфизм, а $\alpha\colon A \to X$ — гомоморфизм R-модулей. Из леммы 7.3 следует существование K-модульных гомоморфизмов

$$(i, j)\colon (A, H(A)) \to (C, H(C)),$$
$$(\alpha, \beta)\colon (A, H(A)) \to (X, H(X)).$$

Утверждаем, что j — мономорфизм. В самом деле, если $j(\eta) = 0$, где $\eta \in H(A)$, то $j(\eta)(m) = i(m\eta) = i(\eta(m)) = 0$ для любого $m \in M$, а значит, $\eta = 0$. Поэтому (i, j) тоже является мономорфизмом. Так как модуль $(X, H(X))$ инъективен, существует такой гомоморфизм

$$(\gamma, \delta)\colon (C, H(C)) \to (X, H(X)),$$

что $(i, j)(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta)$. Следовательно, $i\gamma = \alpha$, и модуль X инъективен.

В случае модуля $(H(Y), Y)$ рассуждаем аналогично. □

Замечание. Из предложения 10.1 вытекает, что K-модуль $(X, 0)$ инъективен в точности тогда, когда X — инъективный R-модуль и $\mathrm{Hom}_R(M, X) = 0$. Аналогичный результат верен для модуля $(0, Y)$.

Предложение 10.1 может быть переформулировано так. Пусть H — функтор, определённый в § 7. Скоро мы увидим, что любой инъективный K-модуль изоморфен модулю $H(X, Y)$ для некоторого инъективного R-модуля X и некоторого инъективного S-модуля Y.

Пусть (A, B) — некоторый K-модуль и f', g' — гомоморфизмы, определённые в начале § 7. Эти гомоморфизмы будут играть особую роль в нашем изложении. Они соответствуют гомоморфизмам f и g модульного умножения при указанных там изоморфизмах. Удобнее писать f и g вместо f' и g' соответственно. Итак, f есть S-гомоморфизм $B \to \mathrm{Hom}_R(M, A)$, где $f(b)(m) = mb$, $b \in B$, $m \in M$, а g есть R-гомоморфизм $A \to \mathrm{Hom}_S(N, B)$, где $g(a)(n) = na$, $a \in A$, $n \in N$. Запишем точные последовательности

$$0 \to L(A) \to A \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_S(N, B),$$
$$0 \to L(B) \to B \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_R(M, A)$$

R-модулей и S-модулей соответственно, где $L(A)$ и $L(B)$ — подмодули, определённые в § 8. Отображения

$$(1, f)\colon (A, B) \to (A, H(A)),$$
$$(g, 1)\colon (A, B) \to (H(B), B)$$

являются K-гомоморфизмами (см. лемму 7.3 и замечания после следствия 7.4); они будут часто использоваться. Кроме того, если X — некоторый R-модуль, $(X, H(X))$ — K-модуль и I — один из идеалов следа кольца K, то $L(X) = \{x \in X \mid Ix = 0\}$, $L(H(X)) = 0$.

Перейдём к описанию инъективных K-модулей. Здесь можно выделить два содержательных случая. Позже мы выясним, что общий случай сводится к этим двум случаям.

Теорема 10.2. *Пусть (A, B) — модуль, удовлетворяющий условию $L(A) = 0 = L(B)$. Модуль (A, B) инъективен в точности тогда, когда A и B — инъективные модули. Кроме того, f и g — изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть (A, B) — инъективный модуль. Из условия вытекает, что f и g — мономорфизмы. Поэтому $(1, f)$ — мономорфизм. Так как модуль (A, B) инъективен, образ $\mathrm{Im}(1, f)$ есть прямое слагаемое в $(A, H(A))$. Дополнительное слагаемое имеет вид $(0, Z)$, где Z — некоторое прямое слагаемое в $H(A)$. Следовательно, $MZ = 0$, и $Z \subseteq L(H(A))$. Как недавно замечено, $L(H(A)) = 0$ и $Z = 0$. Таким образом, $(1, f)$ — изоморфизм. Поэтому $(A, H(A))$ — инъективный модуль и f — изоморфизм. По предложению 10.1 модуль A инъективен. Аналогично доказывается, что g — изоморфизм и модуль B инъективен.

Допустим теперь, что модули A и B инъективны. Снова используем гомоморфизмы $(1, f)$ и $(g, 1)$. Рассмотрим K-модуль

$$(\mathrm{Hom}_S(N, H(A)), H(A))$$

и K-гомоморфизм

$$(h, 1)\colon (A, H(A)) \to (\mathrm{Hom}_S(N, H(A)), H(A)),$$

описанный в лемме 7.3. С помощью непосредственных вычислений проверяется, что $h = gf_*$, где $f_*\colon \mathrm{Hom}_S(N, B) \to \mathrm{Hom}_S(N, H(A))$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом f. Так как f_* и g — мономорфизмы, получаем, что h — мономорфизм. По предложению 10.1 модуль $(A, H(A))$ инъективен. Повторяя рассуждения из первой части доказательства, можно проверить, что h — изоморфизм. Следовательно, мономорфизм f_* является эпиморфизмом. Поэтому f_* и g — изоморфизмы. Аналогично можно доказать, что f — изоморфизм. Итак, $(1, f)\colon (A, B) \to (A, H(A))$ — изоморфизм, и модуль (A, B) инъективен, что и требовалось. □

Подмножества $(L(A), 0)$, $(0, L(B))$ и $(L(A), L(B))$ являются подмодулями в любом модуле (A, B).

При исследовании инъективных K-модулей встречается ещё одна важная ситуация: случай, когда $(L(A), L(B))$ — существенный подмодуль в (A, B). (Это всегда так, если идеалы следа кольца K равны нулю.)

Напомним ряд понятий теории колец. Пусть V — модуль над некоторым кольцом и G, Z — подмодули в V. Подмодуль G называется *замкнутым* (в V), если G не имеет собственных существенных расширений в V. Подмодуль G называется *замыканием* подмодуля Z (в V), если $Z \subseteq G$, G — существенное расширение модуля Z и G замкнут в V. В V каждый подмодуль обладает хотя бы одним замыканием, которое не всегда единственно. Символ $\overline{Z}$ обозначает какое-нибудь замыкание подмодуля Z.

Теорема 10.3. *Пусть (A, B) — такой модуль, что $(L(A), L(B))$ — существенный подмодуль в (A, B). Модуль (A, B) инъективен в точности тогда, когда существуют такие замыкания $\overline{L(A)}$ и $\overline{L(B)}$, что они инъективны как R-модуль и S-модуль соответственно,*

$$L(A) \cap M\overline{L(B)} = 0, \quad N\overline{L(A)} \cap L(B) = 0,$$
$$\operatorname{Hom}_R(M, \overline{L(A)}) \subseteq \operatorname{Im} f, \quad \operatorname{Hom}_S(N, \overline{L(B)}) \subseteq \operatorname{Im} g.$$

Доказательство. Допустим, что модуль (A, B) инъективен. Существуют такие замыкания (A_1, B_2) и (A_2, B_1) подмодулей $(L(A), 0)$ и $(0, L(B))$ соответственно, что $(A_1, B_2) \cap (A_2, B_1) = 0$. Замкнутые подмодули инъективного модуля инъективны. Следовательно, $(A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$ — существенный инъективный подмодуль в (A, B), и поэтому $(A, B) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$. Непосредственно проверяется, что A_1 — существенное расширение модуля $L(A)$ и B_1 — существенное расширение модуля $L(B)$. Прямые слагаемые A_1 и B_1 — замкнутые подмодули. Поэтому $A_1 = \overline{L(A)}$ и $B_1 = \overline{L(B)}$. По лемме 7.3 имеем гомоморфизм

$$(1, f)\colon (A_1, B_2) \to (A_1, H(A_1))$$

(точнее говоря, вместо f надо взять ограничение f на B_2). Так как $B_2 \cap L(B) = 0$, получаем, что $(1, f)$ — мономорфизм. Поскольку модуль (A_1, B_2) инъективен, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 10.2, получаем, что $(1, f)$ — изоморфизм. Следовательно, модуль $(A_1, H(A_1))$ инъективен. Тогда модуль A_1 инъективен по предложению 10.1. Кроме того, $\operatorname{Hom}_R(M, A_1) \subseteq \operatorname{Im} f$. Наконец, из включений $L(A) \subseteq A_1$ и $MB_1 \subseteq A_2$ следует, что $L(A_1) \cap MB_1 = 0$. Оставшиеся утверждения доказываются аналогично; в частности,

$$(g, 1)\colon (A_2, B_1) \to (H(B_1), B_1)$$

есть изоморфизм.

Теперь допустим, что существуют такие замыкания $\overline{L(A)}$ и $\overline{L(B)}$, что они инъективны,

$$L(A) \cap M\overline{L(B)} = 0, \quad N\overline{L(A)} \cap L(B) = 0,$$
$$\operatorname{Hom}_R(M, \overline{L(A)}) \subseteq \operatorname{Im} f, \quad \operatorname{Hom}_S(N, \overline{L(B)}) \subseteq \operatorname{Im} g.$$

Обозначим $A_1 = \overline{L(A)}$ и $B_1 = \overline{L(B)}$. Рассмотрим ещё подмодули (A_1, NA_1) и (MB_1, B_1). Заметим, что их пересечение равно нулю. Возьмём модули $(A_1, H(A_1))$ и $(H(B_1), B_1)$, которые инъективны по предложению 10.1. Также рассмотрим гомоморфизмы

$$(1, f)\colon (A_1, NA_1) \to (A_1, H(A_1)),$$
$$(g, 1)\colon (MB_1, B_1) \to (H(B_1), B_1),$$

где через f и g обозначаются ограничения гомоморфизмов на соответствующие подмодули. На самом деле мы имеем мономорфизмы, так как $\operatorname{Ker} f = L(B) \cap NA_1 = 0$ (аналогичные равенства верны для $\operatorname{Ker} g$). Сумма отображений $(1, f) + (g, 1)$ продолжается до мономорфизма $(A, B) \to (A_1, H(A_1)) \oplus (H(B_1), B_1)$. Отождествим (A, B) с образом этого мономорфизма. Уточним, что подмодуль $L(A)$ играет в записанной сумме ту же роль, что и в (A, B).

Имеем прямые разложения

$$A = A_1 \oplus A_2, \quad B = B_1 \oplus B_2, \quad \text{где } A_2 = A \cap H(B_1),\ B_2 = B \cap H(A_1).$$

Понятно, что существуют K-модули (A_1, B_2), (A_2, B_1) и прямое разложение $(A, B) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$. Удобно вернуться к исходному модулю (A, B) и считать, что данное разложение есть разложение этого модуля. Опять возьмём мономорфизм $(1, f)\colon (A_1, B_2) \to (A_1, H(A_1))$. Пусть $\alpha \in H(A_1)$. Так как $H(A_1) \subseteq \operatorname{Im} f$, имеем $\alpha = f(b)$ для некоторого $b \in B$. Запишем $b = c + d$, где $c \in B_2$, $d \in B_1$. Для каждого $m \in M$ имеем

$$\alpha(m) = f(b)(m) = mb = mc + md, \quad mc, mb \in A_1,\ md \in A_2.$$

Поэтому $md = 0$ и $mb = mc$. Тогда получаем

$$\alpha(m) = mc = f(c)(m), \quad \alpha = f(c).$$

Доказано, что $(1, f)$ — изоморфизм. Таким образом,

$$(A, B) \cong (A_1, H(A_1)) \oplus (H(B_1), B_1),$$

и модуль (A, B) инъективен. □

Следствие 10.4. *Пусть сохраняются условия и обозначения теоремы* 10.3. *Тогда имеет место канонический изоморфизм*

$$(A, B) \cong (A_1, H(A_1)) \oplus (H(B_1), B_1).$$

Замечание. Пусть K — произвольное кольцо формальных матриц и (A, B) — любой K-модуль. Тогда (A, B) — существенное расширение модуля $(L(A) + MB, L(B) + NA)$, причём (A, B) — существенное расширение модуля $(L(A), L(B))$ в случае, когда K — кольцо с нулевыми идеалами следа. Действительно, пусть $(a, b) \in (A, B)$ и $a \neq 0$. Если $na = 0$ для всех $n \in N$, то $a \in L(A)$, а если $na \neq 0$ для некоторого $n \in N$, то $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{smallmatrix}\right)(a, b) = (0, na) \in (0, NA)$. Случай $b \neq 0$ рассматривается аналогично. Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то $MB \subseteq L(A)$, $NA \subseteq L(B)$, $L(A) + MB = L(A)$, $L(B) + NA = L(B)$.

Следствие 10.5. *Пусть* (A, B) — *K-модуль.*

1. *Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то модуль (A, B) инъективен в точности тогда, когда модули $L(A)$ и $L(B)$ инъективны,* $\operatorname{Hom}_R(M, L(A)) \subseteq \operatorname{Im} f$ *и* $\operatorname{Hom}_S(N, L(B)) \subseteq \operatorname{Im} g$.

2. *Если $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо треугольных матриц, то модуль (A, B) инъективен в точности тогда, когда модули A и $L(B)$ инъективны и $f : B \to Hom_R(M, A)$ — эпиморфизм.*

Доказательство. 1. Так как K — кольцо с нулевыми идеалами следа, для любого модуля $(X, H(X))$ верны равенства $L(X) = X$ и $L(H(X)) = 0$. Аналогичные равенства верны для модулей вида $(H(Y), Y)$.

Допустим, что модуль (A, B) инъективен. Отождествим его с изоморфным образом из следствия 10.4. Тогда $L(A) = \overline{L(A)}$ и $L(B) = \overline{L(B)}$. Поэтому модули $L(A)$ и $L(B)$ инъективны. Оставшаяся часть утверждения 1 вытекает из теоремы 10.3.

2. Утверждение следует из п. 1 и того, что $L(A) = A$. □

Теорема 10.6. *Произвольный K-модуль (A, B) инъективен в точности тогда, когда некоторое замыкание подмодуля $(\underline{L(A)}, L(B))$ инъективно, причём существуют такие замыкания $\overline{L(A)}$ и $\overline{L(B)}$, что фактормодули $A/(\overline{L(A)} + g^{-1}H(L(B)))$ и $B/(\overline{L(B)} + f^{-1}H(\overline{L(A)}))$ инъективны.*

Доказательство. Допустим, что модуль (A, B) инъективен. Замкнутые подмодули инъективных модулей инъективны. Существует прямое разложение $(A, B) = (G, H) \oplus (C, D)$, где первое слагаемое является некоторым замыканием подмодуля $(L(A), L(B))$. К модулю (G, H) можно применить теорему 10.3. Следовательно, существуют инъективные замыкания A_1, B_1 модулей $L(A)$, $L(B)$ соответственно. Существует

прямое разложение $(G,H)=(A_1,B_2)\oplus(A_2,B_1)$ для некоторых подмодулей A_2, B_2. Кроме того, из доказательства теоремы 10.3 вытекает, что отображения

$$(1,f)\colon (A_1,B_2)\to(A_1,H(A_1)),$$
$$(g,1)\colon (A_2,B_1)\to(H(B_1),B_1)$$

являются изоморфизмами. Модуль (C,D) инъективен, и $L(C)=0=L(D)$. По теореме 10.2 модули C и D инъективны. Осталось заметить, что

$$C\cong A/(A_1\oplus A_2)=A/(A_1+g^{-1}H(B_1)).$$

Аналогичные соотношения верны и для другого фактормодуля.

Пусть выполнены условия теоремы. Следовательно,

$$(A,B)=(G,H)\oplus(C,D)$$

для некоторого замыкания (G,H) подмодуля $(L(A),L(B))$ и такого модуля (C,D), что $L(C)=0=L(D)$. Можно применить теорему 10.3 к модулю (G,H). Как и выше, существует прямое разложение

$$(G,H)=(A_1,B_2)\oplus(A_2,B_1),$$

причём отображения $(1,f)$ и $(g,1)$ являются изоморфизмами. Повторяя приведённые ранее рассуждения, получим, что модули C и D инъективны. По теореме 10.2 модуль (C,D) инъективен. Поэтому модуль (A,B) инъективен. □

Из доказанных выше теорем вытекает следующий вывод.

Замечание. Каждый инъективный модуль (A,B) обладает прямым разложением

$$(A,B)=(A_1,B_2)\oplus(A_2,B_1)\oplus(C,D),$$
$$A_1=\overline{L(A)},\quad B_1=\overline{L(B)},\quad L(C)=0=L(D),$$

причём канонические отображения

$$B_2\to\operatorname{Hom}_R(M,A_1),\quad A_2\to\operatorname{Hom}_S(N,B_1),$$
$$D\to\operatorname{Hom}_R(M,C),\qquad C\to\operatorname{Hom}_S(N,D)$$

являются изоморфизмами.

Следствие 10.7. *Модуль (A,B) инъективен в точности тогда, когда существуют инъективный R-модуль X и инъективный S-модуль Y, удовлетворяющие условию $(A,B)\cong(X,H(X))\oplus(Y,H(Y))$.*

Следствие 10.7 вытекает из предыдущего замечания, теоремы 10.2 и теоремы 10.3.

Из полученной информации об инъективных модулях можно вывести описание инъективных оболочек. Инъективная оболочка некоторого модуля V обозначается через $\widehat{V}$.

Лемма 10.8. *Пусть V — модуль над некоторым кольцом, и пусть C_1 и C_2 — такие замкнутые подмодули в V, что $C_1 \cap C_2 = 0$ и $C_1 \oplus C_2$ — существенный подмодуль в V. Тогда*

$$\widehat{V} = \widehat{C}_1 \oplus \widehat{C}_2, \quad \text{где} \quad \widehat{C}_1 \cong \widehat{V/C_2}, \quad \widehat{C}_2 \cong \widehat{V/C_1}.$$

Доказательство. Можно записать $\widehat{V} \cong \widehat{C}_1 \oplus \widehat{C}_2$. Верны соотношения $C_2 \cong (C_1 \oplus C_2)/C_1 \subseteq V/C_1$, причём V/C_1 — существенное расширение модуля $(C_1 \oplus C_2)/C_1$. Действительно, пусть B — такой подмодуль, что $C_1 \subseteq B$ и $C_1 \neq B$. Так как C_1 — замкнутый подмодуль в V, получаем, что $B \cap C_2 \neq 0$. Следовательно, $B/C_1 \cap (C_1 \oplus C_2)/C_1 \neq 0$. Поэтому модуль C_2 изоморфен существенному подмодулю в V/C_1, а значит, $\widehat{C}_2 \cong \widehat{V/C_1}$. Второй изоморфизм доказывается аналогично. □

Следствие 10.9. *Пусть (A, B) — K-модуль.*

1. *Если $L(A) = 0 = L(B)$, то существует K-модуль $(\widehat{A}, \widehat{B})$, являющийся инъективной оболочкой модуля (A, B). Кроме того, имеют место канонические изоморфизмы $\widehat{A} \cong \mathrm{Hom}_S(N, \widehat{B})$ и $\widehat{B} \cong \mathrm{Hom}_R(M, \widehat{A})$.*

2. *Если (A, B) — существенное расширение модуля $(L(A), L(B))$, то модуль $(\widehat{L(A)}, H(\widehat{L(A)})) \oplus (H(\widehat{L(B)}), \widehat{L(B)})$ является инъективной оболочкой модуля (A, B).*

3. *Инъективная оболочка модуля (A, B) имеет вид $U \oplus V$, где U — инъективная оболочка модуля $(L(A), L(B))$ и существует такое замыкание W подмодуля $(L(A), L(B))$, что V — инъективная оболочка фактормодуля $(A, B)/W$. Модуль $(L(A), L(B))$ удовлетворяет условиям n. 2, модуль $(A, B)/W$ удовлетворяет условиям n. 1.*

Доказательство. 1. Рассмотрим K-модуль $(\widehat{A}, H(\widehat{A}))$. По предложению 10.1 этот модуль инъективен. Так как $H(A) \subseteq H(\widehat{A})$, можно рассмотреть гомоморфизм $(1, f)\colon (A, B) \to (\widehat{A}, H(\widehat{A}))$. Поскольку $L(B) = 0$, получаем, что $(1, f)$ — мономорфизм. Его образ — существенный подмодуль в $(\widehat{A}, H(\widehat{A}))$. В противном случае $(\widehat{A}, H(\widehat{A}))$ содержит некоторую инъективную оболочку образа вида $(\widehat{A}, Y)$ для некоторого собственного подмодуля Y. Тогда $H(\widehat{A}) = Y \oplus Z$, где $Z \neq 0$ и $MZ = 0$. Это противоречит равенству $L(H(\widehat{A})) = 0$ (это рассуждение аналогично

рассуждению из начала доказательства теоремы 10.2). Таким образом, $(\widehat{A}, H(\widehat{A}))$ является инъективной оболочкой модуля (A, B). Аналогично модуль $(H(\widehat{B}), \widehat{B})$ также является инъективной оболочкой модуля (A, B). Отождествим модуль (A, B) с его изоморфным образом в этих двух оболочках. Тогда тождественное отображение модуля (A, B) продолжается до изоморфизма $(\alpha, \beta)\colon (\widehat{A}, H(\widehat{A})) \to (H(\widehat{B}), \widehat{B})$. Кроме того, α — продолжение мономорфизма $g\colon A \to \mathrm{Hom}_S(N, B)$, а β — продолжение обратного изоморфизма к $f\colon B \to \mathrm{Im}\, f$. Именно это подразумевается под каноническим характером указанных в следствии изоморфизмов.

2. Инъективная оболочка модуля (A, B) совпадает с инъективной оболочкой модуля $(L(A), L(B))$, равной $(L(A), 0) \oplus (0, L(B))$. Из доказательства теоремы 10.3 следует, что инъективная оболочка модуля $(L(A), 0) \oplus (0, L(B))$ совпадает с указанной в следствии суммой.

3. Утверждение проверяется с помощью леммы 10.8. □

§ 11. Максимальное кольцо частных

Применим результаты и методы предыдущего параграфа к описанию максимального кольца частных кольца формальных матриц порядка 2. В ряде случаев будет найдено его точное строение.

Инъективная оболочка произвольного модуля V по-прежнему обозначается через $\widehat{V}$. Если C, D — подмодули T-модуля A, причём $C \cap D = 0$ и $C + D$ — существенный подмодуль в A, то D называется *дополнением* к C (в A). Обозначим $L = \mathrm{End}_T A$. Тогда A — T-L-бимодуль, а кольцо $\mathrm{End}_L A$ называется *кольцом биэндоморфизмов* модуля A.

Максимальное (*левое*) *кольцо частных* кольца T определяется как кольцо биэндоморфизмов инъективной оболочки модуля ${}_T T$. Оно обозначается через $Q(T)$.

Вернёмся к следствию 10.9 о строении инъективной оболочки K-модуля (A, B). Во-первых, уточним, что в условиях п. 1 следствия 10.9 имеются канонические изоморфизмы

$$(\widehat{A}, H(\widehat{A})) \cong (\widehat{A}, \widehat{B}) \cong (H(\widehat{B}), \widehat{B}),$$

а условие п. 2 из следствия 10.9 выполняется, если идеалы следа I и J кольца K нильпотентны.

Действительно, пусть $(a, b) \in (A, B)$ и $(a, b) \notin (L(A), L(B))$. Допустим, что $a \notin L(A)$. Можно считать, что $b = 0$. Существует такой элемент $n_1 \in N$, что $n_1 a \neq 0$. Если $n_1 a \notin L(B)$, то $(m_1 n_1) a \neq 0$ для какого-то

$m_1 \in M$, где $m_1 n_1 \in I$. К элементу $(m_1 n_1)a$ можно применить те же рассуждения. В силу нильпотентности идеала I этот процесс остановится через конечное число шагов. Аналогично рассматривается случай $b \notin L(B)$.

В п. 3 следствия 10.9 модуль V строится неоднозначно. Получим его немного по-другому. К сожалению, и этот подход не даёт канонического способа выбора слагаемого V.

Пусть (C, D) — какое-то дополнение к подмодулю $(L(A), L(B))$ в (A, B). В п. 3 следствия 10.9 можно взять инъективную оболочку модуля (C, D) в качестве модуля V. Так как $L(C) = 0 = L(D)$, по п. 1 того же следствия эта оболочка изоморфна $(\widehat{C}, \widehat{D})$, причём $\widehat{C} \cong H(\widehat{D})$, $\widehat{D} \cong H(\widehat{C})$. Таким образом, для инъективной оболочки модуля (A, B) имеется изоморфизм

$$\widehat{(A, B)} \cong \big(\widehat{L(A)}, H(\widehat{L(A)})\big) \oplus \big(H(\widehat{L(B)}), \widehat{L(B)}\big) \oplus (\widehat{C}, \widehat{D}).$$

Можно также записать изоморфизмы

$$\widehat{(A, B)} \cong \big(\widehat{L(A)} \oplus \widehat{C}, H(\widehat{L(A)}) \oplus \widehat{C}\big) \oplus \big(H(\widehat{L(B)}), \widehat{L(B)}\big) \cong$$
$$\cong \big(\widehat{L(A)}, H(\widehat{L(A)})\big) \oplus \big(H(\widehat{L(B)} \oplus \widehat{D}), \widehat{L(B)} \oplus \widehat{D}\big).$$

Встречаются содержательные частные случаи, когда для нахождения инъективной оболочки $\widehat{(A, B)}$ информация о дополнении (C, D) не нужна.

Предположим, что $L(A) = 0$. Пусть D — дополнение к $L(B)$. Легко видеть, что (MD, D) является дополнением к $(0, L(B))$ в (A, B). Следовательно, имеется изоморфизм $\widehat{(A, B)} \cong (H(\widehat{B}), \widehat{B})$. Если же $L(B) = 0$, то $\widehat{(A, B)} \cong (\widehat{A}, H(\widehat{A}))$.

Итак, всегда можно записать инъективную оболочку E модуля (A, B) в виде $(X, H(X)) \oplus (H(Y), Y)$, где X — некоторый инъективный R-модуль и Y — некоторый инъективный S-модуль соответственно; см. также следствие 10.7.

Найдём кольцо эндоморфизмов и кольцо биэндоморфизмов K-модуля вида $(X, H(X)) \oplus (H(Y), Y)$ для произвольных модулей X и Y. Доказательство следующей леммы вытекает из леммы 7.3.

Лемма 11.1. *Кольцо эндоморфизмов K-модуля*

$$E = (X, H(X)) \oplus (H(Y), Y)$$

изоморфно кольцу формальных матриц

$$T = \begin{pmatrix} \operatorname{End}_R X & \operatorname{Hom}_S(H(X), Y) \\ \operatorname{Hom}_R(H(Y), X) & \operatorname{End}_S Y \end{pmatrix}.$$

Как правый T-модуль, E является модулем вектор-строк

$$(X \oplus H(X), H(Y) \oplus Y).$$

Этот модуль может быть также записан в виде прямой суммы

$$E = (X, H(Y)) \oplus (H(X), Y) = G \oplus F.$$

Поэтому получаем следующий результат.

Лемма 11.2. *Кольцо биэндоморфизмов K-модуля*

$$E = (X, H(X)) \oplus (H(Y), Y)$$

изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End}_T G & \operatorname{Hom}_T(F, G) \\ \operatorname{Hom}_T(G, F) & \operatorname{End}_T F \end{pmatrix}.$$

Остановимся на частных случаях, когда $X = 0$ или $Y = 0$. Подобное бывает, если мы берём инъективную оболочку модуля (A, B) при условии, что $L(A) = 0$ или $L(B) = 0$.

Итак, пусть $E = (X, H(X))$. Тогда $\operatorname{End}_K E \cong \operatorname{End}_R X = T$. Правый T-модуль $(X, H(X))$ можно записать как $X \oplus H(X)$. Следовательно, кольцо биэндоморфизмов $\operatorname{End}_A E$ есть кольцо формальных матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End}_T X & \operatorname{Hom}_T(H(X), X) \\ \operatorname{Hom}_T(X, H(X)) & \operatorname{End}_T H(X) \end{pmatrix}.$$

Кольцо биэндоморфизмов K-модуля $(H(Y), Y)$ имеет похожее строение.

Теперь возьмём в качестве модуля (A, B) левый K-модуль

$${}_K K = \begin{pmatrix} (R, M) \\ (N, S) \end{pmatrix};$$

см. § 7. Подмодуль $L(R, M)$ равен $(\operatorname{Ann}_R N, \operatorname{Ann}_M N)$, где

$$\operatorname{Ann}_R N = \{r \in R \mid Nr = 0\}$$

— аннулятор R-модуля N,

$$\operatorname{Ann}_M N = \{m \in M \mid Nm = 0\}.$$

Обозначим подмодуль $L(R, M)$ символом L_1. Аналогичное строение имеет подмодуль $L(N, S)$, который мы обозначим L_2. Далее, пусть (C, D) — какое-нибудь дополнение к подмодулю (L_1, L_2) в ${}_K K$. Инъективная оболочка E модуля ${}_K K$ имеет вид

$$(\widehat{L_1} \oplus \widehat{C}, H(\widehat{L_1} \oplus \widehat{C})) \oplus (H(\widehat{L_2}), \widehat{L_2})$$

или

$$(\widehat{L}_1, H(\widehat{L}_1)) \oplus (H(\widehat{L}_2 \oplus \widehat{D}), \widehat{L}_2 \oplus \widehat{D}).$$

Пусть $T = \operatorname{End}_K E$ — кольцо эндоморфизмов модуля E в первом или втором виде. Тогда можно записать правый T-модуль E в виде

$$(\widehat{L}_1 \oplus \widehat{C}, H(\widehat{L}_2)) \oplus (H(\widehat{L}_1 \oplus \widehat{C}), \widehat{L}_2) = G \oplus F$$

или

$$(\widehat{L}_1, H(\widehat{L}_2 \oplus \widehat{D})) \oplus (H(\widehat{L}_1), \widehat{L}_2 \oplus \widehat{D}) = G' \oplus F'.$$

Следствие 11.3. *Максимальное кольцо частных кольца K, т. е. кольцо $\operatorname{End}_T E$, изоморфно кольцу формальных матриц*

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End}_T G & \operatorname{Hom}_T(F, G) \\ \operatorname{Hom}_T(G, F) & \operatorname{End}_T F \end{pmatrix}$$

либо аналогичному кольцу, если заменить G и F на G' и F' соответственно.

В несколько ином виде кольцо $Q(K)$ найдено в [83].

Как и в случае произвольного модуля (A, B), остаётся проблема, связанная с неканоническим выбором дополнения (C, D). Выше мы заметили, что если $L(A) = 0$ или $L(B) = 0$, то подмодуль (C, D) не используется явным образом при построении инъективной оболочки модуля (A, B). Применим этот факт к K-модулю K. Обратим внимание на то, что можно представить этот модуль в виде прямой суммы $(R, N) \oplus (M, S)$. Поэтому могут представиться следующие четыре случая:

1) N_R и M_S — точные модули; тогда $L(R) = 0$ и $L(S) = 0$ в модулях (R, N) и (M, S) соответственно;

2) $\operatorname{Ann}_M N = 0 = \operatorname{Ann}_N M$; тогда $L(N) = 0$ и $L(M) = 0$ в модулях (R, N) и (M, S) соответственно;

3) $L(R) = 0$ и $L(M) = 0$;

4) $L(N) = 0$ и $L(S) = 0$.

В случае 1 из предыдущего материала вытекает, что

$$\widehat{(R, N)} \cong (H(\widehat{N}), \widehat{N}), \quad \widehat{(M, S)} \cong (\widehat{M}, H(\widehat{M})).$$

Далее получаем

$${}_K\widehat{K} \cong (\widehat{M}, H(\widehat{M})) \oplus (H(\widehat{N}), \widehat{N}) = E.$$

Пусть $T = \operatorname{End}_K E$. Тогда правый T-модуль E имеет вид

$$(\widehat{M}, H(\widehat{N})) \oplus (H(\widehat{M}), \widehat{N}) = G \oplus F.$$

Максимальное кольцо частных $Q(K)$, т. е. $\operatorname{End}_T E$, имеет вид, указанный в следствии 11.3.

В случае 2 имеем

$$ {}_K\widehat{K} \cong (\widehat{R}, H(\widehat{R})) \oplus (H(\widehat{S}), \widehat{S}) = E, \quad T = \operatorname{End}_K E, $$
$$ E_T = (\widehat{R}, H(\widehat{S})) \oplus (H(\widehat{R}), \widehat{S}) = G \oplus F $$

и, наконец, $Q(K) = \operatorname{End}_T E$.

В случаях 3 и 4 кольцо $Q(K)$ имеет аналогичное описание; это сделано в работе [91].

Следующий вопрос представляет интерес. Когда можно поставить $Q(R)$ и $Q(S)$ на главную диагональ кольца $Q(K)$ из следствия 11.3? Рассмотрим одну ситуацию, когда этот вопрос допускает удовлетворительный ответ. Именно, считаем, что N_R и M_S — точные модули (т. е. $L(R) = 0 = L(S)$ и $L(M) = 0 = L(N)$). Тогда $L(R, M) = 0 = L(N, S)$ и инъективная оболочка E модуля ${}_K K$ может быть записана в виде $((\widehat{R}, \widehat{M}), (\widehat{N}, \widehat{S}))$ или в виде прямой суммы $(\widehat{R}, \widehat{N}) \oplus (\widehat{M}, \widehat{S})$. В этом случае имеются канонические изоморфизмы

$$ H(\widehat{N}) \cong \widehat{R}, \quad H(\widehat{R}) \cong \widehat{N}, \quad H(\widehat{S}) \cong \widehat{M}, \quad H(\widehat{M}) \cong \widehat{S}. $$

Из этих изоморфизмов и леммы 7.3 вытекают следующие изоморфизмы для колец эндоморфизмов и групп гомоморфизмов:

$$ \operatorname{End}_R \widehat{R} \cong \operatorname{End}_K(\widehat{R}, \widehat{N}) \cong \operatorname{End}_S \widehat{N}, $$
$$ \operatorname{End}_R \widehat{M} \cong \operatorname{End}_K(\widehat{M}, \widehat{S}) \cong \operatorname{End}_S \widehat{S}, $$
$$ \operatorname{Hom}_R(\widehat{R}, \widehat{M}) \cong \operatorname{Hom}_K((\widehat{R}, \widehat{N}), (\widehat{M}, \widehat{S})) \cong \operatorname{Hom}_S(\widehat{N}, \widehat{S}), $$
$$ \operatorname{Hom}_R(\widehat{M}, \widehat{R}) \cong \operatorname{Hom}_K((\widehat{M}, \widehat{S}), (\widehat{R}, \widehat{N})) \cong \operatorname{Hom}_S(\widehat{S}, \widehat{N}). $$

При необходимости мы будем отождествлять соответствующие изоморфные кольца и модули.

Кольцо эндоморфизмов K-модуля $E = ((\widehat{R}, \widehat{M}), (\widehat{N}, \widehat{S}))$ изоморфно кольцу $\operatorname{End}_R(\widehat{R} \oplus \widehat{M})$, т. е. изоморфно кольцу формальных матриц

$$ \begin{pmatrix} \operatorname{End}_R \widehat{R} & \operatorname{Hom}_R(\widehat{R}, \widehat{M}) \\ \operatorname{Hom}_R(\widehat{M}, \widehat{R}) & \operatorname{End}_R \widehat{M} \end{pmatrix}. \qquad (*) $$

Также это кольцо изоморфно кольцу $\operatorname{End}_S(\widehat{N} \oplus \widehat{S})$, т. е. изоморфно кольцу формальных матриц

$$ \begin{pmatrix} \operatorname{End}_S \widehat{N} & \operatorname{Hom}_S(\widehat{N}, \widehat{S}) \\ \operatorname{Hom}_S(\widehat{S}, \widehat{N}) & \operatorname{End}_S \widehat{S} \end{pmatrix}. \qquad (**) $$

Будем обозначать через $\left(\begin{smallmatrix} A & V \\ W & B \end{smallmatrix}\right)$ кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End}_K E$, записанное в виде $(*)$ или $(**)$.

Нам потребуются некоторые стандартные сведения, относящиеся к двойственности.

Пусть R, S, T — произвольные кольца и U — R-S-бимодуль. Далее, пусть

$$H' = \mathrm{Hom}_R(\_, U)\colon R\text{-mod} \to \text{mod-}S,$$
$$H'' = \mathrm{Hom}_S(\_, U)\colon \text{mod-}S \to R\text{-mod}$$

— контравариантные функторы. Для каждого левого R-модуля X существует естественный гомоморфизм

$$\sigma_X\colon X \to H''H'(X), \quad \sigma_X(x)(f) = f(x), \quad x \in X, \quad f \in H'(X),$$

называемый *отображением значения*.

Будем обозначать через H любой контравариантный функтор вида H' или H''. Если X — R-T-бимодуль, то σ_X — T-модульный гомоморфизм. Если σ_X — изоморфизм, то X называется *U-рефлексивным* модулем.

Теперь дадим частичный ответ на заданный выше вопрос: когда существуют канонические изоморфизмы $\mathrm{End}_T G \cong Q(R)$ и $\mathrm{End}_T H \cong Q(S)$? А также нельзя ли вычислить группы, стоящие на побочной диагонали в матричном кольце из следствия 11.3?

Вернёмся к правому T-модулю $(\widehat{R}, \widehat{M}) \oplus (\widehat{N}, \widehat{S})$. Существует правый T-модуль $(\widehat{R}, H(\widehat{R}))$ (мы имеем в виду правый аналог конструкции K-модуля $(X, H(X))$ из леммы 7.3; см. замечание 2 в § 7). Здесь $H(\widehat{R}) = \mathrm{Hom}_A(W, \widehat{R})$, $W = \mathrm{Hom}_R(\widehat{M}, \widehat{R})$, $A = \mathrm{End}_R \widehat{R}$. По правостороннему аналогу леммы 7.3 имеется канонический T-модульный гомоморфизм

$$(1, \gamma)\colon (\widehat{R}, \widehat{M}) \to (\widehat{R}, H(\widehat{R})),$$

где $\gamma(x)(\alpha) = \alpha(x)$ для $x \in \widehat{M}$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(\widehat{M}, \widehat{R})$. Таким образом, γ совпадает с отображением значения

$$\sigma_{\widehat{M}}\colon \widehat{M} \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_R(\widehat{M}, \widehat{R}), \widehat{R}) = H^2(\widehat{M}).$$

Следовательно, если ${}_R\widehat{M}$ — $\widehat{R}$-рефлексивный модуль, то γ и $(1, \gamma)$ — изоморфизмы и T-модули $(\widehat{R}, \widehat{M})$ и $(\widehat{R}, H(\widehat{R}))$ изоморфны. Тогда из правостороннего аналога следствия 7.4 вытекает, что

$$\mathrm{End}_T(\widehat{R}, \widehat{M}) \cong \mathrm{End}_A \widehat{R} = Q(R).$$

Можно применить аналогичные рассуждения к T-модулю $(\widehat{N}, \widehat{S})$. Если $\widehat{N}_S$ — $\widehat{S}$-рефлексивный модуль, то $(\widehat{N}, \widehat{S}) \cong (H(\widehat{S}), \widehat{S})$ (правый аналог конструкции $(H(Y), Y)$ из леммы 7.3) и

$$\mathrm{End}_T(\widehat{N}, \widehat{S}) \cong \mathrm{End}_B \widehat{S} = Q(S).$$

Из правостороннего аналога леммы 7.3 получаем также изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}_T(G,F) \cong \operatorname{Hom}_B(\widehat{M},\widehat{S}) \cong \operatorname{Hom}_B(H(\widehat{S}),\widehat{S}) \cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_S(N,\widehat{S}),\widehat{S}) = H^2(N).$$

Аналогично $\operatorname{Hom}_T(F,G) \cong H^2(M)$. Таким образом, получаем следующий результат.

Следствие 11.4. *Если $\widehat{M}$ — $\widehat{R}$-рефлексивный модуль и $\widehat{N}$ — $\widehat{S}$-рефлексивный модуль, то имеется изоморфизм*

$$Q(K) \cong \begin{pmatrix} Q(R) & H^2(M) \\ H^2(N) & Q(S) \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что если

$$\operatorname{Hom}_R(\widehat{M}/M,\widehat{R}) = 0 = \operatorname{Hom}_S(\widehat{N}/N,\widehat{S}),$$

то $H^2(M) \cong \widehat{M}$ и $H^2(N) \cong \widehat{N}$.

R-модуль $\widehat{M}$ является $\widehat{R}$-рефлексивным, если $\widehat{M}$ — *конечно $\widehat{R}$-проективный* модуль, т. е. прямое слагаемое прямой суммы конечного числа копий модуля $\widehat{R}$; о таких модулях говорится в § 24. Последнее свойство выполняется, если M — конечно порождённый проективный R-модуль. Аналогичное утверждение верно для S-модуля $\widehat{N}$.

Снова рассмотрим T-модуль $(\widehat{R},\widehat{M})$. Также существует правый T-модуль $(H(\widehat{M}),\widehat{M})$. По правостороннему аналогу леммы 7.3 имеется канонический T-модульный гомоморфизм

$$(\delta,1)\colon (\widehat{R},\widehat{M}) \to (H(\widehat{M}),\widehat{M}),$$

причём δ совпадает с отображением значения

$$\sigma_{\widehat{R}}\colon \widehat{R} \to \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_R(\widehat{R},\widehat{M}),\widehat{M}) = H^2(\widehat{R}).$$

Если R-модуль $\widehat{R}$ является $\widehat{M}$-рефлексивным, то δ и $(\delta,1)$ — изоморфизмы и $\operatorname{End}_T(\widehat{R},\widehat{M}) \cong \operatorname{End}_B \widehat{M}$, где последнее кольцо является кольцом биэндоморфизмов R-модуля $\widehat{M}$. Аналогично если S-модуль $\widehat{S}$ является $\widehat{N}$-рефлексивным, то $(\widehat{N},\widehat{S}) \cong (\widehat{N},H(\widehat{N}))$ и $\operatorname{End}_T(\widehat{N},\widehat{S}) \cong \operatorname{End}_A \widehat{N}$, где $\operatorname{End}_A \widehat{N}$ — кольцо биэндоморфизмов S-модуля $\widehat{N}$.

Пусть $\widehat{R}$ — $\widehat{M}$-рефлексивный модуль и $\widehat{S}$ — $\widehat{N}$-рефлексивный модуль. По правостороннему аналогу леммы 7.3 имеются изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}_T(G,F) \cong \operatorname{Hom}_A(\widehat{R},\widehat{N}) \cong \operatorname{Hom}_A(H(\widehat{N}),\widehat{N}) = H^2(N).$$

Аналогично $\operatorname{Hom}_T(F,G) \cong H^2(M)$. В итоге получаем следующий результат.

Следствие 11.5. *Если $\widehat{R}$ — $\widehat{M}$-рефлексивный модуль и $\widehat{S}$ — $\widehat{N}$-рефлексивный модуль, то*

$$Q(K) \cong \begin{pmatrix} \operatorname{End}_B \widehat{M} & H^2(M) \\ H^2(N) & \operatorname{End}_A \widehat{N} \end{pmatrix}.$$

R-модуль $\widehat{R}$ является $\widehat{M}$-рефлексивным, если $\widehat{R}$ — конечно $\widehat{M}$-проективный модуль; в частности, M — образующий R-модуль (образующие модули определяются в § 14). S-модуль $\widehat{S}$ обладает аналогичными свойствами.

Условия двух последних следствий выполняются, если кольцо K есть ситуация эквивалентности, т. е. $I = R$ и $J = S$; такие кольца рассматриваются в § 14.

Ниже рассматриваются регулярные кольца, определённые в § 5.

Следствие 11.6. *В условиях следствия* 11.4 *кольцо $Q(K)$ регулярно в точности тогда, когда $Q(R)$ и $Q(S)$ — регулярные кольца.*

Доказательство. Необходимость условия следует из теоремы 5.6.

Теперь допустим, что $Q(R)$ и $Q(S)$ — регулярные кольца. Запишем кольцо $T = \operatorname{End}_K E$ в виде $(*)$ или $(**)$. Достаточно проверить, что это кольцо полупримитивно; см. § 4.5 книги [72]. Это вытекает из теоремы 4.1 и того, что модули $\widehat{M}$ и $\widehat{N}$ рефлексивны относительно $\widehat{R}$ и $\widehat{S}$ соответственно. □

В конце параграфа кратко рассмотрим другую крайнюю ситуацию, когда $(L(R,M), L(N,S))$ — существенный подмодуль в ${}_KK$, где $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — некоторое кольцо формальных матриц. В этом случае строение инъективной оболочки модуля ${}_KK$ известно (следствие 10.9). Далее можно вычислить кольцо эндоморфизмов этой оболочки; затем можно вычислить максимальное кольцо частных $Q(K)$. В начале параграфа отмечено, что указанный подмодуль является существенным, если идеалы следа I и J нильпотентны. Эта ситуация исследована в работе [91].

§ 12. Плоские модули

В этом параграфе мы опишем плоские модули над кольцом формальных матриц K с нулевыми идеалами следа. Будем использовать правые модули и правосторонние аналоги полученных ранее утверждений и введённых конструкций. Часто будут появляться идеалы следа I и J кольца K (см. § 1). Сделаем также следующее замечание.

Встречающиеся в тексте изоморфизмы являются каноническими; это означает, что они действуют по определённому правилу, которые несложно указать.

При изучении плоских модулей полезна любая информация о тензорных произведениях. Тензорное произведение K-модулей можно вычислить с помощью тензорного произведения R-модулей и тензорного произведения S-модулей. Пусть $U = (C, D)$ — правый K-модуль и $V = (A, B)$ — левый K-модуль.

Предложение 12.1. *Имеет место изоморфизм абелевых групп*

$$U \otimes_K V \cong (C \otimes_R A \oplus D \otimes_S B)/H;$$

здесь подгруппа H порождается всеми элементами вида

$$c \otimes mb - cm \otimes b, \quad d \otimes na - dn \otimes a,$$

где $c \in C$, $d \in D$, $a \in A$, $b \in B$, $m \in M$, $n \in N$.

Доказательство. Группа $C \otimes_R A \oplus D \otimes_S B$ изоморфна $U \otimes_{R\times S} V$ при соответствии образующих элементов

$$c \otimes a + d \otimes b \to (c, d) \otimes (a, b).$$

Обозначим $G_1 = U \otimes_{R\times S} V$ и $G_2 = U \otimes_K V$. Воспользуемся определением тензорного произведения как факторгруппы свободной группы. Пусть F — свободная абелева группа с базисом, состоящим из всех выражений

$$((c, d), (a, b)), \quad c \in C,\ d \in D,\ a \in A,\ b \in B.$$

Тогда $G_1 = F/H_1$ и $G_2 = F/H_2$, где H_1 и H_2 — подгруппы, порождённые элементами известного вида. Укажем разницу между этими подгруппами. Система образующих группы H_1 содержит все элементы вида

$$((c, d), (ra, sb)) - ((cr, ds), (a, b)), \quad r \in R,\ s \in S;$$

система образующих группы H_2 содержит все элементы вида

$$((c, d), k(a, b)) - ((c, d)k, (a, b)), \quad k = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in K,$$

а все остальные образующие элементы этих двух групп совпадают. Поэтому $H_1 \subseteq H_2$. Верны соотношения

$$G_2 = F/H_2 \cong (F/H_1)/(H_2/H_1) = G_1/H, \quad \text{где } H = H_2/H_1.$$

Факторгруппа H_2/H_1 порождается образами всех образующих элементов группы H_2, т. е. элементами вида

$$((c, d) \otimes (mb, na)) - ((dn, cm) \otimes (a, b)).$$

Используя указанный выше изоморфизм, получаем, что

$$G_2 \cong (C \otimes_R A \oplus D \otimes_S B)/H,$$

где (непереобозначенная) подгруппа H порождается всеми элементами вида

$$cm \otimes b + d \otimes na - dn \otimes a - cm \otimes b;$$

поэтому H порождается всеми указанными выше элементами. □

Замечания. Приведём некоторые общие замечания и обозначения, относящиеся к K-модулю (A, B). Обозначим через L идеал $\left(\begin{smallmatrix} I & IM \\ JN & J \end{smallmatrix}\right)$ кольца K и положим $\overline{K} = K/L$. Можно отождествить факторкольцо $\overline{K}$ с кольцом матриц $\left(\begin{smallmatrix} R/I & M/IM \\ N/JN & S/J \end{smallmatrix}\right)$. Последнее кольцо обозначим через $\left(\begin{smallmatrix} \bar{R} & \overline{M} \\ \bar{N} & \bar{S} \end{smallmatrix}\right)$. Так как $\overline{M}\overline{N} = 0 = \overline{N}\overline{M}$, получаем, что $\overline{K}$ — кольцо с нулевыми идеалами следа. Модуль (A, B) имеет подмодули (IA, JB) и (MB, NA), причём $(IA, JB) \subseteq (MB, NA)$. Как было отмечено выше, можно отождествить фактормодули $(A, B)/(IA, JB)$ и $(A, B)/(MB, NA)$ с модулями $(A/IA, B/JB)$ и $(A/MB, B/NA)$ соответственно. Из того, что $L(A, B) = (IA, JB)$, следует, что $(A/IA, B/JB)$ и $(A/MB, B/NA)$ суть $\overline{K}$-модули.

Теперь рассмотрим идеал $L_1 = \left(\begin{smallmatrix} I & M \\ N & J \end{smallmatrix}\right)$ кольца K. Существует изоморфизм $K/L_1 \cong R/I \times S/J = \bar{R} \times \bar{S}$. Далее из равенства $L_1(A, B) = (MB, NA)$ вытекает, что $(A/MB, B/NA)$ есть $\bar{R} \times \bar{S}$-модуль.

Используя указанные выше обозначения, сформулируем следующий результат.

Следствие 12.2. *Пусть (A, B) — плоский K-модуль. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$(A/IA, B/JB)$ — плоский $\overline{K}$-модуль, и $M/IM \otimes_S B/NA \cong MB/IA$, $N/JN \otimes_R A/MB \cong NA/JB$*;

2) *A/MB — плоский $\bar{R}$-модуль, и B/NA — плоский $\bar{S}$-модуль*;

3) *если $I = 0$, то $M \otimes_S B/NA \cong MB$ и A/MB — плоский R-модуль, причём при $N = 0$ выполнено условие $M \otimes_S B \cong MB$ и B — плоский S-модуль*.

Доказательство. 1. Верно равенство $(A/IA, B/JB) = (A, B)/L(A, B)$. Известно, что $(A, B)/L(A, B)$ — плоский модуль. Это следует, например, из критерия Чейза (см. [31, предложение 11.33]).

Обозначим $\bar{A} = A/IA$ и $\bar{B} = B/JB$. Так как $(\bar{A}, \bar{B})$ — плоский модуль, существует изоморфизм

$$(0, \overline{M}) \otimes_{\overline{K}} (\bar{A}, \bar{B}) \cong (0, \overline{M})(\bar{A}, \bar{B}) = \overline{M}\overline{B},$$

где $(0, \overline{M})$ — правый идеал кольца $\overline{K}$. По предложению 12.1 тензорное произведение из левой части изоморфно факторгруппе $(\overline{M} \otimes_{\bar{S}} \overline{B})/\overline{H}$, причём подгруппа $\overline{H}$ порождается элементами вида $\overline{m} \otimes \overline{n}\overline{a}$ для всех $\overline{m} \in \overline{M}$, $\overline{n} \in \overline{N}$, $\overline{a} \in \overline{A}$ (следует учесть, что $\overline{M}\overline{N} = 0$). Группа $\overline{H}$ является образом индуцированного отображения $\overline{M} \otimes_{\bar{S}} \overline{N}\overline{A} \to \overline{M} \otimes_{\bar{S}} \overline{B}$. Следовательно, получаем изоморфизм

$$(0, \overline{M}) \otimes_K (\overline{A}, \overline{B}) \cong \overline{M} \otimes_{\bar{S}} \overline{B}/\overline{N}\overline{A}.$$

Таким образом, приходим к изоморфизму

$$\overline{M} \otimes_{\bar{S}} \overline{B}/\overline{N}\overline{A} \cong \overline{M}\overline{B}, \quad \overline{m} \otimes (\overline{b} + \overline{N}\overline{A}) \to \overline{m}\overline{b}.$$

При более подробной записи этот изоморфизм имеет вид

$$M/IM \otimes_S B/NA \cong MB/IA.$$

Второй изоморфизм доказывается аналогично.

2. Аналогично п. 1 доказывается, что $(A/MB, B/NA)$ — плоский $\overline{R} \times \bar{S}$-модуль.

3. Утверждение непосредственно следует из п. 1 и 2. □

Замечания. Применим к K-модулям одну стандартную процедуру перехода от левых модулей к правым модулям. Пусть (X, Y) — K-модуль и G — произвольная абелева группа. Группа аддитивных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}((X, Y), G)$ является правым K-модулем с модульным умножением, определяемым равенством

$$(\eta k)(x, y) = \eta(k(x, y)), \quad \eta \in \mathrm{Hom}((X, Y), G),\ k \in K,\ x \in X,\ y \in Y.$$

Аналогично группа $\mathrm{Hom}(X, G)$ (соответственно $\mathrm{Hom}(Y, G)$) — правый R-модуль (соответственно правый S-модуль). Можно рассматривать группу вектор-строк $(\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G))$ как правый K-модуль. Модульные умножения задаются равенствами

$$(\alpha m)y = \alpha(my), \quad (\beta n)x = \beta(nx),$$

где

$$\alpha \in \mathrm{Hom}(X, G), \quad \beta \in \mathrm{Hom}(Y, G), \quad m \in M, \quad n \in N, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Существует канонический K-модульный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}((X, Y), G) \to (\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G)),$$

$$\mathrm{Hom}((X, Y), G) \ni \eta \to (\eta|_X, \eta|_Y) \in (\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G)).$$

Отождествим K-модули $\mathrm{Hom}((X, Y), G)$ и $(\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G))$ с помощью этого изоморфизма.

Если V — модуль над некоторым кольцом T, то правый T-модуль $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ называется *модулем характеров* модуля V и обозначается V^*. Модуль характеров K-модуля (X, Y) есть (X^*, Y^*). Хорошо известно, что T-модуль V является плоским в точности тогда, когда модуль характеров V^* инъективен. Поскольку мы получили описание инъективных K-модулей, можно условно считать, что мы имеем описание плоских K-модулей. Другое дело, что это описание трудно сформулировать в терминах исходного модуля (X, Y). Однако иногда это возможно. Например, легко получить следующий результат (ср. с предложением 10.1).

Предложение 12.3. *K-модуль $(X, T(X))$ является плоским в точности тогда, когда X — плоский R-модуль. Аналогичное утверждение верно для S-модуля Y и K-модуля $(T(Y), Y)$. Таким образом, функтор T из* § 7 *сохраняет плоские модули.*

Доказательство. Мы договорились отождествлять модуль характеров модуля $(X, T(X))$ с правым K-модулем $(X^*, T(X)^*)$. Имеют место естественные изоморфизмы правых S-модулей

$$T(X)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_R X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = \mathrm{Hom}_R(N, X^*).$$

Итак, модуль характеров K-модуля $(X, T(X))$ есть $(X^*, \mathrm{Hom}_R(N, X^*))$. Из предложения 10.1 (точнее, из его правостороннего аналога) вытекает, что модуль $(X^*, \mathrm{Hom}_R(N, X^*))$ инъективен в точности тогда, когда модуль X^* инъективен. Последнее равносильно тому, что модуль X является плоским.

Случай модуля Y рассматривается аналогично. □

Замечание. Из предложения 12.3 непосредственно вытекает, что модуль $(A, 0)$ (соответственно $(0, B)$) является плоским в точности тогда, когда A — плоский модуль и $N \otimes_R A = 0$ (соответственно B — плоский модуль и $M \otimes_S B = 0$). Кроме того, теорема 10.2 фактически эквивалентна следующему результату.

Следствие 12.4. *Если (A, B) — K-модуль и $NA = B$, $MB = A$, то модуль (A, B) является плоским в точности тогда, когда A и B — плоские модули.*

Доказательство. Модуль характеров модуля (A, B) равен (A^*, B^*). Так как $(\eta m)b = \eta(mb)$ для всех $\eta \in A^*$, $m \in M$ и $b \in B$, имеем

$$L(A^*) = \mathrm{Hom}(A/MB, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (A/MB)^*,$$

где модуль $\mathrm{Hom}(A/MB, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ отождествляется с множеством всех гомоморфизмов $\eta\colon A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию $\eta(MB) = 0$. Кроме того, $L(B^*) = (B/NB)^*$. Поэтому из условия получаем, что $L(A^*) = 0 = L(B^*)$. Модуль (A^*, B^*) удовлетворяет условиям правостороннего варианта теоремы 10.2. Следовательно, модуль (A^*, B^*) инъективен в точности тогда, когда модули A^* и B^* инъективны. Последнее свойство равносильно тому, что A и B — плоские модули. □

При дополнительном условии, что идеалы следа кольца K равны нулю, получаем законченный результат.

Теорема 12.5. *Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то K-модуль (A, B) является плоским в точности тогда, когда A/MB — плоский R-модуль, B/NA — плоский S-модуль и имеют место изоморфизмы $M \otimes_S B/NA \cong MB$, $N \otimes_R A/MB \cong NA$.*

Доказательство. Если (A, B) — плоский K-модуль, то по утверждению 3 следствия 12.2 получаем, что A/MB и B/NA — плоские модули над R и S соответственно, $M \otimes_S B/NA \cong MB$ и $N \otimes_R A/MB \cong NA$.

Докажем достаточность условий. Существуют K-модули $(MB, 0)$ и (A, NA). Рассмотрим фактормодуль $(A, NA)/(MB, 0)$, который совпадает с модулем $(A/MB, NA)$. Тогда $M(NA) = 0$ и $n(a + MB) = na$ для всех $n \in N$ и $a \in A$. По предположению S-модули $N \otimes_R A/MB$ и NA изоморфны. Этот изоморфизм индуцируется соответствием $n \otimes (a + MB) \to na$ образующих элементов. По лемме 7.2 тождественное отображение модуля A/MB индуцирует K-модульный гомоморфизм

$$(A/MB, T(A/MB)) \to (A/MB, NA),$$

который совпадает с вышеуказанным изоморфизмом на вторых позициях. Теперь из предложения 12.3 и условия теоремы вытекает, что $(A/MB, NA)$ — плоский модуль. Аналогично $(MB, B/NA)$ — плоский модуль. Поэтому модули характеров $(A/MB, NA)^*$ и $(MB, B/NA)^*$ инъективны. Теперь докажем, что прямая сумма этих двух модулей изоморфна модулю $(A, B)^*$. Итак, надо проверить, что существует изоморфизм правых K-модулей

$$\big((A/MB)^* \oplus (MB)^*, (NA)^* \oplus (B/NA)^*\big) \cong (A^*, B^*). \tag{1}$$

Будем использовать следующие равенства из доказательства следствия 12.4:

$$(A/MB)^* M = 0 = (B/NA)^* N. \tag{2}$$

Так как $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективен, имеется точная последовательность правых R-модулей

$$0 \to (A/MB)^* \to A^* \xrightarrow{\pi} (MB)^*. \tag{3}$$

Как уже отмечалось, мы отождествляем модуль $(A/MB)^*$ с его образом в A^*, который состоит из всех гомоморфизмов $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, аннулирующих MB. Кроме того, отметим, что отображение π сопоставляет произвольному гомоморфизму $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ его ограничение на MB. Заметим, что R-модуль $(A/MB)^*$ инъективен, поскольку A/MB — плоский модуль. Следовательно, существует прямое разложение $A^* = (A/MB)^* \oplus V$ со слагаемым V, изоморфным модулю MB^*. Чтобы получить требуемый изоморфизм (1), необходимо выбрать определённым образом модуль V и изоморфизм между $(MB)^*$ и V. Так как последовательность (3) расщепляется, существует мономорфизм $\varepsilon\colon (MB)^* \to A^*$, для которого $\varepsilon\pi$ — тождественное отображение. В качестве V возьмём $\operatorname{Im}\varepsilon$, а в качестве изоморфизма между $(MB)^*$ и V возьмём ε. В результате получим изоморфизм правых K-модулей

$$\Phi\colon (A/MB)^* \oplus (MB)^* \to A^*,$$

который действует тождественно на $(A/MB)^*$, причём $\Phi(\alpha)|_{MB} = \alpha$ для всех $\alpha \in (MB)^*$. Можно также найти изоморфизм

$$\Psi\colon (NA)^* \oplus (B/NA)^* \to B^*$$

с аналогичными свойствами.

Докажем, что пара (Φ, Ψ) задаёт изоморфизм (1). Достаточно проверить выполнение правосторонних аналогов двух равенств, указанных в § 7. А именно, проверим, что

$$\Phi(\beta n) = \Psi(\beta)n, \quad \Psi(\alpha m) = \Phi(\alpha)m$$

для всех $\beta \in (NA)^* \oplus (B/NA)^*$, $\alpha \in (A/MB)^* \oplus (MB)^*$, $n \in N$, $m \in M$. В процессе проверки будем учитывать равенства (2) и выбор изоморфизмов Φ и Ψ. Возьмём конкретные β, n и запишем $\beta = \gamma + \delta$, где $\gamma \in (NA)^*$, $\delta \in (B/NA)^*$. Так как $\delta n = 0$, получаем, что $\beta n = \gamma n \in (A/MB)^*$. Для любого элемента $a \in A$ из определения отображения Φ имеем равенство $\Phi(\beta n) = \Phi(\gamma n)a$. С другой стороны, из определения отображения Ψ вытекает, что

$$(\Psi(\delta)n)a = (\Psi(\delta))(na) = 0,$$
$$(\Psi(\beta)n)a = (\Psi(\gamma)n)a = (\Psi(\gamma))(na).$$

Так как $\gamma(na) = (\gamma n)a$, имеем $\Phi(\beta n) = \Psi(\beta)n$. Второе равенство проверяется аналогично. Итак, модуль $(A, B)^*$ инъективен. Поэтому (A, B) — плоский модуль. □

Следствие 12.6 [32]. *Модуль (A, B) над кольцом $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ плосок в точности тогда, когда A/MB и B — плоские модули и $M \otimes_S B \cong MB$.*

§ 13. Проективные и наследственные модули и кольца

Над кольцом K формальных матриц с нулевыми идеалами следа проективные модули и наследственные модули допускают удовлетворительное описание. Затем мы применяем это описание к поиску условий, при которых кольцо K наследственно.

Здесь I и J по-прежнему обозначают идеалы следа кольца K. В этом параграфе мы обычно используем символ (P, Q) для обозначения K-модулей.

Наш первый результат можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства предложения 10.1. Только надо ссылаться на лемму 7.2 вместо леммы 7.3.

Предложение 13.1. *Если X — проективный R-модуль и Y — проективный S-модуль, то $(X, T(X))$ и $(T(Y), Y)$ — проективные K-модули. Верно и обратное.*

Из предложения 13.1 вытекает, что K-модуль $(X, 0)$ проективен в точности тогда, когда X — проективный R-модуль и $N \otimes_R X = 0$. Аналогично получаем, что утверждение верно для K-модуля $(0, Y)$.

В § 12 мы определили идеалы L и L_1 кольца K.

Следствие 13.2. *Пусть (P, Q) — проективный K-модуль. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$(P/IP, Q/JQ)$ — проективный K/L-модуль*;

2) *модуль P/MQ проективен над R/I, модуль Q/NP проективен над S/J.*

Доказательство. Если V — проективный модуль над некоторым кольцом T и A — идеал в T, то V/AV — проективный T/A-модуль. Используя это свойство при $T{=}K$, $A{=}L$ и $T{=}K$, $A{=}L_1$, нетрудно доказать утверждения 1 и 2. □

Теорема 13.3. *Пусть K — кольцо с нулевыми идеалами следа*; *предположим, что (P, Q) — K-модуль. Тогда равносильны следующие условия*:

1) (P, Q) — *проективный модуль*;

2) P/MQ — *проективный R-модуль*, Q/NP — *проективный S-модуль*, $M \otimes_S Q/NP \cong MQ$ *и* $N \otimes_R P/MQ \cong NP$;

3) *существуют проективный R-модуль X и проективный S-модуль Y, для которых* $(P, Q) = (X, NP) \oplus (MQ, Y)$, $M \otimes_S Y \cong MQ$ *и* $N \otimes_R X \cong NP$;

4) *существуют проективный R-модуль X и проективный S-модуль Y, для которых* $(P, Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Из следствия 13.2 вытекает, что P/MQ — проективный R-модуль и Q/NP — проективный S-модуль. Из следствия 12.2 вытекает, что $M \otimes_S Q/NP \cong MQ$ и $N \otimes_R P/MQ \cong NP$.

2) $\Rightarrow$ 3). Сначала сделаем одно замечание. Так как $Y \subseteq Q$, существует индуцированный гомоморфизм $M \otimes_S Y \to M \otimes_S Q$. Композиция этого гомоморфизма с гомоморфизмом модульного умножения $M \otimes_S Q \to MQ$ даёт гомоморфизм $M \otimes_S Y \to MQ$. В условии 3 подразумевается, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Можно записать $P = X \oplus MQ$ и $Q = NP \oplus Y$, где $X \cong P/MQ$ и $Y \cong Q/NP$. Так как (X, NP) и (MQ, Y) суть K-модули, получаем равенства

$$(P, Q) = (X \oplus MQ, NP \oplus Y) = (X, NP) \oplus (MQ, Y).$$

3) $\Rightarrow$ 4). Утверждение следует из леммы 7.2 и того, что

$$(X, T(X)) \cong (X, NP), \quad (T(Y), Y) \cong (MQ, Y).$$

Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) вытекает из предложения 13.1. □

Для кольца треугольных матриц получаем следующий результат, в котором эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) доказана в [47].

Следствие 13.4. *Пусть* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ *и* (P, Q) — *K-модуль. Тогда равносильны следующие условия*:

1) (P, Q) — *проективный модуль*;

2) P/MQ — *проективный R-модуль*, Q — *проективный S-модуль*, *и* $M \otimes_S Q \cong MQ$;

3) Q — *проективный S-модуль*, $M \otimes_S Q \cong MQ$, *и существует такой проективный R-модуль X, что* $(P, Q) = (X, 0) \oplus (MQ, Q)$;

4) Q — *проективный S-модуль, и существует такой проективный R-модуль X, что* $(P, Q) \cong (X, 0) \oplus (T(Q), Q)$.

Некоторый модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. Изучение наследственных модулей начнём со следующего результата.

Предложение 13.5. *Если (P, Q) — наследственный модуль, то P и Q — наследственные модули.*

Доказательство. Как всегда, докажем утверждение для одного из модулей P и Q, поскольку для второго модуля оно доказывается аналогично. Возьмём произвольный подмодуль A в P. По условию (A, NP) — проективный подмодуль в (P, Q). Пусть $\{a_t \mid t \in T\}$ — некоторая система образующих R-модуля A. Тогда $\{(a_t, 0) \mid t \in T\}$ — система образующих K-модуля (A, NA). По лемме о дуальном базисе [31, лемма 3.23] существуют такие K-модульные гомоморфизмы $F_t\colon (A, NA) \to K$, $t \in T$, что каждый элемент $v \in (A, NA)$ равен $\sum_{t\in T} F_t(v)(a_t, 0)$, где почти все элементы $F_t(v)$ равны нулю. Обозначим через h аддитивный гомоморфизм $K \to R$, $\left(\begin{smallmatrix} r & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right) \to r$ (здесь и далее через $*$ обозначаются несущественные для нас элементы). Для каждого $t \in T$ существует такой аддитивный гомоморфизм $f_t\colon A \to R$, что $f_t(a) = (F_t h)(a, 0)$, $a \in A$. Проверим, что $f_t(ra) = r f_t(a)$ для всех $r \in R$ и $a \in A$. Имеем

$$f_t(ra) = h(F_t(ra, 0)) = h(rF_t(a, 0)) = h\left(r\begin{pmatrix} c & * \\ * & * \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} rc & * \\ * & * \end{pmatrix} = rc,$$

$$r f_t(a) = r(h(F_t(a, 0))) = rh\begin{pmatrix} c & * \\ * & * \end{pmatrix} = rc.$$

Следовательно, все f_t являются R-модульными гомоморфизмами. Для каждого элемента $a \in A$ имеем

$$(a, 0) = \sum F_t(a, 0)(a_t, 0) = \sum \begin{pmatrix} r_t & * \\ * & * \end{pmatrix}(a_t, 0) = \sum (r_t a_t, *), \quad a = \sum r_t a_t,$$

где индекс $t \in T$ везде опущен, $r_t \in R$ и почти все r_t равны нулю. Таким образом, $a = \sum f_t(a) a_t$. По лемме о дуальном базисе R-модуль A проективен. Следовательно, P — наследственный модуль. □

Применение теоремы 13.3 приводит к описанию наследственных K-модулей.

Теорема 13.6. *Пусть K — кольцо с нулевыми идеалами следа; предположим, что (P, Q) — K-модуль. Модуль (P, Q) является наследственным в точности тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *P и Q — наследственные модули*;

2) *для любого подмодуля B в Q модуль P/MB является проективным и $M \otimes_S B \cong MB$*;

3) *для любого подмодуля A в P модуль Q/NA является проективным и $N \otimes_R A \cong NA$.*

Доказательство. Допустим, что (P, Q) — наследственный модуль. Из предложения 13.5 следует, что P и Q — наследственные модули. Возьмём некоторый подмодуль B в Q и K-модуль (MB, B). Модуль (MB, B) проективен, поскольку он является подмодулем наследственного модуля (P, Q). Из теоремы 13.3 следует, что $M \otimes_S B \cong MB$. Теперь возьмём подмодуль $(P, B + NP)$ модуля (P, Q). По теореме 13.3 модуль P/MB проективен. Аналогичные рассуждения также верны для любого подмодуля A в P.

Теперь допустим, что условия теоремы выполнены. Пусть (A, B) — некоторый подмодуль в (P, Q). Верны соотношения

$$P = X \oplus MB, \quad M \otimes_S B \cong MB, \quad Q = Y \oplus NA, \quad N \otimes_R A \cong NA,$$

где X и Y — некоторые проективные модули. Так как $MB \subseteq A$ и $NA \subseteq B$, существуют разложения

$$A = (A \cap X) \oplus MB, \quad B = (B \cap Y) \oplus NA,$$
$$(A, B) = (A \cap X, NA) \oplus (MB, B \cap Y).$$

Проверим, что последнее разложение удовлетворяет условиям п. 3 теоремы 13.3. В самом деле, модули $A \cap X$ и $B \cap Y$ проективны. Далее, имеем

$$MB \cong M \otimes_S B \cong M \otimes_S (B \cap Y) \oplus M \otimes_S NA.$$

Однако $M \otimes_S NA \cong MNA = 0$. Поэтому $M \otimes_S (B \cap Y) \cong MB$. Аналогично $N \otimes_S (A \cap X) \cong NA$. По теореме 13.3 модуль (A, B) проективен. Поэтому (P, Q) — наследственный модуль. □

Следствие 13.7. *Модуль (P, Q) над кольцом треугольных матриц $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ является наследственным в точности тогда, когда P и Q — наследственные модули, для любого подмодуля B в Q модуль P/MB проективен и $M \otimes_S B \cong MB$.*

Замечание. Для правых K-модулей верны утверждения, аналогичные результатам из § 8–13 (например, верны аналоги теорем 13.3 и 13.6). Подробнее об этом см. начало § 7.

Кольцо T называется *наследственным слева* (соответственно *справа*), если T — наследственный левый (соответственно правый) T-модуль, т. е. каждый левый (соответственно правый) идеал кольца T — проективный левый (соответственно правый) T-модуль.

Применим теорему 13.6 к кольцу K.

Следствие 13.8. *Кольцо формальных матриц K с нулевыми идеалами следа является наследственным слева в точности тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *кольца R и S наследственны слева*;

2) *M — плоский S-модуль, N — плоский R-модуль и $M \otimes_S N = 0 = N \otimes_R M$*;

3) *M/ML — проективный R-модуль для любого левого идеала L кольца S*;

4) *N/NL — проективный S-модуль для любого левого идеала L кольца R.*

Доказательство. Заметим, что кольцо K является наследственным слева в точности тогда, когда наследственны левые K-модули (R, N) и (M, S).

Пусть (R, N) — наследственный K-модуль. По теореме 13.6 кольцо R наследственно слева. Кроме того, для любого левого идеала L кольца R верно, что S-модуль N/NL проективен и канонический гомоморфизм $N \otimes_R L \to NL$ является изоморфизмом. Последнее свойство равносильно тому, что N — плоский R-модуль. Наконец, $M \otimes_S N = 0 = N \otimes_R M$. С использованием наследственного K-модуля (M, S) оставшиеся условия проверяются аналогично.

Допустим, что выполнены условия 1–4. Из теоремы 13.6 вытекает, что левые K-модули (R, N) и (M, S) наследственны. Сделаем лишь ряд уточнений. Так как N — плоский S-модуль, для S-подмодуля B в N имеем $M \otimes_S B \subseteq M \otimes_S N = 0$. Поскольку $MB = 0$, получаем, что $M \otimes_S B = MB$. Кроме того, $N \otimes_R L \cong NL$ для любого левого идеала L кольца R, поскольку N — плоский R-модуль. Аналогично доказывается, что (M, S) — наследственный модуль. □

Запишем три следствия для кольца треугольных матриц. Первое следствие применяется в § 15 для изучения абелевых групп с наследственными кольцами эндоморфизмов.

Следствие 13.9 [36]. *Кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ наследственно слева в точности тогда, когда кольца R и S наследственны слева, M — плоский S-модуль и M/ML — проективный R-модуль для любого левого идеала L кольца S.*

Следствие 13.10. *Если R и S — артиновы полупримитивные кольца, то кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ наследственно слева и справа для каждого R-S-бимодуля M.*

Следствие 13.11. *Кольцо* $\left(\begin{smallmatrix} R & R \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ *наследственно слева* (*или справа*) *в точности тогда, когда* R *— артиново полупримитивное кольцо.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай наследственных слева колец. Если R — артиново полупримитивное кольцо, то по следствию 13.10 кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & R \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ наследственно слева.

Допустим, что кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & R \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ наследственно слева. По следствию 13.9 для любого левого идеала L кольца R модуль $R/RL = R/L$ проективен. Поэтому L — прямое слагаемое модуля ${}_RR$. Тогда R — артиново полупримитивное кольцо.

В случае наследственных справа колец утверждение доказывается с помощью перехода к противоположному кольцу $\left(\begin{smallmatrix} R^\circ & 0 \\ R^\circ & R^\circ \end{smallmatrix}\right)$ (такие кольца упоминаются в § 1). □

Из следствия 13.11 вытекает следующий хорошо известный факт: *для любого тела* D *кольцо* $\left(\begin{smallmatrix} D & D \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ *наследственно*. Следующий результат может считаться обобщением этого факта.

Следствие 13.12. *Пусть* D *и* F *— тела, а* $K = \left(\begin{smallmatrix} D & V \\ W & F \end{smallmatrix}\right)$ *— кольцо формальных матриц. Кольцо* K *наследственно слева* (*или справа*) *в точности тогда, когда* $D \cong F$, V *и* W *— одномерные* D*-пространства и* F*-пространства и либо* K *не является кольцом с нулевыми идеалами следа, либо* K *— кольцо* (*верхних или нижних*) *треугольных матриц.*

Доказательство. Пусть кольцо K наследственно слева или справа. Поскольку D и F — тела, для идеалов следа I и J кольца K могут быть только следующие три возможности:

$$1)\ I = 0; \quad 2)\ I = D \text{ и } J = F; \quad 3)\ J = 0.$$

Рассмотрев произведения VWV и WVW, легко проверить, что либо $I = D$ и $J = F$, либо $I = 0 = J$. В первом случае получаем, что V и W — одномерные D-пространства и F-пространства и $D \cong \mathrm{End}_F(V)$ по лемме 14.3. При $I = 0 = J$ из следствия 13.8 вытекает, что $V \otimes_F W = 0$ и, далее, $V = 0$ или $W = 0$.

Обратно, если кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} D & D \\ D & D \end{smallmatrix}\right)$ не является кольцом с нулевыми идеалами следа, то это кольцо изоморфно «обычному» кольцу (2×2)-матриц над D. Случай кольца треугольных матриц содержится в следствиях 13.10 и 13.11. □

Кольцо T называется *совершенным слева*, если любой левый T-модуль обладает проективной оболочкой. Кольцо T совершенно слева в точности тогда, когда каждый плоский левый T-модуль проективен.

Следствие 13.13. *Если кольцо* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ *совершенно слева, то кольца* R *и* S *совершенны слева. Для колец с нулевыми идеалами следа верно обратное.*

Доказательство. Пусть кольцо K совершенно слева. Возьмём произвольный плоский R-модуль X. Тогда $(X, T(X))$ — плоский модуль; см., предложение 12.3. Так как K совершенно слева, модуль $(X, T(X))$ проективен. По предложению 13.1 модуль X проективен. Поэтому кольцо R совершенно слева. Аналогично доказывается, что кольцо S совершенно слева.

Обратно, допустим, что кольца R и S совершенны слева. По теоремам 12.5 и 13.3 любой плоский левый K-модуль проективен. Поэтому кольцо K совершенно слева. □

Замечание. В общем случае неизвестно, верно ли утверждение, обратное следствию 13.13.

Теперь можно предложить хорошее описание плоских модулей из теоремы 12.5.

Теорема 13.14. *Пусть* K *— кольцо с нулевыми идеалами следа. Тогда для любого плоского* K*-модуля* (P, Q) *существуют такие плоские* R*-модуль* X *и* S*-модуль* Y*, что* $(P, Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$.

Доказательство. Модуль (P, Q) является пределом прямого спектра конечно порождённых проективных K-модулей

$$\{(A_i, B_i),\ i \in I;\ (e_i^j, f_i^j)\},$$

где $(e_i^j, f_i^j)\colon (A_i, B_i) \to (A_j, B_j)$, $i \leqslant j$ [31, глава 5, упражнение 55.9]. По теореме 13.3 для каждого i существуют такие проективные R-модуль X_i и S-модуль Y_i, что $(A_i, B_i) \cong (X_i, T(X_i)) \oplus (T(Y_i), Y_i)$, причём $X_i = A_i/MB_i$ и $Y_i = B_i/NA_i$. Из предложения 8.1 вытекает, что X_i и Y_i — конечно порождённые модули. Поскольку $e_i^j(MB_i) \subseteq MB_j$ и $f_i^j(NA_i) \subseteq NA_j$, гомоморфизмы e_i^j и f_i^j индуцируют гомоморфизмы $X_i \to X_j$ и $Y_i \to Y_j$ соответственно. Будем их обозначать теми же символами e_i^j и f_i^j.

Можно проверить, что существуют прямые спектры $\{X_i (i \in I); e_i^j\}$ и $\{Y_i (i \in I); f_i^j\}$, а также спектры

$$\left\{(X_i, T(X_i))(i \in I); (e_i^j, 1 \otimes e_i^j)\right\} \quad \text{и} \quad \left\{(T(Y_i), Y_i)(i \in I); (1 \otimes f_i^j, f_i^j)\right\}.$$

Непосредственно по определению предела прямого спектра далее показывается, что

$$\varinjlim_I (X_i, T(X_i)) \cong \left(\varinjlim_I X_i, T(\varinjlim_I X_i)\right)$$

и аналогично для другого спектра (следует ещё учесть, что прямой предел коммутирует с тензорным произведением). Положим

$$X = \lim_{\to\, I} X_i, \quad Y = \lim_{\to\, I} Y_i.$$

Тогда X и Y — плоские модули и имеют место изоморфизмы

$$(P, Q) \cong \lim_{\to\, I} (A_i, B_i) \cong$$

$$\cong \lim_{\to\, I} (X_i, T(X_i)) \oplus \lim_{\to\, I} (T(Y_i), Y_i) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y). \qquad \square$$

§ 14. Эквивалентности между категориями R-mod, S-mod и K-mod

Естественно рассмотреть отдельно кольца формальных матриц $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$, для которых $I = R$ и $J = S$. Этот случай противоположен случаю $I = 0 = J$, когда K — кольцо с нулевыми идеалами следа. Такие кольца появляются при исследовании эквивалентностей между категориями R-модулей и S-модулей. Главные результаты на эту тему известны как теоремы Мориты. В разделах 21 и 22 книги [6] содержится подробное изложение различных вопросов, связанных с эквивалентностями категорий модулей. Здесь мы проясняем роль кольца K при изучении эквивалентностей категорий. После этого становится ясным, что строение модулей над кольцом K при $I = R$ и $J = S$ не зависит от бимодулей M и N, а определяется строением соответствующих R-модулей или S-модулей.

Пусть $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц, а $\varphi : M \otimes_S N \to R$ и $\psi : N \otimes_R M \to S$ — бимодульные гомоморфизмы, введённые в § 1. Образы I и J этих гомоморфизмов мы называем идеалами следа кольца K.

Напомним, что с данным K-модулем (A, B) ассоциируются две пары гомоморфизмов модульного умножения

$$f : M \otimes_S B \to A, \qquad g : N \otimes_R A \to B,$$
$$f' : B \to \mathrm{Hom}_R(M, A), \quad g' : A \to \mathrm{Hom}_S(N, B)$$

(см. начало § 7).

Лемма 14.1. *Если $I = R$ и $J = S$, то f, g, f', g' — изоморфизмы.*

Доказательство. Можно записать

$$1 = m_1 n_1 + \ldots + m_k n_k, \quad \text{где } m_i \in M,\ n_i \in N,\ i = 1, \ldots, k.$$

Так как $A = IA \subseteq MB$, отображение f — сюръекция. Допустим, что

$$f(x_1 \otimes b_1 + \ldots + x_\ell \otimes b_\ell) = 0$$

для некоторых $x_j \in M$, $b_j \in B$, $j = 1, \ldots, \ell$. Верны равенства

$$\sum_j x_j \otimes b_j = \sum_{i,j} (m_i n_i)(x_j \otimes b_j) = \sum_{i,j} m_i (n_i x_j) \otimes b_j =$$
$$= \sum_{i,j} m_i \otimes n_i (x_j b_j) = \sum_i (m_i \otimes n_i) \cdot \sum_j x_j b_j = \sum_i (m_i \otimes n_i) \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, f — изоморфизм.

Аналогично из равенства $J = S$ следует, что

$$1 = n_1 m_1 + \ldots + n_k m_k, \quad \text{где } n_i \in N,\ m_i \in M,\ i = 1, \ldots, k$$

(используются те же буквы n_i и m_i, это не приведёт к путанице). Аналогично получаем, что g — изоморфизм.

Если $f'(b) = 0$, то $b = \sum_i (n_i m_i) b = \sum_i n_i (m_i b) = 0$, поскольку $m_i b = 0$. Пусть α — произвольный гомоморфизм $M \to A$. Для любого $m \in M$ имеем

$$\alpha(m) = \alpha\Big(m \sum_i n_i m_i\Big) = \alpha\Big(\sum_i (m n_i) m_i\Big) =$$
$$= \sum_i (m n_i) \alpha(m_i) = m\Big(\sum_i n_i \alpha(m_i)\Big).$$

Поэтому $\alpha = f'\big(\sum_i n_i \alpha(m_i)\big)$. Итак, f' — изоморфизм. Аналогично получаем, что g' — изоморфизм. □

Следствие 14.2. *Пусть $I = R$, $J = S$ и (A, B) — K-модуль. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) *$MB = A$, $NA = B$, и имеют место канонические K-модульные изоморфизмы $(A, T(A)) \cong (A, B)$, $(T(B), B) \cong (A, B)$, $(A, B) \cong (A, H(A))$, $(A, B) \cong (H(B), B)$;*

2) *имеют место канонические кольцевые изоморфизмы* $\operatorname{End}_R A \cong$ $\cong \operatorname{End}_K (A, B) \cong \operatorname{End}_S B$.

Доказательство. В п. 1 требуемыми изоморфизмами являются $(1, g)$, $(f, 1)$, $(1, f')$, $(g', 1)$ соответственно; см. замечания после следствия 7.4. Утверждение 2 вытекает из следствия 7.4. □

Напомним ряд понятий теории модулей. Пусть C — некоторый R-S-бимодуль. Для каждого элемента $r \in R$ отображение $\alpha_r \colon c \to rc$, $c \in C$, есть S-гомоморфизм; он называется *гомотетией* R-модуля C

с коэффициентом r. Кольцевой гомоморфизм $R \to \mathrm{End}_S C$, $r \to \alpha_r$, называется *отображением гомотетии*. Существует ещё одно отображение гомотетии. А именно, $S \to \mathrm{End}_R C$, $s \to \beta_s$, где $\beta_s(c) = cs$, $s \in S$, $c \in C$. Например, пусть C — R-модуль и $S = \mathrm{End}_R C$. Тогда C — R-S-бимодуль. Следовательно, имеется отображение гомотетии $R \to \mathrm{End}_S C$. Здесь $\mathrm{End}_S C$ — кольцо биэндоморфизмов R-модуля C.

В дальнейшем G^n обозначает прямую сумму n изоморфных копий модуля G.

Модуль G над кольцом T называется *образующим*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) сумма образов всех гомоморфизмов из G в R совпадает с R;

2) для любого T-модуля X сумма образов всех гомоморфизмов из G в X совпадает с X;

3) для любых гомоморфизмов T-модулей $\alpha\colon G \to X$ и $\beta, \gamma\colon X \to Y$ из равенства $\alpha\beta = \alpha\gamma$ вытекает равенство $\beta = \gamma$;

4) существуют натуральное число n и T-модуль H, для которых $G^n \cong T \oplus H$.

Конечно порождённый проективный образующий модуль часто называют *прообразующим* модулем.

Применим лемму 14.1 к кольцу K. Сначала заметим, что каждый из K-модулей (R, N) и (M, S) даёт четыре гомоморфизма модульного умножения. К известным нам гомоморфизмам $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$ добавляются гомоморфизмы $\varphi'\colon N \to \mathrm{Hom}_R(M, R)$ и $\psi'\colon M \to \mathrm{Hom}_S(N, S)$, канонические изоморфизмы $N \otimes_R R \to N$, $M \otimes_S S \to M$ и два отображения гомотетии $R \to \mathrm{End}_S N$, $S \to \mathrm{End}_R M$. Уточним, что $\varphi'(n)(m) = mn$, $n \in N$, $m \in M$; гомоморфизм ψ' действует аналогично. Среди восьми гомоморфизмов модульного умножения для правых K-модулей (R, M) и (N, S) имеются гомоморфизмы $N \to \mathrm{Hom}_S(M, S)$, $M \to \mathrm{Hom}_R(N, R)$ и два отображения гомотетии $R \to \mathrm{End}_S M$, $S \to \mathrm{End}_R N$.

Лемма 14.3. *Пусть K — такое кольцо формальных матриц, что $I = R$ и $J = S$.*

1. *Все указанные выше* 16 *бимодульных гомоморфизмов суть изоморфизмы.*

2. *Каждый из модулей ${}_R M$, M_S, ${}_S N$ и N_R является прообразующим.*

Доказательство. 1. Утверждение является частным случаем леммы 14.1.

2. Аналогично лемме 14.1 пусть $1 = m_1 n_1 + \ldots + m_k n_k$, где $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i = 1, \ldots, k$. Положим $\alpha_i = \varphi'(n_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим гомо-

морфизм $\gamma = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \colon M^k \to R$. Так как

$$\gamma(m_1 + \ldots + m_k) = m_1 n_1 + \ldots + m_k n_k = 1,$$

получаем, что γ — эпиморфизм на проективный модуль R. Поэтому γ расщепляется и $M^k \cong R \oplus X$ для некоторого модуля X. Таким образом, M — образующий модуль. Можно повторить эти рассуждения для остальных трёх модулей. В частности, имеется изоморфизм $M^k \cong S \oplus Y$ для некоторого правого S-модуля Y. Теперь из изоморфизмов левых R-модулей

$$R^k \cong \mathrm{Hom}_S(M, M)^k \cong \mathrm{Hom}_S(M^k, M) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_S(S \oplus Y, M) \cong \mathrm{Hom}_S(S, M) \oplus \mathrm{Hom}_S(Y, M) \cong M \oplus X$$

вытекает, что M — конечно порождённый проективный R-модуль. Можно повторить эти рассуждения для остальных модулей. □

Если имеется кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$, то можно рассмотреть так называемую *ситуацию предэквивалентности*, или *контекст Мориты* $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$, где R и S — кольца, ${}_R M_S$ и ${}_S N_R$ — бимодули, $\varphi \colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi \colon N \otimes_R M \to S$ — бимодульные гомоморфизмы, причём выполнены законы ассоциативности

$$(mn)m' = m(nm'), \quad (nm)n' = n(mn')$$

для всех $m, m' \in M$, $n, n' \in N$. Существует очевидное взаимно однозначное соответствие между кольцами формальных матриц и ситуациями предэквивалентности. Поэтому удобно само кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ называть *ситуацией предэквивалентности* или *контекстом Мориты*. Если φ и ψ — изоморфизмы, то $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ или кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ называется *ситуацией эквивалентности*.

Замечание. Убедимся, что можно получить некоторую «стандартную» ситуацию предэквивалентности, если исходить из произвольного модуля (для удобства чтения фактически повторим пример 1 из § 2). Пусть M — модуль над некоторым кольцом R. Обозначим через S кольцо эндоморфизмов R-модуля M. Тогда M — R-S-бимодуль. Затем положим $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$. Группа M^* является S-R-бимодулем, где

$$(s\alpha)m = \alpha(s(m)), \quad (\alpha r)m = \alpha(mr), \quad \alpha \in M^*,\ s \in S,\ r \in R,\ m \in M.$$

Существуют R-R-бимодульный гомоморфизм $\varphi \colon M \otimes_S M^* \to R$ и S-S-бимодульный гомоморфизм $\psi \colon M^* \otimes_R M \to S$, определяемые правилами

$$\varphi\Big(\sum m_i \otimes \alpha_i\Big) = \sum \alpha_i(m_i),$$

$$\Big(\psi\Big(\sum \alpha_i \otimes m_i\Big)\Big)(m) = \sum \alpha_i(m) m_i,$$

где $m_i, m \in M$, $\alpha_i \in M^*$. Для φ и ψ выполняются два закона ассоциативности. Следовательно, мы располагаем ситуацией предэквивалентности $(R, S, M, M^*, \varphi, \psi)$ и соответствущим кольцом формальных матриц. Это кольцо обладает следующими свойствами.

Лемма 14.4. 1. *Отображение* φ (*соответственно* ψ) *сюръективно в точности тогда, когда* M *— образующий* (*соответственно конечно порождённый проективный*) R*-модуль.*

2. *Если* M *— прообразующий* R*-модуль, то* M *удовлетворяет условию и утверждениям леммы* 14.3.

Доказательство. 1. Образ отображения φ есть сумма образов всех гомоморфизмов из M в R. Из определения образующего модуля вытекает, что φ сюръективно в точности тогда, когда M — образующий модуль.

Отображение ψ сюръективно в точности тогда, когда тождественное отображение модуля M лежит в образе ψ, т. е. существуют такие гомоморфизмы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \colon M \to R$ и элементы $m_1, \ldots, m_k$, что

$$m = \sum \alpha_i(m) m_i$$

для всех $m \in M$. Это означает, что $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; m_1, \ldots, m_k\}$ — дуальный базис модуля M. Последнее условие равносильно тому, что M — конечно порождённый проективный R-модуль.

2. Утверждение непосредственно следует из п. 1. □

Сформулируем один результат об эквивалентности категорий, называемый иногда *первой теоремой Мориты*.

Теорема 14.5 (первая теорема Мориты). *Пусть кольцо* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ *есть ситуация эквивалентности. В таком случае категории* R-mod, S-mod *и* K-mod *эквивалентны между собой* (*соответствующие эквивалентности указываются в доказательстве*).

Доказательство. Определим функтор $T_N = N \otimes_R (-) \colon R\text{-mod} \to S\text{-mod}$ равенством $T_N(X) = N \otimes_R X$ для R-модулей X. Гомоморфизмы R-модулей функтор T_N переводит в индуцированные гомоморфизмы S-модулей. Аналогично определяется функтор T_M (в § 7 содержится информация о функторах T_N, T_M и некоторых других функторах).

Докажем, что функторы T_N и T_M являются взаимно обратными эквивалентностями между категориями R-mod и S-mod. Нужно проверить, что композиция $T_M T_N$ (соответственно $T_N T_M$) естественным

образом эквивалентна тождественному функтору категории R-mod (соответственно S-mod). Это вытекает из того, что для любого R-модуля X существуют естественные изоморфизмы

$$(T_M T_N)X \cong (M \otimes_S N) \otimes_R X \cong R \otimes_R X \cong X.$$

Аналогично $(T_N T_M)Y \cong Y$ для произвольного S-модуля Y.

Эквивалентность категорий R-mod и S-mod определяют также функторы

$$H_M = \mathrm{Hom}_R(M, -), \quad H_N = \mathrm{Hom}_S(N, -),$$

где $H_M(X) = \mathrm{Hom}_R(M, X)$, $H_N(Y) = \mathrm{Hom}_S(N, Y)$, а гомоморфизмы опять переводятся в индуцированные. Действительно,

$$(H_N H_M)X = \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, X)) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, X) \cong \mathrm{Hom}_R(R, X) \cong X, (H_M H_N)Y \cong Y.$$

Отметим, что функторы T_N и T_M, H_M и H_N тесно связаны с функторами T и H, введёнными в § 7. Разумеется, функторы T_N и H_M естественным образом эквивалентны. То же самое верно для функторов T_M и H_N. Естественным изоморфизмом между $T_N(X)$ и $H_M(X)$ будет гомоморфизм h, где

$$(h(n \otimes x))m = (mn)x, \quad n \in N,\ x \in X,\ m \in M.$$

По лемме 14.1 гомоморфизм h является изоморфизмом, поскольку h — гомоморфизм модульного умножения для K-модуля $(X, H_M(X))$.

Теперь возьмём функторы

$$(1, T_N) : R\text{-mod} \to K\text{-mod} \quad \text{и} \quad (1, 0) : K\text{-mod} \to R\text{-mod},$$

также введённые в § 7. Имеем $((1, 0)(1, T_N))X = X$ и

$$((1, T_N)(1, 0))(X, Y) = (1, T_N)X = (X, T_N(X)) \cong (X, Y),$$

где гомоморфизм модульного умножения g берётся в качестве изоморфизма между $T_N(X)$ и Y (см. лемму 14.1 и следствие 14.2). Таким образом, $(1, T_N)$ и $(1, 0)$ — взаимно обратные эквивалентности категорий R-mod и K-mod. Аналогично определяются функторы $(1, H_M)$ и $(1, 0)$, играющие такую же роль ($(1, H_M)$ — это ограничение функтора H из § 7). Эквивалентность категорий S-mod и K-mod доказывается аналогично.

Обе эквивалентности можно получить путём применения первой части доказательства. Для этого возьмём стандартную ситуацию предэквивалентности, возникающую с помощью модуля $R \oplus M$. Запишем

этот модуль в виде (R, M), чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с R-K-бимодулем. Так как $\mathrm{End}_R(R \oplus M) \cong K$ и $\mathrm{Hom}_R((R, M), R) \cong (R, N)$ ((R, N) есть K-R-бимодуль), можно записать соответствующее кольцо матриц $\begin{pmatrix} R & (R,M) \\ \binom{R}{N} & K \end{pmatrix}$ (это кольцо K_1 из § 3). На самом деле мы имеем дело с ситуацией эквивалентности (в силу леммы 14.4). Из доказанного выше вытекает, что функторы $T_{(R,N)}$ и $T_{(R,M)}$ определяют эквивалентность категорий R-mod и K-mod. По существу, $(1, T_N)$ и $(1, 0)$ — эти функторы. □

В условиях теоремы 14.5 будем говорить, что ситуация эквивалентности $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ или соответствующее кольцо матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ определяет эквивалентность категорий R-mod и S-mod.

Вторая теорема Мориты утверждает, что все эквивалентности двух категорий модулей возникают из ситуации эквивалентности.

Теорема 14.6 (вторая теорема Мориты). *Пусть R и S — такие кольца, что категории R-mod и S-mod эквивалентны. Тогда каждая эквивалентность категорий R-mod и S-mod задаётся некоторым кольцом* $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$.

Доказательство. Допустим, что функторы $F\colon R\text{-mod} \to S\text{-mod}$ и $G\colon S\text{-mod} \to R\text{-mod}$ есть взаимно обратные эквивалентности. Достаточно доказать, что существует некоторая ситуация эквивалентности $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$, или кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. В самом деле, тогда по предыдущей теореме функторы T_N и T_M (а также H_M и H_N) задают эквивалентность между R-mod и S-mod. Однако известно, что в таком случае функтор F эквивалентен T_N и функтор G эквивалентен T_M.

Обозначим R-модуль $G(S)$ через M. Его можно превратить в правый S-модуль так, что M станет R-S-бимодулем. Делается это так. Для элементов $m \in M$ и $s \in S$ полагаем $ms = \alpha(m)$, где эндоморфизм α R-модуля M соответствует s при композиции кольцевых изоморфизмов $S \cong \mathrm{End}_S S \cong \mathrm{End}_R M$. Здесь второй изоморфизм есть одно из известных свойств эквивалентностей категорий. Считаем, что $S = \mathrm{End}_R M$. Рассмотрим стандартную ситуацию предэквивалентности, определяемую бимодулем M, и соответствующее кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$, где $N = \mathrm{Hom}_R(M, R)$. При эквивалентности категорий образующие (соответственно конечно порождённые проективные) модули переходят в модули с тем же свойством (такие свойства называются *категорными*). Следовательно, M — прообразующий R-модуль. Таким образом, $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — ситуация эквивалентности по лемме 14.4, что и требовалось. □

Кольца R и S называются *эквивалентными* (в смысле Мориты) или *Морита-эквивалентными*, если категории R-mod и S-mod эквивалентны. Понятие Морита-эквивалентности лево-право симметрично. Если R-mod и S-mod эквивалентны, то по теоремам 14.6 и 14.5 кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ является ситуацией эквивалентности и наоборот. Тогда противоположное кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R^\circ & N \\ M & S^\circ \end{smallmatrix}\right)$ (см. § 1) является ситуацией эквивалентности и наоборот. Следовательно, категории R°-mod и S°-mod эквивалентны. Поэтому категории mod-R и mod-S эквивалентны.

Следствие 14.7. *Для колец R и S равносильны следующие условия*:

1) *кольца R и S эквивалентны*;

2) *существует такой прообразующий R-модуль M, что $S \cong \operatorname{End}_R M$*;

3) *существует такой прообразующий правый R-модуль N, что $S \cong \operatorname{End}_R N$*;

4) *существует ситуация эквивалентности $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$*.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 1) $\Rightarrow$ 3) вытекают из теоремы 14.6.

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 4) доказана в теоремах 14.5 и 14.6.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим стандартную ситуацию предэквивалентности (R, S, M, M^*) (см. замечание перед леммой 14.4). Кольца R и S эквивалентны по лемме 14.4 и теореме 14.5.

3) $\Rightarrow$ 2). R°-модуль N является прообразующим, причём $S^\circ \cong \operatorname{End}_{R^\circ} N$. По доказанному кольца R° и S° эквивалентны. Поэтому кольца R и S также эквивалентны. □

Следствие 14.8. *Пусть R — кольцо и M — R-модуль.*

1. *Если M — прообразующий модуль, то кольца R и $\operatorname{End}_R M$ эквивалентны.*

2. *Для любого натурального числа n кольцо $(n \times n)$-матриц $M(n, R)$ эквивалентно кольцу R.*

Доказательство. 1. Утверждение вытекает из следствия 14.7.

2. Утверждение вытекает из того, что кольцо $M(n, R)$ изоморфно кольцу эндоморфизмов свободного модуля R^n, который является прообразующим. □

Вернёмся к модулям над кольцом формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. Если идеалы следа I и J этого кольца совпадают с R и S соответственно (т. е. K — ситуация эквивалентности), то все три категории R-mod, S-mod и K-mod эквивалентны между собой. Аналогично категории правых модулей mod-R, mod-S и mod-K тоже эквивалентны. Заметим, что

эквивалентности можно определить с помощью функторов тензорного произведения и Hom; их вид указан в доказательстве теоремы 14.5. Эти функторы сохраняют все свойства модулей категорного характера. В частности, они сохраняют плоские модули, проективные модули и наследственные модули, рассматривавшиеся ранее. Таким образом, верен следующий результат.

Следствие 14.9. *Пусть* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ *— ситуация эквивалентности и* (A, B) *— K-модуль. Тогда равносильны следующие условия*:

1) A *— плоский* (*соответственно проективный, наследственный*) R*-модуль*;

2) B *— плоский* (*соответственно проективный, наследственный*) S*-модуль*;

3) (A, B) *— плоский* (*соответственно проективный, наследственный*) K*-модуль*.

Доказательство. Утверждение следует из предложения 12.3, предложения 13.1 и полученных выше K-модульных изоморфизмов

$$(A, T(A)) \cong (A, B) \cong (T(B), B). \qquad \square$$

Следствие 14.10. *Если выполнены условия следствия* 14.9, *то равносильны следующие условия*:

1) *кольцо K наследственно слева* (*справа*);

2) *кольцо R наследственно слева* (*справа*);

3) *кольцо S наследственно слева* (*справа*).

Следствие 14.11. *Пусть* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ *— ситуация эквивалентности.*

1. *Если (A, B) — K-модуль, то отображения $X \to NX$ и $X \to (X, NX)$ являются изоморфизмами решётки всех подмодулей модуля A на решётку всех подмодулей модуля B и решётку всех подмодулей модуля (A, B) соответственно. В первом случае обратный изоморфизм задаётся правилом $Y \to MY$, где Y — произвольный подмодуль в B.*

2. *Соответствие $L \to NL$ есть изоморфизм решётки всех левых идеалов кольца R на решётку всех подмодулей S-модуля N, причём идеалы переходят на подбимодули бимодуля N. Аналогичное утверждение верно для кольца S и бимодуля M.*

3. *Справедливы утверждения для правых модулей, аналогичные утверждениям* 1 *и* 2.

4. *Отображения $X \to NXM$ и $Y \to MYN$ являются взаимно обратными изоморфизмами между решётками идеалов колец R и S.*

5. *Соответствие* $X \to \left(\begin{smallmatrix} X & XM \\ NX & NXM \end{smallmatrix}\right)$ *есть изоморфизм решётки идеалов кольца* R *на решётку идеалов кольца* K.

Доказательство. 1. Утверждение вытекает из следствия 14.2.

2. Утверждение вытекает из п. 1, применённого к K-модулям (R, N) и (M, S).

3. Утверждение вытекает из п. 1, 2 и соображений симметрии.

4. Утверждение вытекает из п. 2.

5. Утверждение вытекает из п. 4, применённого к кольцу

$$\begin{pmatrix} R & (R, M) \\ \binom{R}{N} & K \end{pmatrix}$$

из доказательства теоремы 14.5. □

В § 15 используются следующие два хорошо известных факта.

Следствие 14.12. *Для кольца* R *равносильны следующие условия*:

1) R *— наследственное слева кольцо*;

2) *для любого ненулевого идемпотента* $e \in R$ *кольцо* eRe *наследственно слева*;

3) *для любого натурального числа* n *кольцо* $M(n, R)$ *наследственно слева*;

4) *существует такое натуральное число* n, *что кольцо* $M(n, R)$ *наследственно слева*.

Аналогичное утверждение верно для наследственных справа колец.

Доказательство. Рассмотрим кольцо R как кольцо формальных матриц (как в § 1); теперь импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из предложения 13.5.

Импликации 2) $\Rightarrow$ 1) и 3) $\Rightarrow$ 4) очевидны.

4) $\Rightarrow$ 1). Существует такой ненулевой идемпотент $e \in M(n, R)$, что $R \cong e\,M(n, R)\,e$. Так как импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана и кольцо $M(n, R)$ наследственно слева (справа), кольцо R наследственно слева (справа).

1) $\Rightarrow$ 3). Кольцо $M(n, R)$ наследственно слева в точности тогда, когда модуль вектор-столбцов $(R, \ldots, R)$ длины n является наследственным $M(n, R)$-модулем. Этот модуль можно рассматривать как модуль $(R, (R, \ldots, R))$ над кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & (R, \ldots, R) \\ \begin{pmatrix} R \\ \vdots \\ R \end{pmatrix} & M(n-1, R) \end{pmatrix}$$

порядка 2. Затем применяем следствие 14.9 к последнему модулю и получаем, что кольцо $M(n, R)$ наследственно слева. □

Если K — ситуация эквивалентности, то изучение K-модулей почти всегда сводится к изучению R-модулей или S-модулей. Рассмотрим другой крайний случай, когда идеалы следа кольца K равны нулю. Тогда изучение K-модулей часто сводится к изучению R-модулей или S-модулей, но появляются дополнительные трудности. Это подтверждается нашими исследованиями. «Промежуточная» ситуация, при которой I и J — нетривиальные идеалы, весьма сложна.

Следствие 14.9 полностью описывает плоские, проективные и наследственные модули в случае, когда K — ситуация эквивалентности. С другой стороны, теоремы 12.5, 13.3 и 13.6 содержат удовлетворительные характеризации таких модулей над кольцом K с нулевыми идеалами следа. Остаётся открытым вопрос о строении плоских, проективных и наследственных модулей над произвольным кольцом формальных матриц K. В этот список можно добавить регулярные модули. (Модуль M называется *регулярным*, если каждый его циклический подмодуль является прямым слагаемым в M.) Важно также выяснить, когда кольцо K наследственно слева или наследственно справа.

В заключение параграфа сделаем следующее замечание. Пусть M — некоторый R-модуль. Интересно изучить кольцо формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ \mathrm{Hom}_R(M, R) & \mathrm{End}_R M \end{pmatrix}$$

(стандартная ситуация предэквивалентности), а также два подкольца треугольных матриц в K.

§ 15. Наследственные кольца эндоморфизмов абелевых групп

В этом параграфе мы применяем следствие 13.9 к описанию некоторых абелевых групп с наследственными кольцами эндоморфизмов. Слово «группа» означает «абелева группа». Группы рассматриваются как $\mathbb{Z}$-модули.

В § 15 *композиция гомоморфизмов определяется «справа налево»*:

$$(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x)).$$

Для группы G через $\mathrm{End}\, G$ обозначается её кольцо эндоморфизмов. Пусть группа G равна прямой сумме $A \oplus B$. Тогда можно отождествить

кольцо $\operatorname{End} G$ с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End} A & \operatorname{Hom}(B,A) \\ \operatorname{Hom}(A,B) & \operatorname{End} B \end{pmatrix}.$$

Если A — вполне инвариантная подгруппа, то $\operatorname{Hom}(A,B)=0$ и мы получаем кольцо треугольных матриц. Мы будем часто иметь дело с такой ситуацией.

Используются следующие обозначения:

p — некоторое простое число;

$\mathbb{Z}(p)$ — циклическая группа порядка p;

$\mathbb{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая p-группа;

$\mathbb{Q}$ — аддитивная группа или поле рациональных чисел;

$\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — группа или кольцо целых p-адических чисел.

Верны кольцевые изоморфизмы $\operatorname{End}\mathbb{Z}(p^\infty)\cong\widehat{\mathbb{Z}}_p$, $\operatorname{End}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}$.

Мы часто будем иметь дело с делимыми группами. Делимая группа D может быть представлена в виде $D=\bigoplus_p D_p\oplus D_0$, где D_p — делимая p-группа, а D_0 — делимая группа без кручения, причём D_p — либо нулевая группа, либо прямая сумма некоторого множества копий группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а D_0 — либо нулевая группа, либо прямая сумма некоторого множества копий группы $\mathbb{Q}$.

Замечание. В монографии [33] можно найти все используемые понятия, факты и обозначения из теории абелевых групп.

Группа называется *элементарной*, если порядок каждого её ненулевого элемента не делится на квадрат целого числа. Элементарная группа является прямой суммой элементарных p-групп. Элементарная ненулевая p-группа является прямой суммой групп $\mathbb{Z}(p)$.

Для группы G наибольшая p-подгруппа в G называется *p-компонентой* группы G.

Мы будем часто использовать следствие 14.12. Так, если $G=A\oplus B$ и кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева (справа), то кольца $\operatorname{End} A$ и $\operatorname{End} B$ наследственны слева (справа). Действительно, если e — проекция группы G на A с ядром B, то кольцо $\operatorname{End} A$ можно отождествить с кольцом $e\cdot\operatorname{End} G\cdot e$. Кроме того, сформулируем следующий результат.

Предложение 15.1 [64, предложение 35.11]. 1. *Если G — группа и кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева или справа, то G не является бесконечной прямой суммой ненулевых групп.*

2. *Пусть A — редуцированная группа с наследственным слева или справа кольцом $\operatorname{End} A$. Тогда каждая p-компонента A_p группы A яв-*

ляется элементарной p-группой конечного ранга и $A = A_p \oplus B_p$ для некоторой группы B_p.

3. *Редуцированная периодическая группа G имеет наследственное слева или справа кольцо эндоморфизмов в точности тогда, когда G — элементарная группа конечного ранга* (*т. е. G — конечная прямая сумма групп $\mathbb{Z}(p)$ для некоторых p*).

Для удобства повторим следствие 13.9 и запишем его правосторонний аналог.

Предложение 15.2. *Пусть* $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$.

1. *Кольцо K наследственно слева в точности тогда, когда кольца R и S наследственны слева, M — плоский S-модуль и M/ML — проективный R-модуль для любого левого идеала L кольца S.*

2. *Кольцо K наследственно справа в точности тогда, когда кольца R и S наследственны справа, M — плоский R-модуль и M/LM — проективный S-модуль для любого правого идеала L кольца S.*

Замечание. Пусть D — некоторая делимая группа. Из предложения 15.1 следует, что при изучении групп с наследственными кольцами эндоморфизмов можно считать, что D — группа конечного ранга. Представим группу D в виде $D = D_t \oplus D_0$, где D_t — периодическая группа, а D_0 — группа без кручения. При $D_t \neq 0$ и $D_0 \neq 0$ кольцо $\operatorname{End} D$ есть кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End} D_t & \operatorname{Hom}(D_0, D_t) \\ 0 & \operatorname{End} D_0 \end{pmatrix}.$$

Например, если $D = \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}$, то

$$\operatorname{End} D = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{Z}}_p & A_p \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix},$$

где $A_p = \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}(p^\infty))$ — аддитивная группа поля p-адических чисел. Это кольцо не является наследственным слева, поскольку A_p не является проективным $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулем (см. предложение 15.2(1)). В то же время это кольцо наследственно справа, так как выполнены все условия предложения 15.2(2). То же самое верно для кольца эндоморфизмов группы $\mathbb{Z}(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p_k^\infty) \oplus \mathbb{Q}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — разные простые числа.

Приведённая ниже теорема 15.3 даёт ответы на следующие вопросы.

1. Когда кольцо эндоморфизмов делимой группы наследственно слева?

2. Когда кольцо эндоморфизмов делимой группы наследственно справа?

Теорема 15.3. *Пусть D — ненулевая делимая группа конечного ранга.*

1. *Кольцо* $\operatorname{End} D$ *наследственно слева в точности тогда, когда либо D — группа без кручения, либо D — периодическая группа.*

2. *Кольцо* $\operatorname{End} D$ *наследственно справа.*

Доказательство. 1. Пусть кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно слева. По приведённому выше замечанию группа D не содержит прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}$. Поэтому либо D — группа без кручения, либо D — периодическая группа.

Обратно, если D — периодическая группа, то $\operatorname{End} D$ — конечное прямое произведение колец матриц над кольцами целых p-адических чисел. Если D — группа без кручения, то $\operatorname{End} D$ — кольцо матриц над $\mathbb{Q}$. В обоих случаях кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно слева и справа по следствию 14.12.

2. Если D — либо периодическая группа, либо группа без кручения, то кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно справа (см. доказательство п. 1). Пусть D — смешанная группа, т. е. D содержит как квазициклические группы, так и группу $\mathbb{Q}$. Положим $C = \mathbb{Z}(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p_k^\infty) \oplus \mathbb{Q}$, где p_i — все простые числа, для которых группа D имеет прямое слагаемое вида $\mathbb{Z}(p_i^\infty)$. Существуют натуральное число n и группа E, для которых $C^n \cong D \oplus E$. По следствию 14.12 и замечанию перед теоремой кольцо $\operatorname{End} C^n$ наследственно справа. Поэтому кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно справа. □

Теперь начнём решать следующую задачу. Мы хотим свести исследование (левой или правой) наследственности кольца $\operatorname{End} G$ к случаю, когда G — редуцированная группа.

Пусть G — нередуцированная и неделимая группа. Тогда $G = D \oplus A$, где D — ненулевая делимая группа и A — ненулевая редуцированная группа. Эти обозначения фиксируем до конца параграфа. Кольцо $\operatorname{End} G$ совпадает с кольцом

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End} D & \operatorname{Hom}(A, D) \\ 0 & \operatorname{End} A \end{pmatrix}.$$

Теорема 15.4. *Кольцо* $\operatorname{End} G$ *наследственно слева в точности тогда, когда D — группа без кручения конечного ранга, кольцо* $\operatorname{End} A$ *наследственно слева и* $\operatorname{Hom}(A, D)$ *— плоский* $\operatorname{End} A$*-модуль.*

Доказательство. Пусть кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева. Из теоремы 15.3 вытекает, что группа D не может быть смешанной. Кроме того, D не является периодической группой. Рассуждая от противного, пусть D — конечная прямая сумма квазициклических p-групп для некоторых простых p. Из предложения 15.2 следует, что $\operatorname{Hom}(A, D)$ — проективный $\operatorname{End} D$-модуль. (Заметим, что $\operatorname{End} D$ — конечное прямое произведение колец матриц над кольцами $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.) Групповое строение группы $\operatorname{Hom}(A, D)$ известно (см. [33, теорема 47.1]). Отсюда вытекает, что $\operatorname{Hom}(A, D)$ не может быть проективным $\operatorname{End} D$-модулем.

Допустим теперь, что D — группа без кручения конечного ранга, кольцо $\operatorname{End} A$ наследственно слева и $\operatorname{Hom}(A, D)$ — плоский $\operatorname{End} A$-модуль. Так как $\operatorname{End} D$ — кольцо матриц над $\mathbb{Q}$, по предложению 15.2 кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева. □

Пусть сохраняются обозначения, введённые перед теоремой 15.4. Перейдём к наследственным справа кольцам.

Теорема 15.5. *Кольцо* $\operatorname{End} G$ *наследственно справа в точности тогда, когда* $G = D \oplus T$, *где* D *— делимая группа конечного ранга, а* T *— элементарная группа конечного ранга, причём группы* D *и* T *не содержат ненулевых* p*-компонент для одинаковых* p.

Доказательство. Пусть кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно справа. Из предложения 15.1 вытекает, что ранг группы D конечен. Допустим, что группа A содержит элементы бесконечного порядка. Из предложения 15.2 следует, что $\operatorname{Hom}(A, D)$ — проективный $\operatorname{End} A$-модуль. Теперь заметим, что аддитивная группа кольца $\operatorname{End} A$ является редуцированной, поскольку A — редуцированная группа. Поэтому $\operatorname{Hom}(A, D)$ — редуцированная группа. С другой стороны, если D имеет прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Q}$, то $\operatorname{Hom}(A, D)$ тоже имеет прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Q}$, а если D содержит группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$, то $\operatorname{Hom}(A, D)$ — нередуцированная группа. Итак, получаем, что A — периодическая группа. Теперь из предложения 15.1 следует, что строение группы A удовлетворяет нашей теореме. Группа $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Z}(p)$ не может быть прямым слагаемым группы G. Дело в том, что кольцо эндоморфизмов этой группы есть кольцо матриц $\begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{Z}}_p & \mathbb{Z}(p) \\ 0 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{pmatrix}$. Это кольцо не является наследственным справа, поскольку $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ не является плоским $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулем. Из изложенного выше следует, что группы D и T имеют ненулевые p-компоненты только для разных p.

В условиях теоремы получаем, что подгруппы D и T вполне инвариантны в G. Поэтому $\operatorname{End} G = \operatorname{End} D \times \operatorname{End} T$. Кольцо $\operatorname{End} D$ наслед-

ственно справа по теореме 15.3, а кольцо $\operatorname{End} T$ наследственно справа по предложению 15.1. □

Замечания. Так как $\operatorname{End}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{smallmatrix}\right)$, из теорем 15.4 и 15.5 вытекает, что это кольцо наследственно слева, но не наследственно справа.

Наследственные справа кольца эндоморфизмов групп без кручения изучаются в книге [64]. В связи с теоремой 15.4 естественно поставить вопрос об описании таких групп A, что $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q})$ — плоский правый $\operatorname{End} A$-модуль. Интересно также выяснить, когда $\operatorname{End} A$-модули $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}(p))$ и $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^\infty))$ просты, артиновы или нётеровы. Более подробное введение в данную область содержится в книге [64] (см., например, проблемы 11–13).

Глава 3

Кольца формальных матриц над данным кольцом

Если в конкретном кольце формальных матриц порядка n на всех позициях стоит одно и то же кольцо R, то говорят о *кольце формальных матриц над кольцом* R. Свойства такого кольца могут сильно отличаться от свойств обычного кольца всех $(n \times n)$-матриц над R.

В § 16 и 17 приведены различные свойства колец формальных матриц над кольцом R. Такие кольца находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторыми множествами центральных элементов кольца R, называемыми *системами множителей*.

Формулируются три задачи о кольцах формальных матриц над R. Параграфы 18–20 связаны с решением этих задач.

В § 21 вводится понятие определителя формальной матрицы над коммутативным кольцом. Показывается, что этот матричный инвариант удовлетворяет аналогам основных свойств обычного определителя. Кроме того, в § 22 устанавливается, что некоторые известные теоремы для обычных определителей также верны для определителей формальных матриц.

§ 16. Кольца формальных матриц над кольцом R

Пусть R — некоторое кольцо. Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ имеется кольцо матриц $M(n, R)$ порядка n. Можно определять другие матричные умножения, чтобы получались кольца формальных матриц. Соответствующие бимодульные гомоморфизмы $R \otimes_R R \to R$ для кольца $M(n, R)$ совпадают и действуют по правилу $x \otimes y \to xy$. Рассматривая другие бимодульные гомоморфизмы $R \otimes_R R \to R$, можно получать кольца матриц над R порядка n (как кольца формальных матриц), отличные от $M(n, R)$.

Возьмём некоторое кольцо K формальных матриц порядка n, определённое в § 3, удовлетворяющее условиям $R_1 = \ldots = R_n = R$ и $M_{ij} = R$ для всех i и j. Такое кольцо будем называть *кольцом формальных матриц порядка n над кольцом R*. Пусть $\varphi_{ijk}\colon R \otimes_R R \to R$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, — бимодульные гомоморфизмы, ассоциированные с кольцом K. Как и в § 3, для элементов $x, y \in R$ положим $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y)$. Обозначим также $s_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$ для каждой тройки индексов i, j, k. Теперь для любых элементов $x, y \in R$ и индексов i, j, k получаем

$$x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = x\varphi_{ijk}(1 \otimes 1)y = xs_{ijk}y.$$

Далее получаем, что

$$xs_{ijk} = \varphi_{ijk}(x \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes x) = s_{ijk}x.$$

Таким образом, s_{ijk} — центральный элемент кольца R и $x \circ y = s_{ijk}xy$.

Для всех i, j, k, ℓ справедливы равенства

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell}. \tag{$*$}$$

Первые два равенства вытекают из того, что φ_{iik} и φ_{ikk} совпадают с каноническим изоморфизмом $R \otimes_R R \to R$, $x \otimes y \to xy$. Остальные равенства вытекают из того, что $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ для любых $x, y, z \in R$; см. начало § 3. В частности, верно равенство $(1 \circ 1) \circ 1 = 1 \circ (1 \circ 1)$.

Пусть теперь дано произвольное множество центральных элементов s_{ijk} кольца R, $i, j, k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих равенствам $(*)$. Для любых трёх индексов i, j, k можно определить бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk}\colon R \otimes_R R \to R, \quad \varphi_{ijk}(x \otimes y) = s_{ijk}xy, \quad x, y \in R.$$

Эти гомоморфизмы определяют кольцо формальных матриц порядка n в смысле § 3. Действительно, φ_{iik} и φ_{ikk} являются каноническими изоморфизмами. Далее, положим $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y)$ и получим, что $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ для всех $x, y, z \in R$ и соответствующих индексов i, j, k, ℓ.

Стало быть, имеется взаимно однозначное соответствие между кольцами формальных матриц порядка n над кольцом R и множествами центральных элементов $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ кольца R, удовлетворяющих равенствам $(*)$. Конкретное такое кольцо будем обозначать $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, или $M(n, R, \Sigma)$, где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$, или просто K. Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца K. Если все s_{ijk} равны 1, то получаем кольцо $M(n, R)$.

Формула для умножения матриц в кольце $M(n, R, \Sigma)$ имеет следующий вид. Если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $AB = C = (c_{ij})$, то $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj}$.

Докажем несколько тождеств для множителей s_{ijk} (предполагается, что дано кольцо $M(n, R, \Sigma)$). Ещё раз запишем тождества $(*)$, которые мы будем называть *основными тождествами*:

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell}. \tag{1}$$

Полагая $i = k$, получаем $s_{iji} = s_{ij\ell} \cdot s_{ji\ell}$. Следовательно, $s_{jij} = s_{ji\ell} \cdot s_{ij\ell}$. Поэтому верно равенство $s_{iji} = s_{jij}$. Далее, при $j = \ell$ имеем $s_{jkj} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}$, а значит, $s_{iji} = s_{\ell ij} \cdot s_{\ell ji}$. Таким образом, можно записать

$$s_{iji} = s_{ij\ell} \cdot s_{ji\ell} = s_{\ell ij} \cdot s_{\ell ji}. \tag{2}$$

Из тождеств (2) получаем следующие тождества, получающиеся друг из друга перестановкой индексов:

$$\begin{aligned} s_{iji} &= s_{jij} = s_{ijk} \cdot s_{jik} = s_{kij} \cdot s_{kji}, \\ s_{iki} &= s_{kik} = s_{ikj} \cdot s_{kij} = s_{jik} \cdot s_{jki}, \\ s_{jkj} &= s_{kjk} = s_{jki} \cdot s_{kji} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из тождеств (3) вытекают две серии равенств:

$$\begin{aligned} s_{ijk} \cdot s_{iki} &= s_{jki} \cdot s_{iji} = s_{kij} \cdot s_{jkj}, \\ s_{kji} \cdot s_{iki} &= s_{ikj} \cdot s_{iji} = s_{jik} \cdot s_{jkj}. \end{aligned} \tag{4}$$

Равенства (4) могут быть напрямую выведены из соотношений (1), если подставить в них $\ell = i$ и переставить индексы.

С данным кольцом $M(n, R, \Sigma)$ можно связать несколько матриц. Именно, положим

$$S = (s_{iji}) = \begin{pmatrix} s_{111} & s_{121} & \dots & s_{1n1} \\ s_{212} & s_{222} & \dots & s_{2n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1n} & s_{n2n} & \dots & s_{nnn} \end{pmatrix}.$$

Затем для каждого $k = 1, \dots, n$ образуем матрицу

$$S_k = (s_{ikj}) = \begin{pmatrix} s_{1k1} & s_{1k2} & \dots & s_{1kn} \\ s_{2k1} & s_{2k2} & \dots & s_{2kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{nk1} & s_{nk2} & \dots & s_{nkn} \end{pmatrix}.$$

Будем называть матрицы S и S_k *матрицами множителей* для кольца $M(n, R, \Sigma)$. Матрица S является симметрической. Главная диагональ матрицы S_k совпадает с k-й строкой (и k-м столбцом) матрицы S, а k-я строка и k-й столбец матрицы S_k состоят из единиц.

Сформулируем несколько взаимосвязанных задач о кольцах формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$.

I. Задача реализации и характеризации. Пусть даны матрицы $T, T_1, \dots, T_n$ порядка n с элементами из центра $C(R)$. При каких условиях эти матрицы являются матрицами множителей какого-то кольца $M(n, R, \Sigma)$? Ясно, что матрица T должна быть симметрической. Дополнительно можно считать, что все матрицы T_k также симметрические.

II. Задача классификации. Описать кольца формальных матриц в зависимости от систем множителей или матриц множителей.

III. Проблема изоморфизма. Когда две системы множителей определяют изоморфные кольца формальных матриц? В более общей ситуации проблема изоморфизма сформулирована в § 1.

Приведённым выше задачам I–III посвящены § 18–20. Сейчас мы рассмотрим некоторые простые способы построения систем множителей, а также стандартные ситуации, когда можно утверждать, что кольца формальных матриц изоморфны.

A. Можно задать действие симметрической группы степени n на системах множителей и, следовательно, на кольцах формальных матриц. Соответствующие орбиты состоят из изоморфных колец.

Пусть τ — подстановка степени n. Действие τ на матрицах известно. Именно, для матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n полагаем $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$. Имеется в виду, что в матрице τA в позиции (i, j) стоит элемент $a_{\tau(i)\tau(j)}$, а элемент a_{ij} переходит в позицию $(\tau^{-1}(i), \tau^{-1}(j))$.

Теперь если $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет равенствам (1). Обозначим её через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \to \tau A$.

Ещё отметим, что действие подстановок на матрицах можно представить в другом виде; см. книгу [54]. Пусть $T = (\delta_{i\tau(j)})$ — матрица подстановки τ, где $\delta_{i\tau(j)}$ — символ Кронекера. Тогда $\tau A = T^{-1}AT$, где $T^{-1} = (\delta_{i\tau^{-1}(j)})$. Суть изоморфизма $M(n, R, \Sigma) \cong M(n, R, \tau\Sigma)$ можно выразить равенством

$$T^{-1}(A \circ B)T = (T^{-1}AT) \circ (T^{-1}BT),$$

где произведение $\circ$ в левой части вычисляется в $M(n, R, \Sigma)$, а произведение $\circ$ в правой части вычисляется в $M(n, R, \tau\Sigma)$.

Пусть τ — такая подстановка, что $s_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$ для всех $i, j, k = 1, \dots, n$. Тогда соответствие $A \to \tau A$ является автоморфизмом кольца $M(n, R, \Sigma)$. Пусть кольцо R коммутативно. В качестве Σ возьмём такую систему множителей, что $s_{iik} = 1 = s_{ikk}$ и $s_{ijk} = 0$, если $i \neq j$ и $j \neq k$. В таком случае каждая подстановка τ степени n определяет автоморфизм R-алгебры $M(n, R, \Sigma)$, не являющийся внутренним. Более точно, группа автоморфизмов этой R-алгебры изоморфна полупрямому произведению группы внутренних автоморфизмов на симметрическую группу S_n.

B. Пусть по-прежнему Σ — система множителей s_{ijk}, а α — эндоморфизм кольца R. Обозначим $t_{ijk} = \alpha(s_{ijk})$. Тогда $\{t_{ijk}\}$ — система множителей. Обозначим её через $\alpha\Sigma$. Существует кольцевой гомоморфизм

$$M(n, R, \Sigma) \to M(n, R, \alpha\Sigma), \quad (a_{ij}) \to (\alpha a_{ij}).$$

Он является изоморфизмом, если α — автоморфизм кольца R.

C. Если $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ и $X = \{x_{ijk}\}$ — две системы множителей, то $\{x_{ijk}s_{ijk}\}$ тоже является системой множителей. Обозначим её через $X\Sigma$. Для каждого $\ell = 1, \dots, n$ существует гомоморфизм

$$\zeta : M(n, R, X\Sigma) \to M(n, R, \Sigma), \quad (a_{ij}) \to (x_{ij\ell}a_{ij}).$$

Если все множители x_{ijk} — обратимые элементы, то ζ — изоморфизм.

Доказательство. Возьмём матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ в кольце $M(n, R, X\Sigma)$. Запишем $AB = (c_{ij})$, где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ikj}s_{ikj}a_{ik}b_{kj}.$$

В позиции (i, j) матрицы $\zeta(AB)$ находится элемент

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ij\ell}x_{ikj}s_{ikj}a_{ik}b_{kj}.$$

Далее, имеем $\zeta(A) = (x_{ij\ell}a_{ij})$, $\zeta(B) = (x_{ij\ell}b_{ij})$, и в позиции (i, j) матрицы $\zeta(A)\zeta(B)$ стоит элемент

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ikj}x_{ik\ell}x_{kj\ell}a_{ik}b_{kj}.$$

Однако из тождеств (1) следует, что

$$x_{ikj} \cdot x_{ij\ell} = x_{ik\ell} \cdot x_{kj\ell}.$$

Поэтому ζ сохраняет произведение. Если все x_{ijk} обратимы, то гомоморфизм ζ имеет обратный $\zeta^{-1}\colon (c_{ij}) \to (x_{ij\ell}^{-1} c_{ij})$. □

Пусть E_{ij} обозначает матричную единицу, т. е. матрицу, у которой в позиции (i, j) стоит 1, а в остальных позициях стоят нули. Заметим, что $E_{ij} \cdot E_{jk} = s_{ijk} E_{ik}$.

D. Для любой системы множителей $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ множество

$$\Sigma^t = \{t_{ijk} \mid t_{ijk} = s_{kji},\ i, j, k = 1, \ldots, n\}$$

также является системой множителей. Поэтому вместе с кольцом $M(n, R, \Sigma)$ также существует кольцо $M(n, R, \Sigma^t)$, обозначаемое через K^t. При этом если $S, S_1, \ldots, S_n$ — матрицы множителей кольца K, то $S, S_1^t, \ldots, S_n^t$ — матрицы множителей кольца K^t. Кольцо $M(n, R, \Sigma^t)$ изоморфно кольцу, противоположному к кольцу $M(n, R, \Sigma)$ (противоположное кольцо определяется в § 1).

Если R — коммутативное кольцо, то транспонирование $A \to A^t$ является антиизоморфизмом колец K и K^t. Таким образом, верно равенство $(AB)^t = B^t A^t$, где произведение в правой части вычисляется в K^t. Отсюда вытекает одна импликация следующего утверждения.

Предложение 16.1. *Пусть R — коммутативное кольцо. Равенство $(AB)^t = B^t A^t$ выполняется для любых матриц A и B в точности тогда, когда $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех индексов i, k, j (матрицы $S_1, \ldots, S_n$ являются симметрическими).*

Доказательство. Оставшаяся импликация вытекает из равенств

$$(E_{ik} \cdot E_{kj})^t = (s_{ikj} E_{ij})^t = s_{ikj} E_{ji},$$
$$E_{kj}^t \cdot E_{ik}^t = E_{jk} E_{ki} = s_{jki} E_{ji}.$$ □

В соответствии с п. C имеется также кольцо $M(n, R, \Sigma\Sigma^t)$. Все его матрицы множителей симметрические.

E. Кронекерово произведение матриц. Пусть n и m — произвольные натуральные числа, R — коммутативное кольцо, $K = M(n, R, \Sigma)$ и $L = M(m, R, \Theta)$ — кольца формальных матриц над R с системами множителей $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ и $\Theta = \{t_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, m\}$. Для матриц $A = (a_{ij}) \in K$ и $B = (b_{ij}) \in L$ *кронекерово произведение* $A \otimes B$ матриц A и B определяется как блочная матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Нетрудно указать явный вид элементов матрицы $A \otimes B$. Пусть k — такое натуральное число, что $1 \leqslant k \leqslant nm$. Существует единственная пара натуральных чисел k_1, k_2, удовлетворяющая условиям $1 \leqslant k_1 \leqslant n$, $1 \leqslant k_2 \leqslant m$ и $n(k_1 - 1) + k_2 = k$. В позиции (i, j) матрицы $A \otimes B$ стоит элемент $a_{i_1 j_1} \cdot b_{i_2 j_2}$.

Для каждой такой тройки чисел i, j, k, что $1 \leqslant i, j, k \leqslant nm$, положим

$$p_{ijk} = s_{i_1 j_1 k_1} \cdot t_{i_2 j_2 k_2}, \quad \Pi = \{p_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, nm\}.$$

Тогда Π — система множителей, т. е. для p_{ijk} выполняются тождества (1). Следовательно, имеется кольцо формальных матриц $M = M(nm, R, \Pi)$. Кроме того, если $S, S_1, \ldots, S_n$ и $T, T_1, \ldots, T_m$ — матрицы множителей колец K и L соответственно, то $S \otimes T$, $S_i \otimes T_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots m$, — матрицы множителей кольца M. Поэтому условно можно писать $\Pi = \Sigma \otimes \Theta$.

Сопоставление $\sum_{i=1}^{k} A_i \otimes_R B_i \to \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes B_i$, $A_i \in K$, $B_i \in L$, задаёт изоморфизм R-алгебр $K \otimes_R L$ и $M(nm, R, \Pi)$. Также имеется изоморфизм $(K \otimes_R L)^o \cong K^o \otimes_R L^o$, доказываемый с помощью п. D.

Свойства кронекерова произведения формальных матриц аналогичны свойствам кронекерова произведения обычных матриц.

Приведём следующие три свойства:

1) если $A, C \in K$ и $B, D \in L$, то $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$;

2) если A и B — обратимые матрицы, то $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;

3) $d(A \otimes B) = d(A)^n \cdot d(B)^m$, где $d(X)$ — определитель формальной матрицы X; этот определитель вводится в § 21.

Рассмотрим один гомоморфизм, который будет весьма полезен позже. Он является частным случаем гомоморфизма ζ из п. C.

Пусть дано кольцо формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$, $\Sigma = \{s_{ijk}\}$. Зафиксируем индекс $\ell = 1, \ldots, n$ и положим $t_{ij} = s_{ij\ell}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Отметим, что $t_{ii} = 1$ и из основных тождеств (1) вытекает равенство $s_{ijk} \cdot t_{ik} = t_{ij} \cdot t_{jk}$. В частности, $s_{iji} = t_{ij} \cdot t_{ji}$.

Определим отображение

$$\eta \colon M(n, R, \Sigma) \to M(n, R), \quad (a_{ij}) \to (t_{ij} a_{ij}).$$

Предложение 16.2. *Справедливы следующие утверждения*:

1) η — *кольцевой гомоморфизм*;

2) *если для всех* i, j, k *множитель* s_{ikj} *делится на* t_{ik} *или* t_{kj}, *то* $\mathrm{Ker}(\eta)$ — *нильпотентный идеал индекса нильпотентности* 2;

3) *отображение* η *инъективно в точности тогда, когда все* s_{ijk} — *неделители нуля*;

4) η — *изоморфизм в точности тогда, когда все элементы* s_{ijk} *обратимы.*

Доказательство. 1. Утверждение вытекает из п. C, если взять систему, состоящую из единиц, в качестве Σ и взять Σ в качестве X.

2. Возьмём произвольные матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ в кольце $M(n, R, \Sigma)$. Если $\eta A = 0 = \eta B$, то $t_{ij}a_{ij} = 0 = t_{ij}b_{ij}$ для всех i и j. Из доказательства п. C вытекает, что $AB = 0$. □

В конце параграфа обратим внимание на кольца формальных матриц над кольцом R порядка 2 и 3. В случае $n = 2$ легко достичь полной ясности. Действительно, возьмём произвольное кольцо $M(2, R, \Sigma)$ и выясним, как происходит умножение в нём.

Из предыдущего материала нетрудно вывести следующее. Найдётся такой элемент $s \in C(R)$, что матрицы в $M(2, R, \Sigma)$ умножаются по правилу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + sa_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & sa_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Верно и обратное. Любой центральный элемент s кольца R определяет кольцо $M(2, R, s)$ формальных (2×2)-матриц над R, умножение в котором выполняется по правилу $(*)$. Такие кольца были введены в статье [63] и обозначались там через K_s. Они также изучались и использовались в работах [39, 40, 56, 62, 69, 96, 98].

Ситуация с классификацией колец $M(3, R, \Sigma)$ более сложная. Основные тождества (1) превращаются в тождества

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$
$$s_{121} = s_{212} = s_{123} \cdot s_{213} = s_{321} \cdot s_{312},$$
$$s_{131} = s_{313} = s_{132} \cdot s_{312} = s_{231} \cdot s_{213},$$
$$s_{232} = s_{323} = s_{231} \cdot s_{321} = s_{132} \cdot s_{123}.$$

Каждое семейство элементов $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, 2, 3\}$, удовлетворяющих предыдущим равенствам, задаёт кольцо формальных матриц над R порядка 3. Если $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех $i, j, k = 1, 2, 3$, т. е. матрицы S_1, S_2 и S_3 симметрические, то эти равенства можно записать более компактно:

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$
$$s_{121} = s_{212} = s_{123} \cdot s_{213},$$
$$s_{131} = s_{313} = s_{132} \cdot s_{312},$$
$$s_{232} = s_{323} = s_{231} \cdot s_{321}.$$

В связи с задачей I можно определённо сказать, что не всякая симметрическая матрица порядка 3 служит матрицей S для какого-то кольца $M(3, R, \Sigma)$.

Уточним строение K-модулей для кольца K формальных матриц порядка 2, т. е.

$$K = M(2, R, s) = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}.$$

Особое внимание уделим модулям $(A, T(A))$, $(T(B), B)$ и $(T(B), T(A))$. Это интересно само по себе и будет использоваться в конце § 27.

Для любых элементов $x, y \in R$ полагаем $x \circ y = sxy$. Таким образом, $x \circ y$ — это тот элемент, который в случае произвольного кольца K обозначается через mn или nm.

Пусть теперь дан произвольный K-модуль (A, B) с гомоморфизмами модульного умножения

$$g\colon R \otimes_R A \to B, \quad f\colon R \otimes_R B \to A.$$

Отождествим $R \otimes_R A$ и $R \otimes_R B$ с A и B соответственно, полагая $r \otimes a = ra$ и $r \otimes b = rb$. После этого можно считать, что у нас есть гомоморфизмы $g\colon A \to B$ и $f\colon B \to A$. Введём некоторые обозначения. Полагаем $y \circ a = g(ya)$ и $y \circ b = f(yb)$, где $y \in R$, $a \in A$ и $b \in B$.

Равенства $m(na) = (mn)a$ и $n(mb) = (nm)b$ для кольца $M(2, R, s)$ принимают вид $x \circ (y \circ a) = (x \circ y)a$ и $y \circ (x \circ b) = (y \circ x)b$, где $x, y \in R$, $a \in A$, $b \in B$. Теперь имеем равенства

$$x \circ (y \circ a) = x \circ g(ya) = x \circ (yg(a)) = xf(yg(a)) = xyfg(a),$$
$$(x \circ y)a = sxya.$$

Поэтому $xyfg(a) = sxya$ для всех $x, y \in R$. Следовательно, $fg(a) = sa$, $a \in A$, и $fg = s \cdot 1_A$. Аналогично $gf = s \cdot 1_B$.

Эту конструкцию можно обратить. Именно, любая пара R-гомоморфизмов $g\colon A \to B$ и $f\colon B \to A$, удовлетворяющих равенствам $fg = s \cdot 1_A$ и $gf = s \cdot 1_B$, задаёт K-модуль (A, B) с модульным умножением

$$\begin{pmatrix} x & v \\ w & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + vf(b) \\ wg(a) + yb \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь дан некоторый K-модуль (A, B) и $g\colon A \to B$, $f\colon B \to A$ — его гомоморфизмы модульного умножения. Как мы установили, они удовлетворяют равенствам $fg = s \cdot 1_A$ и $gf = s \cdot 1_B$. Выясним, как устроен K-модуль $(T(B), T(A))$. Для него гомоморфизмы модульного умножения есть $f' = 1 \otimes f$ и $g' = 1 \otimes g$. (Напоминаем об отождествлении $T(B)$

с B, $T(A)$ с A и т. п.) Отображение $f'\colon R\otimes_R(R\otimes_R B)\to R\otimes_R A$ действует по правилу $x\otimes(y\otimes b)=x\otimes y\circ b$. Однако по нашим договорённостям

$$x\otimes(y\otimes b)=xyb \quad \text{и} \quad x\otimes y\circ b=x(y\circ b)=xyf(b).$$

Поэтому можно написать

$$f'(xyb)=xyf(b), \quad f'(b)=f(b), \quad f'=f.$$

Аналогично имеем $g'=g$. Стало быть, K-модуль $(T(B),T(A))$ — это K-модуль (B,A) с гомоморфизмами модульного умножения f и g.

Существуют гомоморфизмы

$$(g,f)\colon(A,B)\to(B,A) \quad \text{и} \quad (f,g)\colon(B,A)\to(A,B),$$

поскольку $g(y\circ b)=y\circ f(b)$ и $f(x\circ a)=x\circ g(a)$ для всех значений букв.

Найдём строение K-модулей $(A,T(A))$ и $(T(A),A)$ для произвольного R-модуля A. Поскольку мы отождествляем $T(A)$ с A, первый модуль обозначим $(A,A)'$, а второй модуль обозначим $(A,A)''$. Для $(A,A)'$ гомоморфизмами модульного умножения являются 1_A и отображение $x\otimes(y\otimes a)\to(x\circ y)a$. Однако $x\otimes(y\otimes a)=xya$ и $(x\circ y)a=sxya$. Поэтому второй гомоморфизм модульного умножения равен $s\cdot 1_A$. Для K-модуля $(A,A)''$ гомоморфизмами модульного умножения, наоборот, являются $s\cdot 1_A$ и 1_A.

Итак, любой R-модуль A задаёт два K-модуля: $(A,A)'$ и $(A,A)''$. При этом для модуля $(A,A)'$ модуль $(T(A),T(A))$ (его строение только что установлено) есть $(A,A)''$ и наоборот.

§ 17. Некоторые свойства колец формальных матриц над R

Отметим, что многие результаты были доказаны Тангом и Жу [97] для одного класса колец формальных матриц над R (о таких кольцах речь идёт в § 18).

Пусть $M(n,R,\Sigma)$ — некоторое кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R. Напомним, что $\Sigma=\{s_{ijk}\mid i,j,k=1,\dots,n\}$ — система множителей. Множители s_{ijk} удовлетворяют равенствам (1) и их следствиям (3) и (4) из § 16. Иногда мы обозначаем через R_{ij} кольцо R, стоящее на позиции (i,j).

Применим теоремы 4.3 и 4.4 к вычислению радикала Джекобсона и первичного радикала кольца $M(n,R,\Sigma)$. В обозначениях теоремы 4.3 имеем $J(R_{ij})=\{x\in R_{ij}\mid R_{ji}\circ x\subseteq J(R)\}$, и, далее, $R_{ji}\circ x=s_{jij}Rx=$ $=s_{iji}Rx$. Поэтому $J(R_{ij})=\{x\in R_{ij}\mid s_{iji}x\in J(R)\}$. Заметим, что идеал

$J(R_{ij})$ совпадает с пересечением всех максимальных левых (правых) идеалов кольца R, не содержащих s_{iji}. Обозначим этот идеал $J(R_{ij})$ через $J_{ij}(R)$. Теперь из теоремы 4.3 вытекает следующий результат.

Следствие 17.1. *Радикал Джекобсона кольца $M(n, R, \Sigma)$ равен*

$$\begin{pmatrix} J(R) & J_{12}(R) & \dots & J_{1n}(R) \\ J_{21}(R) & J(R) & \dots & J_{2n}(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{n1}(R) & J_{n2}(R) & \dots & J(R) \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Первичный радикал кольца $M(n, R, \Sigma)$ имеет аналогичное строение. Обозначим $P(R_{ij}) = \{x \in R_{ij} \mid s_{iji}x \in P(R)\}$.

Следствие 17.2. *Первичный радикал кольца $M(n, R, \Sigma)$ совпадает с идеалом матриц вида $(*)$, только буква J должна быть заменена на P.*

Приведём внутреннее описание идеалов кольца $M(n, R, \Sigma)$ и выясним строение его факторколец. Для произвольного кольца формальных матриц эти вопросы кратко рассматривались в § 1 и 4. Следующее предложение доказывается непосредственными вычислениями.

Предложение 17.3. *Если I — идеал кольца $M(n, R, \Sigma)$, то*

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \dots & I_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{n1} & I_{n2} & \dots & I_{nn} \end{pmatrix},$$

где все I_{ij} — идеалы в R, причём выполняются следующие соотношения:

$$I_{ii} \subseteq \bigcap_{\ell=1}^{n} (I_{i\ell} \cap I_{\ell i}), \quad s_{iji}I_{ij} \subseteq I_{ii} \cap I_{jj}$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$, причём $s_{ikj}I_{kj} \subseteq I_{ij}$, $s_{jki}I_{jk} \subseteq I_{ji}$ для всех различных i, j, k.

Следующее предложение также доказывается стандартными рассуждениями.

Предложение 17.4. *Пусть $I = (I_{ij})$ — идеал кольца $K = M(n, R, \Sigma)$.*

1. *Множество матриц*

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} R/I_{11} & R/I_{12} & \dots & R/I_{1n} \\ R/I_{21} & R/I_{22} & \dots & R/I_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R/I_{n1} & R/I_{n2} & \dots & R/I_{nn} \end{pmatrix}$$

является кольцом формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами

$$\varphi_{ijk}\colon R/I_{ij}\otimes_{R/I_{jj}} R/I_{jk}\to R/I_{ik},\quad \varphi_{ijk}(\overline{x}\otimes\overline{y})=s_{ijk}xy+I_{ik},$$

для всех $i,j,k=1,\dots,n$.

2. *Имеет место изоморфизм*

$$K/I\cong\overline{K},\quad (x_{ij})+I\to(x_{ij}+I_{ij}).$$

Применительно к нашим матричным кольцам рассмотрим несколько распространённых кольцевых свойств. Напомним, что E_{ij} — это матричная единица.

Предложение 17.5. *Пусть* K *— кольцо формальных матриц порядка* n *над кольцом* R *с множителями* s_{ijk}, $i,j,k=1,\dots,n$. *Справедливы следующие утверждения*:

1) K *является простым кольцом в точности тогда, когда* R *— простое кольцо и все множители* s_{ijk} *не равны нулю*;

2) K *является первичным кольцом в точности тогда, когда* R *— первичное кольцо и все* s_{ijk} *не равны нулю*;

3) K *является регулярным кольцом в точности тогда, когда* R *— регулярное кольцо и все элементы* s_{ijk} *обратимы в* R;

4) K *является полупримитивным кольцом в точности тогда, когда* R *— полупримитивное кольцо и все* s_{ijk} *не являются делителями нуля в* R;

5) K *является полупервичным кольцом в точности тогда, когда* R *— полупервичное кольцо и все* s_{ijk} *не являются делителями нуля в* R.

Доказательство. 1. $\Rightarrow$. Если I — ненулевой идеал в R, то

$$\begin{pmatrix} I & \dots & I \\ \dots & \dots & \dots \\ I & \dots & I \end{pmatrix}$$

— идеал в K. Поэтому из простоты кольца K следует, что $I=R$. Таким образом, R — простое кольцо. Гомоморфизм η из предложения 16.2 должен быть инъективным. Поэтому все s_{ijk} не равны нулю.

$\Leftarrow$. Кольцо $M(n,R)$ является простым, а все центральные элементы s_{ijk} обратимы, поскольку центр простого кольца является полем. По предложению 16.2 имеем $K\cong M(n,R)$, и, следовательно, K — простое кольцо.

2. $\Rightarrow$. Так как $R\cong E_{11}KE_{11}$, получаем, что R — первичное кольцо. Допустим, что $s_{ijk}=0$ для некоторых i,j,k. Тогда $E_{ij}KE_{k\ell}=0$. Это противоречит тому, что K — первичное кольцо.

$\Leftarrow$. Центр первичного кольца является областью. Поэтому все s_{ijk} — неделители нуля. Допустим, что $(a_{ij})K(b_{ij}) = 0$ для некоторых ненулевых матриц (a_{ij}) и (b_{ij}). Например, пусть $a_{k\ell} \neq 0$ и $b_{mp} \neq 0$. Тогда $s_{k\ell m}s_{kmp}a_{k\ell}Rb_{mp} = 0$, а значит, $a_{k\ell}Rb_{mp} = 0$, что противоречит первичности кольца R. Таким образом, K — первичное кольцо.

3. $\Rightarrow$. Так как кольцо K регулярно и $R \cong E_{11}KE_{11}$, кольцо R регулярно. Следовательно, существует такая матрица (a_{ij}), что $E_{ij} = E_{ij}(a_{ij})E_{ij}$. Поэтому получаем равенство $s_{iji}a_{ji} = 1$, и все элементы s_{iji} обратимы. Из равенств (3) из § 16 получаем, что все элементы s_{ijk} тоже обратимы.

$\Leftarrow$. Кольцо $M(n, R)$ регулярно, и $K \cong M(n, R)$ по предложению 16.2.

4 и 5. Утверждения вытекают из равенств (3) из § 16 вкупе со следствиями 17.1 и 17.2 соответственно. □

§ 18. Характеризация матриц множителей

В этом и следующих двух параграфах R обозначает произвольное кольцо, $M(n, R, \Sigma)$ — кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R, а Σ — система множителей $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$. Множители s_{ijk} удовлетворяют тождествам (1) из § 16. Элемент, находящийся в позиции (i, j) произведения матриц (a_{ij}) и (b_{ij}) из кольца $M(n, R, \Sigma)$, равен $\sum_{k=1}^{n} s_{ikj}a_{ik}b_{kj}$.

В § 16 сформулирована задача I о том, какие матрицы могут служить матрицами множителей для колец формальных матриц. Задача II относится к описанию колец $M(n, R, \Sigma)$ в зависимости от систем множителей Σ. В общем случае решить эти задачи трудно, например, из-за сложности проверки тождеств (1) из § 16.

Ситуация кажется более простой, если все множители s_{ijk} являются целыми степенями некоторого центрального элемента s кольца R. Мы знаем, что для $n = 2$ других возможностей не существует; см. конец § 16.

При $n \geqslant 3$ ситуация с характеризацией и классификацией колец $M(n, R, \Sigma)$ становится более запутанной, даже если все множители s_{ijk} являются степенями элемента s. Интересен частный случай, когда каждый множитель s_{ijk} равен s^m для некоторого $m \geqslant 1$. Танг и Жу [97] подробно исследовали такие кольца $M(n, R, \Sigma)$, что $s_{iji} = s^2$ при $i \neq j$ и $s_{ijk} = s$ для всех попарно различных i, j, k. Мы будем называть такие кольца *кольцами Танга — Жу*.

Здесь и в § 19 мы рассмотрим случай, когда $s_{ijk} = 1$ либо $s_{ijk} = s$ для всех i, j, k, где s — некоторый центральный элемент кольца R. На эле-

мент s накладываются простые дополнительные ограничения. Любое соответствующее кольцо матриц обозначается через $M(n, R, s)$; ясно, что для фиксированного n имеется только конечное число различных таких колец. Элемент s называется *множителем* любого кольца $M(n, R, s)$.

Далее считаем, что дано кольцо $M(n, R, s)$. Дополнительно предполагаем, что $s^2 \neq 1$ и s не является идемпотентом. Без большой потери общности можно было бы считать, что s — необратимый элемент. Действительно, если элемент s обратим, то $M(n, R, s) \cong M(n, R)$ по предложению 16.2. Следующее условие является более сильным: $s^k \neq s^\ell$ для любых неотрицательных различных k и ℓ.

Итак, считаем, что дано кольцо $M(n, R, s)$, где элемент s^2 не равен 1 или s; в частности, $s \neq 0$ и $s \neq 1$. Укажем некоторые соотношения между множителями вида s_{iji}.

Лемма 18.1. *Пусть индексы i, j и k попарно различны. Тогда для элементов s_{iji}, s_{iki} и s_{jkj} имеет место только одна из следующих трёх возможностей*:

1) *все три элемента равны* 1;

2) *какие-то два из этих трёх элементов равны s, а третий элемент равен* 1;

3) *все три элемента равны s.*

Доказательство. Из равенств (3) из § 16 непосредственно следует, что невозможен случай, когда некоторые два из трёх множителей s_{iji}, s_{iki}, s_{jkj} равны 1, а третий множитель равен s. Поэтому остаются возможности, указанные в п. 1–3. Каждая из этих возможностей действительно возникает, что вытекает из дальнейшего. □

В § 16 мы составили квадратные матрицы $S, S_1, \ldots, S_n$ порядка n из множителей s_{ijk} некоторого кольца формальных матриц. Мы назвали эти матрицы *матрицами множителей* данного кольца. В дальнейшем слова «матрица множителей» обычно означают матрицу S.

Полезно определить понятие абстрактной матрицы множителей. Как и раньше, пусть s — некоторый центральный элемент кольца R, причём $s^2 \neq 1$ и $s^2 \neq s$. Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n, в которой все элементы равны 1 или s, причём главная диагональ состоит из единиц и для любых трёх элементов t_{ij}, t_{ik}, t_{jk} верно одно из утверждений 1–3 леммы 18.1. Назовём такую матрицу T *матрицей множителей*. Если τ — некоторая подстановка степени n, то $\tau T = (t_{\tau(i)\tau(j)})$ также является матрицей множителей (матрицы вида τT были определены в п. А из § 16).

Пусть T — матрица, которую можно представить в таком блочном виде, что на главной диагонали стоят блоки, состоящие из единиц, а на всех остальных позициях находится элемент s. Ясно, что T — матрица множителей. В таком случае будем говорить, что T *имеет канонический вид*.

Лемма 18.2. *Для любой матрицы множителей T существует такая подстановка σ, что матрица σT имеет канонический вид.*

Доказательство. Проведём индукцию по n. При $n=2$ существует единственная матрица множителей $\left(\begin{smallmatrix}1 & s\\ s & 1\end{smallmatrix}\right)$, имеющая канонический вид.

Предположим, что утверждение леммы верно для всех матриц порядков не выше $n-1$, где $n \geqslant 3$. Пусть T — матрица порядка n. Возьмём подматрицу T' порядка $n-1$, расположенную в правом нижнем углу матрицы T. Существует такая подстановка τ' чисел $2,\dots,n$, что матрица $\tau'T'$ имеет канонический вид. Возьмём подстановку τ степени n, совпадающую с τ' на числах $2,\dots,n$. В правом нижнем углу матрицы τT находится матрица $\tau'T'$. Если все элементы первой строки матрицы τT начиная со второго равны s, то τT уже имеет канонический вид.

Теперь допустим, что в первой строке матрицы τT есть единицы (разумеется, исключая позицию (1,1)). Пусть второй блок, стоящий на главной диагонали (после позиции (1,1)), имеет порядок $m-1$, $m \geqslant 2$. В таком случае элементы $t_{12},\dots,t_{1m}$ одновременно равны либо 1, либо s. Действительно, если $t_{1i}=1$, $t_{1j}=s$, $2 \leqslant i,j, \leqslant m$, то $t_{ij}=s$, что невозможно. Допустим, что $t_{12}=\dots=t_{1m}=1$. Если $t_{1\ell}=1$ для некоторого ℓ, $m+1 \leqslant \ell \leqslant n$, то $t_{2\ell}=1$, что тоже невозможно. Следовательно, $t_{1\,m+1}=\dots=t_{1n}=s$. Теперь если мы объединим первый и второй блоки, стоящие на главной диагонали, то получим канонический вид матрицы τT.

Итак, можно считать, что $t_{12}=\dots=t_{1m}=s$. Что теперь можно сказать об элементах $t_{1\,m+1}=\dots=t_{1n}$? Допустим, что $t_{1i}=1$, $t_{1j}=1$ и $t_{1k}=1$, где $m+1 \leqslant i,j,k \leqslant n$ и $i<j<k$. В таком случае $t_{ij}=s$, $t_{ik}=1$, и мы получаем противоречие. Отсюда следует, что последовательность $t_{1\,m+1},\dots,t_{1n}$ может иметь только один из следующих трёх видов:

$$1)\ 111\dots sss; \quad 2)\ sss\dots111\dots sss; \quad 3)\ sss\dots111.$$

Важное обстоятельство заключается в том, что под последовательностью $11\dots1$ из п. 1, 2 или 3 на главной диагонали стоит блок, порядок которого равен числу единиц в данной последовательности.

В случаях 1 и 2 поступаем далее следующим образом. Возьмём подматрицу, у которой правый нижний угол заканчивается блоком, соответствующим последовательности $11\dots1$. Некоторой подстановкой приводим эту подматрицу к каноническому виду. Затем той же подстановкой (добавив недостающие одночленные циклы) действуем на всю матрицу и приводим её к каноническому виду (при этих манипуляциях подматрица, находящаяся в правом нижнем углу, не меняется).

Рассмотрим оставшийся случай 3. Пусть блок на главной диагонали, расположенный под последовательностью $11\dots1$, начинается со строки с номером $k+1$, где $k\geqslant 2$. Применим к матрице цикл $(1\,2\dots k)$. В результате в правом нижнем углу появится блок из единиц порядка $k+1$. Вместо единиц в первой строке справа и в первом столбце слева будет стоять s. На позициях $(k,1),\dots,(k,k-1)$ и $(1,k),\dots,(k-1,k)$ также будет находиться s. Таким образом, слева и вверх от блока из единиц в правом нижнем углу на всех позициях стоит s. Некоторой подстановкой приведём к каноническому виду подматрицу, расположенную в строках и столбцах с номерами $1,2,\dots,k-1$. После этого вся матрица будет иметь канонический вид. □

Кратко изложим ещё одно доказательство леммы 18.2. Отношение $\sim$, где $i\sim j\Leftrightarrow t_{ij}=1$, является отношением эквивалентности на множестве $\{1,2,\dots,n\}$. Пусть σ — подстановка, у которой в верхней строке стоят числа от 1 до n в естественном порядке. Нижняя строка состоит из классов эквивалентности относительно отношения $\sim$, расположенных в произвольном порядке. Тогда матрица σT имеет канонический вид. □

В ситуации леммы будем говорить, что *матрица T приведена к каноническому виду σT*. Верно и обратное: если некоторая матрица T приведена к каноническому виду σT, то T — матрица множителей. Таким образом, матрицы множителей совпадают с матрицами, которые приводятся к каноническому виду подстановками.

Пусть матрица T имеет канонический вид. Тогда блоки, стоящие на главной диагонали матрицы, можно расположить в любом наперёд заданном порядке. Иными словами, существует такая подстановка τ, что блоки в матрице τT располагаются в требуемом порядке, причём τT имеет канонический вид. Для этого достаточно показать, что если T состоит из двух блоков, то их можно переставить. Пусть первый блок имеет порядок k, $1\leqslant k\leqslant n-1$. Тогда можно взять подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ k+1 & k+2 & \dots & n & 1 & \dots & k \end{pmatrix} \text{ в качестве } \tau.$$

Сформулируем основной результат параграфа. Сначала заметим, что один частный случай, появляющийся в доказательстве, будет рассмотрен в следующем параграфе.

Теорема 18.3. *Пусть T — матрица множителей. Тогда существует кольцо $M(n, R, s)$, матрица множителей которого совпадает с T.*

Доказательство. Будем вести индукцию по n. При $n = 2$ имеется только одна матрица множителей, а именно матрица $\left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$. И мы знаем, что всегда существует кольцо $M(2, R, s)$ с матрицей множителей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Теперь считаем, что $n > 2$. Пусть σ — такая подстановка, что матрица σT имеет канонический вид (см. лемму 18.2). Возможны два случая.

Случай 1. Все блоки, стоящие на главной диагонали, имеют порядок 1. В § 19 будет показано, что найдётся кольцо $M(n, R, s)$ с матрицей множителей σT.

Случай 2. Не все блоки, указанные в случае 1, имеют порядок 1. Перед формулировкой теоремы было отмечено, что существует такая подстановка τ, что матрица $\tau\sigma T$ имеет канонический вид и порядок самого нижнего блока больше 1. В $\tau\sigma T$ возьмём подматрицу T' порядка $n-1$, лежащую в левом верхнем углу. Она имеет канонический вид. Согласно предположению индукции существует кольцо K вида $M(n-1, R, s)$ с матрицей множителей T'. Запишем это кольцо в виде кольца блочных матриц порядка 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R & \dots & R & R \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R & \dots & R & R \\ \hline R & \dots & R & R \end{array}\right).$$

Теперь применим конструкцию кольца K_4 из § 3 к кольцу K. Матрица множителей полученного кольца K_4 совпадает с матрицей $\tau\sigma T$. Кольцо $\sigma^{-1}\tau^{-1}K_4$ будет искомым кольцом формальных матриц. Действительно, матрица T является матрицей множителей этого кольца. □

Вернёмся к действию подстановок на множестве колец формальных матриц (см. п. А из § 16). Ясно, что это действие можно ограничить на множество колец $M(n, R, s)$ рассматриваемого вида с фиксированным множителем s. Каждая подстановка τ также действует на любой матрице $A = (a_{ij})$, а именно, $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$. В частности, τ действует на матрицах множителей S. Ввиду леммы 18.2 при этом орбиты состоят из матриц, имеющих одинаковый канонический вид.

Число орбит, на которые разбивается множество матриц множителей под действием подстановок, равно числу представлений числа n в виде суммы чисел, меньших чем n.

Если кольцо $K = M(n, R, s)$ имеет матрицу множителей S, то τS — матрица множителей кольца τK для любой подстановки τ. Следовательно, если два кольца лежат в одной орбите, то соответствующие матрицы множителей тоже лежат в одной орбите. Конечно, обратное неверно. Причина в том, что для данной матрицы множителей S могут существовать несколько серий матриц множителей $S_1, \ldots, S_k$. Поэтому неясно, сколько имеется орбит для колец. В нескольких частных случаях ответ будет дан в следующем параграфе.

Для данного кольца матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ мы ввели в § 3 четыре способа построения колец матриц бóльших порядков. Назовём эти способы *конструкциями* K_1, K_2, K_3 *и* K_4. Теперь предположим, что дано кольцо $M(n, R, s) = L$ с матрицами множителей $S, S_1, \ldots, S_n$. Допустим, что мы применили указанные конструкции к L. Обозначим полученные кольца через L_1, L_2, L_3 и L_4 соответственно. Матрицы множителей $S', S'_1, \ldots, S'_n, S'_{n+1}$ каждого из этих колец получаются из матриц $S, S_1, \ldots, S_n$ с помощью определённой закономерности. Рассмотрим подробнее конструкцию K_4. Нужно записать кольцо L в блочном виде как кольцо матриц порядка 2 (см. § 3), $L = \left(\begin{smallmatrix} P & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$, где P — кольцо матриц порядка k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$; S, M и N указаны в § 3. Для простоты возьмём $k = n-1$. Применим к L конструкцию K_4 и получим кольцо матриц L_4 порядка $n+1$,

$$L_4 = \begin{pmatrix} L & \binom{M}{S} \\ (N \;\; S) & S \end{pmatrix}.$$

Учитывая строение матриц в кольце L_4, получаем, что матрицы множителей $S', S'_1, \ldots, S'_n$ кольца L_4 получаются из соответствующих матриц $S, S_1, \ldots, S_n$ единообразно, причём $S'_{n+1} = S'_n$. А именно, нужно добавить справа к каждой матрице $S, S_1, \ldots, S_n$ последний столбец этой матрицы; затем нужно добавить снизу к каждой матрице $S, S_1, \ldots, S_n$ последнюю строку этой матрицы, а в позицию $(n+1, n+1)$ нужно поставить элемент, стоящий в позиции (n, n).

Сформулируем следующий вопрос, который снова появится в конце § 19. Подействуем подстановкой τ степени n на кольцо L. Затем применим конструкцию K_4 к кольцу τL; получится кольцо $(\tau L)_4$. Какая имеется связь между кольцами L_4 и $(\tau L)_4$? Можно ли одно из этих колец перевести во второе кольцо некоторой подстановкой?

В конце параграфа остановимся на исключённых значениях для множителя s: $s^2 = 1$ и $s^2 = s$. Если $s^2 = 1$, то элемент s обратим и

$$M(n, R, s) \cong M(n, R)$$

по предложению 16.2. Случай $s^2 = s$ (s — идемпотент) более содержателен. Приведём один характерный пример. Положим $s_{iik} = 1 = s_{ikk}$ и $s_{ijk} = s$ при $i \neq j$ и $j \neq k$. Тогда $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — система множителей. Следовательно, существует кольцо $M(n, R, \Sigma)$.

§ 19. Классификация колец формальных матриц

Продолжим тему, начатую в предыдущем параграфе. Мы уделим основное внимание задаче II, сформулированной в § 16. Мы также закончим доказательство теоремы 18.3, связанной с задачей I. Сохраняются все обозначения и соглашения § 18.

По теореме 18.3 для всякой матрицы множителей T найдётся такое кольцо $M(n, R, s)$, что его матрица множителей S совпадает с T. Таких колец $M(n, R, s)$ может быть несколько, поскольку для данной матрицы S могут существовать разные наборы матриц множителей $S_1, \ldots, S_n$, соответствующие разным системам множителей Σ. В данной ситуации задача классификации II заключается в перечислении при фиксированном s всех таких колец $M(n, R, s)$.

В зависимости от канонического вида матрицы S мы исследуем два случая:

1) главная диагональ матрицы S состоит из двух блоков;

2) все блоки на главной диагонали матрицы S имеют порядок 1.

В первом случае матрицы $S_1, \ldots, S_n$ являются симметрическими и однозначно восстанавливаются по матрице S.

Как и в § 18, мы будем считать, что матрица множителей кольца $M(n, R, s)$ — это матрица S, если не оговорено что-то другое.

Лемма 19.1. *Пусть дано кольцо $M(n, R, s)$ и $S, S_1, \ldots, S_n$ — его матрицы множителей. Равносильны следующие условия*:

1) *канонический вид матрицы S содержит ровно два блока*;

2) *для любых трёх элементов s_{iji}, s_{iki} и s_{jkj} реализуется либо возможность* 1, *либо возможность* 2 *из леммы* 18.1;

3) *матрицы $S_1, \ldots, S_n$ являются симметрическими.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть τ — произвольная подстановка. Если для элементов матрицы S выполняется условие 2, то это же верно

для элементов матрицы τS и наоборот. Поэтому можно считать, что S имеет канонический вид. Тогда нетрудно проверить, что условие 2 верно.

2) $\Rightarrow$ 1). Опять считаем, что S имеет канонический вид. Если мы допустим, что число блоков не менее 3, то быстро получим противоречие.

2) $\Rightarrow$ 3). Возьмём любые три элемента s_{iji}, s_{iki} и s_{jkj}, где индексы i, j, k попарно различны. В силу условия 2 либо все эти элементы равны 1, либо некоторые два из них равны s, а третий элемент равен 1. В любом случае из равенств (3) из § 16 получаем, что $s_{ikj} = s_{jki}$.

3) $\Rightarrow$ 2). Если мы допустим, что

$$s_{iji} = s_{iki} = s_{jkj} = s,$$

то получим, что все остальные шесть множителей в равенстве (4) из § 16 равны друг другу. Это противоречит равенствам (3) из § 16. □

Далее рассмотрим кольца $M(n, R, s)$ с матрицами множителей, удовлетворяющими эквивалентным условиям 1–3 из леммы 19.1. Несложно доказать следующее утверждение: любая из строк матрицы S однозначно определяет оставшиеся строки. Переформулируем это утверждение. Для этого перейдём к «аддитивной» записи в матрицах S, $S_1, \ldots, S_n$; заменим все элементы соответствующими показателями степени элемента s (как обычно, мы полагаем $s^0 = 1$). Полученные матрицы состоят из нулей и единиц. (Такие матрицы называют (01)-*матрицами*.) Обозначим через S^+ матрицу, построенную из матрицы S. Сохраним за элементами матрицы S^+ обозначение s_{iji} или, более кратко, s_{ij}. Тогда утверждение 2 из леммы 19.1 для элементов матрицы S^+ в поле из двух элементов имеет вид $s_{ij} + s_{ik} = s_{jk}$. Это равенство также верно, если какая-то пара индексов совпадает.

Элементы s_{ikj} с различными i и j (элементы матрицы S_k) однозначно определяются элементами вида s_{iji}. Более точно, элементы главной диагонали матрицы S_k (эта диагональ совпадает с k-й строкой матрицы S) задают все остальные элементы этой матрицы, если учесть равенства (3) из § 16. В поле из двух элементов выполняется равенство $s_{ikj} = s_{ik} \cdot s_{jk}$. Оно также остаётся верным для совпадающих индексов. Итак, матрица S полностью определяет матрицы S_k, $k = 1, \ldots, n$.

Можно предложить полное обозрение колец $M(n, R, s)$, о которых идёт речь в лемме 19.1.

Уточним, что кольцо $M(n, R)$ также подпадает под п. 3 следующей теоремы. Оно получается, когда все множители s_{ijk} равны $1 = s^0$. В п. 2 матрица, состоящая из единиц, соответствует $M(n, R)$.

Теорема 19.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между следующими тремя множествами*:

1) *множество последовательностей длины* $n-1$, *состоящих из* 0 *и* 1;

2) *множество матриц множителей порядка* n, *удовлетворяющих эквивалентным условиям* 1 *и* 2 *из леммы* 19.1;

3) *множество колец* $M(n, R, s)$, *у которых матрицы множителей удовлетворяют условиям* 1–3 *из леммы* 19.1.

Доказательство. По существу, биекция между множествами из п. 1 и 2 уже установлена. Именно, если $T = (t_{ij})$ — некоторая матрица множителей, принадлежащая множеству из п. 2, то сопоставим последовательность $t_{12}, \dots, t_{1n}$ матрице T (как условлено выше, мы заменяем элементы t_{ij} на соответствующие показатели элемента s; далее поступаем аналогично). Наоборот, пусть дана некоторая последовательность, принадлежащая множеству из п. 1. Припишем 0 слева к этой последовательности. Возьмём эту расширенную последовательность в качестве первой строки матрицы (t_{ij}) порядка n. Остальные элементы матрицы получаются с помощью равенств $t_{1j} + t_{1k} = t_{jk}$ (в поле из двух элементов). Также верно равенство $t_{ij} + t_{ik} = t_{jk}$ для всех $i = 2, \dots, n$ и всех j, k. Теперь заменим 0 (соответственно 1) на 1 (соответственно s) в этой матрице. Построенная матрица будет принадлежать множеству из п. 2. Установленное соответствие между последовательностями из п. 1 и матрицами из п. 2 является биекцией.

Теперь перейдём к биекции между множествами из п. 2 и 3, которая практически уже тоже имеется. Если T — некоторая матрица, принадлежащая множеству из п. 2, то по теореме 18.3 существует такое кольцо $M(n, R, s)$, что T — матрица множителей для $M(n, R, s)$. Заметим, что совпадение двух колец вида $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ означает, что операции умножения в этих кольцах совпадают. Из определения таких колец вытекает, что системы множителей этих колец $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ совпадают. Поэтому ясно, что различным матрицам T соответствуют различные кольца $M(n, R, s)$.

И наоборот, если кольцо $M(n, R, s)$ принадлежит множеству из п. 3, то сопоставим матрицу множителей S этого кольца кольцу $M(n, R, s)$. Ранее отмечалось, что множители s_{ijk} с различными индексами i и k однозначно определяются множителями вида s_{iji}. Иными словами, матрицы множителей $S_1, \dots, S_n$ кольца $M(n, R, s)$ однозначно восстанавливаются по матрице S. Поэтому разным кольцам $M(n, R, s)$ соответствуют разные матрицы S. □

Следствие 19.3. *В теореме* 19.2 *число колец, принадлежащих множеству из* n. 3, *равно* 2^{n-1}. *Следовательно, это число не зависит от кольца* R *и элемента* s.

Теперь опишем одну ситуацию общего характера. Пусть дано произвольное множество центральных элементов $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ кольца R. Требуется проверить, удовлетворяет ли это множество тождествам (1) из § 16; является ли оно системой множителей. Для этого нам, в частности, нужно проверить равенство

$$s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell} \qquad (*)$$

для всех попарно различных индексов i, j, k, ℓ. Может случиться так, что для любой такой четвёрки индексов важно только взаимное расположение индексов i, j, k, ℓ; важен только порядок между индексами. Подобная ситуация возникает ниже. Для удобства будем считать, что $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ и $\ell = 4$. Учитывая все варианты расположения чисел i, j, k, ℓ, получаем, что число соответствующих равенств $(*)$ равно 24. Удобно расположить эти равенства в виде четырёх серий из шести равенств в каждой серии. Запишем первую серию, в которой индексы i, j, k принимают любые значения из $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} &s_{123} \cdot s_{134} = s_{124} \cdot s_{234}, \quad s_{321} \cdot s_{314} = s_{324} \cdot s_{214}, \\ &s_{312} \cdot s_{324} = s_{314} \cdot s_{124}, \quad s_{213} \cdot s_{234} = s_{214} \cdot s_{134}, \\ &s_{231} \cdot s_{214} = s_{234} \cdot s_{314}, \quad s_{132} \cdot s_{124} = s_{134} \cdot s_{324}. \end{aligned} \qquad (**)$$

Для значений индексов $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ и $\{2, 3, 4\}$ имеются ещё три серии.

Теперь обратимся к случаю 2, выделенному в начале параграфа. Именно, исследуем другую встречающуюся ситуацию с кольцом $M(n, R, s)$, когда все множители s_{iji}, $i \neq j$, равны s. Или по-другому, в матрице множителей такого кольца на главной диагонали стоят блоки порядка 1 (эта матрица уже имеет канонический вид). В частности, завершим доказательство теоремы 18.3. Кольцо $M(2, R, s)$ относится к этому виду колец, поэтому считаем, что $n \geqslant 3$.

Теорема 19.4. *Пусть* $T = (t_{ij})$ — *такая матрица порядка* $n \geqslant 3$, *что на главной диагонали стоит* 1, *а на остальных позициях стоит элемент* s. *Найдётся кольцо* $M(n, R, s)$, *у которого* T *является матрицей множителей. Любые два таких кольца переводятся друг в друга подстановками, они лежат в одной орбите.*

Доказательство. Из текста после следствия 19.3 видно, какие значения нужно придать множителям s_{ijk}, чтобы получилось нужное кольцо $M(n, R, s)$. Как всегда, $s_{iik} = 1 = s_{ikk}$. Затем полагаем $s_{iji} = t_{ij}$. Далее для любых попарно различных индексов i, j, k считаем, что $s_{ijk} = 1$, если перестановка (i, j, k) чётная, и $s_{ijk} = s$ для нечётной перестановки (i, j, k). Убедимся, что множество $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ будет системой множителей и выполняются тождества (1) из § 16.

Если в каком-то тождестве (1) (это тождество $(*)$ выше) два индекса совпадают, то оно превращается в тождество вида (3) или (4) из § 16. Однако эти тождества выполняются в силу выбора множителей s_{ijk}. В частности, утверждения проверены для случая $n = 3$. Далее считаем, что $n \geqslant 4$. Осталось проверить равенство $(*)$ для любых попарно различных индексов i, j, k, ℓ. Здесь мы как раз находимся в ситуации, описанной после следствия 19.3, поскольку при проверке важно лишь взаимное расположение чисел i, j, k, ℓ. Поэтому достаточно проверить выполнение всех 24 равенств вида $(**)$, что производится непосредственными вычислениями.

Итак, Σ — система множителей; следовательно, имеется кольцо $M(n, R, \Sigma)$ с матрицей множителей T.

Замечание. Мы прервём доказательство теоремы и к оставшемуся утверждению об орбите вернёмся позже.

Наоборот, можно в доказательстве считать, что $s_{ijk} = s$ для чётных перестановок (i, j, k) и $s_{ijk} = 1$ для нечётных перестановок (i, j, k). Тогда мы тоже получим кольцо с матрицей множителей T. Соответствующие кольца обозначим L_0 и L_1. Подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

переводит L_0 в L_1 (нужно учесть, что перестановки (i, j, k) и $(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$ имеют противоположные чётности).

Итак, мы нашли два кольца L_0 и L_1 с матрицей множителей T. Существуют ли ещё такие кольца? Для $n = 3$ ответ отрицательный, что вытекает из следующего абзаца.

Возьмём $n = 4$. Из тождеств (3) и (4) из § 16 непосредственно следует, что множители s_{123}, s_{312}, s_{231} из равенств $(**)$ совпадают, и то же верно для s_{321}, s_{213}, s_{132}. Кроме того, элементы этих троек должны принимать противоположные значения (из 1 и s). Аналогичная ситуация имеет место с первыми элементами остальных 18 равенств. Первыми элементами равенств $(**)$ исчерпываются все элементы, присутству-

ющие в этих равенствах. Поэтому можно сделать вывод, что данное кольцо $M(4, R, s)$ однозначно определяется вектором (c_1, c_2, c_3, c_4) длины 4, состоящим из 0 и 1. Здесь $c_1 = 0$, если $s_{123} = 1$, $c_1 = 1$, если $s_{123} = s$, и т. д. Кольцам L_0 и L_1 отвечают векторы $(0, 0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1, 1)$ соответственно. Применяя циклы $(1\,2\,4\,3)$, $(1\,3\,2\,4)$ и $(1\,4\,2\,3)$ к кольцам L_0 и L_1, получим ещё четыре кольца $M(4, R, s)$, которым соответствуют векторы $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$. Подстановка $(1\,4)(2\,3)$ переводит L_0 в L_1 и обратно. Не существует колец $M(4, R, s)$, соответствующих векторам $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$; чтобы это проверить, достаточно изучить равенства $(**)$. Отсюда следует, что имеется шесть колец $M(4, R, s)$ с данной матрицей множителей T. Эти кольца переводятся друг в друга подстановками, они лежат в одной орбите. Кроме того, отметим, что

$$L_1 = L_0^t, \quad L_{(0,0,1,1)} = L_{(1,1,0,0)}^t, L_{(0,1,1,0)} = L_{(1,0,0,1)}^t;$$

см. п. D из § 16.

Теперь считаем, что $n \geqslant 5$. У нас уже есть два таких кольца L_0 и L_1, что T — матрица множителей для L_0 и L_1. Теперь пусть $M(n, R, s)$ — любое другое подобное кольцо. Покажем, что оно переводится некоторой подстановкой в L_0 или L_1.

Зафиксируем произвольные попарно различные индексы i, j, k, ℓ. Элементы, занимающие в матрицах из $M(n, R, s)$ позиции

$$(i,i),\ (i,j),\ (i,k),\ (i,\ell),\ (j,i),\ (j,j),\ (j,k),\ (j,\ell),$$
$$(k,i),\ (k,j),\ (k,k),\ (k,\ell),\ (\ell,i),\ (\ell,j),\ (\ell,k),\ (\ell,\ell),$$

образуют некоторое кольцо $M(4, R, s)$. Мы только что установили, что найдётся подстановка σ степени 4, переводящая это кольцо $M(4, R, s)$ в кольцо L_0. Подразумевая, что числа, отличные от i, j, k, ℓ, остаются на месте, считаем, что σ — подстановка степени n. Применим σ к кольцу $M(n, R, s)$. Повторив это действие несколько раз, получим подстановку степени n, переводящую кольцо $M(n, R, s)$ в L_0. На этом доказательство теоремы 19.4 закончено. □

На основе изложенного выпишем рассмотренные нами матрицы множителей S колец $M(n, R, s)$ для $n = 2, 3, 4$. Мы опускаем матрицу, которая состоит из 1 и соответствует кольцу $M(n, R)$.

Для $n = 2$ имеем

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $n = 3$ имеются две орбиты матриц множителей и две соответствующие орбиты колец.

Первая орбита:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбита колец состоит из колец L_0 и L_1.

Вторая орбита:

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & 1 \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 1 & s \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбита колец содержит три кольца.

Для $n = 4$ имеются три орбиты матриц множителей и три соответствующие орбиты колец.

Первая орбита:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбита колец состоит из шести колец.

Вторая орбита:

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & 1 & 1 \\ s & 1 & 1 & 1 \\ s & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 & 1 \\ s & 1 & s & s \\ 1 & s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & s & 1 \\ s & s & 1 & s \\ 1 & 1 & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Третья орбита:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & s & s \\ 1 & 1 & s & s \\ s & s & 1 & 1 \\ s & s & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & 1 \\ s & 1 & 1 & s \\ s & 1 & 1 & s \\ 1 & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 & s \\ s & 1 & s & 1 \\ 1 & s & 1 & s \\ s & 1 & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая орбита колец содержит 4 кольца, третья орбита колец содержит 3 кольца.

Кольца L_0 являются примерами колец скрещённых матриц [9], которые весьма полезны для структурной теории некоторых артиновых колец.

Вернёмся к лемме 18.1. В этой лемме говорится о возможных значениях множителей в тройке $s_{iji}, s_{iki}, s_{jkj}$. Мы рассмотрели ситуации, когда реализуются только возможности 1 и 2, а затем только 3. Этим ситуациям соответствует определённое строение канонического вида матриц множителей. Остался случай, когда может возникнуть любая

из возможностей 1–3. Это равносильно тому, что в каноническом виде данной матрицы множителей число блоков на главной диагонали больше двух и есть блоки порядка больше единицы.

Как получить все кольца $M(n, R, s)$, у которых канонический вид матрицы множителей имеет подобное строение? Для $n = 2$ и $n = 3$ таких колец, конечно, нет. Доказательство теоремы 18.3 предоставляет практический способ построения требуемых колец для $n \geqslant 4$. Именно, нужно брать, начиная с $n = 3$, кольца $M(n, R, s)$ и применять к ним конструкцию K_4 из § 3. Перед этим надо применить некоторую подстановку, чтобы перейти к кольцу $M(n, R, s)$, у которого матрица множителей имеет канонический вид. Из колец $M(n, R, s)$ нужно исключить те, у которых матрицы множителей имеют канонический вид, содержащий ровно два блока на главной диагонали. В результате получим кольца $M(n+1, R, s)$ с искомым видом матрицы множителей. Затем применим всевозможные подстановки к этим кольцам. После этого получим нужные кольца $M(n+1, R, s)$. Отметим, что если блоки матрицы множителей кольца $M(n, R, s)$ имеют порядки $k_1, \ldots, k_t$, где $t \geqslant 3$, то блоки соответствующего кольца $M(n + 1, R, s)$ будут иметь порядки $k_1, \ldots, k_{t-1}, k_t + 1$.

Проиллюстрируем изложенный способ построения для $n = 4$. Возьмём кольцо $M(3, R, s)$, обозначенное выше через L_0. Это кольцо имеет матрицу множителей

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя конструкцию K_4 к кольцу L_0, получим кольцо $M(4, R, s)$ с матрицей множителей

$$\begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & 1 \\ s & s & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

для которой $s_{121} = s_{131} = s_{232} = s_{141} = s$, $s_{343} = 1$. Учитывая положение 1 выше главной диагонали, обозначим полученное кольцо через L_{34}. Применяя к кольцу L_{34} подстановки $(3\,1)(4\,2)$, $(1\,3\,4)(2)$, $(1\,3)(2)(4)$, $(2\,3\,4)(1)$ и $(2\,3)(1)(4)$, получим кольца L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{23} и L_{24} соответственно. Выше главной диагонали матрицы множителей этих колец имеют 1 в позициях $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ и $(2, 4)$ соответственно.

То же самое можно делать, начав с кольца $L_1 = M(3, R, s)$. В результате получим кольца L'_{12}, L'_{13}, L'_{14}, L'_{23}, L'_{24} и L'_{34}. Напомним, что

кольцо L_0 переводится в кольцо L_1 некоторой подстановкой (например, $(1\,4)(2\,3)$). Кольцо L_{34} переводится в кольцо L'_{34} подстановкой $(1\,2)(3\,4)$; это даёт частичный ответ на вопрос, сформулированный в конце § 18. Таким образом, все 12 колец

$$L_{12},\ L_{13},\ L_{14},\ L_{23},\ L_{24},\ L_{34},$$
$$L'_{12},\ L'_{13},\ L'_{14},\ L'_{23},\ L'_{24},\ L'_{34}$$

лежат в одной орбите. Кроме того, заметим, что $L_1 = L_0^t$ и $L'_{ij} = L_{ij}^t$; см. п. D из § 16.

Составленный выше список матриц множителей можем дополнить для $n = 4$ ещё одной орбитой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & s & s \\ 1 & 1 & s & s \\ s & s & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & 1 & s \\ s & 1 & s & s \\ 1 & s & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & 1 \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & s \\ 1 & s & s & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & 1 & s \\ s & 1 & 1 & s \\ s & s & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & 1 \\ s & s & 1 & s \\ s & 1 & s & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & s & s \\ s & 1 & s & s \\ s & s & 1 & 1 \\ s & s & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая орбита колец содержит 12 колец вида L_{ij} и L'_{ij}. Остаётся неясным, есть ли в этой орбите другие кольца.

§ 20. Проблема изоморфизма

Следующий результат непосредственно выводится из леммы 4.5.

Лемма 20.1. *Для любого кольца K формальных матриц над кольцом R верно равенство $C(K) = \{rE \mid r \in C(R)\}$.*

В § 16 сформулирована проблема изоморфизма III. Сейчас мы рассмотрим её для таких колец формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, что при $i \neq j$ и $j \neq k$ каждый множитель s_{ijk} равен s^m для некоторого $m \geqslant 1$, где s — фиксированный центральный элемент кольца R. Подобные кольца упоминались в начале § 18. Здесь мы обозначаем такие кольца через $M(n, R, s)$; не следует путать это обозначение с символом $M(n, R, s)$ из § 18 и 19, где $M(n, R, s)$ обозначает такое кольцо, что $s_{ijk} = 1$ или $s_{ijk} = s$.

В дальнейшем $M(n, R, 0)$ обозначает такое кольцо $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, что все множители s_{ijk} равны нулю, за исключением s_{iik} и s_{ikk}. Далее, T — некоторое кольцо, и $M(n, T, \{t_{ijk}\})$ — произвольное кольцо формальных матриц над T.

Напомним известное определение. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны.

Лемма 20.2. *Пусть R — нормальное кольцо. Если*

$$M(n,R,0)\cong M(n,T,\{t_{ijk}\}),$$

то все множители t_{ijk} равны нулю, за исключением случаев, когда $i=j$ или $j=k$.

Доказательство. Обозначим $K_1=M(n,R,0)$ и $K_2=M(n,T,\{t_{ijk}\})$. Зафиксируем некоторый кольцевой изоморфизм $f\colon K_1\to K_2$. Пусть I обозначает идеал (I_{ij}) кольца K_1, где $I_{ii}=0$ и $I_{ij}=R$ при $i\neq j$ (см. предложение 17.3). Тогда $I^2=0$, и, следовательно, $(f(I))^2=0$. Допустим, что существует такой ненулевой множитель t_{ikj}, что $i\neq k$ и $k\neq j$. Тогда $E_{ik}E_{kj}=t_{ikj}E_{ij}\neq 0$, где E_{ij} — матричная единица (см. § 16). Следовательно, матрицы E_{ik} и E_{kj} не могут одновременно содержаться в $f(I)$. Для определённости пусть $E_{ik}\notin f(I)$. Тогда

$$E_{ii}(E_{ii}+E_{ik})-(E_{ii}+E_{ik})E_{ii}=E_{ik}\notin f(I).$$

Показано, что идемпотент $(E_{ii}+E_{ik})+f(I)$ факторкольца $K_2/f(I)$ не является центральным в $K_2/f(I)$. Поэтому кольцо $K_2/f(I)$ не нормально. С другой стороны, кольцо $K_2/f(I)$ нормально, поскольку

$$K_2/f(I)\cong K_1/I\cong R\oplus\ldots\oplus R$$

— конечное прямое произведение нормальных колец. Получено противоречие. □

Пусть теперь s и t — два ненулевых центральных элемента кольца R (по лемме 20.2 можно считать, что $s\neq 0$ и $t\neq 0$). Кроме того, пусть $s^k\neq s^\ell$ для любых различных неотрицательных k и ℓ. Далее, пусть $M(n,R,\{s_{ijk}\})$ и $M(n,R,\{t_{ijk}\})$ — такие кольца, как указано в начале параграфа; а именно, каждый множитель s_{ijk} является целой положительной степенью элемента s, а каждый множитель t_{ijk} является целой положительной степенью элемента t. Мы также предполагаем, что хотя бы один из множителей s_{ijk} равен s и хотя бы один из множителей t_{ijk} равен t. Кроме того, предполагается, что системы множителей s_{ijk} и t_{ijk} являются «подобными» в следующем смысле:

$$s_{ijk}=s^m\iff t_{ijk}=t^m$$

для всех множителей s_{ijk} и t_{ijk}. В соответствии с нашим соглашением мы обозначаем рассматриваемые кольца через $M(n,R,s)$ и $M(n,R,t)$ соответственно.

Напомним, что через $J(R)$, $U(R)$ и $Z(R)$ обозначаются соответственно радикал Джекобсона, группа обратимых элементов и множество всех (левых или правых) делителей нуля кольца R.

Теорема 20.3. *Пусть R — такое коммутативное кольцо, что*

$$Z(R) \subseteq J(R).$$

Кольца $M(n, R, s)$ и $M(n, R, t)$ изоморфны в точности тогда, когда $t = \upsilon\alpha(s)$, где υ — обратимый элемент в R и α — автоморфизм кольца R.

Доказательство. Обозначим $K_1 = M(n, R, s)$ и $K_2 = M(n, R, t)$. Пусть дан кольцевой изоморфизм $f\colon K_1 \to K_2$. Изоморфизм f индуцирует изоморфизм $C(K_1) \to C(K_2)$ центров этих колец. Рассмотрим действие этого изоморфизма подробно. Возьмём произвольный элемент $a \in R$. По лемме 20.1 имеем $aE \in C(K_1)$. Следовательно, $f(aE) \in C(K_2)$. Далее, $f(aE) = bE$ для некоторого $b \in R$. Получаем, что f индуцирует такой автоморфизм α кольца R, что $\alpha(a) = b$. Итак, имеем $f(aE) = \alpha(a)E$, $a \in R$.

Теперь возьмём идеал

$$(sE)K_1 = \begin{pmatrix} sR & \dots & sR \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ sR & \dots & sR \end{pmatrix}$$

кольца K_1. Его образом при действии f является идеал $f((sE)K_1)$. Верны равенства

$$f((sE)K_1) = f(sE)K_2 = (\alpha(s)E)K_2 = \begin{pmatrix} \alpha(s)R & \dots & \alpha(s)R \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \alpha(s)R & \dots & \alpha(s)R \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм f индуцирует изоморфизм факторколец

$$K_1/(sE)K_1 \to K_2/(\alpha(s)E)K_2.$$

Первое факторкольцо есть кольцо матриц $M(n, R/sR, 0)$; см. абзац перед леммой 20.2, а второе есть кольцо матриц $M(n, R/\alpha(s)R, \bar{t})$, где $\bar{t} = t + \alpha(s)R$. Таким образом, множителями этого кольца являются смежные классы $t_{ijk} + \alpha(s)R$. Применяя лемму 20.2, получаем, что $\bar{t} = 0$ или $t \in \alpha(s)R$ (надо учесть, что t является одним из t_{ijk}). Следовательно, $t = \alpha(s)x$ для некоторого элемента $x \in R$. Взяв обратный изоморфизм к f, получаем, что $s = \alpha^{-1}(t)y$, $y \in R$. Тогда имеем

$$t = \alpha(s)x = t\alpha(y)x, \quad t(1 - \alpha(y)x) = 0.$$

По условию получаем, что

$$1-\alpha(y)x \in J(R), \quad 1-(1-\alpha(y)x) = \alpha(y)x \in U(R).$$

Следовательно, x — обратимый элемент. Поэтому $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент и α — автоморфизм кольца R.

Теперь предположим, что $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент и α — автоморфизм кольца R. Покажем, что кольца K_1 и K_2 изоморфны. Во-первых, в соответствии с п. B из § 16 имеем изоморфизм

$$M(n, R, s) \cong M(n, R, \alpha(s)).$$

Система множителей второго кольца есть

$$\{\alpha(s_{ijk}) \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}.$$

Мы можем считать, что α — тождественный автоморфизм. Возьмём множество $\{v_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$, где $v_{ijk} = v^m$, если $s_{ijk} = s^m$. Это множество является системой множителей. Поэтому имеем кольцо $M(n, R, vs)$ с системой множителей $\{v_{ijk}s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$. По п. C из § 16 имеется изоморфизм $M(n, R, vs) \cong M(n, R, s)$. Из равенства $t = vs$ и соглашения о «подобии» систем множителей следует, что $t_{ijk} = v_{ijk}s_{ijk}$ для всех i, j, k. Поэтому

$$M(n, R, vs) = M(n, R, t) \quad \text{и} \quad M(n, R, s) \cong M(n, R, t). \qquad \square$$

Заметим, что $Z(R) \subseteq J(R)$, если R — либо область, либо локальное кольцо.

Следствие 20.4. *Пусть R — коммутативное кольцо, являющееся либо областью, либо локальным кольцом. Кольца $M(n, R, s)$ и $M(n, R, t)$ изоморфны в точности тогда, когда $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент, а α — автоморфизм кольца R.*

В статьях Крылова [63] и Танга, Ли и Жу [96] доказаны некоторые теоремы изоморфизма для колец формальных матриц порядка 2 (в том числе следствие 20.5). Танг и Жу [97] доказали теорему 20.3 для колец, указанных в § 18. В этом случае ограничения на элементы s и t, перечисленные перед теоремой 20.3, не нужны. Эти ограничения также не нужны для $n = 2$ (как умножаются матрицы в таком кольце, написано после предложения 16.2).

Следствие 20.5 [63]. *Пусть R — коммутативное кольцо, и пусть s и t — некоторые элементы этого кольца, причём хотя бы один из этих элементов не является делителем нуля. Кольца $M(2, R, s)$ и $M(2, R, t)$*

изоморфны в точности тогда, когда $t = v\alpha(s)$, *где* v *— обратимый элемент, а* α *— автоморфизм кольца* R.

Абызов и Тапкин [3] изучают кольца $M(3, R, \Sigma)$ с симметрическими матрицами S_1, S_2 и S_3, $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех $i, j, k = 1, 2, 3$ (см. конец § 16 о кольцах матриц порядка 3). В частности, авторы получили ряд результатов по проблеме изоморфизма для таких колец; см. также [108]. Кроме того, Абызов и Тапкин ввели системы множителей более общего вида (по сравнению со случаем $n = 3$) следующим образом. Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — произвольные центральные элементы кольца R. Для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$ положим

$$s_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k; \\ s_j, & \text{если } i, j, k \text{ попарно различны;} \\ s_i s_j, & \text{если } i = k, \text{ но } i \neq j. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ является системой множителей, поскольку Σ удовлетворяет равенствам (1) § 16. Следовательно, существует кольцо $M(n, R, \Sigma)$. Далее Абызов и Тапкин [3] переносят результаты по проблеме изоморфизма, полученные для колец $M(3, R, \Sigma)$, на вышеупомянутые кольца $M(n, R, \Sigma)$. Класс таких колец $M(n, R, \Sigma)$ содержит кольца Танга и Жу из начала § 18.

Если s и t — любые (без всяких ограничений) два обратимых элемента, то любые два кольца $M(n, R, s)$ и $M(n, R, t)$, указанные в начале параграфа, являются изоморфными по предложению 16.2. Поэтому можно считать, что один из этих элементов (например, s) необратим. В этом случае если R — область, то $s^k \neq s^\ell$ при $k \neq \ell$. Это реализуется в следующих двух примерах. Поэтому в этих примерах предполагается, что соответствующие системы множителей $\{s_{ijk}\}$ и $\{t_{ijk}\}$ удовлетворяют только двум условиям, сформулированным перед теоремой 20.3.

Пример 20.6. Пусть $s, t \in \mathbb{Z}$. Изоморфизм $M(n, \mathbb{Z}, s) \cong M(n, \mathbb{Z}, t)$ существует в точности тогда, когда $t = \pm s$.

Доказательство. Прежде всего нужно учесть лемму 20.2 и замечание перед примером 20.6. Тогда утверждение следует из теоремы 20.3, поскольку кольцо $\mathbb{Z}$ имеет только тождественный автоморфизм и $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$. □

Пример 20.7. Пусть R — коммутативная область и i, j — натуральные числа. Если

$$M(n, R[x], x^i) \cong M(n, R[x], x^j)$$

или

$$M(n, R[[x]], x^i) \cong M(n, R[[x]], x^j),$$

то $i = j$.

Доказательство. Пусть V — одно из колец $R[x]$, $R[[x]]$. Допустим, что $i < j$. По теореме 20.3 имеем $x^i = v(x)\alpha(x^j) = v(x)\alpha(x)^j$, где $v(x)$ — обратимый элемент кольца V и α — автоморфизм кольца V. Далее, имеем $\alpha(x) = x^k(a_0 + a_1x + \ldots)$, где $k \geqslant 0$ и $a_0 \neq 0$. Тогда

$$x^i = x^{jk}v(x)(a_0 + a_1x + \ldots)^j.$$

Однако $i < j$. Поэтому $k = 0$ и имеем равенство $x^i = v(x)(a_0 + a_1x + \ldots)^j$. Так как $a_0 \neq 0$, получаем, что $v(x)$ делится на x, что невозможно. □

§ 21. Определители формальных матриц

В этом и следующем параграфах R — коммутативное кольцо, а K обозначает некоторое кольцо формальных матриц порядка n над кольцом R с системой множителей $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$, $K = M(n, R, \{s_{ijk}\})$.

Напомним правило умножения матриц в кольце K. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$. Тогда $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj}a_{ik}b_{kj}$. Мы будем несколько раз использовать формулы из § 16, относящиеся к связям между множителями s_{ijk}. Для удобства чтения мы частично повторим эти формулы. Прежде всего это основные тождества (1):

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell}.$$

Из этих тождеств вытекает ещё несколько тождеств:

$$s_{iji} = s_{jij}, \quad s_{iji} = s_{ij\ell} \cdot s_{ji\ell} = s_{\ell ij} \cdot s_{\ell ji}.$$

Кроме того, для любых $i, j = 1, \ldots, n$ мы определили элемент t_{ij}, равный $s_{ij\ell}$ для какого-то одного $\ell = 1, \ldots, n$. Справедливы тождества

$$t_{ij} \cdot t_{ji} = s_{iji}, \quad t_{ij} \cdot t_{jk} = t_{ik} \cdot s_{ijk}.$$

Теперь мы введём понятие определителя произвольной матрицы из K и покажем, что такой определитель обладает свойствами, аналогичными основным свойствам обычного определителя матриц из кольца $M(n, R)$. Свойства этого обычного определителя мы используем без дополнительных пояснений.

В нескольких случаях определители матриц из кольца K встречаются в статьях [3, 39, 40, 97, 98]. В работе [62] предложен общий

подход к понятию определителя произвольной формальной матрицы порядка 2.

Введём некоторые преобразования строк и столбцов матриц из K.

A. Строки матрицы A можно умножать на элементы из R. Поэтому можно говорить об общих множителях элементов строк.

У нас есть гомоморфизм

$$\varphi_{ijk}\colon R_{ij}\otimes_{R_j} R_{jk}\to R_{ik},\quad \varphi_{ijk}(x\otimes y)=s_{ijk}xy=x\circ y;$$

см. § 3 и 16. Символ $\circ$ можно рассматривать как операцию в R; однако её результат зависит от индексов i, j и k. Чтобы подчеркнуть, что элемент r кольца R используется как элемент из R_{ij}, мы будем добавлять к этому элементу индексы i и j. Именно, полагаем $r_{ij}=r$. Пусть $A_1,\dots,A_n$ — строки матрицы A. Тогда $r_{ij}\circ A_j$ обозначает вектор-строку $(r_{ij}\circ a_{j1},\dots,r_{ij}\circ a_{jn})$. На самом деле мы имеем дело с некоторым R-модулем $(R,\dots,R)$.

B. Можно умножить (в смысле операции $\circ$) j-ю строку матрицы A на элемент r_{ij} и прибавить к i-й строке. Такое преобразование мы кратко записываем как $r_{ij}\circ A_j+A_i$.

C. Можно заменить i-ю строку матрицы A на строку

$$1_{ij}\circ A_j=(s_{ij1}a_{j1},\dots,s_{ijn}a_{jn})$$

и также заменить j-ю строку матрицы A на строку

$$1_{ji}\circ A_i=(s_{ji1}a_{i1},\dots,s_{jin}a_{in}).$$

Переход от матрицы A к полученной матрице назовём *перестановкой* i-й строки и j-й строки матрицы A. Аналогичные преобразования могут выполняться над столбцами матрицы A.

Будем говорить, что i-я строка и j-я строка матрицы A *пропорциональны*, если $A_j=r_{ji}\circ A_i$ или $A_i=r_{ij}\circ A_j$ для некоторых элементов $r_{ji},r_{ij}\in R$.

Пусть η — один из гомоморфизмов

$$M(n,R,\{s_{ijk}\})\to M(n,R),$$

определённых перед предложением 16.2. Он действует по правилу $(a_{ij})\to(t_{ij}a_{ij})$, где $t_{ij}=s_{ij\ell}$ для некоторого фиксированного $\ell=1,\dots,n$.

Обычный определитель матрицы $C\in M(n,R)$ обозначим через $|C|$. Для любой матрицы A из кольца K обозначим $d(A)=|\eta A|$. Мы называем элемент $d(A)$ *определителем* матрицы A в кольце K, а отображение $d\colon K\to R$, $A\to d(A)$, называется *определителем кольца* K.

Изложим эквивалентный способ введения определителей матриц из K. Сначала вернёмся к операции $\circ$. Если $x_{ij}, x_{jk} \in R$, то по нашей договорённости $x_{ij} \circ x_{jk} = s_{ijk} x_{ij} x_{jk}$. Элементу $x_{ij}x_{jk}$ будем приписывать индексы i, k.

Теперь пусть даны элементы $a_{i_1 i_2}, \ldots, a_{i_{k-1} i_k}$ кольца R. Выражение

$$a_{i_1 i_2} \circ a_{i_2 i_3} \circ \ldots \circ a_{i_{k-1} i_k} \tag{1}$$

имеет точный смысл. Действительно, любая расстановка скобок в выражении (1) правомерна. При этом результат не зависит от расстановки скобок, т. е. $\circ$ — ассоциативная операция. Это доказывается индукцией по числу элементов. При $k = 3$ утверждение следует из основных тождеств, указанных в начале параграфа.

Выражению (1) можно придать значение с помощью тензорного произведения $R_{i_1 i_2} \otimes_R \ldots \otimes_R R_{i_{k-1} i_k}$. Гомоморфизмы φ_{ijk} индуцируют гомоморфизм φ этого произведения в R. Тогда

$$a_{i_1 i_2} \circ \ldots \circ a_{i_{k-1} i_k} = \varphi(a_{i_1 i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_{k-1} i_k}).$$

Ещё можно поступить следующим образом. Как и раньше, пусть E_{ij} — матричная единица. Тогда $E_{ij}E_{jk} = s_{ijk}E_{ik}$. Если

$$(a_{i_1 i_2} E_{i_1 i_2}) \cdot \ldots \cdot (a_{i_{k-1} i_k} E_{i_{k-1} i_k}) = c E_{i_1 i_k}, \quad c \in R,$$

то $a_{i_1 i_2} \circ \ldots \circ a_{i_{k-1} i_k} = c$.

Пусть ещё дан элемент $a_{i_k i_1}$. Индексы элементов $a_{i_1 i_2}, \ldots, a_{i_{k-1} i_k}, a_{i_k i_1}$ образуют цикл; обозначим его σ. Запишем его, начиная с другого элемента. В таком случае выражение $a_{i_1 i_2} \circ \ldots \circ a_{i_{k-1} i_k} \circ a_{i_k i_1}$ будет равно соответствующему выражению для другой записи цикла σ (надо учесть равенство $s_{iji} = s_{jij}$).

Теперь мы можем придать значение выражению $a_{1 i_1} \circ \ldots \circ a_{n i_n}$ при условии, что вторые индексы множителей образуют перестановку чисел от 1 до n. Для этого запишем подстановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

в виде произведения независимых циклов $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Если $c_1, \ldots, c_m$ — произведения (в смысле операции $\circ$) элементов, индексы которых входят в циклы $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ соответственно, то полагаем

$$a_{1 i_1} \circ \ldots \circ a_{n i_n} = c_1 \cdot \ldots \cdot c_m.$$

Мы утверждаем, что

$$d(A) = \sum_{n!} (-1)^q a_{1 i_1} \circ \ldots \circ a_{n i_n},$$

где q — число инверсий в перестановке $i_1, \dots, i_n$. Так как

$$d(A) = |\eta A| = \sum_{n!} (-1)^q t_{1i_1} a_{1i_1} \cdot \dots \cdot t_{ni_n} a_{ni_n},$$

достаточно проверить, что соответствующие слагаемые двух сумм равны между собой. Возьмём два таких слагаемых. Разложим подстановку индексов множителей этих слагаемых в произведение независимых циклов. Покажем, что произведения элементов, индексы которых составляют какой-то цикл, равны между собой. Возьмём один из циклов $(i_1 i_2 \dots i_k)$. Произведение $a_{i_1 i_2} \circ \dots \circ a_{i_k i_1}$ равно

$$s_{i_1 i_2 i_1} \cdot s_{i_2 i_3 i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_{k-1} i_k i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k i_1}.$$

Соответствующее произведение для определителя ηA есть

$$t_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot t_{i_k i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k i_1}.$$

Индукцией по длине цикла покажем, что

$$t_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot t_{i_k i_1} = s_{i_1 i_2 i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_{k-1} i_k i_1}.$$

Если $k = 2$, то $t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_1} = s_{i_1 i_2 i_1}$. Пусть $k \geqslant 3$. Имеем $t_{i_{k-1} i_k} t_{i_k i_1} = t_{i_{k-1} i_1} s_{i_{k-1} i_k i_1}$; далее применяем предположение индукции. В итоге получаем соотношение

$$d(A) = \sum_{n!} (-1)^q a_{1i_1} \circ \dots \circ a_{ni_n}.$$

Можно сказать, что для определителя $d(A)$ имеет место *формула полного развёртывания*. Как следствие, получаем, что первое определение определителя $d(A)$ не зависит от выбора гомоморфизма η.

Запишем несколько основных свойств определителя $d(A)$. Каждое из них можно проверить исходя из первого либо второго определения определителя. Мы чаще используем первое определение, чтобы не повторять общеизвестные рассуждения.

1. *Справедливо равенство* $d(E) = 1$.

2. *Определитель* d *является полилинейной функцией строк матрицы.*

Свойство 2 вытекает из равенства $d(A) = \eta A$ и аналогичного свойства обычного определителя.

3. *Если матрица* A' *получена из матрицы* A *перестановкой* i*-й строки и* j*-й строки при* $i \neq j$*, то* $d(A') = -s_{iji} d(A)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу A', где i-я строка равна $1_{ij} \circ A_j$, а j-я строка равна $1_{ji} \circ A_i$. Рассмотрим матрицу $\eta(A')$, где i-я строка равна $(t_{i1}s_{ij1}a_{j1}, \ldots, t_{in}s_{ijn}a_{jn})$. Для каждого k теперь получаем, что

$$t_{ik}s_{ijk} = s_{ik\ell}s_{ijk} = s_{ij\ell}s_{jk\ell} = s_{ij\ell}t_{jk}.$$

Можно проделать то же самое для j-й строки матрицы $\eta(A')$. Получаем, что

$$|\eta(A')| = s_{ij\ell}s_{ji\ell}|A''| = s_{iji}|A''|,$$

где матрица A'' получается из ηA перестановкой i-й строки и j-й строки. Поэтому $|A''| = -|\eta A|$. Теперь получаем

$$d(A') = |\eta(A')| = s_{iji}|A''| = -s_{iji}|\eta A| = -s_{iji}d(A). \qquad \square$$

4. *Если некоторые две строки матрицы A пропорциональны, то $d(A) = 0$.*

Доказательство. Пусть j-я строка матрицы A равна $r_{ji} \circ A_i$ для некоторого $r_{ji} \in R$. По свойству 2 можно считать, что эта строка имеет вид $(s_{ji1}a_{i1}, \ldots, s_{ijn}a_{in})$. Для матрицы ηA строка с номером i равна $(s_{i1\ell}a_{i1}, \ldots, s_{in\ell}a_{in})$ для некоторого ℓ, а строка с номером j равна $(s_{j1\ell}s_{ji1}a_{i1}, \ldots, s_{jn\ell}s_{jin}a_{in})$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ имеем $s_{jik}s_{jk\ell} = s_{ji\ell}s_{ik\ell}$. Теперь ясно, что i-я строка матрицы ηA пропорциональна её j-й строке. Следовательно, $d(A) = |\eta A| = 0$. $\square$

5. *Если умножить (в смысле операции $\circ$) j-ю строку матрицы A на некоторый элемент $r_{ij} \in R$ и прибавить произведение к i-й строке матрицы A, то определитель полученной матрицы будет равен $d(A)$.*

Доказательство утверждения 5 использует стандартные рассуждения, основанные на свойствах 2 и 4.

6. *Для любых матриц A и B верно равенство $d(AB) = d(A)d(B)$.*

Доказательство. Ясно, что верны равенства

$$d(AB) = |\eta(AB)| = |\eta(A)\eta(B)| = |\eta(A)| \cdot |\eta(B)| = d(A)d(B). \qquad \square$$

7. *Если $s_{ikj} = s_{jki}$ для всех i, j, k, то $d(A) = d(A^t)$ для любой матрицы A. Если все элементы s_{iji} не являются делителями нуля в R, то верно и обратное.*

Доказательство. Можно использовать гомоморфизм η или формулу полного развёртывания; это практически одно и то же. Будем использовать первый способ. Верны равенства $d(A) = |\eta A|$ и $d(A^t) = |\eta(A^t)|$. Имеется известное соответствие между слагаемыми опреде-

лителей $|\eta A|$ и $|\eta(A^t)|$. Возьмём некоторое слагаемое c определителя $|\eta A|$; пусть τ — подстановка индексов этого слагаемого. Верно равенство $\tau = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_m$, где σ_i — попарно независимые циклы (в том числе длины 1). Далее, пусть c_i — произведение множителей, индексы которых входят в σ_i, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $c = c_1 \cdot \ldots \cdot c_m$.

Пусть слагаемое d определителя $|\eta(A^t)|$ соответствует c. Подстановка его индексов есть $\tau^{-1} = \sigma_m^{-1} \cdot \ldots \cdot \sigma_1^{-1}$. Запишем соответствующее представление $d = d_1 \cdot \ldots \cdot d_m$ элемента d. Проверим, что $c_1 = d_1, \ldots, c_m = d_m$. С этой целью возьмём какой-то цикл $\sigma = (i_1 i_2 \ldots i_k)$. Без ограничения общности можно считать, что $k \geqslant 2$. Тогда $\sigma^{-1} = (i_k i_{k-1} \ldots i_1)$. Теперь достаточно проверить, что произведение $t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot t_{i_{k-1} i_k} t_{i_k i_1}$ равно произведению $t_{i_k i_{k-1}} t_{i_{k-1} i_{k-2}} \cdot \ldots \cdot t_{i_2 i_1} t_{i_1 i_k}$. Эти произведения равны

$$(t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot t_{i_{k-2} i_{k-1}} t_{i_{k-1} i_1}) s_{i_{k-1} i_k i_1}$$

и

$$(t_{i_2 i_1} t_{i_3 i_2} \cdot \ldots \cdot t_{i_{k-1} i_{k-2}} t_{i_1 i_{k-1}}) s_{i_1 i_k i_{k-1}}$$

соответственно. Вид выражений в скобках подсказывает, что можно провести индукцию по длине цикла σ. Случай $k = 2$ очевиден.

Теперь предположим, что все множители s_{iji} не являются делителями нуля и $d(A) = d(A^t)$ для каждой матрицы A. Если какие-то два из трёх индексов i, j, k совпадают, то $s_{ikj} = s_{jki}$. Поэтому считаем, что индексы i, j, k попарно различны. Возьмём матрицу

$$A = E + E_{ik} + E_{kj} + E_{ji} - E_{ii} - E_{kk} - E_{jj}.$$

Определитель $d(A)$ равен

$$1_{ik} \circ 1_{kj} \circ 1_{ji} = s_{ikj} s_{iji},$$

определитель $d(A^t)$ равен $s_{jki} s_{jij}$. Следовательно, $s_{ikj} = s_{jki}$. □

Верна известная формула для определителя с углом, состоящим из нулей.

8. *Если матрица A имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} B & D \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$, где B и C — матрицы порядков m и $n-m$ соответственно, то $d(A) = d(B)d(C)$.*

Доказательство. Сделаем некоторые пояснения. Матрица B имеет систему множителей $\{s_{ijk} \mid 1 \leqslant i, j, k \leqslant m\}$, а матрица C имеет систему множителей $\{s_{ijk} \mid m+1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ (все индексы можно уменьшить на m). Для колец $M(m, R, \{s_{ijk}\})$ и $M(n-m, R, \{s_{ijk}\})$ считаем, что соответствующие гомоморфизмы η являются ограничениями гомоморфизма η для кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$. Имеется в виду, что матрица B

отождествляется с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, а матрица C отождествляется с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$. Теперь можно записать равенства

$$d(A) = |\eta A| = |\eta B| \cdot |\eta C| = d(B)d(C). \qquad \square$$

Если среди множителей s_{ijk} есть делители нуля, то это часто затрудняет работу с матрицами. Определим одно кольцо формальных матриц, которое иногда помогает избегать этих трудностей. В одном случае подобное кольцо введено в статье [97]; см. ниже.

Зафиксируем коммутативное кольцо R и целое число $n \geqslant 2$. Пусть $X = \{x_{ijk}\}$ — множество из $n(n^2-1)$ переменных, где $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, $i \neq j$, $j \neq k$. Далее, пусть $R[X]$ — кольцо многочленов от переменных x_{ijk} с коэффициентами в кольце R.

Пусть I — идеал кольца $R[X]$, порождённый всеми разностями вида $x_{ijk}x_{ik\ell} - x_{ij\ell}x_{jk\ell}$. Обозначим через $\overline{R[X]}$ факторкольцо $R[X]/I$. Отождествим элементы кольца R с их образами в $\overline{R[X]}$. Для упрощения записи смежный класс $x_{ijk}+I$ обозначим через x_{ijk}. В дальнейшем будет важно то, что элементы x_{ijk} не являются делителями нуля в $\overline{R[X]}$.

Полагаем $x_{iik} = 1 = x_{ikk}$ для всех $i, k = 1, \ldots, n$. В кольце $\overline{R[X]}$ верны равенства $x_{ijk}x_{ik\ell} = x_{ij\ell}x_{jk\ell}$ для всех значений индексов. Поэтому существует кольцо формальных матриц $M(n, \overline{R[X]}, \{x_{ijk}\})$. Обозначим это кольцо через $M(n, \overline{R[X]}, X)$. Имеется известный гомоморфизм

$$\eta\colon M(n, \overline{R[X]}, X) \to M(n, \overline{R[X]});$$

см. абзац перед предложением 16.2. Кроме того, ранее был определён определитель $d\colon M(n, \overline{R[X]}, X) \to \overline{R[X]}$. В некотором смысле кольцо $M(n, \overline{R[X]}, X)$ и определитель d являются коуниверсальным объектом для колец формальных матриц порядка n над R и их определителей. Придадим точный смысл этой фразе.

Пусть дано конкретное кольцо формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$. В таком случае появляются несколько гомоморфизмов, которые мы называем *гомоморфизмами замены* и обозначаем одной буквой θ. Каждый такой гомоморфизм заменяет символ x_{ijk} на элемент s_{ijk}. Прежде всего это гомоморфизм $\theta\colon R[X] \to R$. Поскольку R вкладывается в $R[X]$, гомоморфизм θ расщепляется, т. е. $R[X] = R \oplus \operatorname{Ker}(\theta)$.

Из основных тождеств (1) из § 16 вытекает включение $I \subseteq \operatorname{Ker}(\theta)$. После отождествления можно считать, что $\overline{R[X]} = R \oplus (\operatorname{Ker}(\theta))/I$. Кроме того, θ индуцирует гомоморфизм $\overline{R[X]} \to R$; обозначим его той же буквой θ.

Более общим образом, имеется расщепляющийся гомоморфизм замены $\theta\colon M(n, R[X]) \to M(n, R)$, при котором θ применяется к каждому элементу матрицы, и также имеется разложение

$$M(n, R[X]) = M(n, R) \oplus \operatorname{Ker}(\theta).$$

Далее, θ индуцирует гомоморфизм замены

$$\theta\colon M(n, \overline{R[X]}) \to M(n, R)$$

и разложение

$$M(n, \overline{R[X]}) = M(n, R) \oplus (\operatorname{Ker}(\theta)/M(n, I)). \qquad (*)$$

Последний гомоморфизм θ будет также гомоморфизмом колец формальных матриц

$$M(n, \overline{R[X]}, X) \to M(n, R, \{s_{ijk}\}).$$

Замечания. 1. Разложение $(*)$ является только аддитивным.

2. Гомоморфизм θ сюръективен. Более точно, каждая матрица $(a_{ij}) \in M(n, R)$ является образом матрицы (a_{ij}) из $M(n, \overline{R[X]})$ (мы отождествляем матрицы (a_{ij}) и $(a_{ij} + I)$).

Теперь можно записать две коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}, X) & \xrightarrow{\eta} & M(n, \overline{R[X]}) \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ M(n, R, \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{\eta} & M(n, R), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}) & \xrightarrow{\det} & \overline{R[X]} \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ M(n, R) & \xrightarrow{\det} & R, \end{array}$$

где det — обычный определитель. Коммутативность второй диаграммы непосредственно проверяется с помощью формулы полного развёртывания определителя. Также имеем коммутативную диаграмму, которая соединяет две предыдущие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}, X) & \xrightarrow{d} & \overline{R[X]} \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ M(n, R, \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{d} & R. \end{array}$$

Мы имели в виду существование последней диаграммы, когда говорили, что пара $(M(n, \overline{R[X]}, X), d)$ коуниверсальна.

В одном важном случае можно упростить конструкцию кольца $M(n, \overline{R[X]}, X)$. Рассмотрим кольца формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, в которых все множители s_{ijk} являются целой неотрицательной степенью некоторого ненулевого элемента s. Обозначим через $M(n, R, s)$ некоторое такое кольцо. В § 18 и 19 мы подробно изучали такие кольца $M(n, R, s)$, что любой множитель s_{ijk} равен 1 или s. В § 20 мы считали, что $s_{ijk} = s^m$, $m \geqslant 1$, при $i \neq j$ и $j \neq k$.

Относительно элемента s также предположим, что $s^k \neq s^\ell$ для любых различных неотрицательных k и ℓ. Пусть x — переменная. Для любых i, j, k обозначим $x_{ijk} = x^m$ при условии, что $s_{ijk} = s^m$. Множество $\{x_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ является системой множителей в кольце многочленов $R[x]$. Следовательно, имеется кольцо формальных матриц $M(n, R[x], \{x_{ijk}\})$; обозначим его $M(n, R[x], x)$. Записанные выше три диаграммы превращаются в диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M(n, R[x], x) & \xrightarrow{\eta} & M(n, R[x]) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} \\ M(n, R, s) & \xrightarrow{\eta} & M(n, R), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M(n, R[x], x) & \xrightarrow{d} & R[x] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} \\ M(n, R, s) & \xrightarrow{d} & R. \end{array}$$

В этих диаграммах d — определитель, а θ — гомоморфизм замены, который заменяет букву x на букву s. Танг и Жу определили и использовали кольцо $M(n, R[x], x)$ в работе [97].

§ 22. Некоторые теоремы о формальных матрицах

Сохраняются все обозначения из предыдущего параграфа. Мы по-прежнему считаем, что дано некоторое кольцо формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, где R — коммутативное кольцо. Покажем, что верны аналоги теоремы Гамильтона — Кэли и одного известного критерия обратимости матрицы.

Напомним, что $t_{ij} = s_{ij\ell}$ для некоторого фиксированного ℓ. Мы всё время используем гомоморфизм

$$\eta\colon M(n, R, \{s_{ijk}\}) \to M(n, R), \quad (a_{ij}) \to (t_{ij}a_{ij});$$

см. § 16.

Пусть $A = (a_{ij})$ — некоторая матрица. Обозначим через $\eta(A)^*$ присоединённую матрицу для ηA. Тогда

$$\eta(A)\eta(A)^* = \eta(A)^*\eta(A) = |\eta(A)|E.$$

Далее запишем $\eta(A)^* = (A'_{ji})$, где A'_{ji} — алгебраическое дополнение элемента $t_{ji}a_{ji}$. Напомним, что A'_{ji} — определитель матрицы, которая получается из матрицы ηA заменой элемента $t_{ji}a_{ji}$ на 1 и заменой всех остальных элементов j-й строки и i-го столбца на 0.

Временно будем считать, что все элементы s_{ijk} — неделители нуля. Сначала мы также предполагаем, что $n \geqslant 3$. Возьмём произвольное слагаемое определителя A'_{ji}, где $j \neq i$. Это слагаемое обязательно содержит множитель $t_{ik}a_{ik}t_{kj}a_{kj}$ для некоторого $k \neq i, j$. Так как $t_{ik}t_{kj} = s_{ikj}t_{ij}$, можно записать $A'_{ji} = t_{ji}A_{ji}$, где A_{ji} — вполне определённый элемент кольца R, получаемый из A'_{ji} каноническим способом. Если $i = j$, $t_{ij} = 1$ и $A_{ji} = A'_{ji}$. Для $n = 2$ существование такого элемента t_{ij} доказывается непосредственно.

Составим матрицу $A^* = (A_{ji})$. Для неё имеем $\eta(A^*) = \eta(A)^*$. Далее,

$$\eta(AA^*) = \eta(A)\eta(A^*) = \eta(A)\eta(A)^* = |\eta(A)| \cdot E = d(A)E = \eta(d(A)E);$$

аналогично имеем

$$\eta(A^*A) = \eta(d(A)E).$$

Так как все s_{ijk} — неделители нуля, $\operatorname{Ker}(\eta) = 0$ по предложению 16.2. Следовательно, $AA^* = A^*A = d(A)E$.

А как построить матрицу A^*, если не все элементы s_{ijk} являются неделителями нуля? Для этой цели воспользуемся коммутативной диаграммой из § 21:

$$\begin{array}{ccc} M(n, \overline{R[X]}, X) & \xrightarrow{d_X} & \overline{R[X]} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\theta} \\ M(n, R, \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{d} & R \end{array} \tag{1}$$

(в первой строке диаграммы мы поставили d_X вместо d). Так как все x_{ijk} — неделители нуля, из изложенного выше следует, что име-

ется такая однозначно определённая матрица $A_X^* \in M(n, \overline{R[X]}, X)$, что $AA_X^* = A_X^* A = d_X(A)E$. Отсюда вытекает, что

$$\theta(A)\theta(A_X^*) = \theta(A_X^*)\theta(A) = \theta(d_X(A)E),$$

или

$$A\theta(A_X^*) = \theta(A_X^*)A = \theta(d_X(A)E).$$

Из диаграммы вытекает, что $\theta d_X(A) = d\theta(A) = d(A)$, откуда

$$\theta(d_X(A)E) = d(A)E.$$

В итоге получаем равенства

$$A\theta(A_X^*) = \theta(A_X^*)A = d(A)E.$$

Остаётся обозначить $A^* = \theta(A_X^*)$. Если все элементы s_{ijk} являются неделителями нуля, то эта матрица A^* совпадает с матрицей A^*, определённой в тексте перед диаграммой. Если сравнить похожие процедуры построения матрицы A^* перед диаграммой (1) и матрицы A_X^*, то ясно, что $A^* = \theta(A_X^*)$.

Мы завершаем первую часть § 22 следующими результатами.

Теорема 22.1. *Пусть $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ — кольцо формальных матриц, и пусть A — матрица из этого кольца. Тогда справедливые следующие утверждения*:

1) $AA^* = AA^* = d(A)E$;

2) *матрица A обратима в точности тогда, когда $d(A)$ — обратимый элемент кольца A*;

3) *если A — обратимая матрица, то $A^{-1} = d(A)^{-1}A^*$.*

Для определителя $d(A)$ верны аналоги разложения определителя по элементам строки и свойство ортогональности строк и алгебраических дополнений. Имеются в виду равенства

$$a_{i1} \circ A_{i1} + a_{i2} \circ A_{i2} + \ldots + a_{in} \circ A_{in} = d(A),$$
$$a_{i1} \circ A_{j1} + a_{i2} \circ A_{j2} + \ldots + a_{in} \circ A_{jn} = 0, \quad i \neq j,$$

вытекающие из равенства $AA^* = d(A)E$.

Известная теорема Гамильтона — Кэли утверждает, что каждая матрица является корнем своего характеристического многочлена. Распространим эту теорему на матрицы из кольца матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$.

Пусть x — переменная. Рассмотрим гомоморфизм

$$\eta\colon M(n, R[x], \{s_{ijk}\}) \to M(n, R[x])$$

из предложения 16.2, где $M(n, R[x], \{s_{ijk}\})$ — кольцо формальных матриц. Этот гомоморфизм продолжает гомоморфизм

$$\eta : M(n, R, \{s_{ijk}\}) \to M(n, R).$$

Теперь возьмём какой-нибудь символ λ. Пусть A — матрица из кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$. С помощью равенства $f(\lambda) = d(\lambda E - A)$ определим характеристический многочлен $f(\lambda)$ матрицы A (относительно кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$), где $d(\lambda E - A)$ — определитель матрицы $\lambda E - A$ в кольце $M(n, R[\lambda], \{s_{ijk}\})$. Так как

$$d(\lambda E - A) = |\eta(\lambda E - A)| = |\lambda E - \eta A|,$$

многочлен $f(\lambda)$ является характеристическим многочленом матрицы ηA в кольце $M(n, R)$. По теореме Гамильтона — Кэли имеем $f(\eta A) = 0$. Используя равенство

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \quad a_i \in R,$$

получаем, что $\eta(fA) = f(\eta A) = 0$. Если η — инъективное отображение (все s_{ijk} — неделители нуля), то $f(A) = 0$, что и требуется.

Если отображение η не инъективно, то снова рассмотрим кольцо $M(n, \overline{R[X]}, X)$ из § 21; для этого кольца соответствующий гомоморфизм η инъективен. Существует кольцо $M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X)$. Описанный в § 21 гомоморфизм $\theta : \overline{R[X]} \to R$ индуцирует гомоморфизм $\theta : (\overline{R[X]})[\lambda] \to R[\lambda]$, при котором θ применяется к коэффициентам многочленов. Наконец, последний гомоморфизм θ индуцирует гомоморфизм

$$\theta : M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X) \to M(n, R[\lambda], \{s_{ijk}\}).$$

Также имеется следующая коммутативная диаграмма, аналогичная диаграмме из § 21:

$$\begin{array}{ccc} M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X) & \xrightarrow{d} & (\overline{R[X]})[\lambda] \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ M(n, R[\lambda], \{s_{ijk}\}) & \xrightarrow{d} & R[\lambda]. \end{array} \qquad (2)$$

Вернёмся к характеристическому многочлену $f(\lambda)$ матрицы $A = (a_{ij})$. Рассмотрим матрицу $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ из кольца $M(n, \overline{R[X]}, X)$, для которой $\theta(\overline{A}) = A$, где θ взято из диаграммы (1). Пусть $F(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы $\overline{A}$, $F(\lambda) = d(\lambda E - \overline{A})$, где

$$\lambda E - \overline{A} \in M(n, (\overline{R[X]})[\lambda], X).$$

Тогда

$$\theta(\lambda E - \overline{A}) = \lambda E - A,$$

где θ взято из диаграммы (2). Из диаграммы (2) вытекает, что

$$\theta d(\lambda E - \overline{A}) = d\theta(\lambda E - \overline{A}) = d(\lambda E - A).$$

Иными словами, $\theta(F(\lambda)) = f(\lambda)$, где

$$F(\lambda) \in (\overline{R[X]})[\lambda], \quad f(\lambda) \in R[\lambda], \quad \theta\colon (\overline{R[X]})[\lambda] \to R[\lambda].$$

Представим многочлен $F[\lambda]$ подробнее:

$$F(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1}\lambda + \bar{a}_n, \quad \bar{a}_i \in \overline{R[X]}.$$

Затем вычислим

$$f(\lambda) = \theta(F(\lambda)) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Теперь из доказанного выше следует, что

$$F(\overline{A}) = \overline{A}^n + \bar{a}_1\overline{A}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1}\overline{A} + \bar{a}_n E = 0.$$

Поэтому

$$0 = \theta(F(\overline{A})) = A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_nE = f(A).$$

Мы доказали следующий результат.

Теорема 22.2. *Если $A \in M(n, R, \{s_{ijk}\})$ и $f(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A, то $f(A) = 0$.*

Танг и Жу [97] доказали теорему 22.2 для своих колец формальных матриц; см. начало § 18.

В заключение рассмотрим свойство единственности определителя. Для обычного определителя матрицы некоторые комбинации свойств 1–8 из § 21 являются характеристическими. Мы имеем в виду, что если некоторое отображение $f\colon M(n, R) \to R$ обладает некоторым набором из свойств 1–8, то f совпадает с определителем. Покажем, что при некоторых ограничениях для введённого в § 21 определителя свойства 1–3 являются характеристическими в указанном смысле.

Теорема 22.3. *Пусть $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ — кольцо формальных матриц, где кольцо R не имеет элементов аддитивного порядка 2 и все множители s_{ijk} не являются делителями нуля. Кроме того, пусть $f\colon M(n, R, \{s_{ijk}\}) \to R$ — такое отображение, что верны следующие утверждения*:

1) $f(E)=1$;

2) *f — полилинейная функция строк матрицы*;

3) *если поменять местами строки с номерами i и j в произвольной матрице $A \in M(n, R, \{s_{ijk}\})$ и обозначить полученную матрицу через A', то $f(A') = -s_{iji} f(A)$.*

Тогда f совпадает с определителем d кольца $M(n, R, \{s_{ijk}\})$.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица. Используя несколько раз полилинейность функции f, представим элемент $f(A)$ в виде суммы элементов вида $f(C)$, где C — такая матрица, что i-я строка матрицы C содержит элемент a_{ij} на позиции (i, j), а остальные элементы равны нулю. Далее из каждой строки матрицы C вынесем этот элемент a_{ij} за знак отображения f. Полученную матрицу обозначим через D (в каждой строке матрицы D стоит 1 не более чем в одной позиции, а на остальных позициях стоят нули). Учитывая свойство 2, получаем, что $f(C) = a_{1j1} \cdot \ldots \cdot a_{njn} f(D)$.

Покажем, что если среди индексов $j_1, \ldots, j_n$ есть совпадающие, то $f(D) = 0$. Например, пусть 1 стоит в позициях (i, k) и (j, k), $i \neq j$. В матрице D переставим строки с номерами i и j; обозначим полученную матрицу через D'. По свойству 3 имеем $f(D') = -s_{iji} f(D)$. Из свойства 2 вытекает, что

$$f(D') = s_{ijk} s_{jik} f(D) = s_{iji} f(D).$$

Поэтому имеем равенства

$$s_{iji} f(D) = -s_{iji} f(D), \quad 2s_{iji} f(D) = 0, \quad 2f(D) = 0, \quad f(D) = 0.$$

Итак, остались только такие элементы из $f(C)$, что индексы элементов $a_{1j_1}, \ldots, a_{nj_n}$ образуют подстановку. Кроме того, если некоторая строка матрицы D состоит из нулей, то $f(D) = 0$ по свойству 2. Поэтому мы считаем, что каждая строка любой матрицы D содержит ровно один элемент, равный 1, а остальные элементы равны нулю; это означает, что D — матрица подстановки. Пусть τ — подстановка индексов ненулевых элементов матрицы D. Запишем $\tau = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_m$, где σ_i — попарно независимые циклы. Обозначим один из этих циклов через σ; пусть $\sigma = (i_1 i_2 \ldots i_k)$. Переставляя строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, сделаем так, что единицы из этих строк окажутся на главной диагонали. Как при этом изменится элемент $f(D)$? Мы выясним это с помощью индукции по длине цикла σ.

Для $m = 2$ и $m = 3$ предположение индукции проверяется непосредственно. Предположим, что для любого цикла σ длины m, где $3 \leqslant m < k$, верно равенство

$$f(D) = (-1)^{m-1} s_{i_1 i_2 i_3} s_{i_1 i_3 i_4} \cdot \ldots \cdot s_{i_1 i_{m-1} i_m} s_{i_1 i_m i_1} f(V).$$

Матрица V отличается от D тем, что строки матрицы V с номерами $i_1, \dots, i_m$ имеют 1 на главной диагонали.

Пусть теперь σ имеет длину k. Переставим строки матрицы D с номерами i_1 и i_2. Обозначим полученную матрицу через D'. Матрицы D и D' связаны соотношением $f(D') = -s_{i_1 i_2 i_1} f(D)$. В матрице D' вынесем за знак f элемент $s_{i_1 i_2 i_3}$ из строки i_1 и элемент $s_{i_2 i_1 i_3}$ из строки i_2. Обозначим полученную матрицу через D''. Имеет место равенство $f(D') = s_{i_2 i_1 i_2} s_{i_1 i_2 i_3} f(D'')$. Из двух последних равенств вытекает, что $f(D) = -s_{i_1 i_2 i_3} f(D'')$. На позиции (i_2, i_2) матрицы D'' стоит 1, а индексы элементов (единиц) из оставшихся строк образуют цикл $(i_1 i_3 \dots i_k)$ длины $k-1$. По предположению индукции получаем равенство

$$f(D'') = (-1)^{k-2} s_{i_1 i_3 i_4} s_{i_1 i_4 i_5} \cdot \dots \cdot s_{i_1 i_{k-1} i_k} s_{i_1 i_k i_1} f(W),$$

где W — матрица, у которой в строках с номерами $i_1, \dots, i_k$ на главной диагонали стоит 1, а остальные строки те же, что у матрицы D. В итоге получаем равенство

$$f(D) = (-1)^{k-1} s_{i_1 i_2 i_3} s_{i_1 i_3 i_4} \cdot \dots \cdot s_{i_1 i_{k-1} i_k} s_{i_1 i_k i_1} f(W).$$

Так как функция определителя d обладает свойствами 1–3, аналогичное равенство верно для d.

Далее мы поступаем аналогично с остальными циклами σ_i из разложения подстановки τ. В конечном итоге мы получим, что соответствующая матрица W совпадает с единичной матрицей. Поэтому $f(W) = d(W)$. Окончательно получаем, что

$$f(D) = d(D), \quad f(C) = d(C), \quad f(A) = d(A). \qquad \square$$

Замечания. 1. Матрица $A = (a_{ij})$, не являющаяся обратимой в кольце $M(n, R)$, может быть обратимой в кольце $M(n, R, \Sigma)$, где Σ — некоторая система множителей. Сформулируем следующую задачу. Охарактеризовать матрицы A, которые обратимы в некотором кольце $M(n, R, \Sigma)$. Учитывая существование гомоморфизма

$$\eta \colon M(n, R, \Sigma) \to M(n, R)$$

из § 16, можно придать иную форму этой задаче. Для каких матриц A и систем множителей $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ матрица $A' = (s_{ij\ell} a_{ij})$ обратима в кольце $M(n, R)$ для некоторого числа $\ell = 1, 2, \dots, n$?

2. Можно определить и изучать перманент матрицы A в кольце $M(n, R, \Sigma)$. Стоит отметить, что для различных задач об определителе и перманенте есть возможность для вариаций, связанная с существованием многих систем множителей Σ. Например, в случае известной

проблемы Пойа о конвертации перманента и определителя можно требовать, чтобы перманент матрицы A в кольце $M(n, R, \Sigma)$ совпадал с определителем какой-то другой матрицы в кольце $M(n, R, \Sigma')$ для некоторой (в общем случае другой) системы множителей Σ'.

3. Пусть F — поле и $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — некоторая система множителей $s_{ijk} \in F$. Если все s_{ijk} не равны нулю, то по предложению 16.2 имеется изоморфизм $M(n, F, \Sigma) \cong M(n, F)$. Этот случай не очень интересен. Если же некоторые множители s_{ijk} равны нулю, то свойства кольца $M(n, F, \Sigma)$ могут сильно отличаться от свойств кольца $M(n, F)$. Отметим частный случай, когда любой множитель s_{ijk} равен 1 или 0. Для соответствующих колец $M(n, F, \Sigma)$ можно исследовать проблемы I–III, сформулированные в § 16. Кроме того, можно рассматривать представленные выше вопросы 1 и 2.

Глава 4

Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц

Развивается некоторый метод вычисления группы Гротендика K_0 и группы Уайтхеда K_1 колец формальных матриц через группы K_0 и K_1 исходных колец.

В § 23 определяются некоторые функторы между категориями конечно порождённых проективных K-модулей и $(R \times S)$-модулей. Эти функторы индуцируют гомоморфизмы между группами $K_i(K)$ и $K_i(R)$, $K_i(S)$, $i = 0, 1$, которые используются для вычисления групп $K_0(K)$ и $K_1(K)$. В § 23 при некоторых ограничениях также устанавливается эквивалентность категорий конечно порождённых проективных K-модулей и $(R \times S)$-модулей.

Параграфы 24 и 25 посвящены группе K_0 кольца формальных матриц порядка 2.

В § 26 изучается группа K_1 кольца формальных матриц порядка 2.

В § 27 кратко рассматриваются группы K_0 и K_1 кольца формальных матриц произвольного порядка.

§ 23. Эквивалентность двух категорий проективных модулей

Пусть R — кольцо. Обозначим через $P(R)$ категорию всех конечно порождённых проективных R-модулей.

Группа Гротендика $K_0(R)$ кольца R — это факторгруппа F/H, где F — свободная абелева группа, базис которой составляют классы изоморфных модулей из $P(R)$, а H — подгруппа в F, порождённая всеми элементами вида $(X \oplus Y) - (X) - (Y)$ для всех $X, Y \in P(R)$, где (X) обозначает класс модулей, изоморфных X. Пусть $[X] = (X) + H \in K_0(R)$. Тогда $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$.

Пусть $\mathrm{GL}(n, R)$ — группа обратимых матриц порядка n над кольцом R. Считаем, что группа $\mathrm{GL}(n, R)$ вложена в группу $\mathrm{GL}(n+1, R)$

с помощью мономорфизма $A \to \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Обозначим через $\mathrm{GL}(R)$ объединение групп $\mathrm{GL}(n, R)$ для всех $n \geqslant 1$. Далее, $E(n, R)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{GL}(n, R)$, порождённую всеми элементарными матрицами. При вложении $\mathrm{GL}(n, R)$ в $\mathrm{GL}(n+1, R)$ подгруппа $E(n, R)$ вкладывается в $E(n+1, R)$. Объединение всех $E(n, R)$ обозначается $E(R)$ и называется *группой элементарных матриц*. Эта группа совпадает с коммутантом группы $\mathrm{GL}(R)$. *Группа Уайтхеда* $K_1(R)$ кольца R есть абелева группа $\mathrm{GL}(R)/E(R)$.

Для наших целей более полезно другое определение группы $K_1(R)$. Возьмём категорию автоморфизмов в $P(R)$. Её объекты — пары вида (X, α), где $X \in P(R)$ и α — автоморфизм модуля X. Морфизмы определяются обычным для подобных категорий образом. Пусть F — свободная абелева группа, у которой образующими являются пары (X, α) по одной для каждого класса пар, изоморфных в категории автоморфизмов. Группа $K_1(R)$ есть факторгруппа F/G, где подгруппа G порождается элементами вида

$$(X, \alpha\beta) - (X, \alpha) - (X, \beta) \quad \text{и} \quad (X \oplus Y, \alpha\beta) - (X, \alpha) - (Y, \beta),$$

и подразумевается, что α действует тождественно на Y и β действует тождественно на X. Смежный класс $(X, \alpha) + G$ обозначается через $[(X, \alpha)]$.

Естественный изоморфизм между двумя группами $K_1(R)$ устанавливается следующим образом; см. теорему 1.2 гл. 9 из книги [10] и теорему 3.1.7 из книги [89]. Матрица $A \in \mathrm{GL}(n, R)$ определяет автоморфизм α модуля R^n. Элементу $AE(R)$ группы $\mathrm{GL}(R)/E(R)$ сопоставляется элемент $[(R^n, \alpha)]$ группы F/G. В данной книге используется только второе определение группы $K_1(R)$.

Любой элемент группы $K_1(R)$ можно записать в виде $[(X, \alpha)]$ для некоторых X и α. Нулевым элементом является $[(X, 1)]$ при всяком X. Противоположным элементом к $[(X, \alpha)]$ является $[(X, \alpha^{-1})]$. Автоморфизм α несёт основную информацию об элементе $[(X, \alpha)]$. Поэтому мы часто пишем $[\alpha]$ вместо $[(X, \alpha)]$.

Для определения гомоморфизмов между группами K_0 и K_1 мы будем использовать следующие факты.

Если R и S — два кольца, то каждый аддитивный функтор

$$F\colon P(R) \to P(S)$$

индуцирует групповой гомоморфизм

$$K_0(F)\colon K_0(R) \to K_0(S), \quad [X] \to [FX]$$

(так действует гомоморфизм на образующих группы $K_0(R)$) и

$$K_1(F)\colon K_1(R) \to K_1(S), \quad [(X, \alpha)] \to [(FX, F\alpha)].$$

В частности, кольцевой гомоморфизм $i\colon R \to S$ индуцирует функтор

$$T(i) = S \otimes_R (-)\colon P(R) \to P(S), \quad X \to S \otimes_R X.$$

Следовательно, имеются гомоморфизмы

$$K_0(i)\colon K_0(R) \to K_0(S), \quad [X] \to [S \otimes_R X],$$

и

$$K_1(i)\colon K_1(R) \to K_1(S), \quad [(X, \alpha)] \to [(S \otimes_R X, 1 \otimes \alpha)].$$

Пусть теперь $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц с идеалами следа I и J, определённое в § 1. Имеется коммутативная диаграмма колец

$$\begin{array}{ccc} R \times S & \xrightarrow{k} & R/I \times S/J \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \| \\ K & \xrightarrow{j} & R/I \times S/J, \end{array} \tag{1}$$

в которой i — диагональное вложение, $(r, s) \to \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$, k — канонический эпиморфизм, $j\colon \left(\begin{smallmatrix} r & m \\ n & s \end{smallmatrix}\right) \to (r + I, s + J)$. Далее, можно записать диаграмму функторов

$$\begin{array}{ccc} P(R \times S) & \xrightarrow{T(k)} & P(R/I \times S/J) \\ {\scriptstyle T(i)}\downarrow & & \| \\ P(K) & \xrightarrow{T(j)} & P(R/I \times S/J). \end{array} \tag{2}$$

Действие этих функторов таково. Если $X \oplus Y$ — проективный модуль над $R \times S$, то

$$T(i)(X \oplus Y) = (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y),$$

т. е. $T(i)$ — ограничение функтора T из § 7, и

$$T(k)(X \oplus Y) = (R/I \otimes_R X) \oplus (S/J \otimes_S Y) \cong X/IX \oplus Y/JY.$$

Далее, если (X, Y) — проективный K-модуль, то

$$T(j)(X, Y) = X/MY \oplus Y/NX,$$

см. замечание перед следствием 12.2. Все три функтора переводят гомоморфизмы в индуцированные гомоморфизмы. Можно проверить, что функторы $T(j)T(i)$ и $T(k)$ естественно эквивалентны.

Диаграммы (1) и (2) индуцируют коммутативную диаграмму групп K_0 и их гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} K_0(R)\oplus K_0(S) & \xrightarrow{K_0(k)} & K_0(R/I)\oplus K_0(S/J) \\ {\scriptstyle K_0(i)}\downarrow & & \| \\ K_0(K) & \xrightarrow{K_0(j)} & K_0(R/I)\oplus K_0(S/J). \end{array} \tag{3}$$

Гомоморфизмы действуют следующим образом (мы задаём их только на образующих элементах групп K_0):

$$K_0(i)\colon [X]+[Y]\to[(X,T(X))]+[(T(Y),Y)].$$

Затем

$$K_0(k)\colon [X]+[Y]\to[X/IX]+[Y/JY].$$

Наконец,

$$K_0(j)\colon [(X,Y)]\to[X/MY]+[Y/NX].$$

Диаграммы (1) и (2) также индуцируют коммутативную диаграмму групп K_1 и их гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} K_1(R)\oplus K_1(S) & \xrightarrow{K_1(k)} & K_1(R/I)\oplus K_1(S/J) \\ {\scriptstyle K_1(i)}\downarrow & & \| \\ K_1(K) & \xrightarrow{K_1(j)} & K_1(R/I)\oplus K_1(S/J). \end{array} \tag{4}$$

Для этой диаграммы имеем

$$K_1(i)\colon [\alpha]+[\beta]\to[(\alpha,1\otimes\alpha)]+[(1\otimes\beta,\beta)].$$

Далее, можно записать

$$K_1(k)\colon [\alpha]+[\beta]\to[\overline{\alpha}]+[\overline{\beta}],$$

где $\overline{\alpha}$ (соответственно $\overline{\beta}$) — автоморфизм, индуцированный автоморфизмом α (соответственно β) на X/IX (соответственно Y/JY), а также $K_1(j)\colon [(\alpha,\beta)]\to[\overline{\alpha}]+[\overline{\beta}]$, где $\overline{\alpha}$ (соответственно $\overline{\beta}$) — автоморфизм, индуцированный автоморфизмом α (соответственно β) на X/MY (соответственно Y/NX).

Сформулируем один результат об эквивалентности категорий проективных модулей. Если L — идеал некоторого кольца T, то множество всех степеней идеала L образует базис окрестностей нуля так называемой *L-адической* топологии кольца T.

Теорема 23.1. *Если $I \subseteq J(R)$, $J \subseteq J(S)$, кольцо R полно в I-адической топологии и кольцо S полно в J-адической топологии, то функтор $T(i)$ задаёт эквивалентность между категориями $P(R \times S)$ и $P(K)$.*

Доказательство. По теореме 4.1 ядро $\left(\begin{smallmatrix} I & M \\ N & J \end{smallmatrix}\right)$ гомоморфизма j лежит в радикале $J(K)$. Следовательно, функтор $T(K)$ действует биективно, а функтор $T(j)$ действует инъективно на соответствующих классах изоморфных конечно порождённых проективных модулей; см. предложение 2.12 гл. 3 из [10].

Пусть (P, Q) — некоторый конечно порождённый проективный K-модуль. Существует такой конечно порождённый проективный $(R \times S)$-модуль $X \oplus Y$, что $T(k)(X \oplus Y) \cong P/MQ \oplus Q/NP$. Далее, получаем

$$T(i)(X \oplus Y) \cong (P, Q) \quad \text{или} \quad (P, Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y).$$

Возьмём произвольные конечно порождённые проективные R-модули X_1, X_2 и S-модули Y_1, Y_2. Отображения

$$T(i)\colon \operatorname{Hom}_R(X_1, X_2) \to \operatorname{Hom}_K\big((X_1, T(X_1)), (X_2, T(X_2))\big),$$
$$T(i)\colon \operatorname{Hom}_S(Y_1, Y_2) \to \operatorname{Hom}_K\big((T(Y_1), Y_1), (T(Y_2), Y_2)\big)$$

являются изоморфизмами; см. лемму 7.2. Мы показали, что $T(i)$ — эквивалентность. □

В процессе доказательства теоремы 23.1 мы установили следующий факт (ср. с теоремой 13.3).

Следствие 23.2. *В условиях теоремы* 23.1 *для любого конечно порождённого проективного K-модуля (P, Q) существуют конечно порождённый проективный R-модуль X и конечно порождённый проективный S-модуль Y, удовлетворяющие условию*

$$(P, Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y).$$

Следствие 23.3. *В условиях теоремы* 23.1 *справедливы изоморфизмы $K_i(K) \cong K_i(R) \oplus K_i(S)$, $i = 0, 1$.*

Доказательство. В случае $i = 0$ утверждение следует из эквивалентности категорий $P(R \times S)$ и $P(K)$. В случае $i = 1$ утверждение следует из эквивалентности категорий автоморфизмов категорий $P(R \times S)$ и $P(K)$. □

Замечание 23.4. Условиям теоремы 23.1 удовлетворяют кольца K с нильпотентными идеалами следа I и J. Это так, например, для колец формальных треугольных матриц, где $M = 0$ или $N = 0$.

§ 24. Группа $K_0(A, B)$

Рассмотрим более общие категории, чем категория $P(R)$ конечно порождённых проективных модулей. Пусть A — R-модуль. Прямые слагаемые прямых сумм конечного числа копий модуля A называются *конечно A-проективными* R-модулями [64, § 32]. Обозначим через $P(A)$ категорию конечно A-проективных R-модулей. Категории $P(A)$ и $P(\mathrm{End}_R A)$ эквивалентны [64, теорема 32.1].

Категория $P(A)$ аддитивна, и классы её изоморфных объектов образуют множество. Следовательно, можно определить *группу Гротендика* $K_0(P(A))$ категории $P(A)$, так, чтобы выполнялось равенство $K_0(R) = K_0(P(R))$ [10, 89]. В силу указанной выше эквивалентности имеет место групповой изоморфизм $K_0(P(A)) \cong K_0(\mathrm{End}_R A)$. Будем использовать символ $K_0(A)$ вместо $K_0(P(A))$.

Аналогично § 23 заметим, что группа $K_0(A)$ — это факторгруппа F/H, где F — свободная абелева группа, базис которой составляют классы изоморфных модулей из $P(A)$, а H — подгруппа в F, порождённая всеми элементами вида $(X \oplus Y) - (X) - (Y)$ для всех $X, Y \in P(A)$, где (X) обозначает класс модулей, изоморфных X. Пусть

$$[X] = (X) + H \in K_0(A).$$

Тогда $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$. Если $z \in K_0(A)$, то $z = [X] - [Y]$ для некоторых X и Y из $P(A)$. Этот полезный факт мы будем использовать без дополнительного напоминания. Кроме того, отметим, что равенство $[X] = [Y]$ в $K_0(A)$ равносильно тому, что $X \oplus A^n \cong Y \oplus A^n$ для некоторого натурального числа n. В таком случае говорят, что X и Y *стабильно изоморфны* в $P(A)$. В частности, модули X и Y из $P(R)$ стабильно изоморфны, если $X \oplus R^n \cong Y \oplus R^n$ для некоторого натурального числа n.

Если A и C — два модуля, то любой аддитивный функтор

$$F\colon P(A) \to P(C)$$

индуцирует групповой гомоморфизм $K_0(A) \to K_0(C)$, $[X] \to [FX]$ (мы указываем действие этого гомоморфизма только на образующих элементах группы $K_0(A)$).

Отметим, что можно не различать категории $P(A)$ и $P(A^n)$, $n \geqslant 2$. Следовательно, $K_0(A) \cong K_0(A^n)$.

Лемма 24.1. *Пусть A и B — два модуля, причём A — конечно B-проективный модуль. Тогда существует вложение категорий $P(A) \to P(B)$, индуцирующее гомоморфизм $K_0(A) \to K_0(B)$.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что каждый конечно A-проективный модуль является конечно B-проективным модулем. □

Пусть дано прямое разложение модулей $A = B \oplus C$. Так как B и C — конечно A-проективные модули, существуют гомоморфизмы $K_0(B) \to K_0(A)$ и $K_0(C) \to K_0(A)$ из леммы 24.1.

Предложение 24.2. *Если $A = B \oplus C$, где C — конечно B-проективный модуль, то существует канонический изоморфизм $K_0(A) \cong K_0(B)$.*

Доказательство. Ясно, что A — конечно B-проективный модуль. Имеется гомоморфизм $K_0(A) \to K_0(B)$ из леммы 24.1. Он является обратным к гомоморфизму $K_0(B) \to K_0(A)$, указанному перед предложением. □

Как и раньше, пусть $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц.

До конца параграфа считаем, что (A, B) — некоторый K-модуль, $P(A)$ и $P(B)$ — определённые выше категории и $P(A, B)$ — категория конечно (A, B)-проективных K-модулей. Далее, $K_0(A)$ и $K_0(B)$ — группы, определённые выше, и $K_0(A, B)$ — аналогичная группа для категории $P(A, B)$.

Наша цель — выразить группу $K_0(A, B)$ через группы $K_0(A)$ и $K_0(B)$.

Приведём два простых результата общего характера.

Следствие 24.3. *Для любого R-модуля X и каждого S-модуля Y существуют изоморфизмы $K_0(X, T(X)) \cong K_0(X)$ и $K_0(T(Y), Y) \cong K_0(Y)$.*

Доказательство. По следствию 7.4 существуют канонические кольцевые изоморфизмы $\mathrm{End}_K(X, T(X)) \cong \mathrm{End}_R X$ и $\mathrm{End}_K(T(Y), Y) \cong \mathrm{End}_S Y$. Они индуцируют эквивалентность категорий $P(X, T(X))$ и $P(X)$, эквивалентность категорий $P(T(Y), Y)$ и $P(Y)$, а также изоморфизмы соответствующих групп K_0. □

Следствие 24.4. *Пусть для кольца K имеет место ситуация эквивалентности, т. е. $I = R$ и $J = S$* (см. § 14). *Тогда $K_0(A) \cong K_0(A, B) \cong K_0(B)$.*

Доказательство. По следствию 14.2 существуют модульные изоморфизмы

$$(A, T(A)) \cong (A, B) \cong (T(B), B).$$

Теперь применяем следствие 24.3. □

Введём краткие обозначения для элементов группы $K_0(A, B)$. Пусть $z = [(X_1, Y_1)] - [(X_2, Y_2)] \in K_0(A, B)$. Положим $x = [X_1] - [X_2] \in K_0(A)$ и $y = [Y_1] - [Y_2] \in K_0(B)$. Элемент z будем записывать в виде пары $[x, y]$.

Верны соотношения

$$-[x,y]=[-x,-y],\quad [x,y]+[x',y']=[x+x',y+y'].$$

Теперь определим некоторые функторы и гомоморфизмы между введёнными выше категориями и группами K_0.

Если $(X,Y)\in P(A,B)$, то $X\in P(A)$ и $Y\in P(B)$. Можно определить функтор $F\colon P(A,B)\to P(A)$, считая, что $F(X,Y)=X$, а гомоморфизмы переводятся в индуцированные гомоморфизмы. Обозначим также буквой F аналогичный функтор $P(A,B)\to P(B)$, $(X,Y)\to Y$. Эти функторы являются ограничениями функторов $(1,0)$ и $(0,1)$ из § 7. Функторы F индуцируют гомоморфизмы

$$\mu_1\colon\ K_0(A,B)\to K_0(A),\quad [x,y]\to x,$$
$$\mu_2\colon\ K_0(A,B)\to K_0(B),\quad [x,y]\to y.$$

Положим также

$$\mu=\mu_1+\mu_2\colon\ K_0(A,B)\to K_0(A)\oplus K_0(B),\quad [x,y]\to x+y.$$

Ясно, что

$$\operatorname{Ker}\mu=\operatorname{Ker}\mu_1\cap\operatorname{Ker}\mu_2$$

и

$$x=0=y\ \iff\ [x,y]\in\operatorname{Ker}\mu.$$

Сделаем одно предположение. Оно даст возможность задать гомоморфизм групп K_0 в «противоположном» по сравнению с μ_1 направлении. Далее считаем, что $(A,T(A))$ — конечно (A,B)-проективный K-модуль (напомним, что K-модуль (A,B) зафиксирован). В таком случае K-модуль $(X,T(X))$ является конечно (A,B)-проективным для всякого конечно A-проективного R-модуля X.

Определим функтор $P(A)\to P(A,B)$, $X\to(X,T(X))$ (гомоморфизмы переводятся в индуцированные гомоморфизмы, см. § 7). Этот функтор является ограничением функтора $(1,T_N)$ из § 7.

Введённый функтор индуцирует гомоморфизм

$$\alpha_1\colon\ K_0(A)\to K_0(A,B),$$
$$[X_1]-[X_2]\to[(X_1,T(X_1))]-[(X_2,T(X_2))].$$

Пусть

$$\sigma=\alpha_1\mu_2\colon\ K_0(A)\to K_0(B),$$
$$[X_1]-[X_2]\to[T(X_1)]-[T(X_2)].$$

Если обозначить $x = [X_1] - [X_2]$, то в соответствии с правилом записи элементов группы $K_0(A, B)$ имеем равенство $\alpha_1(x) = [x, \sigma(x)]$. Поскольку $\alpha_1\mu_1 = 1$, получаем такое следствие.

Следствие 24.5. *Существует прямое разложение*

$$K_0(A, B) = \operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Ker}\mu_1, \quad \textit{где } \operatorname{Im}\alpha_1 \cong K_0(A).$$

Запись элемента $[x, y]$ относительно прямой суммы из следствия 24.5 имеет вид

$$[x, y] = [x, \sigma(x)] + [0, y - \sigma(x)].$$

Заметим, что соответствие $\alpha_1 : x \to [x, \sigma(x)]$ является изоморфизмом между $K_0(A)$ и $\operatorname{Im}\alpha_1$. Определим подгруппу G группы $K_0(B)$, полагая $G = \{y - \sigma(x) \mid [x, y] \in K_0(A, B)\}$. Теперь можно выяснить строение факторгруппы $K_0(A, B)/\operatorname{Ker}\mu$.

Теорема 24.6. *Существует изоморфизм*

$$K_0(A, B)/\operatorname{Ker}\mu \cong K_0(A) \oplus G, \quad [x, y] + \operatorname{Ker}\mu \to x + (y - \sigma(x)).$$

Доказательство. Ядро гомоморфизма

$$K_0(A, B) \to K_0(A) \oplus G, \quad [x, y] \to x + (y - \sigma(x)),$$

состоит из таких элементов $[x, y]$, что $x = 0 = y$. Таким образом, это ядро равно $\operatorname{Ker}\mu$. □

По-видимому, непросто выявить строение подгруппы $\operatorname{Ker}\mu$. Из материала § 27 следует, что эта подгруппа может быть не равной нулю. Если z — ненулевой элемент из $\operatorname{Ker}\mu$ и $z = [(X_1, Y_1)] - [(X_2, Y_2)]$, то X_1, X_2 стабильно изоморфны в $P(A)$ и Y_1, Y_2 стабильно изоморфны в $P(B)$, но (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) не являются стабильно изоморфными в $P(A, B)$.

Следствие 24.7. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $G = 0$;

2) $y = \sigma(x)$ *для любого* $[x, y] \in K_0(A, B)$;

3) $K_0(A, B) = \operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Ker}\mu$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1 и 2 вытекает из определения подгруппы G.

2) $\Rightarrow$ 3). В наших условиях $\operatorname{Ker}\mu_1 \subseteq \operatorname{Ker}\mu_2$ и $\operatorname{Ker}\mu = \operatorname{Ker}\mu_1$. Теперь можно использовать следствие 24.5.

3) $\Rightarrow$ 1). Снова получаем $\operatorname{Ker}\mu_1 \subseteq \operatorname{Ker}\mu_2$. Пусть $[x, y] \in K_0(A, B)$. Тогда $[x, y] - [x, \sigma(x)] = [0, y - \sigma(x)] \in \operatorname{Ker}\mu_1$. Следовательно,

$$[0, y - \sigma(x)] \in \operatorname{Ker}\mu_2, \quad y - \sigma(x) = 0 \quad \text{и} \quad G = 0. \qquad \square$$

В следствии 24.5, теореме 24.6 и следствии 24.7 мы предполагали, что $(A, T(A))$ — конечно (A, B)-проективный K-модуль. Теперь пусть $(T(B), B)$ — конечно (A, B)-проективный K-модуль. Конечно, будут верны утверждения, аналогичные приведённым выше. Имеем функтор $P(B) \to P(A, B)$, $Y \to (T(Y), Y)$, и индуцированный гомоморфизм

$$\alpha_2 \colon K_0(B) \to K_0(A, B), \quad [Y_1] - [Y_2] \to [(T(Y_1), Y_1)] - [(T(Y_2), Y_2)].$$

Пусть

$$\tau = \alpha_2\mu_1 \colon K_0(B) \to K_0(A), \quad [Y_1] - [Y_2] \to [T(Y_1)] - [T(Y_2)].$$

Тогда $\alpha_2(y) = [\tau(y), y]$, где $y = [Y_1] - [Y_2]$. Также верно равенство $\alpha_2\mu_2 = 1$ и справедливы аналоги следствия 24.5, теоремы 24.6 и следствия 24.7. А именно, существует прямое разложение

$$K_0(A, B) = \operatorname{Im}\alpha_2 \oplus \operatorname{Ker}\mu_2, \quad \text{где } \operatorname{Im}\alpha_2 \cong K_0(B).$$

Далее, существует изоморфизм

$$K_0(A, B)/\operatorname{Ker}\mu \cong H \oplus K_0(B), \quad [x, y] + \operatorname{Ker}\mu \to (x - \tau(y)) + y,$$

где $H = \{x - \tau(y) \mid [x, y] \in K_0(A, B)\}$ — подгруппа группы $K_0(A)$.

Теперь предположим, что оба K-модуля $(A, T(A))$ и $(T(B), B)$ являются конечно (A, B)-проективными. В таком случае $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ — эндоморфизмы групп $K_0(A)$ и $K_0(B)$ соответственно. Обозначим также

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \colon K_0(A) \oplus K_0(B) \to K_0(A, B).$$

Композиция $\alpha\mu$ является эндоморфизмом группы $K_0(A) \oplus K_0(B)$,

$$\alpha\mu(x + y) = (x + \tau(y)) + (\sigma(x) + y), \quad x \in K_0(A),\ y \in K_0(B).$$

Относительно этой прямой суммы этот эндоморфизм представим матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \tau \\ \sigma & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Следствие 24.8. *Если* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \tau \\ \sigma & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *— обратимая матрица, то*

$$K_0(A, B) = \operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Im}\alpha_2 \oplus \operatorname{Ker}\mu$$

и имеет место изоморфизм

$$K_0(A, B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B) \oplus \operatorname{Ker}\mu.$$

Доказательство. В наших условиях $\alpha\mu$ — автоморфизм группы $K_0(A) \oplus K_0(B)$. Следовательно, $\alpha(\mu\xi) = 1$ для некоторого автоморфизма ξ этой группы. Поэтому

$$K_0(A, B) = \operatorname{Im}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\mu\xi = \operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Im}\alpha_2 \oplus \operatorname{Ker}\mu. \qquad \square$$

Обратимость эндоморфизма $1-\sigma\tau$ группы $K_0(A)$ равносильна обратимости эндоморфизма $1-\tau\sigma$ группы $K_0(B)$. В таком случае $\left(\begin{smallmatrix}1 & \sigma\\ \tau & 1\end{smallmatrix}\right)$ — обратимая матрица с обратной матрицей $\left(\begin{smallmatrix}1 & -\sigma\\ -\tau & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Следствие 24.9. *Если $1-\sigma\tau$ — автоморфизм группы $K_0(A)$ (это так, например, если эндоморфизм $\sigma\tau$ нильпотентен или лежит в радикале $J(\operatorname{End} K_0(A))$), то для группы $K_0(A,B)$ верно утверждение следствия* 24.8.

Следующий результат дополняет следствие 24.7.

Следствие 24.10. *Если $G=0=H$, то σ и τ — взаимно обратные изоморфизмы и $K_0(A,B)\cong K_0(A)\oplus\operatorname{Ker}\mu\cong K_0(B)\oplus\operatorname{Ker}\mu$.*

Замечание 24.11. В заключение заметим, что верны равенства

$$G=(1-\tau\sigma)K_0(B)+\sigma(H)\quad\text{и}\quad H=(1-\sigma\tau)K_0(A)+\tau(G).$$

§ 25. Группа K_0 кольца формальных матриц

Применим результаты § 24 к кольцу формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix}R & M\\ N & S\end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, берём K-модуль K в качестве модуля (A,B). Можно записать этот модуль в виде $((R,M),(N,S))$ или $(R\oplus M, N\oplus S)$. В ряде случаев вычислим группу $K_0(K)$ с помощью групп $K_0(R)$ и $K_0(S)$ (иногда с точностью до подгруппы $\operatorname{Ker}\mu$).

Сначала приведём два характерных результата, относящихся к крайним ситуациям. Первый результат вытекает из следствия 23.3.

Следствие 25.1. *Если идеалы следа I и J кольца K нильпотентны, то $K_0(K)\cong K_0(R)\oplus K_0(S)$.*

Если гомоморфизм $\psi: N\otimes_R M\to S$ из § 1 является эпиморфизмом, то говорят, что K — *полусюръективный контекст Мориты*.

Следствие 25.2. 1 [10]. *Если K — полусюръективный контекст Мориты, то $K_0(K)\cong K_0(R)$.*

2. *Если K — ситуация эквивалентности, т. е. $I=R$ и $J=S$, то $K_0(R)\cong K_0(K)\cong K_0(S)$ (ср. со следствием* 24.4).

Доказательство. 1. Имеем

$$T(R\oplus M)\cong(N\otimes_R R)\oplus(N\otimes_R M)\cong N\oplus(N\otimes_R M).$$

Отображение ψ будет изоморфизмом (см. § 14). Следовательно,

$$T(R\oplus M)\cong N\oplus S\quad\text{и}\quad K\cong(R\oplus M, T(R\oplus M)).$$

По следствию 24.3 имеем $K_0(K) \cong K_0(R \oplus M)$. Заметим, что R-модуль M является конечно порождённым проективным R-модулем (см. § 14). Из предложения 24.2 вытекает, что $K_0(R \oplus M) \cong K_0(R)$. Стало быть, $K_0(K) \cong K_0(R)$.

2. Утверждение является частным случаем утверждения 1. □

Возьмём функторы $T_N = N \otimes_R (-) : R\text{-mod} \to S\text{-mod}$, $T_M = M \otimes_S (-) : S\text{-mod} \to R\text{-mod}$ из § 7. Мы обычно будем обозначать их одной буквой T. Ограничения этих функторов суть функторы $T : P(R) \to P(N)$ и $T : P(S) \to P(M)$. Функторы T индуцируют гомоморфизмы

$$\sigma : K_0(R) \to K_0(N), \quad [X_1] - [X_2] \to [T(X_1)] - [T(X_2)],$$

и

$$\tau : K_0(S) \to K_0(M), \quad [Y_1] - [Y_2] \to [T(Y_1)] - [T(Y_2)].$$

Из функторов $(1, T_N) : R\text{-mod} \to K\text{-mod}$ и $(T_M, 1) : S\text{-mod} \to K\text{-mod}$ из § 7 получаем функторы

$$P(R) \to P(K), \quad X \to (X, T(X))$$

и

$$P(S) \to P(K), \quad Y \to (T(Y), Y),$$

которые индуцируют гомоморфизмы

$$\alpha_1 : K_0(R) \to K_0(K), \quad \alpha_2 : K_0(S) \to K_0(K).$$

Если использовать обозначения § 24 для элементов группы $K_0(K)$, то можно записать выражения

$$\alpha_1(x) = [x, \sigma(x)], \quad x \in K_0(R)$$

и

$$\alpha_2(y) = [\tau(y), y], \quad y \in K_0(S).$$

Теперь положим $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Гомоморфизмы σ, τ, α_1, α_2 аналогичны соответствующим гомоморфизмам из § 24.

Также имеем два функтора

$$F : P(K) \to P(R \oplus M), \quad F : P(K) \to P(N \oplus S)$$

и соответствующие гомоморфизмы

$$\mu_1 : K_0(K) \to K_0(R \oplus M), \quad \mu_2 : K_0(K) \to K_0(N \oplus S), \quad \mu = \mu_1 + \mu_2;$$

см. текст после следствия 24.4.

Для кольца K формальных матриц мы имеем диаграмму (3) из § 23. Ещё раз запишем её в виде

$$\begin{array}{ccc} K_0(R)\oplus K_0(S) & \xrightarrow{\pi} & K_0(R/I)\oplus K_0(S/J) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \| \\ K_0(K) & \xrightarrow{\rho} & K_0(R/I)\oplus K_0(S/J), \end{array}$$

где $\alpha = K_0(i)$, $\pi = K_0(k)$ и $\rho = K_0(j)$. Представим действие этих гомоморфизмов в более компактной форме. Положим

$$x = [X_1] - [X_2] \in K_0(R), \quad y = [Y_1] - [Y_2] \in K_0(S).$$

Тогда

$$\alpha(x+y) = [x, \sigma(x)] + [\tau(y), y].$$

Затем обозначим $[X_1/IX_1] - [X_2/IX_2]$ через x/Ix, а $[Y_1/JY_1] - [Y_2/JY_2]$ через y/Jy. Тогда $\pi(x+y) = x/Ix + y/Jy$. Если же $[x,y] \in K_0(K)$, где $x = [X_1] - [X_2]$ и $y = [Y_1] - [Y_2]$, то пусть

$$x/My = [X_1/MY_1] - [X_2/MY_2], \quad y/Nx = [Y_1/NX_1] - [Y_2/NX_2].$$

Тогда $\rho([x,y]) = x/My + y/Nx$.

По следствию 23.3 имеем $K_0(K) \cong K_0(R) \oplus K_0(S)$, если идеалы следа I и J кольца K нильпотентны. При этом гомоморфизм $K_0(i)$ из диаграммы (3) из § 23 является изоморфизмом, и, следовательно, гомоморфизм α — изоморфизм. Ниже указано, как действуют эти изоморфизмы.

Сейчас рассмотрим более общую ситуацию, когда $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Но сначала приведём один известный факт.

Пусть T — некоторое кольцо, L — идеал кольца T, лежащий в $J(T)$, и $e\colon T \to T/L$ — канонический эпиморфизм. Тогда ядро индуцированного гомоморфизма $K_0(e)\colon K_0(T) \to K_0(T/L)$ равно нулю. (Если дополнительно предполагать, что кольцо T полно в L-адической топологии, то $K_0(e)$ — изоморфизм по предложению 1.3 из гл. 9 книги [10].)

Вернёмся к кольцу формальных матриц K. Если $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$, то ядро $\left(\begin{smallmatrix} I & M \\ N & J \end{smallmatrix}\right)$ гомоморфизма j из диаграммы (1) в § 23 лежит в радикале $J(K)$ (это уже использовалось в доказательстве теоремы 23.1). Следовательно, π, ρ и α являются мономорфизмами. После естественных отождествлений можно считать, что верны включения

$$K_0(R)\oplus K_0(S) \subseteq K_0(K) \subseteq K_0(R/I)\oplus K_0(S/J).$$

Теорема 25.3. *Допустим, что $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Равенство*

$$K_0(K) = K_0(R) \oplus K_0(S)$$

выполняется в точности тогда, когда $\operatorname{Im}\rho = \operatorname{Im}\pi$.

Доказательство. Теорема 25.3 вытекает из того, что равенство $\operatorname{Im}\rho = \operatorname{Im}\pi$ выполняется в точности тогда, когда α — изоморфизм. □

Как действуют изоморфизмы α и α^{-1} (см. также следствие 23.3)? Возьмём элемент $[x, y] \in K_0(K)$. Имеем

$$x/My = x'/Ix' \quad \text{и} \quad y/Nx = y'/Jy', \quad \text{где } x' \in K_0(R),\ y' \in K_0(S),$$

причём x' и y' определяются единственным образом. Соответствие $[x, y] \to x' + y'$ задаёт изоморфизм α^{-1}, а соответствие $x' + y' \to [x, y]$ задаёт изоморфизм α. Далее получаем, что $K_0(K) = \operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Im}\alpha_2$ и $[x, y] = [x', \sigma(x')] + [\tau(y'), y']$ — запись элемента $[x, y]$ относительно этой прямой суммы.

В § 24 мы предполагали, что хотя бы один из K-модулей $(A, T(A))$, $(T(B), B)$ является конечно (A, B)-проективным. Допустим, что ${}_RM$ — конечно порождённый проективный модуль. Тогда $(R \oplus M, T(R \oplus M))$ — конечно порождённый проективный K-модуль по предложению 13.1, т. е. указанное предположение выполняется для K-модуля K. В таком случае если ${}_SY$ — конечно порождённый проективный модуль, то $T(Y) = M \otimes_S Y$ — конечно порождённый проективный R-модуль. А если (X, Y) — конечно порождённый проективный K-модуль, то X — конечно порождённый проективный R-модуль.

В такой ситуации можно уточнить функторы T, F и соответствующие гомоморфизмы τ и μ_1, определённые в § 24. Действительно, мы получаем «новый» функтор $T\colon P(S) \to P(R)$, $Y \to T(Y)$, и «новый» гомоморфизм $\tau\colon K_0(S) \to K_0(R)$ вместо $T\colon P(S) \to P(M)$ и $\tau\colon K_0(S) \to K_0(M)$ соответственно. Далее, получаем «новый» функтор $F\colon P(K) \to P(R)$, $(X, Y) \to X$, и «новый» гомоморфизм $\mu_1\colon K_0(K) \to K_0(R)$, $[x, y] \to x$ вместо $F\colon P(K) \to P(R \oplus M)$ и $\mu_1\colon K_0(K) \to K_0(R \oplus M)$ соответственно.

Так как $\alpha_1\mu_1 = 1$, выполняется следствие 25.4.

Следствие 25.4. *Если M — конечно порождённый проективный R-модуль, то существует прямое разложение*

$$K_0(K) = \operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Ker}\mu_1, \quad \textit{где } \operatorname{Im}\alpha_1 \cong K_0(R).$$

Если ${}_SN$ — конечно порождённый проективный модуль, то аналогичным образом можно получить «новые» функторы $T\colon P(R) \to P(S)$

и $F\colon P(K) \to P(S)$, $(X, Y) \to Y$, и «новые» гомоморфизмы

$$\sigma\colon K_0(R) \to K_0(S), \quad [X_1] - [X_2] \to [T(X_1)] - [T(X_2)],$$
$$\mu_2\colon K_0(K) \to K_0(S), \quad [x, y] \to y.$$

При этом $\alpha_2\mu_2 = 1$. Следовательно, мы имеем прямое разложение $K_0(K) = \operatorname{Im}\alpha_2 \oplus \operatorname{Ker}\mu_2$, где $\operatorname{Im}\alpha_2 \cong K_0(S)$.

Теперь предположим, что оба модуля ${}_RM$, ${}_SN$ являются конечно порождёнными проективными модулями. В таком случае верны аналоги теоремы 24.6 и следствий 24.7–24.10, если в этих утверждениях мы положим $\mu = \mu_1 + \mu_2$ и заменим $K_0(A, B)$ на $K_0(K)$, $K_0(A)$ на $K_0(R)$, $K_0(B)$ на $K_0(S)$ соответственно. Мы сформулируем только аналог теоремы 24.6. Сначала определим подгруппу $G = \{y - \sigma(x) \mid [x, y] \in K_0(K)\}$ группы $K_0(S)$ и подгруппу $H = \{x - \tau(y) \mid [x, y] \in K_0(K)\}$ группы $K_0(R)$.

Теорема 25.5. *Предположим, что ${}_RM$, ${}_SN$ — конечно порождённые проективные модули. Существуют изоморфизмы*

$$K_0(K)/\operatorname{Ker}\mu \cong K_0(R) \oplus G, \quad [x, y] + \operatorname{Ker}\mu \to x + (y - \sigma(x)),$$
$$K_0(K)/\operatorname{Ker}\mu \cong H \oplus K_0(S), \quad [x, y] + \operatorname{Ker}\mu \to (x - \tau(y)) + y.$$

Приведём один случай, когда выполнено предположение аналога следствия 24.9.

Если задано кольцо формальных матриц $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ и гомоморфизм $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ является мономорфизмом (см. § 1), то говорят, что K — *полуинъективный контекст Мориты* (ср. со следствием 25.2(1)).

Следствие 25.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 25.5, *K — полуинъективный контекст Мориты и идеал следа I нильпотентен. Тогда имеется изоморфизм*

$$K_0(K) \cong K_0(R) \oplus K_0(S) \oplus \operatorname{Ker}\mu.$$

Доказательство. Пусть $x = [X_1] - [X_2] \in K_0(R)$. Тогда

$$\sigma\tau(x) = [M \otimes_S N \otimes_R X_1] - [M \otimes_S N \otimes_R X_2].$$

Так как $M \otimes_S N \cong I$ и проективные R-модули X_1, X_2 являются плоскими, получаем канонические изоморфизмы

$$M \otimes_S N \otimes_R X_1 \cong IX_1, \quad M \otimes_S N \otimes_R X_2 \cong IX_2$$

и равенство $\sigma\tau(x) = [IX_1] - [IX_2]$, $x \in K_0(R)$. Обозначим последнюю разность через Ix. Итак, имеем равенство $\sigma\tau(x) = Ix$, $x \in K_0(R)$. Далее, индукцией по n получаем, что $(\sigma\tau)^n(x) = I^n x$ для любого $n > 1$, где

$I^n x$ обозначает $[I^n X_1] - [I^n X_2]$. Ясно, что $(\sigma\tau)^k = 0$ для некоторого k. Остаётся применить следствие 24.9. □

Мы по-прежнему считаем, что модули ${}_RM$ и ${}_SN$ являются конечно порождёнными проективными модулями. Вернёмся к функтору (T, T) из § 7. Напомним, что (T, T) — такой функтор K-mod $\to K$-mod, что

$$(X, Y) \to (T(Y), T(X)), \quad (\alpha, \beta) \to (T(\beta), T(\alpha)).$$

K-модуль $(T, T)(K)$ является конечно порождённым проективным модулем. Поэтому $(T(B), T(A))$ — конечно порождённый проективный K-модуль для любого конечно порождённого проективного K-модуля (A, B). Значит, мы имеем аддитивный функтор $(T, T)\colon P(K) \to P(K)$. Обозначим через $[\sigma, \tau]$ эндоморфизм группы $K_0(K)$, индуцированный функтором (T, T). Итак, $[\sigma, \tau]([x, y]) = [\tau(y), \sigma(x)]$.

§ 26. Группа K_1 кольца формальных матриц

Как и в предыдущем параграфе, в этом параграфе дано кольцо формальных матриц $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. При некоторых ограничениях мы выразим группу Уайтхеда $K_1(K)$ через группы $K_1(R)$ и $K_1(S)$. В соответствующих формулах иногда присутствует некоторая группа $\operatorname{Ker}\pi$ с неясным строением. Интересно, что результаты и рассуждения этого параграфа похожи на соответствующие результаты и рассуждения из § 25.

Мы считаем, что ${}_RM$ и ${}_SN$ — конечно порождённые проективные модули. Функторы $T\colon P(R) \to P(S)$ и $T\colon P(S) \to P(R)$ индуцируют гомоморфизмы $e\colon K_1(R) \to K_1(S)$ и $h\colon K_1(S) \to K_1(R)$, где $e\colon [\alpha] \to [1 \otimes \alpha]$ и $h\colon [\beta] \to [1 \otimes \beta]$; см. § 23 и 25. Следовательно, eh — эндоморфизм группы $K_1(R)$, и he — эндоморфизм группы $K_1(S)$.

Мы обозначим через θ_1 ограничение гомоморфизма $K_1(i)$ из диаграммы (4), приведённой в § 23, на группу $K_1(R)$; ограничение $K_1(i)$ на $K_1(S)$ обозначается через θ_2. Таким образом,

$$\theta_1\colon K_1(R) \to K_1(K), \quad [\alpha] \to [(\alpha, 1 \otimes \alpha)],$$
$$\theta_2\colon K_1(S) \to K_1(K), \quad [\beta] \to [(1 \otimes \beta, \beta)].$$

Функторы $F\colon P(K) \to P(R)$ и $F\colon P(K) \to P(S)$ из § 25 приводят к гомоморфизмам

$$\pi_1\colon K_1(K) \to K_1(R), \quad [(\alpha, \beta)] \to [\alpha],$$
$$\pi_2\colon K_1(K) \to K_1(S), \quad [(\alpha, \beta)] \to [\beta].$$

Положим $\pi = \pi_1 + \pi_2$. Ясно, что $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\pi_1 \cap \operatorname{Ker}\pi_2$.

Верны равенства $\theta_1\pi_1 = 1$ и $\theta_2\pi_2 = 1$.

Если только дано, что ${}_RM$ — конечно порождённый проективный модуль, то всё равно π_1 существует и $\theta_1\pi_1 = 1$. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 26.1. *Если ${}_RM$ — конечно порождённый проективный модуль, то существует прямое разложение*

$$K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_1 \oplus \operatorname{Ker}\pi_1, \quad \textit{где } \operatorname{Im}\theta_1 \cong K_1(R).$$

Относительно этой прямой суммы элемент $[(\alpha, \beta)]$ записывается в виде

$$[(\alpha, \beta)] = [(\alpha, 1 \otimes \alpha)] + [(1, \beta(1 \otimes \alpha)^{-1})].$$

До конца параграфа будем считать, что оба модуля ${}_RM$ и ${}_SN$ являются конечно порождёнными проективными модулями.

Тогда также имеем

$$K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_2 \oplus \operatorname{Ker}\pi_2, \quad \text{где } \operatorname{Im}\theta_2 \cong K_1(S).$$

Для группы $K_1(K)$ верны аналоги теоремы 24.6 и теоремы 25.5. В этих теоремах присутствуют подгруппы G и H. Для разнообразия определим соответствующие подгруппы для группы $K_1(K)$ более содержательным способом.

Рассмотрим имеющиеся прямые разложения

$$K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_1 \oplus \operatorname{Ker}\pi_1 = \operatorname{Im}\theta_2 \oplus \operatorname{Ker}\pi_2.$$

Ограничение проекции $K_1(K) \to \operatorname{Im}\theta_2$ на $\operatorname{Ker}\pi_1$ имеет ядро, равное $\operatorname{Ker}\pi$. Пусть B' — образ этого ограничения. Обозначим через B образ подгруппы B' при изоморфизме

$$\operatorname{Im}\theta_2 \to K_1(S), \quad [(1 \otimes \beta, \beta)] \to [\beta].$$

Итак, B — подгруппа в $K_1(S)$. Найдём вид её элементов. Выше указано представление элемента $[(\alpha, \beta)]$ группы $K_1(K)$ относительно первого разложения. Представление этого элемента относительно второго разложения есть

$$[(\alpha, \beta)] = [(1 \otimes \beta, \beta)] + [(\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}, 1)].$$

Теперь ясно, что

$$B = \left\{ [\beta(1 \otimes \alpha)^{-1}] \mid [(\alpha, \beta)] \in K_1(K) \right\}.$$

Аналогично определим подгруппу A группы $K_1(R)$, полагая

$$A = \left\{ [\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}] \mid [(\alpha, \beta)] \in K_1(K) \right\}.$$

Заметим, что

$$[\beta(1\otimes\alpha)^{-1}] = [\beta] - e([\alpha]), \quad [\alpha(1\otimes\beta)^{-1}] = [\alpha] - h([\beta]).$$

Сформулируем один результат общего характера.

Теорема 26.2. *Существуют изоморфизмы*

$$K_1(K)/\operatorname{Ker}\pi \cong K_1(R)\oplus B, \quad [(\alpha,\beta)] + \operatorname{Ker}\pi \to [\alpha] + [\beta(1\otimes\alpha)^{-1}],$$

$$K_1(K)/\operatorname{Ker}\pi \cong A\oplus K_1(S), \quad [(\alpha,\beta)] + \operatorname{Ker}\pi \to [\alpha(1\otimes\beta)^{-1}] + [\beta],$$

где B и A — подгруппы в $K_1(S)$ и $K_1(R)$, определённые выше.

Что касается подгруппы $\operatorname{Ker}\pi$, то первый возникающий вопрос следующий. Может ли подгруппа $\operatorname{Ker}\pi$ быть ненулевой? Ответ содержится в § 27.

Некоторые части групп B и A можно точно указать.

Лемма 26.3. *Справедливы включения*

$$(1-he)K_1(S)\subseteq B, \quad (1-eh)K_1(R)\subseteq A.$$

Доказательство. Для элемента $[\beta]\in K_1(S)$ верны равенства

$$(1-he)([\beta]) = [\beta] - [1\otimes 1\otimes\beta] = [\beta(1\otimes 1\otimes\beta)^{-1}].$$

Так как $[(1\otimes\beta,\beta)]\in K_1(K)$, имеем $[\beta(1\otimes 1\otimes\beta)^{-1}]\in B$. Второе включение проверяется аналогично. □

В одной достаточно понятной ситуации теорему 26.2 можно уточнить.

Следствие 26.4. *Если $1-eh$ — автоморфизм группы $K_1(R)$ (например, если эндоморфизм eh нильпотентен или $eh\in J(\operatorname{End}K_1(R))$), то справедливо равенство $K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_1\oplus\operatorname{Im}\theta_2\oplus\operatorname{Ker}\pi$ и имеет место изоморфизм $K_1(K)\cong K_1(R)\oplus K_1(S)\oplus\operatorname{Ker}\pi$.*

Доказательство. Положим $\theta=\theta_1+\theta_2$. Композиция $\theta\pi$ является эндоморфизмом группы $K_1(R)\oplus K_1(S)$,

$$[\alpha]+[\beta]\to([\alpha]+[1\otimes\beta])+([1\otimes\alpha]+[\beta])=([\alpha]+h([\beta]))+(e([\alpha])+[\beta]).$$

Относительно данной прямой суммы эндоморфизм $\theta\pi$ представляется матрицей $\left(\begin{smallmatrix}1 & e\\ h & 1\end{smallmatrix}\right)$. Обратимость элемента $1-eh$ кольца $\operatorname{End}K_1(R)$ равносильна обратимости элемента $1-he$ кольца $\operatorname{End}K_1(S)$. В этом случае $\left(\begin{smallmatrix}1 & e\\ h & 1\end{smallmatrix}\right)$ — обратимая матрица с обратной матрицей $\left(\begin{smallmatrix}1 & -e\\ -h & 1\end{smallmatrix}\right)$. Получаем, что $\theta\pi$ — автоморфизм группы $K_1(R)\oplus K_1(S)$. Поэтому $\theta(\pi\omega)=1$ для некоторого автоморфизма ω группы $K_1(R)\oplus K_1(S)$. Следовательно,

$$K_1(K) = \operatorname{Im}\theta\oplus\operatorname{Ker}\pi\omega = \operatorname{Im}\theta_1\oplus\operatorname{Im}\theta_2\oplus\operatorname{Ker}\pi.$$ □

Приведём один случай, когда выполнены предположения следствия 26.4.

Следствие 26.5. *Пусть K — полуинъективный контекст Мориты* (*см. следствие* 25.6). *Если I — нильпотентный идеал, то*

$$K_1(K) \cong K_1(R) \oplus K_1(S) \oplus \operatorname{Ker} \pi.$$

Доказательство. Имеем $(eh)([(X,\alpha)]) = [(M \otimes_S N \otimes_R X, 1 \otimes 1 \otimes \alpha)]$. Так как $M \otimes_S N \cong I$ и проективный R-модуль X является плоским, получаем канонический изоморфизм $M \otimes_S N \otimes_R X \cong IX$, затем получаем равенство $[(M \otimes_S N \otimes_R X, 1 \otimes 1 \otimes \alpha)] = [(IX, \overline{\alpha})]$, где $\overline{\alpha}$ — сужение α на IX. Далее, имеем $(eh)^n([(X,\alpha)]) = [(I^n X, \overline{\alpha})]$ для $n > 1$. Понятно, что $(eh)^k = 0$ для некоторого k. Остаётся применить следствие 26.4. □

Отметим один важный частный случай теоремы 26.2, когда одна из подгрупп B или A равна нулю.

Следствие 26.6. 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

a) $B = 0$;

b) $[\beta] = [1 \otimes \alpha] = e([\alpha])$ *для любого элемента* $[(\alpha, \beta)] \in K_1(K)$;

c) $K_1(K) = \operatorname{Im} \theta_1 \oplus \operatorname{Ker} \pi \cong K_1(R) \oplus \operatorname{Ker} \pi$.

2. *Если $B = 0 = A$, то e и h — взаимно обратные изоморфизмы и* $K_1(K) \cong K_1(R) \oplus \operatorname{Ker} \pi \cong K_1(S) \oplus \operatorname{Ker} \pi$.

Доказательство. 1. Эквивалентность a) $\Leftrightarrow$ b) вытекает из определения подгруппы B.

b) $\Rightarrow$ c). Имеем $B = 0$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \pi_1 \subseteq \operatorname{Ker} \pi_2$ и $K_1(K) = \operatorname{Im} \theta_1 \oplus \operatorname{Ker} \pi$, где $\operatorname{Im} \theta_1 \cong K_1(R)$.

c) $\Rightarrow$ a). Снова получаем $\operatorname{Ker} \pi_1 \subseteq \operatorname{Ker} \pi_2$, откуда $B = 0$.

2. Утверждение вытекает из п. 1. □

Следствие 26.7 (ср. со следствием 25.2). *Если кольцо K есть ситуация эквивалентности, то* $K_1(R) \cong K_1(K) \cong K_1(S)$.

Доказательство. В наших условиях верно утверждение b) следствия 26.6. Кроме того, $\operatorname{Ker} \pi = 0$. Достаточно также указать, что категории $P(K)$, $P(R)$ и $P(S)$ попарно эквивалентны, см. теорему 14.5. □

Замечание 26.8. Как и для группы K_0 (см. конец § 25), функтор (T, T) индуцирует эндоморфизм группы $K_1(K)$. Обозначим этот эндоморфизм через $[e, h]$. Можно записать равенство

$$[e,h]([(\alpha,\beta)]) = [(1 \otimes \beta, 1 \otimes \alpha)], \quad [(\alpha,\beta)] \in K_1(K).$$

§ 27. Группы K_0 и K_1 колец матриц порядка $n \geqslant 2$

В этом параграфе мы получим некоторую информацию о группах K_0 и K_1 колец формальных матриц произвольного порядка n. При этом можно действовать по аналогии с ситуацией для $n = 2$. Иногда можно использовать рассмотренный случай $n = 2$, представляя кольцо формальных матриц порядка $n > 2$ в виде кольца формальных блочных матриц порядка 2.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}$$

— кольцо формальных матриц порядка n с идеалами следа $I_1, \dots, I_n$ (см. § 3). Запишем коммутативную диаграмму колец

$$\begin{array}{ccc} R_1 \times \dots \times R_n & \xrightarrow{k} & R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \| \\ K & \xrightarrow{j} & R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n, \end{array} \tag{1}$$

где i — диагональное вложение, k — канонический эпиморфизм,

$$j\colon \begin{pmatrix} r_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & r_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & r_n \end{pmatrix} \to (r_1 + I_1, \dots, r_n + I_n).$$

Далее, можно записать диаграмму функторов

$$\begin{array}{ccc} P(R_1 \times \dots \times R_n) & \xrightarrow{T(k)} & P(R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n) \\ \downarrow{\scriptstyle T(i)} & & \| \\ P(K) & \xrightarrow{T(j)} & P(R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n). \end{array} \tag{2}$$

Действие функторов вида $T(i)$ и т. п. указано в § 23.

Диаграмма (2) индуцирует коммутативную диаграмму групп K_0 и их гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} K_0(R_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n) & \xrightarrow{K_0(k)} & K_0(R_1/I_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n/I_n) \\ \downarrow{\scriptstyle K_0(i)} & & \| \\ K_0(K) & \xrightarrow{K_0(j)} & K_0(R_1/I_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n/I_n) \end{array} \tag{3}$$

и такую же диаграмму, где индекс 0 заменён на индекс 1. Действие гомоморфизмов вида $K_0(i)$, $K_1(i)$ и т. п. указано в § 23. Напомним, что в конце § 7 содержится некоторая информация о строении и свойствах модулей над кольцом формальных матриц порядка n.

Теорема 27.1. *Пусть дано кольцо K формальных матриц порядка n и $I_1, \ldots, I_n$ — его идеалы следа. Если $I_k \subseteq J(R_k)$ и кольцо R_k полно в I_k-адической топологии для каждого $k = 1, \ldots, n$, то*

1) *функтор $T(i)$ является эквивалентностью;*

2) *имеется групповой изоморфизм $K_i(K) \cong K_i(R_1) \oplus \ldots \oplus K_i(R_n)$, $i = 0, 1$.*

Доказательство. 1. Ядро гомоморфизма j равно

$$\begin{pmatrix} I_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & I_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & I_n \end{pmatrix}$$

и по теореме 4.3 лежит в радикале $J(K)$. На соответствующих классах изоморфных конечно порождённых проективных модулей функтор $T(k)$ действует биективно, а функтор $T(j)$ действует инъективно.

Далее можно в целом повторить рассуждения из доказательства теоремы 23.1.

2. Утверждение непосредственно следует из п. 1. □

Кольцо K с нильпотентными идеалами следа удовлетворяет условиям теоремы 27.1. Допустим, что только даны включения $I_1 \subseteq J(R_1)$, $\ldots$, $I_n \subseteq J(R_n)$. Аналогично случаю $n = 2$ (см. абзац перед теоремой 25.3) можно после отождествления считать, что имеются включения

$$K_0(R_1) \oplus \ldots \oplus K_0(R_n) \subseteq K_0(K) \subseteq K_0(R_1/I_1) \oplus \ldots \oplus K_0(R_n/I_n).$$

Применим теорему 27.1 к кольцам формальных матриц над кольцом R, которые были определены в § 16. Пусть $K = M(n, R, \Sigma)$ — кольцо формальных матриц порядка $n \geqslant 2$ над R, где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ — система множителей кольца K.

Прежде всего заметим, что если все множители s_{ijk} являются обратимыми элементами, то $K_0(K) \cong K_0(R)$ и $K_1(K) \cong K_1(R)$. Действительно, по предложению 16.2 имеет место изоморфизм $K \cong M(n, R)$. Следовательно, $K_i(K) \cong K_i(M(n, R)) \cong K_i(R)$ (см. следствие 25.2 и следствие 26.7).

Можно точно указать идеалы следа кольца K. Именно, верно равенство $I_k = \sum_{i \neq k} s_{kik} R$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Мы не будем записывать

следствия из теоремы 27.1 для произвольного кольца K. Возьмём такое кольцо K, что каждый множитель s_{iji}, $i \neq j$, равен s^m для какого-то $m \geqslant 1$, где s — некоторый центральный элемент кольца R. Примеры таких колец K есть в § 19. Любое такое кольцо обозначим через $M(n, R, s)$.

Следствие 27.2. *Пусть K — определённое выше кольцо $M(n, R, s)$.*

1. *Если s — обратимый элемент, то $K_i(M(n, R, s)) \cong K_i(R)$, $i = 0, 1$.*

2. *Если s — нильпотентный элемент, то $K_i(M(n, R, s)) \cong K_i(R)^n$, $i = 0, 1$.*

3. *Если $s \in J(R)$, то верны включения $K_0(R)^n \subseteq K_0(K) \subseteq K_0(R/sR)^n$.*

Более подробно рассмотрим случай кольца формальных матриц $M(2, R, s)$ порядка 2 над кольцом R. Первоначальные сведения о таких кольцах и их модулях приведены в конце § 16. Сначала запишем частный случай следствия 27.2.

Следствие 27.3. *Для кольца $K = M(2, R, s)$ верны утверждения* 1–3 *следствия* 27.2 *при* $n = 2$.

Далее считаем, что K — кольцо вида $M(2, R, s)$. Получим некоторые сведения о группах $K_0(K)$ и $K_1(K)$.

Начнём с группы $K_0(K)$. Гомоморфизмы σ и τ групп K_0, определённые в § 25, являются тождественными автоморфизмами в рассматриваемой ситуации. Определённый в конце § 25 эндоморфизм $[\sigma, \tau]$ принимает вид $[1, 1]$ и действует по правилу $[x, y] \to [y, x]$, $[x, y] \in K_0(K)$. Следовательно, $[1, 1]$ — инволюция. Она изоморфно отображает $\operatorname{Im} \alpha_1$ на $\operatorname{Im} \alpha_2$ и $\operatorname{Ker} \mu_1$ на $\operatorname{Ker} \mu_2$ (см. § 24 и 25 о гомоморфизмах α_i и μ_i).

Возьмём гомоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2 \colon K_0(R) \to K_0(K)$, где $\alpha_1(x) = [x, \sigma(x)]$ и $\alpha_2(x) = [\tau(x), x]$, $x \in K_0(R)$ (можно было бы обозначить $[x, x]' = \alpha_1(x)$ и $[x, x]'' = \alpha_2(x)$). Теперь положим $d = \alpha_1 - \alpha_2$ и $D = \operatorname{Im} d$. Имеем изоморфизм $K_0(R)/\operatorname{Ker} d \cong D$, где $\operatorname{Ker} d = \{x \in K_0(R) \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(x)\}$. Для нас важно, что $D \subseteq \operatorname{Ker} \mu$.

Предположим, что множитель s лежит в радикале $J(R)$. Тогда отображение $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \colon K_0(R) \oplus K_0(R) \to K_0(K)$ является мономорфизмом (см. абзац перед теоремой 25.3). Понятно, что d также мономорфизм и $D \cong K_0(R)$. В частности, $\operatorname{Ker} \mu \neq 0$ (см. текст перед следствием 24.7).

Пусть по-прежнему $s \in J(R)$, и будем дополнительно считать, что кольцо R полно в sR-адической топологии (это будет так, если s — нильпотентный элемент). При таких предположениях имеем соотно-

шения $K_0(K) = \operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Im}\alpha_2 \cong K_0(R) \oplus K_0(R)$ (см. следствие 23.3, следствие 25.1 и теорему 25.3). Ясно, что также верны равенства $K_0(K) = \operatorname{Im}\alpha_i \oplus D$, $i = 1, 2$. Из соотношений $D \subseteq \operatorname{Ker}\mu = \operatorname{Ker}\mu_1 \cap \operatorname{Ker}\mu_2$ и $K_0(K) = \operatorname{Im}\alpha_i \oplus \operatorname{Ker}\mu_i$, $i = 1, 2$ (см. следствие 24.5 и следствие 25.4), получаем, что $D = \operatorname{Ker}\mu$. Применяя следствие 24.7, также получаем, что $G = 0 = H$ (см. § 24 и 25 о подгруппах G и H).

Перейдём к группе $K_1(K)$. Эндоморфизм $[e, h]$ группы $K_1(K)$ из § 26 имеет вид $[1, 1]$. Итак, $[1, 1]\colon [(\alpha, \beta)] \to [(\beta, \alpha)]$, $[(\alpha, \beta)] \in K_1(K)$. Следовательно, $[1, 1]$ — инволюция, которая изоморфно отображает $\operatorname{Im}\theta_1$ и $\operatorname{Ker}\pi_1$ на $\operatorname{Im}\theta_2$ и $\operatorname{Ker}\pi_2$ соответственно; гомоморфизмы θ_i и π_i, $i = 1, 2$, определены в § 26. В данной ситуации θ_1 и θ_2 — это гомоморфизмы $K_1(R) \to K_1(K)$, где $\theta_1([\alpha]) = [(\alpha, 1 \otimes \alpha)]$ и $\theta_2([\alpha]) = [(1 \otimes \alpha, \alpha)]$, $[\alpha] \in K_1(R)$. Запишем более точные равенства

$$\theta_1([(X, \alpha)]) = [((X, T(X)), (\alpha, 1 \otimes \alpha))]$$

и

$$\theta_2([(X, \alpha)]) = [((T(X), X), (1 \otimes \alpha, \alpha))].$$

Учитывая далее отождествления и обозначения § 23 и 26, получаем равенства

$$\theta_1([\alpha]) = [((X, X)', (\alpha, \alpha))] \quad \text{и} \quad \theta_2([\alpha]) = [((X, X)'', (\alpha, \alpha))].$$

Можно было бы обозначить $\theta_1([\alpha])$ и $\theta_2([\alpha])$ через $[(\alpha, \alpha)]'$ и $[(\alpha, \alpha)]''$ соответственно. Обозначим

$$c = \theta_1 - \theta_2\colon K_1(R) \to K_1(K) \quad \text{и} \quad C = \operatorname{Im} c.$$

Тогда $K_1(R)/\operatorname{Ker} c \cong C$, где

$$\operatorname{Ker} c = \left\{[\alpha] \in K_1(R) \mid \theta_1([\alpha]) = \theta_2([\alpha])\right\}.$$

Так как

$$\theta_1([\alpha]) - \theta_2([\alpha]) = [(\alpha\alpha^{-1}, \alpha\alpha^{-1})] = [(1, 1)],$$

получаем, что $C \subseteq \operatorname{Ker}\pi$.

Как и в случае группы K_0, теперь предположим, что $s \in J(R)$ и кольцо R полно в sR-адической топологии. Тогда верны соотношения

$$K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_1 \oplus \operatorname{Im}\theta_2 \cong K_1(R) \oplus K_1(R);$$

см. теорему 23.1 и следствие 23.3. Далее находим

$$K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_i \oplus C, \quad i = 1, 2, \quad \text{и} \quad C = \operatorname{Ker}\pi.$$

Поэтому $\operatorname{Ker}\pi \neq 0$, а это даёт ответ на вопрос, поставленный после теоремы 26.2. Наконец, выводим из следствия 26.6, что $B = 0 = A$, где подгруппы B и A определены перед теоремой 26.2.

В заключение мы укажем на некоторые возможные направления будущих исследований колец формальных матриц (эти кольца также называются *кольцами обобщённых матриц*). Несколько таких направлений представлено в конце § 22.

1. В данной книге основная информация о группах $K_i(K)$, где $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$, предоставляется группами $K_i(R)$, $K_i(S)$ и их гомоморфными образами $\operatorname{Im}\alpha_i$, $\operatorname{Im}\theta_i$, $i = 1, 2$. Интересно найти какие-нибудь подгруппы в $K_i(K)$, отличные от $\operatorname{Im}\alpha_i$ и $\operatorname{Im}\theta_i$. В частности, очень желательно выяснить строение подгрупп $\operatorname{Ker}\mu$, $\operatorname{Ker}\pi$, $\operatorname{Ker}\mu_i$ и $\operatorname{Ker}\pi_i$, $i = 1, 2$.

2. Обширная содержательная область исследований — это описание различных (линейных) отображений между кольцами формальных матриц и описание отображений из колец формальных матриц в различные другие кольца. Сюда относится изучение обычных изоморфизмов, лиевых изоморфизмов и дифференцирований колец формальных матриц; см., например, [12, 15, 59, 63] и статьи из списков литературы этих работ. В [73, вопрос 4.4] авторы поставили вопрос об общей форме автоморфизмов формальных матриц порядка 2.

В серии интересных статей [11, 73, 74, 103, 104] изучаются коммутирующие и централизующие отображения, коммутирующие и централизующие следы и другие отображения алгебр формальных матриц порядка 2; много источников содержится в списках литературы этих статей. Одним из достоинств этих работ являются обстоятельные и информативные введения. Авторы также формулируют ряд конкретных проблем и тем для дальнейших исследований. Обзор [17] посвящён коммутирующим отображениям.

Представляется перспективным рассматривать перечисленные и другие отображения (прежде всего линейные отображения) для колец формальных матриц любого порядка n. В первую очередь следует рассмотреть кольца формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$ над кольцом R. Помимо прочего, здесь можно исследовать зависимость свойств отображений от систем множителей Σ.

Литература

[1] *Abujabal H. A. S.*, *Nauman S. K.* A construction of Morita similar endomorphism rings // J. Algebra. 2001. Vol. 235. P. 453–458.

[2] *Abyzov A. N.* Rings of formal matrices close to regular // Russian Mathematics. 2015. Vol. 59, № 10. P. 49–52.

[3] *Abyzov A. N.*, *Tapkin D. T.* On certain classes of rings of formal matrices // Russian Mathematics. 2015. Vol. 59, № 3. P. 1–12.

[4] *Abyzov A. N.*, *Tuganbaev A. A.* Formal matrices and rings close to regular // J. Math. Sci. To appear.

[5] *Amitsur S. A.* Rings of quotients and Morita contexts // J. Algebra. 1971. Vol. 17, № 2. P. 273–298.

[6] *Anderson F. W.*, *Fuller K. R.* Rings and Categories of Modules. New York: Springer, 1974.

[7] *Asadollahi J.*, *Salarian S.* On the vanishing of Ext over formal triangular matrix rings // Forum Math. 2006. Vol. 18, № 6. P. 951–966.

[8] *Auslander M.*, *Reiten I.*, *Smalø S. O.* Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[9] *Baba Y.*, *Oshiro K.* Classical Artinian Rings and Related Topics. New Jersey — London — Singapore: World Scientific, 2009.

[10] *Bass H.* Algebraic K-Theory. New York — Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1968.

[11] *Benkovič D.*, *Eremita D.* Commuting traces and commutativity preserving maps on triangular algebras // J. Algebra. 2004. Vol. 280. P. 797–824.

[12] *Benkovič D.* Lie derivations on triangular matrices // Linear and Multilinear Algebra. 2007. Vol. 55. P. 619–626.

[13] *Birkenmeier G. F.*, *Park J. K.*, *Rizvi S. T.* Generalized triangular matrix rings and the fully invariant extending property // Rocky Mountain J. Math. 2002. Vol. 32, № 4. P. 1299–1319.

[14] *Blecher D. P.*, *Le Merdy Ch.* Operator Algebras and their Modules. Oxford: Oxford University Press, 2004.

[15] *Boboc C.*, *Dăscălescu S.*, *Wyk L.*, *van*. Isomorphisms between Morita context rings // Linear and Multilinear Algebra. 2012. Vol. 60, № 5. P. 545–563.

[16] *Borooah G.*, *Diesl A. J.*, *Dorsey T. J.* Strongly clean matrix rings over commutative local rings // J. Pure Appl. Algebra. 2008. Vol. 212. P. 281–296.

[17] *Brešar M.* Commuting maps: a survey // Taiwanese J. Math. 2004. Vol. 8. P. 361–397.

[18] *Brown B.*, *McCoy N. H.* The maximal regular ideal of a ring // Proc. AMS. 1950. Vol. 1, № 2. P. 165–171.

[19] *Brown W. C.* Matrices over Commutative Rings. New York: Marcel Dekker, 1993.

[20] *Camillo V.*, *Yu H.-P.* Exchange rings, units and idempotents // Comm. Algebra. 1994. Vol. 22, № 12. P. 4737–4749.

[21] *Chen H.* Ideals in Morita rings and Morita semigroups // Acta Math. Sinica. 2005. Vol. 21, № 4. P. 893–898.

[22] *Chen H.* Morita contexts with many units // Comm. Algebra. 2002. Vol. 30, № 3. P. 1499–1512.

[23] *Chen H.* Stable ranges for Morita contexts // Southeast Asian Math. Bull. 2001. Vol. 25. P. 209–216.

[24] *Chen H.* Strongly π-regular Morita contexts // Bull. Korean Math. Soc. 2003. Vol. 40, № 1. P. 91–99.

[25] *Climent J.-J.*, *Navarro P. R.*, *Tortosa L.* On the arithmetic of the endomorphism ring $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // Appl. Algebra Engrg. Commun. Comput. 2011. Vol. 22, № 2. P. 91–108.

[26] *Cohen M.* Morita context related to finite automorphism groups of rings // Pacific J. Math. 1982. Vol. 98. P. 37–54.

[27] *Company Cabezos M.*, *Gomez Lozano M.*, *Siles Molina M.* Exchange Morita rings // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29, № 2. P. 907–925.

[28] *Davidson K. R.* Nest Algebras. London: Longman, 1988.

[29] *Dennis R. K.*, *Geller S.* K_i of upper triangular matrix rings // Proc. AMS. 1976. Vol. 56. P. 73–78.

[30] *Enochs E.*, *Torrecillas B.* Flat covers over formal triangular matrix rings and minimal Quillen factorizations // Forum Math. 2011. Vol. 23. P. 611–624.

[31] *Faith C.* Algebra: Rings, Modules, and Categories I. Berlin: Springer, 1973.

[32] *Fossum R. M.*, *Griffith P. A.*, *Reiten I.* Trivial extensions of Abelian categories // Berlin — New York: Springer-Verlag, 1975. (Lect. Notes in Math.; Vol. 456). P. 1–122.

[33] *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. I. New York — London: Academic Press, 1970.

[34] *Ghahramani H.*, *Moussavi A.* Differential polynomial rings of triangular matrix rings // Bull. Iranian Math. Soc. 2008. Vol. 34, № 2. P. 71–96.

[35] *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[36] *Goodearl K. R.* Ring Theory. New York — Basel: Marcel Dekker, 1976.

[37] *Goodearl K. R.* Von Neumann Regular Rings. London: Pitman, 1979.

[38] *Green E. L.* On the representation theory of rings in matrix form // Pacific J. Math. 1982. Vol. 100, № 1. P. 123–138.

[39] *Gurgun O.*, *Halicioglu S.*, *Harmanci A.* Quasipolarity of generalized matrix rings // arxiv:1303.3173v1 [math. RA]. 13 Mar 2013.

[40] *Gurgun O.*, *Halicioglu S.*, *Harmanci A.* Strong J-cleanness of formal matrix rings // arxiv:1308.4105v1 [math. RA], 19 Aug 2013.

[41] *Haghany A.* Hopficity and co-hopficity for Morita contexts // Comm. Algebra. 1999. Vol. 27, № 1. P. 477–492.

[42] *Haghany A.* Injectivity conditions over a formal triangular matrix ring // Arch. Math. 2002. Vol. 78. P. 268–274.

[43] *Haghany A.* Morita contexts and torsion theories // Math. Japonica. 1995. Vol. 42, № 1. P. 137–142.

[44] *Haghany A.* On the torsion theories of Morita equivalent rings // Periodica Math. Hung. 1996. Vol. 32. P. 193–197.

[45] *Haghany A.*, *Varadarajan K.* IBN and related properties for rings // Acta Math. Hungar. 2002. Vol. 94, № 3. P. 251–261.

[46] *Haghany A.*, *Varadarajan K.* Study of formal triangular matrix rings // Comm. Algebra. 1999. Vol. 27, № 11. P. 5507–5525.

[47] *Haghany A.*, *Varadarajan K.* Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. 2000. Vol. 147, № 1. P. 41–58.

[48] *Han J.*, *Nicholson W. K.* Extensions of clean rings // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29, № 6. P. 2589–2595.

[49] *Hao Z.*, *Shum K.-P.* The Grothendieck group of rings of Morita contexts // Proc. of the 1996 Beijing Int. Conf. on Group Theory. 1997. P. 88–97.

[50] *Harada M.* On semiprimary PP-rings // Osaka J. Math. 1965. Vol. 2. P. 153–161.

[51] *Henriksen M.* Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. Vol. 31, № 1. P. 182–193.

[52] *Herstein I. N.* A counter-example in Noetherian rings // Proc. Nat. Acad. USA. 1965. Vol. 54. P. 1036–1037.

[53] *Hirano Y.* Another triangular matrix ring having Auslander — Gorenstein property // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29. P. 719–735.

[54] *Horn R. A.*, *Johnson Ch. R.* Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.

[55] *Huang Q.*, *Tang G.* Quasipolar property of trivial Morita context // Inter. J. Pure Appl. Math. 2014. Vol. 90, № 4. P. 423–431.

[56] *Huang Q.*, *Tang G.*, *Zhou Y.* Quasipolar property of generalized matrix rings // Comm. Algebra. 2014. Vol. 42, № 9. P. 3883–3894.

[57] *Iwanaga Y.*, *Wakamatsu T.* Auslander — Gorenstein property of triangular matrix rings // Comm. Algebra. 1995. Vol. 23, № 10. P. 3601–3614.

[58] *Kashu A. I.* On localizations in Morita contexts // Math. USSR Sbornik. 1987. Vol. 61, № 1. P. 129–135.

[59] *Khazal R.*, *Dascalescu S.*, *Wyk L. van.* Isomorphism of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles // Internat. J. Math. Math. Sci. 2003. Vol. 2003, № 9. P. 533–538.

[60] *Kim K. H.* Boolean Matrix Theory and Applications. New York: Marcel Dekker, 1982.

[61] *Krylov P. A.* Calculation of the group K_1 of a generalized matrix ring // Siberian Math. J. 2014. Vol. 55, № 4. P. 639–644.

[62] *Krylov P. A.* Determinants of generalized matrices of order 2 // J. Math. Sci. To Appear.

[63] *Krylov P. A.* Isomorphisms of generalized matrix rings // Algebra and Logic. 2008. Vol. 47, № 4. P. 258–262.

[64] *Krylov P. A.*, *Mikhalev A. V.*, *Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[65] *Krylov P. A.* The group K_0 of a generalized matrix ring // Algebra and Logic. 2013. Vol. 52, № 3. P. 250–261.

[66] *Krylov P. A.*, *Tuganbaev A. A.* Formal matrices and their determinants // J. Math. Sci. 2015. Vol. 211, № 3. P. 341–380.

[67] *Krylov P. A.*, *Tuganbaev A. A.* Grothendieck and Whitehead Groups of Formal Matrix Rings // J. Math. Sci. To Appear.

[68] *Krylov P. A.*, *Tuganbaev A. A.* Modules over Discrete Valuation Domains. Berlin: Walter de Gruyter, 2008. (De Gruyter Expositions in Mathematics; Vol. 43).

[69] *Krylov P. A.*, *Tuganbaev A. A.* Modules over Formal Matrix Rings // J. Math. Sci. 2010. Vol. 171, № 2. P. 248–295.

[70] *Krylov P. A.*, *Yardykov E. Yu.* On projective and hereditary modules over generalized matrix rings // J. Math. Sci. 2009. Vol. 163, № 6, P. 709–719.

[71] *Lam T. Y.* Lectures on Rings and Modules. New York: Springer, 1999.

[72] *Lambek I.* Lectures on Rings and Modules. Waltham: Blaisdell, 1966.

[73] *Li Y.-B.*, *Wei F.* Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras // Linear Algebra Appl. 2012. Vol. 436. P. 1122–1153.

[74] *Liang X.*, *Wei F.*, *Xiao Z.*, *Fošner A.* Centralizing traces and Lie triple isomorphisms on triangular algebras // Linear and Multilinear Algebra. 2014. Vol. 8, № 3. P. 821–847.

[75] *Loustaunau P.*, *Shapiro J.* Homological dimensions in a Morita context with applications to subidealizers and fixed rings // Proc. AMS. 1990. Vol. 110, № 3. P. 601–610.

[76] *Loustaunau P.*, *Shapiro J.* Localization in Morita context with applications to fixed rings // J. Algebra. 1991. Vol. 143. P. 373–387.

[77] *Loustaunau P.*, *Shapiro J.* Morita contexts // Berlin: Springer, 1990. (Lect. Notes in Math.; Vol. 1448). P. 80–92.

[78] *Marubayashi H.*, *Zhang Y.*, *Yang P.* On the rings of Morita context which are some well-known orders // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26, № 5. P. 1429–1444.

[79] *McDonald B. R.* Linear Algebra over Commutative Rings. New York — Basel: Marcel Dekker, 1984.

[80] *Ming K.* On FI-extending modules // J. Chungcheong Math. Soc. 2003. Vol. 16, № 2. P. 79–88.

[81] *Morita K.* Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 1958. Vol. 6. P. 83–142.

[82] *Müller B. J.* The quotient category of a Morita context // J. Algebra. 1974. Vol. 28. P. 389–407.

[83] *Müller M.* Rings of quotients of generalized matrix rings // Comm. Algebra. 1987. Vol. 15. P. 1991–2015.

[84] *Nauman S. K.* Morita similar matrix rings and their Grothendieck groups // Aligarh Bull. Math. 2004. Vol. 23, № 1–2. P. 49–60.

[85] *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. AMS. 1977. Vol. 229. P. 269–278.

[86] *Palmer I.*, *Roos J. E.* Explicit formulae for the global homological dimension of trivial extensions of rings // J. Algebra. 1974. Vol. 27. P. 380–413.

[87] *Palmer I.* The global homological dimension of semitrivial extensions of rings // Math. Scand. 1975. Vol. 37. P. 223–256.

[88] *Poole D. G.*, *Stewart P. N.* Classical quotient rings of generalized matrix rings // Internat. J. Math. Math. Sci. 1995. Vol. 18, № 2. P. 311–316.

[89] *Rosenberg J.* Algebraic K-Theory and Its Applications. Berlin — New York: Springer, 1994.

[90] *Rowen L. H.* Ring Theory. San Diego: Academic Press, 1988.

[91] *Sakano K.* Maximal quotient rings of generalized matrix rings // Comm. Algebra. 1984. Vol. 12, № 16. P. 2055–2065.

[92] *Sands A. D.* Radicals and Morita contexts // J. Algebra. 1973. Vol. 24. P. 335–345.

[93] *Sheiham D.* Universal localization of triangular matrix rings // Proc. AMS. 2006. Vol. 134, № 2. P. 3465–3474.

[94] *Small I. N.* An example in Noetherian rings // Proc. Nat. Acad. USA. 1965. Vol. 54. P. 1035–1036.

[95] *Srinivas V.* Algebraic K-Theory. Boston: Birkhauser, 1991.

[96] *Tang G.*, *Li Ch.*, *Zhou Y.* Study of Morita contexts // Comm. Algebra. 2014. Vol. 42. P. 1668–1681.

[97] *Tang G.*, *Zhou Y.* A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438, № 12. P. 4672–4688.

[98] *Tang G.*, *Zhou Y.* Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // Linear Algebra Appl. 2012. Vol. 437. P. 2546–2559.

[99] *Tuganbaev A.* Rings Close To Regular. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[100] *Tuganbaev A.* Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[101] *Veldsman S.* Radicals of Morita rings revisited // Bull. Acad. Stiinte Moldova Mat. 2007. № 2. P. 55–68.

[102] *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

[103] *Xiao Z., Wei F.* Commuting mappings of generalized matrix algebras // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 433. P. 2178–2197.

[104] *Xiao Z., Wei F.* Commuting traces and Lie isomorphisms on generalized matrix algebras // Operators and Matrices. 2014. Vol. 8. P. 821–847.

[105] *Yang X., Zhou Y.* Strong cleanness of the 2×2 matrix ring over a general local ring // J. Algebra. 2008. Vol. 320. P. 2280–2290.

[106] *Yardykov E. Yu.* Simple modules over generalized matrix rings // J. Math. Sci. 2008. Vol. 154, № 3. P. 446–447.

[107] *Zhou Zh.* Semisimple quotient rings and Morita context // Comm. Algebra. 1993. Vol. 21, № 7. P. 2205–2210.

[108] *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1199–1214.

[109] *Кашу А. И.* Радикалы и кручения в модулях. Кишинев: Штиинца, 1983.

[110] *Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, № 3. С. 422–449.

[111] *Туганбаев А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.

Предметный указатель

(01)-матрица 128

k-хорошее кольцо 35
k-хороший элемент кольца 35

L-адическая топология 160

p-компонента абелевой группы 104

U-рефлексивный модуль 77

Алгебра формальных матриц 16

Вторая теорема Мориты 99

Гомоморфизм замены 146
гомоморфизмы модульного умножения 41, 43
гомотетия модуля 94
группа Гротендика категории $P(A)$ 162
— — кольца 157
— Уайтхеда кольца 158
— элементарных матриц 158

Диагонализируемое кольцо 39
дополнение подмодуля 72

Замыкание подмодуля 67

Идеалы следа 12
инволюция 35

Канонический вид матрицы 123
кольцо биэндоморфизмов модуля 72
— обобщенных матриц 12
— с нулевыми идеалами следа 12
— стабильного ранга 1 28
— формальных матриц 12, 19
— — — порядка n над кольцом R 109
— — треугольных матриц 12, 19
конечно A-проективный модуль 162
конструкции K_1, K_2, K_3, K_4 22, 126
контекст Мориты 96

Лемма Капланского 38
локальный модуль 58

Максимальное кольцо частных 72
максимальный подмодуль 61
малый подмодуль 57
матрицы множителей 111, 122
минимальный подмодуль 61
множители кольца формальных матриц 110, 122
модуль характеров 83

Наследственное слева (справа) кольцо 89
наследственный модуль 87
нормальное кольцо 136

Образующий модуль 95
обратимо-регулярное кольцо 30
обратимо-регулярный элемент кольца 30
определитель кольца формальных матриц 141
— формальной матрицы 141

основные тождества 111
отображение гомотетии 95
— значения 77

Первая теорема Мориты 97
первичный радикал кольца 24
перестановка строк формальной матрицы 141
подыдеализатор идеала 17
полуинъективный контекст Мориты 171
полусюръективный контекст Мориты 167
полутривиальное расширение кольца 15
правый аннулятор элемента 30
прообразующий модуль 95
простой модуль 60
противоположное кольцо 13
прямо-конечное кольцо 36
пустотелый модуль 58

Равномерный модуль 59
радикал модуля 62
регулярное кольцо 29
регулярный модуль 103
— элемент кольца 29

Система множителей 110
ситуация предэквивалентности 96
— эквивалентности 96
совершенное слева кольцо 91
стабильно изоморфные модули 162
строго нильпотентный элемент 24
— чистое кольцо 40
— чистый элемент кольца 40
существенное расширение модуля 59
существенный подмодуль 59

Тривиальное расширение кольца 15
Формула полного развертывания 143

Цоколь модуля 62

Чистое кольцо 33
чистый элемент кольца 33

Эквивалентные кольца 100
элементарная абелева группа 104

П. А. Крылов, А. А. Туганбаев

Кольца формальных матриц и модули над ними

Подписано в печать ??.??.2016 г. Формат $60\times90\,{}^{1}\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 12. Тираж ??? экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 745–80–31.
E-mail: biblio@mccme.ru, http://biblio.mccme.ru