Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство образования и науки Республики Бурятия
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук
Бурятский государственный университет
Иркутский государственный университет

МАТЕМАТИКА, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ (МПМО17)

Материалы VI Международной конференции

26 июня – 1 июля 2017 г.

г. Улан-Удэ, Байкал

Улан-Удэ
Издательство ВСГУТУ
2017

Библиография

1. *Андреев Г.Н.* Дополнительные главы геометрии. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей: Учебное пособие. – М.: МГИУ, 2007. – 184 с.
2. *Баглаев И.И.* Моделирование плоских кривых в среде FMSLogo // Вестник Бурятского госуниверситета. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2010. – Вып. 9. – с. 252-257.
3. *Баглаев И.И.* Кинематический метод моделирования поверхностей в среде FMSLogo// Вестник Бурятского государственного университета. Математика Информатика. – 2015. – Вып. 1 – С. 49-59.
4. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
5. *Abelson H., diSessa A.* Turtle Geometry. – MIT Press, 1986. – 477 p.

УДК 51 (07)

ОБ ОДНОМ МЕТОДИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ИЗЛОЖЕНИЮ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ НА ПЕРВОМ КУРСЕ ВУЗА

Бакчанина Е.М.*, Галанова Н.Ю.**
Томский государственный университет, Россия, Томск,
** bak70rus@yandex.ru, * galanova@math.tsu.ru*

Предлагается комбинированный подход в изложении теории вещественного числа с использование тестовых заданий в системе Moodle для студентов физико-технических специальностей в рамках введения в математический анализ на 1 курсе университета.

Ключевые слова: *вещественное число, десятичная дробь, сечение, методика изучения, система Moodle.*

ABOUT ONE METHODOLOGICAL APPROACH TO THEORY OF REAL NUMBERS WITH THE USE OF ELECTRONIC TECHNOLOGY FOR THE FIRST YEAR STUDENTS OF PHYSICAL AND TECHNICAL SPECIALTIES IN UNIVERSITIES

Bakchanina E.M.*, Galanova N.Yu.**
*Tomsk State University, Russia, Tomsk, * bak70rus@yandex.ru, ** galanova@math.tsu.ru*

In this article we consider the combined approach of studying theory of real numbers for the first year students of physical and technical specialties of universities. We prepared a collection of problems in Moodle to test students.

Key words*: real numbers, decimal fraction, cut (gap), methods of studying, Moodle.*

Введение

Вещественные числа являются основой измерения и вычислений [1]. Многие понятия математики сводятся к понятию числа (длина отрезка, площадь фигуры, объём тела, координата точки, скалярное произведение, значение функции, решение уравнения…) или числовым множествам (область определения функции, решение неравенства, решение системы неравенств…). Система вещественных чисел образует фундамент математического анализа и приложений математики [1]. Освоение понятия вещественного числа проходит через весь школьный курс математики и продолжается в вузовских курсах. В вузе для студентов физико-технических специальностей заново переосмысляется введение числовых систем от множества натуральных чисел и их свойств упорядочения до определения множества вещественных чисел на основе различных подходов. Акцентируется внимание на введении отношения порядка на числовых множествах, отличительных свойствах порядка для множеств рациональных и вещественных чисел. Непрерывность поля вещественных чисел лежит в основе доказательств теории пределов в пространстве $\mathbb{R}^n$, изучаемых в курсе математического анализа.

Существует несколько подходов к изучению теории вещественного числа, обзор которых полно излагается в [1]: аксиоматический [2-4], теория бесконечных десятичных дробей (по Вейерштрассу)[5], теория сечений (по Дедекинду)[6], теория фундаментальных последовательностей (по Кантору) [3] и др.

Важность темы «Вещественные числа» для проведения последующих доказательств теорем в курсе математического анализа и нехватка времени на её полноценное рассмотрение привела авторов к комбинированному подходу в изложении теории вещественного числа.

Студент, приходя из школы знаком с вещественными числами как с обыкновенными и десятичными дробями. Поэтому предлагается вводить вещественное число как бесконечную десятичную дробь (по Вейерштрассу), а затем сравнивать устройство сечений во множествах рациональных и вещественных чисел, то есть использовать понятия модели Дедекинда, показывая наглядный образ вещественного числа. Доказав теорему о супремуме и инфимуме, можно вводить операции над бесконечными десятичными дробями. Для отработки навыков по теме перед коллоквиумом и повторного контроля знаний, разработаны тестовые задания в системе Moodle. Подход апробирован на студентах 1 курса физического и физико-технического факультетов ТГУ. При отработке навыков количество попыток прохождения теста не ограничено, время даётся – неделя до коллоквиума. При повторном контроле знаний (для не сдавших коллоквиум) используются похожие вопросы с ограничением до двух попыток и два часа на выполнение задания из тридцати вопросов.

Рассмотрим схему изучения с примерами вопросов тестов.

Реализация

При изложении тем важна пропедевтика, мы стараемся повторять и использовать известный школьный материал, постепенно углубляя знания. Рассматривая тему множества, мы даём определения числовых множеств на базе школьных представлений, $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ наименьшее числовое множество, которое используется при счёте предметов, множество целых чисел $\mathbb{Z}=\{...-2,-1,0,1,2,...\}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{m}{n}\,|\,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\right\}$, множество вещественных (действительных) чисел $\mathbb{R}$ определяется как множество выражений вида $\pm x_0,x_1x_2x_3...x_n...$, где $x_0\in\mathbb{N}$, $x_i\in\{0,1,2,..,9\},i\in\mathbb{N}$. Приводим пример равенства множества бесконечных периодических дробей и множества обыкновенных дробей. В одну сторону говорим о конечности числа остатков при делении в столбик, в другую сторону не доказываем, но рассматриваем пример.

В теме отношения, приводятся примеры: отношение порядка на $\mathbb{Z}$, на $\mathbb{Q}$, отношение равенства на множестве $\mathbb{R}$ бесконечных десятичных дробей [7]. Две бесконечные десятичные дроби называем равными, если при совпадении знаков, числа на соответствующих местах совпадают, либо вторая дробь является представлением первой с девяткой в периоде. Такое отношение равенства будет отношением эквивалентности. Говорим, что будем брать далее всегда представителя класса эквивалентности без девятки в периоде.

В теме отображения даётся определение последовательности, как функции натурального аргумента и поясняется, что часть бесконечной десятичной дроби после запятой можно рассматривать как последовательность цифр. Рассматривая способы задания функций, приводится пример алгоритмического задания бесконечной непериодической десятичной дроби. Что значит задать бесконечную непериодическую дробь – это значит указать алгоритм, по которому для каждого натурального n можно найти цифру, стоящую на n- том месте после запятой за конечное число шагов.

Множество натуральных чисел описываем аксиомами Пеано, третья аксиома (индукции) равносильна принципу вполне упорядочения [3]. Доказываем принцип математической индукции и с его помощью формулу бинома Ньютона[2].

Упр. (Множественный выбор) 1) Существует наименьшее натуральное число (Да); 2) Существует наибольшее пятизначное число (Да);3) Существует наибольшее натуральное число (Нет); 4) Существует наибольшее натуральное число, которое делится на 5 (Нет); 5) Существует наименьшее натуральное число, которое делится на 5 (Да); 6) Существует натуральное число x между числами 2 и 3 (Нет); 7) Существует натуральное число x такое, что $x-5>1$(Да); 8) Существует натуральное число x такое, что $x^2+29<24$ (Нет); 9) Существует натуральное число x такое, что $x^2=x^3$ (Да). [8]

Упр. (Множественный выбор) Среди данных множеств выберите вполне упорядоченные 1) Множество целых чисел из промежутка $[a,b]$ (Да),2) Множество натуральных чисел, строго больших a (Да), 3) Множество целых чисел (Нет), 4) $[a,b]$ (Нет), 5) Множество рациональных чисел (Нет), 6) Множество рациональных чисел, строго больших a (Нет).

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является минимальным линейно упорядоченным полем, в котором выполняется аксиома Архимеда. Аксиома Архимеда даётся в формулировке [2]: для каждого рационального числа x найдется натуральное n такое, что $x<n$.

Следствие: $\forall_{\mathbb{Q}}\ \varepsilon>0\ \exists_{\mathbb{N}}\ n\quad :0<\frac{1}{n}<\varepsilon$. Даётся определения целой части числа как наименьшего целого ближайшего к данному.

Упр. (Множественный вычисляемый) Дано число $0,ab$. Выберите из списка числа, которые можно представить в виде $\frac{1}{n}$, где $n\in\mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n}<0,ab$. Варианты ответов: $0,0a$ (Да); $0,0(a)$ (Да); $0,a$ (Да); 0,0(3) (Да), $\frac{1}{ab}$ (Да), 0,03 (Нет), 0,00(4) (Нет), $0,b$ (Нет), 1/3 (Нет). Где параметры вопроса теста $a\in\{1;2\},b\in\{3;4\}$.

Упр. (На соответствие). Найти целую часть числа. $\left[-1,256\right]=$, $\left[-3,93\right]=$, $\left[4,25\right]=$, $\left[0,265\right]=$, $\left[0,0001\right]=$, $\left[11/5\right]=$, $\left[-0,0001\right]=$, $\left[0\right]=$.

Варианты ответов: $-4,-3,-2,-1,\ 0,1,2,3,4$.

Упр. (Множественный выбор) Какие утверждения верны? 1) Для всех целых чисел x выполняется $x=[x]$ (Да); 2) Для всех чисел х выполняется $[x]<x\le[x]+1$(Нет); 3) Для всех чисел х выполняется $[x]\le x<[x]+1$(Да); 4) Каково бы ни было x, функция $y=[\sin x]$ может принимать только одно из трёх значений $-1,0,1$ (Да); 5) Для каждого числа x существует число $[x]$ (Да); 6) Каково бы ни было число x, выполняется $[x^2]=[x]^2$(Нет); 7) Каково бы ни было число x, выполняется $[x+1]=[x]+1$ (Да)

На множестве $\mathbb{R}$ вводится отношение порядка (доказываются свойства транзитивности, рефлексивности, симметричности)[5].

Иррациональные числа определяются как вещественные числа, не являющиеся рациональными (т.е. бесконечные непериодические дроби); доказывается, что между двумя вещественными числами есть как число рациональное, так и иррациональное [5]. Замечаем, что для $\mathbb{R}$ так же справедлива аксиома Архимеда. Рассматриваем цепочку включений для множеств: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Упр. (Множественный вычисляемый). Какие рациональные числа можно вставить между вещественными числами $x=a,bcd99e...$, $y=a,bc9023...$. Варианты ответов:**1)** a,bc (Нет); **2)** $a,bc902$ (Да); **3)** a,b (Нет); **4)** $a,bc9$ (Да); **5)** $a,bcd999$ (Да); **6)** $a,49981$ (Нет); **7)** $\frac{a}{2}$ (Нет); **8)** $2,(4a9)$ (Нет); **9)** $a,bcd99999$ (Да). Где параметры вопроса теста $a\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$, $b\in\{5;6;7\}$, $c=\{1;2;3\},d\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Сечением в линейно упорядоченном множестве (поле) P называется пара (A,B) непустых подмножеств P таких, что $A\cup B=P$ и $\forall_A\ a\quad \forall_B\ b\quad a<b$ [2,6,7].

Упр. Собрать сечение. (Множественный вычисляемый). Пусть множество $A_1=(-\infty,a)$, $A=A_1\cup A_2$, $B=(b,+\infty)$. Выберите множество A_2 так, чтобы пара (A,B) задавала сечение во множестве $\mathbb{R}$. Выберите все правильные ответы! **1)** $[a,b]$ (Да), **2)** $[-b,b]$ (Да), **3)** (a,b) (Нет), **4)** $[a,b)$ (Нет), **5)** $[a,9]$ (Нет). Где параметры вопроса теста $a\in\{1;2;3;4\}$, $b\in\{5;6;7;8\}$.

Будем говорить, что вещественное число α производит сечение (A,B) множества $P\subseteq\mathbb{R}$, если $\forall_P\ x,y\,(x<\alpha\rightarrow x\in A \quad \wedge \quad \alpha<y\rightarrow y\in B)$ [7]. Обозначим условно четыре вида сечений: $-)(-;\quad -](-;\quad -)[-;\quad -][-$. Доказываем, что в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ сечений четвёртого вида нет. Действительно, пусть (A,B) сечение $\mathbb{R}$ и a наибольший в A, b наименьший в B. Найдутся рациональные числа r,q такие, что $a<r<q<b$. Число $(r+q)/2\in\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, и $a<(r+q)/2<b$, противоречие. Приводим пример сечения в $\mathbb{Q}$, которое не производится рациональным числом: $A=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,x^2<2\}, B=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,x^2>2\}$.

Теорема (Дедекинда о непрерывности $\mathbb{R}$). [6,7] Каждое сечение $\mathbb{R}$ производится некоторым вещественным числом. Другими словами, в $\mathbb{R}$ возможны только два вида сечений: $-](-$ и $-)[-$.

План доказательства. Пусть (A,B) есть сечение в $\mathbb{R}$. Нам нужно доказать, что либо в A есть некоторое наибольшее вещественное число α, а в B нет наименьшего, либо в A нет наибольшего вещественного числа, а в B есть наименьшее вещественное число.

1). Построим множество приближений искомого числа α рациональными числами с недостатком $\{\underline{\alpha}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и с избытком $\{\overline{\alpha}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Обозначим наибольшее из целых чисел, принадлежащих множеству A через m_0. Тогда $m_0\in A, m_0+1\in B$. Для определенности будем считать, что $m_0>0$.Обозначим: $\underline{\alpha}_0=m_0$, $\overline{\alpha}_0=m_0+1$. Тогда: $\underline{\alpha}_0\in A$, $\overline{\alpha}_0\in B$. Разобьем отрезок $[\underline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_0]$ на десять равных частей точками: $m_0, m_0+1/10,\quad m_0+2/10,...,m_0+1$. Обозначим наибольшее из этих десяти чисел, принадлежащее множеству A через m_0,m_1. Положим $\underline{\alpha}_1=m_0,m_1$. Имеем: $\underline{\alpha}_1\in A$, $\overline{\alpha}_1=(\underline{\alpha}_1+1/10)\in B$.

Продолжая этот процесс, для каждого n натурального получим приближения с недостатком: $\underline{\alpha}_n=m_0,m_1...m_n\in A$ и приближения с избытком $\overline{\alpha}_n=(\underline{\alpha}_n+1/10^n)\in B$. Тем самым определенна бесконечная десятичная дробь $\alpha=m_0,m_1...m_n...$. Имеем: $\alpha\in\mathbb{R}=A\cup B$.

2) Доказывается, что вещественное число α производит сечение (A,B).

3). Доказывается, что если $\alpha\in A$, то α наибольшее число в A (аналогично, если $\alpha\in B$, то α наименьшее число в B).

Пользуясь алгоритмом доказательства теоремы Дедекинда можно каждой точке числовой прямой поставить в соответствие (однозначно) бесконечную десятичную дробь.

Верхней (нижней) границей множества $X\subset\mathbb{R}$ называется такое число $a\in\mathbb{R}$, что $\forall x\in X\ (x\le a)$ $\quad(\forall x\in X\ (a\le x))$. Супремум (инфимумом) упорядоченного множества X называется наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) граница X. Если существует верхняя (нижняя) граница X, то говорят, что X ограничено сверху (снизу).

Теорема (о супремуме и инфимуме) [2]. Непустое множество $X\subset\mathbb{R}$ имеет супремум (инфимум) тогда и только тогда, когда X ограничено сверху (снизу).

Идея доказательства (для супремума). [7]

$\Rightarrow|$ Если X имеет супремум, то супремум будет верхней границей, значит X ограничено сверху.

$\Leftarrow|$ Если X ограничено сверху, значит множество верхних границ, обозначим его через B, не пусто. Пусть $A=\mathbb{R}\setminus B$. Доказывается, что (A,B) сечение $\mathbb{R}$. Тогда, по теореме Дедекинда, существует $a\in\mathbb{R}$, которое производит это сечение. Доказывается, что $a\in B$ и является там наименьшим элементом, а значит супремумом X.

Операции на множестве $\mathbb{R}$ вводим как в [5] через понятие супремума. Без доказательства говорим, что $\mathbb{R}$ с операциями и отношением порядка удовлетворяет всем аксиомам архимедова упорядоченного поля и кроме того $\mathbb{R}$ обладает свойством непрерывности.

Упр. (Множественный выбор). 1) Сумма рациональных чисел всегда есть рациональное число (Да), 2) Сумма рационального и иррационального числа всегда иррациональное число (Да), 3) Сумма иррациональных чисел может быть как числом рациональным, так и числом иррациональным (Да), 4) Каждое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби (Да), 5) Каждое рациональное число представимо в виде десятичной периодической дроби (Да), 6) Каждое иррациональное число представимо в виде десятичной непериодической дроби (Да), 7) Число $1/2$ является рациональным и вещественным (Да), 8) Число $0,(3)$ является рациональным и вещественным (Да), 9) Сумма рационального и иррационального числа может быть числом рациональным (Нет), 10) Сумма иррациональных чисел всегда число иррациональное (Нет).

Заключение

В своей педагогической деятельности вторым автором использовались в разные годы и подход Дедекинда, и подход Вейерштрасса. С точки зрения строгости и простоты доказательств теория Дедекинда [6] вызывает симпатию преподавателя и желание рассказывать студентам о вещественных числах именно как о сечениях в поле рациональных чисел. Однако, непреодолимый стереотип школьного представления о вещественном (в школе действительном) числе, как о десятичной дроби, приводит к отторжению нового образа студентами физико-технических специальностей. С другой стороны, доказательства в теории десятичных дробей Вейерштрасса столь громоздки [5], что воспроизводить их в самом начале первого курса с педагогической точки зрения не целесообразно. Аксиоматический подход (с теорией Дедекинда) [2], как ним кажется, лишен возможности использования знаний для приближённых вычислений. Подход авторов статьи основан на идеях, изложенных в [7]. В рамках магистерской программы первым автором были разработаны тестовые задания в системе Moodle компенсирующие недостаток аудиторных часов по данной теме, что способствует созданию комплексного подхода к теории и практике.

Библиография

1. *Вечтомов Е.М., Чермных В.В., Широков Д.В.* Методика изучения системы действительных чисел // Вестник ВятГГУ. – 2012. – №2. – С. 57– 68.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.
3. *Б.Л. ван-дер Варден.* Алгебра. – М.: Наука, 1976 – 624 с.
4. Место математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ / Том. гос. ун-т; [под ред. И. А. Александрова]. – Томск: Изд-во ТГУ, 2008. – 199 с.
5. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988. – 816 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Физматлит, 2003. – 440 с.
7. *Пестов Г.Г.* Лекции по математическому анализу. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2016. – 184 с.
8. *Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.* Математика 5 класс. Ч.1. – М.: Издательство «Ювента», 2011. – 176 с.

УДК 517.958

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА*

Балакина Е.Ю.
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Россия, Новосибирск, balakina@math.nsu.ru

Ставится и исследуется обратная задача о нахождении поверхностей разрывов уравнения переноса, иначе говоря, определяется внутренняя структура среды. Решение имеет конструктивный характер, приводится численная реализация полученного алгоритма.

Ключевые слова: *уравнение переноса, обратная задача, неизвестная граница.*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00112 мол_а).