Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство образования и науки Республики Бурятия
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук
Бурятский государственный университет
Иркутский государственный университет

МАТЕМАТИКА,
ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(МПМО17)

Материалы VI Международной конференции

26 июня – 1 июля 2017 г.

г. Улан-Удэ, Байкал

Улан-Удэ
Издательство ВСГУТУ
2017

Библиография

1. *Шмидт Р., Тевс Г.* Физиология человека: учебник для вузов, т. 2. – М.: Мир, 1996. – 314 с.
2. *Симаков С.С.* Численное исследование динамики системного кровотока при кровопотере // Информационные технологии моделирования и управления. – 2006. – Т. 8, № 33. – С. 931–938.
3. *Симаков С.С., Холодов А.С., Евдокимов А.В.* Методы расчета глобального кровотока в организме человека с использованием гетерогенных вычислительных моделей // Медицина в зеркале информатики / под ред. Макарова И.М. – М.: Наука, 2008. – С. 124-170.
4. *Холодов А.С.* Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ // Компьютерные модели и прогресс медицины / под ред. Белоцерковского О.М., Холодова А.С. – М.: Наука, 2001. – С. 127–163.

УДК 512.6

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ МНОГОЧЛЕНОВ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.

Гриншпон И. Э.*, Гриншпон Я. С.**
**Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Россия, Томск, irina-grinshpon@yandex.ru*
***Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, Томск, grinshpon@mail.ru*

Рассматривается вопрос о необходимости включения элементов теории многочленов в программу курса высшей математики. Приводятся примеры применения теории многочленов при изучении различных разделов курса математики.

Ключевые слова: *многочлен, корни многочлена, равенство многочленов, результант*.

ABOUT APPLICATION OF THE THEORY OF POLYNOMIALS TO THE COURSE OF HIGHER MATHEMATICS.

Grinshpon I. E.*, Grinshpon Ya. S.**
** Tomsk state University of control systems and radioelectronics, Russia, Tomsk, irina-grinshpon@yandex.ru*
*** National research Tomsk state University, Russia, Tomsk, grinshpon@mail.ru*

The article proves the necessity of involving some elements of the theory of polynomials in mathematical training of students. The examples of application of the theory of polynomials to various sections of mathematics are presented.

Key words*: polynomial, roots of polynomial, equality of polynomials, resultant.*

Применение элементов теории многочленов можно встретить во многих разделах высшей математики. Теория многочленов применяется в курсах линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей, методах приближенных вычислений и других разделах теоретической и прикладной математики.

Хотя в необозримом царстве функций многочлены занимают, на первый взгляд, очень скромное место, но это первое впечатление обманчиво. Известный математик-вычислитель Р. В. Хемминг пишет: «Поскольку с многочленами легко обращаться, большая часть классического численного анализа основывается на приближении многочленами».

Отметим, что с изучением многочленов связан целый ряд важных преобразований в математике. Основой развития классической алгебры на протяжении нескольких столетий являлось исследование полиномиальных уравнений и их решений. Техническая простота вычислений, связанных с многочленами, по сравнению с более сложными классами функций, а также тот факт, что множество многочленов плотно в пространстве непрерывных функций, способствовали развитию методов разложения в ряды и полиномиальной интерполяции в математическом анализе. Поскольку многочлены представляют собой довольно простые функции и их дифференцирование и интегрирование не представляют трудности, то любую непрерывную функцию на заданном отрезке можно приблизить многочленом, что дает возможность анализировать поведение и характер функции, в окрестности фиксированной точки этого отрезка.

Во второй половине XX века тема «Многочлены» достаточно подробно изучалась в старших классах школы, но во время реформы 60-70-х годов XX века, в связи, в частности, с включением в курс математики основ математического анализа, часть разделов этой темы была исключена из школьной программы, что привело к нарушению целостности восприятия школьниками теории многочленов.

Несмотря на то, что при решении многих задач математики и естествознания применяется теория многочленов, раздел «Многочлены» не входит в классический курс высшей математики, читаемый для студентов естественнонаучных и технических специальностей. Поэтому, когда при изложении различных вопросов высшей математики возникает необходимость применения некоторых фактов из элементарной теории многочленов, то преподаватель, как правило, поступает одним из следующих образов:

- ссылается на эти факты, как на известные из школьной программы, что не всегда соответствует реально изучаемому в школе материалу;
- кратко формулирует необходимые понятия и теоремы, опуская их доказательство или хотя бы краткое обоснование и пояснение.

Заметим, что оба этих подхода обладают рядом методических недостатков. В первом случае, студенты, не изучившие в достаточном объеме теорию многочленов в школе, теряют возможность полноценно воспринимать лекционный материал и сталкиваются с большими трудностями при решении практических заданий, и как следствие, могут потерять интерес к курсу высшей математики в целом. При этом, часто незнание многих фактов теории многочленов не является следствием их плохой успеваемости в школе, просто часть терминов и теорем не входит в базовый школьный курс и изучается только в профильных классах (причем, и то не по всем программам обучения). Таким образом, данный подход может привести к проблемам в освоении высшей математики у потенциально заинтересованных, обладающих хорошей базовой школьной подготовкой и нацеленных на работу студентов.

Второй подход, во-первых, разрушает цельность излагаемого материала (фактически при изучении одного раздела математики вставляются небольшими порциями понятия и теоремы другого раздела); во-вторых, разрушает концепцию строгой математической доказательности и логического следствия вывода сложных математических фактов из ряда более простых; и, в-третьих, оставляет у большинства студентов ощущение неактуальности и неважности этих вскользь упоминаемых понятий и теорем. Кроме того, так как время на закрепление материала, связанного с многочленами, как правило, либо совсем не предусмотрено в учебном плане, либо его предусмотрено очень мало, то большинство студентов не успевает осознать смысл и область применения излагаемых понятий.

Перечислим основные понятия и теоремы теории многочленов, на водящие в базовый курс школьной математики, знание которых полезно при изучении высшей математики:

- бином Ньютона и полиномиальная формула;
- многочлены от одной переменной с целыми или рациональными коэффициентами, теоремы о рациональных корнях таких многочленов и о целых корнях приведенных многочленов с целыми коэффициентами;
- деление многочленов от одной переменной с остатком, алгоритм деления «уголком», схема Горнера;
- теорема Безу и ее следствия, кратные корни многочлена;
- основная теорема алгебры многочленов над полем комплексных чисел, ее следствия, одним из которых является теорема Виета;
- разложение многочлена с действительными коэффициентами на неприводимые над полем действительных чисел множители.

Перечислим вопросы высшей математики, при изложении которых используются факты теории многочленов (в скобках указано название раздела курса):

- нахождение собственных чисел линейного оператора (линейная алгебра);

- доказательство формулы второго замечательного предела (математический анализ, теория пределов);
- интегрирование рациональных дробей (математический анализ, интегральное исчисление);
- решение линейных дифференциальных уравнений высших порядков и постоянными коэффициентами (дифференциальные уравнения);
- разложение многочленов на неприводимые множители (криптография);
- разложение функций в биномиальный ряд (математический анализ, теория рядов);
- представление функций формулой Тейлора (математический анализ, методы приближенных вычислений);
- аппроксимация функций многочленами (вычислительная математика).

В данной работе предлагается идея введения в курс высшей математики цикла занятий, посвященных многочленам, причем «Теория многочленов» рассматривается как подраздел в разделе «Линейная алгебра». При этом, в зависимости от объема курса и от потребностей основной специальности обучающихся студентов, рассматривается два основных возможных варианта изложения данного раздела:

- изучение многочленов над полем действительных чисел;
- изучение комплексных чисел и действий над ними в алгебраической и тригонометрической формах, изучение многочленов над полем комплексных чисел с рассмотрением многочленов с действительными коэффициентами как частного случая.

Включение теории многочленов в курс линейной алгебры выглядит логически обоснованным. Действительно, предмет изучения линейной алгебры – это линейные пространства (причем, в рамках курса высшей математики рассматриваются, в основном, конечномерные пространства). Как комплексные числа, так и многочлены, степень которых не превышает заданного натурального числа, являются яркими примерами конечномерных линейных пространств. Для того, чтобы подчеркнуть линейность пространства многочленов, предлагается часть заданий и фактов о многочленах формулировать на языке линейных пространств, например, исследовать на линейную независимость систему многочленов, или выразить многочлен через данный базис. А с другой стороны некоторые понятия, традиционные для классического курса линейной алгебры, можно переформулировать, используя термин многочленов, например, линейные уравнения, системы которых являются одним из главных объектов изучения линейной алгебры, можно при таком подходе определить как уравнения, левая часть которых представляет собой линейный многочлен от нескольких переменных.

Также используя терминологию линейной алгебры можно сформулировать некоторые полезные свойства многочленов. Например: если все старшие коэффициенты системы многочленов от одной переменной над полем действительных чисел положительны (отрицательны) и ни один из многочленов данной системы не имеет корней, то значения любой линейной комбинации этой системы с неотрицательными коэффициентами будут положительными (отрицательными) на всей числовой прямой.

Большое внимание изучению темы «Теория многочленов» нужно уделять при подготовке учителей математики. Будущий учитель должен не только знать эту теорию в размере предусмотренном программой, применять ее для решения прикладных задач, но и уметь решать нестандартные и олимпиадные задачи.

Заметим, что как в школьном курсе алгебры, так и в курсе математики в вузе практически отсутствует подход к изучению многочлена с точки зрения вычислительной математики, а именно, рассмотрения многочлена как упорядоченного набора его коэффициентов. То есть обычно используется классическое определение многочлена как выражения вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Однако в связи с компьютеризацией образования, нам кажется целесообразным давать также определение многочлена как вектора (одномерного массива).

Рассмотрим множество M последовательностей элементов из области целостности (поля) K $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ таких, что лишь конечное число элементов последовательности отлично от нуля.

Определим на этом множестве операции сложения и умножения. Пусть $f = (a_0, a_1, a_2, ...)$, $g = (b_0, b_1, b_2, ...)$ – две последовательности. Полагаем

$f+g=(a_0,a_1,a_2,...)+(b_0,b_1,b_2,...)=(c_0,c_1,c_2,...)$, где $c_k=a_k+b_k \quad (k=0,1,2,...)$,

$f\cdot g=(a_0,a_1,a_2,...)\cdot(b_0,b_1,b_2,...)=(d_0,d_1,d_2,...)$, где $d_k=\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j \quad (k=0,1,2,...)$.

Множество *M* с введенными выше операциями сложения и умножения образует коммутативное кольцо с единицей. Последовательности вида $(a,0,0,...)$ образуют подкольцо кольца *M*, изоморфное области целостности *K*, поэтому полагаем $(a,0,0,...)=a$. Таким образом, .

Обозначим $x=(0,1,0,0,...)$. Выполняя операцию умножения, получим $x^2=(0,0,1,0,...)$, $x^3=(0,0,0,1,0,...)$,…, $x^k=(\underbrace{0,...,0}_{k},1,0,0,...)$. Пусть a_n – последний отличный от нуля элемент последовательности $f=(a_0,a_1,a_2,...,a_n,...)$. Так как $(\underset{k}{0,....0},a,0,...)=ax^k$, то представим последовательность f в виде

$f=(a_0,a_1,...,a_n,0,...)=(a_0,0,0,...)+(0,a_1,0,...)+...+(0,...,0,a_n,0,...)=\ a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$.

Представления многочлена *f* в виде последовательности и в стандартном виде эквивалентны.

Рассмотрим понятие равенства многочленов. Отметим, что в школьном курсе математики трудно провести различие между равенством многочленов в алгебраическом и функциональном смысле. В вузовском курсе это обязательно нужно сделать.

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются *равными в алгебраическом смысле*, если их степени совпадают и коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны, то есть многочлены $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ и $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m$ равны в алгебраическом смысле, если $m=n$ и $a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,...,\ a_n=b_n$.

Однако многочлен можно рассматривать как функцию, которая определена на *K* и принимает значения в *K*. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен с коэффициентами из *K*. Для любого $x_0\in K$ положим $f(x_0)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+...+a_{n-1}x_0+a_n$, где выражение в правой части понимается как результат операций в области целостности *K*. Полученный при этом элемент $f(x_0)\in K$ называется *значением многочлена* $f(x)$ *в точке* x_0. Таким образом, каждому элементу ставится в соответствие элемент $f(x_0)\in K$ и тем самым определяется функция, заданная на *K* и принимающая значения в *K*. Сложение и умножение многочленов согласуется с операциями над функциями.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ *равны в функциональном смысле*, если для любого элемента c из области определения имеем $f(c)=g(c)$.

Отметим, что для произвольного поля из равенства многочленов в функциональном смысле не следует равенство многочленов в алгебраическом смысле. Для любого конечного поля (такие поля в настоящее время интенсивно используются в дискретной математике и криптографии) существуют примеры многочленов, равных в функциональном смысле, но не равных в алгебраическом смысле. Например, для конечного поля Z_2, состоящего из двух элементов 0 и 1, многочлены $x+1$ и x^2+1 равны в функциональном смысле, но не равны в алгебраическом смысле. Однако в курсе алгебре для студентов математических специальностей полезно доказать теорему (весьма нетривиальную), что оба понятия равенства многочленов эквивалентны для бесконечных полей. Этот факт часто используется в интегрировании рациональных выражений при разложении их в сумму простых дробей.

Рассмотрим приложение теории многочленов для интегрирования рациональной дроби. После представления правильной рациональной дроби в виде суммы простых дробей с неизвестными коэффициентами для их вычисления применяют равенства многочленов в алгебраическом или функциональном смысле. Но в случае, когда все корни знаменателя дроби простые, существует красивая формула для вычисления коэффициентов такого разложения, а именно формула Лагранжа.

Пусть знаменатель рациональной дроби раскладывается в произведение линейных множителей, то есть, имеем дробь вида $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}$, где все $a_1, a_2, ..., a_n$ различны. Тогда для разложения дроби на простые справедлива формула .

Для освоения курса «Симметрия в алгебре», имеющего не только теоретическое, но и большое практическое значение, студенты должны уметь находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух многочленов, определять являются ли заданные многочлены взаимно простыми. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов не дает в явном виде условия на коэффициенты, при которых два многочлена будут взаимно просты. Эти условия можно сформулировать, используя понятие результанта.

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ и $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$ два многочлена над полем *P*, причем $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$. *Результантом* многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение $R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j)$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ – корни многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Результант можно представить в виде определителя порядка $m+n$, в первых n строках которого стоят коэффициенты многочлена $f(x)$, в последних m строках – коэффициенты многочлена $g(x)$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ над полем взаимно просты тогда и только тогда, когда их результант равен нулю.

Авторами настоящего доклада написано пособие по теории многочленов от одной переменной для студентов, изучающих математику. В пособии излагаются основные факты теории многочленов от одной переменной, даны приложения теории многочленов, которые применяются в курсе высшей математики. Весь изложенный материал иллюстрируется большим количеством примеров. Приведен также цикл задач и упражнений по теории многочленов.

По мнению авторов доклада, изучение теории многочленов в курсе высшей математики полезно и обеспечивает преемственность между школьным и вузовским курсами алгебры.

Библиография

1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. – 431 с.
2. *Винберг Э.Б.* Алгебра многочленов. – М.: Просвещение, 1980. – 176 с.
3. *Ларин С.В.* Алгебра: многочлены: учебное пособие. – Красноярск: Красноярский гос. пед. ун-т, 2007. – 127 с.
4. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 399 с.
5. *Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э.* Многочлены над областями целостности (теория и приложения): учебное пособие. – Томск: Томский гос. ун-т, 2016. – 150 с.

УДК 517.977

МЕТОД НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Дрыганова Е.В.
Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ, dev8@mail.ru

Рассматривается метод неподвижных точек на основе операций проектирования в задачах оптимального управления дискретными системами. Приводятся результаты расчета тестового примера.

***Ключевые слова**: метод неподвижных точек, управляемая система.*