Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1967

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

965059
Труды Томского
ун-та. Т.198. 1967.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 2

965059

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1967

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Сборник содержит работы по функциональному анализу в основном в области теории обобщенных функций, теории функций комплексных переменных и автоматизации программирования и рассчитан соответственно на лиц, интересующихся этими вопросами.

Редактор сборника — доцент З. И. Клементьев

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ СОВЕТ

Проф. А. П. Бычков (председател: ректор университета); проф. В. А. Пегель (зам. председателя); доц. Ю. В. Чистяков (зам. председателя); доц. В. Е. Томилов (ученый секретарь); директор Издательства М. С. Змазнев; проф. Р. Н. Щербаков; проф. И. А. Александров; проф. В. П. Кессених; проф. К. В. Савицкий; доцент М. А. Кривов; ст. науч. сотрудник В. П. Тарасенко; проф. А. В. Положий; проф. В. А. Хахлов; доц. В. В. Хахлов; проф. М. В. Гронов; ст. преподаватель Ф. И. Терпугов; проф. В. В. Серебренников; проф. А. И. Ким; доц. С. М. Лисовик; проф. И. М. Разгон; доц. А. А. Говорков; проф. Н. Ф. Бабушкин; проф. В. С. Флеров; проф. К. П. Ярошевский; директор научной библиотеки М. Р. Филимонов; секретарь парткома доц. М. П. Кортусов.

Индекс 2-2-3

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

К ОБОБЩЕНИЮ ТЕОРЕМ ВЛОЖЕНИЯ НА СЛУЧАЙ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. БОКК, З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ

Основная цель настоящей статьи—указать один из возможных способов обобщения известных теорем вложения С. Л. Соболева на случай векторнозначных функций. Впервые подобное обобщение дано Соболевым [1], а впоследствии и в других работах [2], [3]. Наше изложение отлично от этих работ; оно связано с нашими заметками [4], [5]. Краткое сообщение по поводу настоящей работы сделано ранее одним из авторов [6]. Мы рассматриваем функции со значениями в абстрактном KB-пространстве X (см., например, [7]). К этому классу пространств принадлежат, в частности, пространства l_p числовых последовательностей, суммируемых в p-й степени, а также лебеговские пространства L_p, $p \geqslant 1$. Далее рассматриваются пространства $L_p(D, \Sigma, \mu, X)$ функций со значениями в KB-пространстве X, измеримых относительно σ-алгебры Σ борелевских множеств n-мерного эвклидова пространства R_n, суммируемых в p-й степени ($p \geqslant 1$) относительно лебеговой меры μ в области $D \subset R_n$. Интегрируемость понимается в смысле Бохнера.

Затем, следуя С. М. Никольскому [8], определяется обобщенная производная $\partial f/\partial t_i$ для функции f, заданной в области D. Мы говорим, что функция f имеет обобщенную производную $\partial f/\partial t_i$ в области D, если значения функции $f(t)$ можно видоизменить на множестве нулевой меры так, что после этого f для почти всех допустимых $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$ будет абсолютно непрерывной относительно t_i. Функция $\partial f/\partial t_i$ трактуется как производная Радона-Никодима, существование которой доказано в [4]. Производные $\dfrac{\partial^l f}{\partial t^{\alpha_1} \ldots \partial t^{\alpha_n}}$ для $l > 1$ определяются по индукции. После этого определяется пространство $W_p^l(D)$ как множество всех функций f, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными порядка l пространству $L_p(D, \Sigma, \mu, X)$; норма в $W_p^l(D)$ вводится обычным образом.

Далее изложение ведется по аналогии с известной теорией для скалярных функций, при этом мы следуем Л. В. Канторовичу [9]; этот путь нам кажется кратчайшим для достижения основной цели—формулировки теорем вложения. Аналогия оказывается настолько полной, что большинство формулировок и утверждений дословно переносятся со скалярного случая на рассматриваемый нами абстрактный случай. Однако следует иметь в виду, что если в цитируемой работе [9], которой мы следуем, теоремы вложения доказываются

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

сначала для непрерывно дифференцируемых функций, то в нашей работе доказывается возможность формулировки этих теорем с использованием только понятия обобщенной производной. Большей частью мы ограничиваемся формулировками теорем, опуская проверку их справедливости, поскольку такая проверка аналогична скалярному случаю и останавливаемся только на некоторых моментах, специфичных для рассматриваемого нами абстрактного случая. Так, например, леммы 1—4 и теорема 1 к § 4, используемые далее, существенно опираются на понятия и факты, выходящие за рамки скалярного случая.

§ 1. Предварительные сведения и предложения

В этом параграфе перечисляются обозначения, понятия и факты, используемые в дальнейшем.

1°. Через R_n обозначается n-мерное эвклидово пространство, точки которого обозначаются через $t=(t_1,\ldots,t_n)$, $s=(s_1,\ldots,s_n)$ и т. д. Через Σ будем обозначать σ-алгебру борелевских множеств в R_n, через μ—лебеговскую меру на Σ, через D—n-мерную область в R_n которую будем предполагать ограниченной.

2°. Мы будем рассматривать интегрируемые функции со значениями в KB - просранстве $X=\{x\}$. Интегрируемость функции $f(t)$ на множестве $E\in\Sigma$ понимается в смысле Бохнера. Это означает, что если $f(t)$ счетнозначная функция, то есть если существует счетное число непересекающихся множеств $E_\kappa\in\Sigma$, на каждом из которых $f(t)$ принимает постоянное значение $a_\kappa\in X$ и $f(t)=0$, $0\in X$ при

$$t\in D-\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}E_R,$$

то по определению

$$\int_E f(t)\,dt\equiv\int_E f(t)\,d\mu(t)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}a_R\mu(E_\kappa\cap E);$$

при этом предполагается, что вещественная функция $\|f(t)\|_X$ интегрируема.

Если $f(t)$ — произвольная измеримая функция, то она называется интегрируемой по Бохнеру на E, если существует последовательность счетнозначных функций $f_n(t)$, сходящихся почти всюду к $f(t)$, такая, что

$$\lim\int_E\|f_n(t)-f(t)\|_X dt=0,$$

причем по определению,

$$\int_E f(t)\,dt=\lim\int_E f_n(t)\,dt.$$

Пространство всех интегрируемых на D функций $f(t)$ со значениями в X обозначается через $L(D,\Sigma,\mu,X)$ или просто через L, где $\|f\|_L$ определяется равенством

$$\|f\|_L=\int_D\|f(t)\|_X dt.$$

Как обычно, эквивалентные функции отождествляются. Аналогично определится пространство $L_p(D,\Sigma,\mu,X)$ или кратко $L_p(p\geqslant 1)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Функция $f \in L_p$ называется простой, если она принимает конечное число значений $x_1,\ldots,x_n$ и такова, что

$$f^{-1}(x_i) = \{t:\ i \in D,\ \ f(t) = x_i\} \in \Sigma, \quad i = 1,\ 2,\ldots,n.$$

Известно, что множество простых функций плотно в L_p ([10], стр. 140).

3°. Пусть $f(t)$ функция со значениями в KB-пространстве ϵ, определенная, например, на промежутке $[0,\ 1]$ вещественной прямой $f(t)$, называется абсолютно непрерывной, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $\sum_{i=1}^{n} |t_i' - t_i''| < \delta$ следует

$$\sum_{i=1}^{n} \| f(t_i') - f(t_i'') \| < \varepsilon,$$

где $[t_i'\ t_i'']$ — система попарно непересекающихся промежутков. Известно, что $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — неубывающие абсолютно непрерывные функции. Будем поэтому в дальнейшем считать $f(t)$ неубывающей. Пусть $P = \{E\}$ совокупность всех подмножеств $E \subset [0,\ 1]$ вида $E = [0,\ d]$ или $E = [c,\ d)]$, $0 < c < d \leqslant 1$, и пусть

$$\nu([0,\ d]) = f(d) - f(0), \quad \nu([c,\ d]) = f(d) - f(c).$$

Обозначим через R алгебру, элементами которой являются всевозможные конечные объединения элементов из P. Тогда функция ν может быть продолжена единственным образом на алгебру R, а затем на σ-алгебру Σ, порожденную алгеброй R, то есть на все борелевские множества из $[0,\ 1]$. Подробное изложение такого продолжения проделано в нашей заметке [5].

Можно показать, что существует функция $f_1(t) \in L([0,\ 1], \Sigma, \mu, \epsilon)$ такая, что для любого множества $E \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\nu(E) = \int_E f_1(t)\, dt.$$

Последнее утверждение естественно назвать обобщенной теоремой Радона-Никодима для рассматриваемого нами случая, а функцию $f_1(t)$ — производной Радона-Никодима. Подробное доказательство дано в [4].

4°. Пусть теперь D — указанная выше n-мерная область и $f \in L_p(D, \Sigma, \mu, \epsilon)$. Мы будем говорить, что функция f имеет обобщенную производную $\partial f / \partial t_i$ $(i = 1,\ 2,\ldots,n)$ в области D, если значения функции f можно видоизменить на множестве нулевой меры так, что после этого функция f для почти всех допустимых $(t_1,\ldots,\ t_{i-1};\ t_{i+1},\ldots,\ t_n)$ будет абсолютно непрерывной относительно t_i. Производная

$$\frac{\partial^l f}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}} \equiv D_\alpha^l f = f^l_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = l$$

определяется по индукции. Заметим, что из нашего определения вытекает, что если существуют все производные порядка l, то существуют и все производные порядка $\kappa < l$.

Обозначим, как обычно, следуя С. Л. Соболеву, через $W_p^l(D) \equiv W_p^l$ множество всех функций f, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными порядка l, пространству $L_p(D,\ \Sigma,\ \mu,\ \epsilon)$. Введем в W_p^l норму, полагая

$$\|f\|_{W_p^l} = \left\{ \|f\|_{L_p}^p + \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = l} \|D_\alpha^l f\|_{L_p}^p \right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Можно показать, что пространство W_p^l относительно указанной нормы является нормированным, сепарабельным, полным пространством и что норма (2) эквивалентна каждой из следующих норм:

$$\|f\| = \|f\|_{L_p} + \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=l} \|D_\alpha^l f\|_{L_p}, \tag{3}$$

$$\|f\| = \max_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=l} \|D_\alpha^l f\|_{L_p} + \|f\|_{L_p} \tag{4}$$

$$\|f\| = \left\{ \int_D \left[\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=l} \|f^l_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\|_X^2 \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p} + \frac{1}{\rho D} \left\| \int_D f(t)\, dt \right\|_X . \tag{5}$$

5°. Функция $f(t)$ называется непрерывной в D, если при $t \in D$

$$\|f(t+\tau) - f(t)\|_X \to 0 \qquad \text{при } \tau \to 0.$$

Здесь t и τ — n-мерные вектора. Аналогично определяется равномерная непрерывность в D. Покажем, что множество непрерывных функций плотно в L_p. Как уже указано, в пункте 2 множество простых функций плотно в L_p, поэтому достаточно убедиться, что всякую простую функцию можно аппроксимировать в L_p с любой точностью непрерывной функцией, для чего, в свою очередь, достаточно доказать возможность такой аппроксимации для функции f_0 вида

$$f_0(t) = \begin{cases} x_0, & \text{если } t \in E, \\ 0, & \text{если } t \overline{\in} E. \end{cases}$$

Докажем последнее. Существуют множества $F_1 \in \Sigma$, $F_2 \in \Sigma$ такие, что $\overline{F_1} \subset E$, $\overline{F_2} \subset E' = R_n - E$ и

$$\rho(E - F_1) < \varepsilon, \quad \rho(E' - F_2) < \varepsilon,$$

где $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ соответственно замыкания множеств F_1 и F_2 и E' — дополнение множества E до R_n. По известной теореме Урысона существует вещественная функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(t) = 1$ для $t \in \overline{F_1}$, $\varphi(t) = 0$ для $t \in \overline{F_2}$. Положим $f(t) = \varphi(t) x_0$. Тогда

$$\|f - f_0\|_{L_p} = \left[\int_{R_n} \|\varphi(t)\, x_0 - f_0 t\|_X^p\, dt \right]^{1/p} =$$

$$= \|x_0\| \left[\int_{E/F_1} |\varphi(t) - 1|^p dt \right]^{1/p} + \|x_0\| \left[\int_{E'-F_2} |\varphi(t)|^p dt \right]^{1/p} \leqslant \|x_0\| . 2\varepsilon,$$

что доказывает утверждение.

§ 2. Условия компактности множеств в $L_p(D, \Sigma, \rho, X)$

1°. Функции из $L_p(D, \Sigma, \mu, X)$ будем считать распространенными на все пространство R_n, полагая их равными 0, $0 \in X$ вне области D. Пусть

$$\omega_h(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi < h \\ 0, & \text{если } \xi \geqslant h \end{cases}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

—обычное вещественное ядро усреднения. Пусть $G(s)$ n-мерная сфера радиуса h с центром в точке s. Положим для $f \in L_p$

$$f_h(s) = \frac{1}{V_h} \int_{R_n} \omega_h(|s-t|) f(t)\, dt = \frac{1}{V_h} \int_{G(s)} \omega_h(|s-t|) f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Функция f_h называется усреднением функции f.

2°. При любом $h > 0$ усреднение $f_h(s)$ непрерывно, при этом

$$\|f_h(s)\|_X \leqslant (V_h)^{-1/p} \|f\|_{L_p}. \qquad (2)$$

Заметим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ так, что

$$\|f_h(s) - f_h(s')\| \leqslant \frac{\varepsilon}{V_h} (V_h + 1) \|f\|_{L_p}, \quad \text{если } |s - s'| < \delta. \qquad (3)$$

3°. Если $f(t)$ равномерно непрерывна в R_n, то при $h \to 0$ средние функции $f_h(s)$ равномерно в R_n сходятся к f.

4°. Сопоставляя элементу $f \in L_p$ среднюю функцию f_h, мы получим оператор U_h. Легко устанавливается, что U_h является линейным непрерывным оператором из L_p в $C(\overline{D})$, где $C(\overline{D})$ — пространство непрерывных функций на $\overline{D}$ ($\overline{D}$—замыкание области D), при этом

$$\|f_h\|_{C(\overline{D})} = \sup_{s \in \overline{D}} \|f_h(s)\|_X \leqslant \frac{1}{(V_h)^{1/p}} \|f\|_{L_p(D)},$$

откуда

$$\|U_h\| \leqslant (V_h)^{-1/p}.$$

Если U_h рассматривать как оператор из L_p в L_p, то

$$\|U_h\| \leqslant 1 \qquad (h > 0). \qquad (4)$$

5°. Если $h \to 0$, то $f_h \to f$ в метрике L_p.

Доказательство. Пусть $f \in L_p$ и $\varepsilon > 0$ произвольное число. Как указано в пункте 5°, § 1, множество равномерно непрерывных в R_n функций плотно в L_p. Следовательно, найдется равномерно непрерывная функция f_1 такая, что

$$\|f - f_1\|_{L_p} < \varepsilon/2. \qquad (5)$$

Согласно пункту 3 этого параграфа при достаточно малом $h > 0$ будем иметь

$$\|f_h - f_1\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

и из (5) и (6)

$$\|f - f_h\|_{L_p} \leqslant \varepsilon,$$

что доказывает утверждение.

6°. В заключение докажем теоремы, аналогичные теоремам А. Н. Колмогорова и М. Рисса о компактности множеств в лебеговских пространствах скалярных функций.

Теорема. (А. Н. Колмогоров) Для компактности множества E в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ необходимо и достаточно, чтобы

1) E было ограниченным,

2) средние функции для $f \in E$ при $h \to 0$ сходились бы равномерно на E в метрике пространства L_p.

Доказательство. Мы опускаем доказательство необходимости условий. Оно дословно проводится так же, как и в скалярном случае ([9], стр. 272).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Докажем достаточность. Пусть E_h множество элементов вида $U_h f$, где $f \in E$. Согласно пункту 2 функции из E_h непрерывны в $\overline{D}$, а из неравенств (2) и (3) указанного пункта видно, что множество E_h ограничено и равностепенно непрерывно в метрике $C(\overline{D})$. Отсюда следует, как и в скалярном случае, что E_h компактно в метрике $C(\overline{D})$ и, следовательно, компактно в L_p. Из условия 2) в теореме далее вытекает, что E_h образует компактную ε-сеть в L_p для множества E и, стало быть, E компактно.

Теорема (М. Рисс). Для компактности множества E в L_p необходимо и достаточно, чтобы

1) E было ограниченным,

2) $\int\limits_D \|f(t+\tau) - f(t)\|^p \, dt \to 0$ при $\tau \to 0$

равномерно относительно $f \in E$. (t и τ — точки из R_n).

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, доказательство необходимости опускаем. Докажем достаточность. Имеем

$$U_h f(s) - f(s) = \frac{1}{V_h(s)} \int\limits_{G_h(s)} \omega_h(|s-t|) f(t)\, dt - f(s) =$$

$$= \frac{1}{V_h} \int\limits_{G_h(s)} \omega_h(|s-t|) [f(t) - f(s)]\, dt = \frac{1}{V_h} \int\limits_{G(0)} [f(t+\tau) - f(t)]\, d\tau$$

и

$$\|U_h f - f\|_{L_p}^p = \frac{1}{(V_h)^p} \int\limits_D \left\| \int\limits_{G(0)} [f(t+\tau) - f(t)]\, d\tau \right\|_X^p dt.$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Гельдера, получаем

$$\|U_h f - f\|_{L_p}^p = (V_h)^{-p} \int\limits_D \left[\int\limits_{G(0)} d\tau \right]^{p/p'} \left[\int\limits_{G(0)} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p \, d\tau \right] dt =$$

$$= (V_h)^{-1} \int\limits_D \int\limits_{G(0)} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p \, d\tau \, dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\|U_h f - f\|_{L_p}^p \leqslant (V_h)^{-1} \int\limits_{G(0)} \int\limits_D \|f(t+\tau) - f(t)\|^p dt \, d\tau. \tag{6}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно второму условию теоремы найдется такое $h_0 > 0$, что при $h \leqslant h_0$ величина внутреннего интеграла в (6) меньше ε при любом $f \in E$ и, следовательно,

$$\|U_h f - f\|_{L_p} < \varepsilon.$$

Таким образом выполнено условие 2) в предыдущей теореме и, следовательно, E компактно.

§ 3. Теоремы об интегральных операторах

Пусть D и D' области с конечной мерой соответственно n-мерного и m-мерного эвклидова пространства. Без умаления общности предполагается, что $\rho D = 1$. Пусть $K(s, t)$ измеримая функция в области $D \times D'$. Справедливы следующие теоремы.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема 1. Если выполнены условия:

$$1) \quad \left[\int_D |K(s,t)|^r dt\right]^{1/r} \leqslant C_1 \qquad (r>0)$$

для почти всех $s \in D'$;

$$2) \quad \left[\int_{D'} |K(s,t)|^\sigma ds\right]^{1/\sigma} \leqslant C_2 \qquad (\sigma>0)$$

для почти всех $t \in D$;

$$3) \quad q \geqslant p, \quad q \geqslant \sigma, \quad \left(1-\frac{\sigma}{q}\right)p' \leqslant r \quad \left(p, q \geqslant 1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right),$$

то интегральный оператор

$$g = Uf, \quad g(s) = \int_D K(s,t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

где $f \in L_p(D, \Sigma, \mu, X)$ представляет собой линейный непрерывный оператор из $L_p(D, \Sigma, \mu, X)$ в $L_q(D', \Sigma, \nu, X)$, где ν — лебеговская мера в R_m, причем

$$\|U\| \leqslant C_1^{1-\frac{\sigma}{q}} C_2^{\frac{\sigma}{q}}$$

в предположении, что $\mu D = 1$.

Доказательство этой теоремы переносится дословно с доказательства в [1], где рассматривается скалярный случай.

Теорема 2. Интегральный оператор (1) представляет собой вполне непрерывный оператор из $L_p(D, \Sigma, \mu, x)$ в $L_q(D', \Sigma, \nu, X)$, если ее ядро суммируемо в $D \times D'$ со степенью r', где $r = \min(p, q)$, то есть если

$$\left[\int_D \int_{D'} |K(s,t)|^{r'} ds\, dt\right]^{1/r'} \leqslant C < \infty, \tag{2}$$

при этом

$$\|U\| \leqslant AC, \tag{3}$$

где можно полагать

$$A = [\nu D']^{\frac{1}{q\left(\frac{r'}{q}\right)'}}.$$

В доказательстве используется следующая

Лемма. Если ядро в (1) непрерывно в области $D \times D'$, то оператор (1) является вполне непрерывным из L_p в L_q.

Докажем лемму. Пусть $E \subset L_p$ — ограниченное множество: $\|f\| \leqslant K$, $f \in E$. Нужно доказать, что множество $U(E) = \{g : g = Uf, f \in E\}$ компактно в L_q. Для $g \in U(E)$ имеем

$$\int_{D'} \|g(s+\tau) - g(s)\|_X^q ds = \int_{D'} \left\| \int_D \left[K(s+\tau, t) - K(s,t)\right] f(t)\, dt \right\|_X^q ds \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in D} |K(s+\tau, t) - K(s,t)|^q \int_{D'} \left\| \int_D f(t)\, dt \right\|_X^q ds. \tag{4}$$

Применяя к внутреннему интегралу справа неравенство Гельдера, находим

$$\left\| \int_D f(t)\, dt \right\|_x \leqslant \int_D \|f(t)\|_x\, dt = (\mu D)^{1/p'} K. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$\left[\int_{D'} \|g(s+\tau) - g(s)\|_X^q ds\right]^{1/q} \leqslant \max_{t \in D} |K(s+\tau, t) - K(s,t)|\, \mu D' \cdot K. \tag{6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Правая часть стремится к нулю при $\tau \to 0$ независимо от $f \in E$. Так как множество $U(E)$, очевидно, ограничено, то по теореме Рисса § 2 оно компактно и, таким образом, оператор U вполне непрерывен.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично скалярному случаю (см. [9], стр. 327—328).

Замечание 1. Линейность оператора U сохраняется и тогда, если $q < \sigma$. Кроме того, если не выполнено условие $q \geqslant p$, то оператор U из L_p в L_q остается линейным, если

$$p'\left(1-\frac{\sigma}{p}\right) \leqslant r. \tag{6'}$$

В частности, (6′) выполняется, если $\sigma \geqslant 1$, $r \geqslant 1$.

Замечание 2. В предельном случае $p = 1$ для линейности оператора U достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left[\int_{D'} |K(s,t)|^q \, ds\right]^{1/q} \leqslant C_2 \tag{3'}$$

для почти всех $t \in D$, при этом $\|U\| \leqslant C_2$.

Замечание 3. В случае $q = \infty$ оператор (1) является непрерывным оператором из $L_p(D)$ в пространство $M(D')$ существенно ограниченных функций, если выполнено условие 1) при некотором $r \geqslant p'$, причем $\|U\| \leqslant C_1$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, а условие 3) выполнено в усиленной форме:

$$q \geqslant p, \quad q > \sigma, \quad \left(1-\frac{\sigma}{q}\right)p' < r. \tag{7}$$

Тогда интегральный оператор (1) является вполне непрерывным оператором из L_p в L_q.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы в [9] (стр. 328).

Ядро $K(s, t)$ называется почти равномерно непрерывным в τ_0 по параметру τ относительно s и t, если для любых $\varepsilon > 0$, $h > 0$ и s существуют $\delta > 0$ и множество $E(s)$ такие, что

$$|K_\tau(s,t) - K_{\tau_0}(s,t)| < \varepsilon$$

как только $|\tau - \tau_0| < \delta$, $t \overline{\in} E(s)$, причем $\mu(E) < h$.

Теорема 4. Пусть ядро интегрального оператора почти равномерно по параметру τ при $\tau = \tau$ и для каждого τ удовлетворяет условиям теоремы 3, причем постоянные, входящие в формулировку этой теоремы, не зависят от τ. Тогда интегральный оператор

$$U_\tau f = g_\tau, \quad g_\tau(s) = \int_D K_\tau(s,t) f(t)\, dt,$$

переводящий L_p в L_q, непрерывно зависит от τ, то есть

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|U_\tau - U_{\tau_0}\| = 0.$$

Доказательство происходит так же, как и в [9] (стр. 322).

Будем теперь считать области D и D' лежащими в одном пространстве. Пусть

$$K(s,t) = \frac{B(s,t)}{|s-t|^\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{8}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где $B(s,t)$ — скалярная ограниченная непрерывная при $s \neq t$ функция. Такие ядра называются ядрами типа потенциала. Чтобы были выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, достаточно, чтобы $\alpha r \leqslant n$ и $\alpha\sigma \leqslant m$. Условия 3) запишутся при этом в виде

$$q \geqslant p,\ q > \frac{m}{\alpha},\quad \left(1 - \frac{m}{\alpha q}\right) p' < \frac{n}{\alpha}.$$

Из замечания к теореме 1 вытекает, что условия

$$q < \frac{mp}{n-(n-\alpha)p},\quad m > n-(n-\alpha)p \tag{9}$$

достаточны для непрерывности оператора (1) с ядром вида (8). Так как при этом выполнено и условие (7), то из (9) следует полная непрерывность оператора U. В частности, при $\alpha = n-1$ условия (9) принимают вид

$$q < \frac{mp}{n-p},\quad m > n-p. \tag{10}$$

Если рассматривать оператор $U_{\Delta s}$ с ядром $K(s+\Delta s, t)$ как функцию параметра Δs, то согласно таореме 4 будем иметь

$$\|U_{\Delta s} - U\| \to 0, \text{ если } \Delta s \to 0.$$

Сказанное формулируется в следующей теореме.

Теорема 5. Если выполнено условие (9), то интегральный оператор с ядром вида (8) представляет собой линейный вполне непрерывный оператор, отображающий $L_p(D)$ в $L_q(D', \Sigma, \mu, X)$, где D — n-мерная область эвклидова пространства, D' — m-мерное многообразие в нем. При этом если D' непрерывно зависит от параметра, то и $g(s) = Uf$ будет непрерывной по параметру.

В частности,

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left[\int_{D'} \|g(s+\Delta s) - g(s)\|_X^q\, ds\right]^{1/q} = 0. \tag{11}$$

Замечание. Теорема верна и при $q = \infty$. Условия (9) заменяются условием

$$(n-\alpha)p > n, \tag{12}$$

а соотношение (11) перейдет в соотношение

$$\sup \|g(s+\Delta s) - g(s)\|_X \to 0 \text{ при } \Delta s \to 0,$$

что означает непрерывность функции $g(s)$.

Таким образом, оператор U в этом случае переводит пространство $L_p(D, \Sigma, \mu, X)$ в пространство $L_\infty(D', \Sigma, \nu, X)$ и, следовательно, в $C(D')$, то есть имеет место

Теорема 6. Если выполнено условие (12), то интегральный оператор с ядром типа (8) является вполне непрерывным оператором из $L_p(D)$ в $C(D)'$.

§ 4. Теоремы вложения

Везде в этом параграфе предполагается, что $f \in W_p^1(D)$ и область D выпукла.

Лемма 1. Пусть l направленная прямая, проходящая через точку $s \in D$. Тогда функция f индуцирует на σ-алгебре $B_e = \{E\}$ всех борелевских подмножеств этой прямой функцию $\nu_f^e(E)$ со значениями в X, абсолютно непрерывную относительно лебеговской меры на прямой.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство. Для простоты письма будем считать D двумерной областью, $n=2$. Букву f в обозначении ν_f^e будем опускать. Для любого отрезка $[s,t)=[(s_1,s_2),(t_1,t_2))$ на прямой e положим

$$\nu^e([s,t))=f(t)-f(s).$$

Заметим, что

$$f(t)-f(s)=[f(t_1,s_2)-f(s_1,s_2)]+[f(t_1,t_2)-f(t_1,s_2)]. \qquad (1)$$

Так как $f\in W_p^1(D)$, то из (1) видим, что $\nu^e([s,t))$ есть абсолютно непрерывная функция промежутка $[s,t)$ на прямой e и, согласно пункту 3, § 1, может быть продолжена до абсолютно непрерывной функции множества на B_e.

Лемма 2. Если через $\partial f/\partial e$ обозначить производную Радона-Никодима для функции $\nu^e(E)$, то почти всюду относительно ν^e имеет место равенство

$$\frac{\partial f}{\partial e}\equiv\frac{\partial f(t_1,t_2)}{\partial e}=\frac{\partial f}{\partial t_1}\cos(t_1,e)+\frac{\partial f}{\partial t_2}\cos(t_2,e). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $\rho(s,t)$—расстояние между точками s и t. Известно, что почти всюду на e

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\lim_{s\to t}\frac{1}{\rho(s,t)}\int\limits_{[s,t)}\frac{\partial f}{\partial e}\,de=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{\rho(s,t)}. \qquad (3)$$

(См., например, [10], стр. 237). Согласно равенству (1)

$$\frac{f(t)-f(s)}{\rho(s,t)}=\left[\frac{f(t_1,s_2)-f(s_1,s_2)}{t_1-s_1}(t_1-s_1)+\frac{f(t_1,t_2)-f(t_1,s_2)}{t_2-s_2}\times\right.$$

$$\left.\times(t_2-s_2)\right]\frac{1}{\rho(s,t)}=\frac{f(t_1,s_2)-f(s_1,s_2)}{t_1-s_1}\cos(t_1,e)+$$

$$+\frac{f(t_1,t_2)-f(t_1,s_2)}{t_2-s_2}\cos(t_2,l). \qquad (4)$$

Переходя в (4) к пределу при $s\to t$, получаем, согласно (3), равенство (2).

Лемма 3. Пусть $s\in D$—фиксированная точка, l—направленный луч, исходящий из точки s, $R(t)=\rho(s,t)$ — расстояние от точки s до точки t. Тогда функции

$$R^{n-1}(t)f(t),\ R^{n-1}(t)\int\limits_{[s,t)}\frac{\partial f}{\partial e}\,dl\equiv R^{n-1}\int\limits^{R}\frac{\partial f}{\partial e}\,dl$$

суть интегрируемые функции на промежутке изменения R от нуля до $d(l)$, где $d(\ )$ — длина луча от точки s до точки пересечения луча с границей области D.

Утверждение леммы очевидно. Заметим, что последняя функция абсолютно непрерывна, как функция от R.

Лемма 4. Пусть $\omega=\{\sigma\}$—единичная сфера с центром в точке s, l—луч, исходящий из точки s и пересекающий сферу в точке $\sigma\in\omega$. Тогда интегралы

$$\int\limits_0^{d(l)}f(t)\,R^{n-1}(t)\,dR(t)\quad\text{и}\quad\int\limits_0^{d(l)}R^{n-1}\,dR\int\limits_0^{R}\frac{\partial f}{\partial l}\,dl,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

которые существуют по предыдущей лемме и представляют собой функции точки $\sigma\in\omega$, интегрируемы относительно поверхностной меры на ω. Обозначим эти интегралы соответственно через

$$\int_{\omega} d\omega \int_{0}^{d(l)} f(t) R^{n-1}\, dR \quad \text{и} \quad \int_{\omega} d\omega \int_{0}^{d(l)} R^{n-1}\, dR \int_{0}^{R} dl.$$

Доказательство утверждений леммы, то есть существование двух последних интегралов, проводится обычным в этих случаях путем. Оно основано на самом определении интеграла Бохнера.

Теорема 1. Справедливо тождество

$$f(s) = \frac{1}{\mu D}\int_{D} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n}\int_{D}\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{n-1}}\frac{\partial f}{\partial t_k}\,dt, \tag{5}$$

где $B_k(s,t)$, $k=1,2,\ldots,n$—ограниченные, вещественные, непрерывные при $s\neq t$ функции, такие, что

$$|B_k(s,t)| \leqslant \frac{\delta^n}{n\mu D}, \tag{6}$$

где δ—диаметр области D,

Доказательство. Заметим, что существование интегралов, используемых далее в доказательстве, обосновано в предыдущих леммах. Очевидно, что

$$f(s) = f(t) - \int_{[s,\,t)} \frac{\partial f}{\partial l}\,dl \equiv f(t) - \int_{0}^{R}\frac{\partial f}{\partial l}\,dl.$$

Отсюда

$$f(s)\int_{0}^{d(l)} R^{n-1}\,dR = \int_{0}^{d(l)} f(t) R^{n-1}\,dR - \int_{0}^{d(l)} R^{n-1}\,dR - \int_{0}^{R}\frac{\partial f}{\partial l}\,dl.$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, получаем

$$f(s)\int_{0}^{d(l)} R^{n-1}\,dR = \int_{0}^{d(l)} f(t) R^{n-1}\,dR - \int_{9}^{d(l)}\frac{\partial f}{dl}\int_{R}^{d(l)} R^{n-1}\,dR\,dl =$$

$$= \int_{0}^{d(l)} f(t) R^{n-1}\,dR - \int_{0}^{d(l)}\frac{d(l)^n - R_n}{nR^{n-1}}\frac{\partial f}{\partial l} R^{n-1}\,dl. \tag{7}$$

Перемена порядка интегрирования законна на основании теоремы Фубини ([10], гл. III). Заменяя в последнем интеграле в (7) переменную интегрирования l на R и проинтегрировав по ω, получим

$$f(s)\int_{\omega} d\omega \int_{0}^{d(l)} R^{n-1}\,dR = \int_{\omega} d\omega \int_{0}^{d(l)} f(t) R^{n-1}\,dR -$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-\int_{\omega} d\omega \int_{0}^{d(l)} \frac{d(l)^n - R^n}{nR^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial l} R^{n-1}\, dR \tag{8}$$

или

$$f(s)\,\mu D = \int_{D} f(t)\,dt - \int_{D} \frac{d^n - R^n}{nR^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial l}\,dt. \tag{9}$$

Мы не останавливаемся на доказательстве равенства соответственно обоих интегралов справа в (8) и (9), так как это доказательство проводится по обычной в этих случаях схеме. Воспользовавшись равенством (2) к лемме 2, деля обе части равенства (9) на μD и полагая

$$B_k(s, t) = \frac{d^n - R^n}{\mu D \cdot n} \cos(l, t_k) = B(s, t) \cos(t_k, l), \tag{10}$$

где $B(s, t) = \dfrac{d^n - R_n}{n\mu D}$, получим равенство (5). Из (10) очевидны непрерывность функций $B_k(s, t)$ при $s \neq t$ и оценка (6).

Теорема 2 (Неравенство Соболева). Пусть

$$q < \frac{np}{n-p}. \tag{11}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|f - m(f)\|_{L_q} = \{\int_{D} \|f(t) - m(f)\|_x^q\, dt\}^{1/q} \leqslant A \,\|\operatorname{grad} f\|_{L_p}, \tag{12}$$

где

$$\operatorname{grad} f = \left(\sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial t_k} \right\|_x^2\right)^{1/2}, \quad m(f) = \frac{1}{\mu D} \int_{D} f(t)\,dt$$

и A—постоянное.

Доказательство. Согласно теореме 1 имеем

$$\|f - mf\|_X = \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{D} \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial t_k}\, dt \right\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \int_{D} \frac{|B(s, t)|}{|s-t|^{n-1}} |\operatorname{grad} f(t)|\, dt. \tag{13}$$

Так как при условии (11) интегральная операция U в (1^3), как показано в предыдущем параграфе, представляет собой непрерывную операцию из $L_p(D)$ в $L_q(D)$, то

$$\|f - m(f)\|_{L_q} \leqslant \|U\| \cdot \|\operatorname{grad} f\|_{L_p}.$$

Полагая $A = \|U\|$, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Неравенство (12) эквивалентно неравенству

$$\|f\|_{L_q} \leqslant M\,[\|\operatorname{grad} f\|_{L_p} + \|m(f)\|_{L_p}] = M\,\|f\|_{W_p^1(D)}. \tag{14}$$

Доказывается на основании неравенства Минковского и определения нормы в W_p^1 в пункте 4, § 1.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема 3. (Соболев—Кондрашев). При условии (10) оператор вложения, сопоставляющий элементу из $W_p^1(D)$ его же, рассматриваемого как элемент из $L_q(D, \Sigma, \mu, x)$, вполне непрерывен.

Доказательство. Неравенство (14) означает непрерывность оператора вложения. Вполне непрерывность следует из того, что элементы $\frac{\partial f}{\partial t_k}$ принадлежат пространству $W_p^1(D)$, а интегральный оператор с ядром $\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{n-1}}$ и оператор $m(f)$ вполне непрерывны.

Теорема 4. Операция вложения, сопоставляющая элементу из $W_p^1(D)$ его же, рассматриваемого как элемент пространства $L_q(D', \Sigma, \mu, x)$, где D'—m-мерная поверхность в D вполне непрерывна при условиях

$$q < \frac{mp}{n-p}, \quad m > n-p. \tag{15}$$

Причем элемент f непрерывно зависит от сдвига поверхности D', то есть

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left[\int_{D'} \|f(s+\Delta s) - f(s)\|^q \, ds\right]^{1/q} = 0. \tag{16}$$

Доказательство получается на основании теоремы 4 предыдущего параграфа.

Теорема 5. При условии $n < p$ операция вложения из $W_p^1(D)$ в $C(D)$ вполне непрерывна.

Доказательство получается на основании теоремы 6 предыдущего параграфа.

Сформулируем теоремы, аналогичные теоремы 3 и 4 применительно к пространствам $W_p^l(D)$ при $l > 1$.

Теорема 6. Оператор вложения пространства $W_p^l(D)$ в пространство $L_p(D)$ будет вполне непрерывным при условии

$$q < \frac{np}{n-lp}. \tag{17}$$

Теорема 7. Оператор вложения $W_p^l(D)$ в $L_q(D')$, где D'—m-мерная поверхность в D при условиях

$$q < \frac{mp}{n-lp}, \quad m > n-lp \tag{18}$$

представляет собой вполне непрерывный оператор. Про этом при непрерывной деформации поверхности D' в зависимости от параметра этот оператор непрерывно зависит от параметра.

Доказательство, имеющееся в [9] для скалярного случая, переносится и на рассматриваемый нами случай векторнозначной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Некоторые обобщения теорем вложения. 47, № 3, 1959.
2. В. Б. Коротков. О прямых и обратных теоремах вложения С. Л. Соболева для абстрактных функций множества. ДАН 144, 4, 1962.
3. А. Х. Гуднев. К теоремам вложения С. Л. Соболева для абстрактных функций. ДАН, т. 148, 1, 1963.
4. З. И. Клементьев, А. А. Бокк. Об одном обобщении теоремы Радона-Никодима.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

5. З. И. Клементьев и А. А. Бокк. К теории векторнозначных мер. Тр. ТГУ, т. 179, Томск, 1966.
6. А. А. Бокк. Об одном обобщении теорем вложения С. Л. Соболева. Докл. третьей Сибирской конференции по математике и механике, Томск, 1964.
7. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., 1950.
8. С. М. Никольский. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. Матем. сб., 33(75): 2, 1 53.
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959
10. Н. Данфорд, ДЖ. Т. Шварц. Линейные операторы. М., 1962.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ, Г. С. ШАХНОВИЧ

В работе исследуются линейные подпространства пространства S всех локально суммируемых функций, заданных на полуоси $[0, \infty)$. Для пространств числовых последовательностей аналогичное исследование проделано в работе [1]. Особенности, которые имеются в нашей работе, обусловлены прежде всего сравнительно слабым требованием локальной суммируемости рассматриваемых функций

§ 1. Линейные функциональные пространства и слабая сходимость в них

Пусть S—множество всех вещественных, измеримых по Лебегу локально суммируемых функций, заданных на полуоси $[0, \infty)$. Будем рассматривать S как линейное множество, определяя сумму двух функций и умножение на вещественное число обычным образом. Функции эквивалентные относительно меры Лебега будем отождествлять. Линейным функциональным пространством X будем называть любое линейное подмножество из S.

Через Φ будем обозначать множество всех финитных простых функций. Очевидно, Φ—линейное пространство.

Определение 1. Пусть X—линейное пространство. Множество $X^* \subset S$ всех функций $y(t)$ из S таких, что

$$\left|\int_0^\infty x(t)\,y(t)\,dt\right| < \infty \qquad (1)$$

при любом $x \in X$, где интеграл понимается в смысле Лебега, будем называть пространством дуальным для X (или относительно X). X^*, очевидно, также линейное пространство. Значение интеграла (1) будем обозначать кратко через $xy = yx$.

Теорема 1. Пространство $X^{**} = (X^*)^*$ содержит X, то есть $X \subset X^{**}$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Так как $|xy| < \infty$ для любого $y \in X^{**}$, то $x \in X^{**}$, чем теорема доказана.

Теорема 2. Всегда $X^{***} = X^*$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определения 1 и теоремы (1).

Определение 2. Пространство X называется совершенным, если $X^{**} = X$.

Теорема 3. Совершенное пространство содержит пространство Φ

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство, Пусть $x\in\Phi$. Так как любая $y\in X^*$ локально суммируема, то $|xy|<\infty$. Следовательно, $x\in X^{**}=X$.

Теорема 4. Если $Z\subset X$, то $Z^*\supset X^*$ и $Z\subset X^{**}$. Справедливость утверждения очевидна.

Замечание. Так как X^{**} по теореме 2 совершенно, то оно содержит Ф. Из теоремы (4) вытекает, что X^{**} есть наименьшее совершенное пространство, содержащее X.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ точек из пространства X называется слабо фундаментальной, если существует $\lim yx_n$ при всяком $y\in X^*$. Точка $x\in X$ называется слабым пределом последовательности $\{x_n\}\subset X$, если $\lim yx_n=yx$ при любом $y\in X^*$. Пространство X называется слабо полным, если в нем всякая слабо фундаментальная последовательность имеет предел.

Обозначим через $\overline{X}$ совокупность всех элементов вида:

$$x_\alpha(t)=\begin{cases}x(t) & \text{при } t\leqslant\alpha\\ 0 & \text{при } t>\alpha,\end{cases}\quad \text{где } x\in X \text{ и } \alpha\geqslant 0.$$

Элементы x_α будем называть отрезками точки x. Очевидно, $\overline{X}$ также линейное пространство и $\overline{S}\geqslant\overline{X}$, каково бы ни было пространство X.

Теорема 5. Если $x\in X$ и x_{α_n} его отрезки, то для любого $y\in X^*$ имеет место равенство $\lim yx_{\alpha_n}=yx$.

Доказательство. Пусть $y\in X^*$ произвольная точка. Имеем

$$|yx-yx_{\alpha_n}|\leqslant\int_{\alpha_n}^{\infty}|y(t)x(t)dt \quad \text{при } n\geqslant N(\varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем

$$\lim yx_{\alpha_n}=yx.$$

Теорема 6. Если $X\supset\Phi$ и слабо полно, то $X\supset\overline{X}$.

Доказательство. Пусть $x\in X$ и x_α — отрезок x. Найдется последовательность $\varphi_n\in\Phi$ такая, что $\varphi_n\to x_\alpha$ в метрике пространства $L_1(0,\alpha)$. Тогда $\lim y\varphi_n=yx_\alpha$ для любого $y\in X^*$, то есть последовательность $\{\varphi_n\}$ слабо фундаментальна; в силу слабой полноты элемент x_α и будет ее слабым пределом.

Теорема 7. Если X слабо полно и содержит $\overline{X}^{**}$, то оно совершенно.

Доказательство. Из теоремы 3 и замечания к теореме 4 следует, что X^* содержит Ф. Пусть теперь $x\in X^{**}$ — произвольная точка. Тогда по теореме 5 $\lim yx_n=yx$ для любого $y\in X^{***}$, где x_n — отрезки точки x. Так как $X^{***}=X^*$, то $\lim yx_n=yx$ для любого $y\in X^*$. По условию $x_n\in X$ и X — полное пространство, следовательно, $x\in X$ и, следовательно, $X^{**}\subset X$. Так как по теореме 1 имеет место обратное включение, то $X=X^{**}$.

Следствие. Если X слабо полное и содержит $\overline{S}$, то оно совершенно.

Теорема 8. $X\supset\Phi$ и слабо полно, то оно совершенно.

Доказательство. Пусть $x\in X^{**}$ и x_α — его отрезки. Найдется последовательность $\varphi_n\in\Phi$ такая, что $\varphi_n\to x_\alpha$ в метрике пространства $L_1(0,\alpha)$. Тогда $\lim y\varphi_n=yx_\alpha$ для любого $y\in X^*$. Отсюда в силу слабой полноты пространства X вытекает, что $x_\alpha\in X$. Следовательно, $X\supset\overline{S}$ и согласно следствию X — совершенное пространство.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 4. Пространство X называется нормальным, если из $x \in X$, $|z| \leqslant |x|$ следует, что $z \in X$. $|z| \leqslant |x|$ означает, что $|z(t)| \leqslant |x(t)|$ почти всюду).

Теорема 9. Совершенное пространство X нормально.

Доказательство. Пусть $x \in X = X^{**}$ — произвольная точка и $|z| \leqslant |x|$. Тогда $|y|\,|x| < \infty$ и $|z|\,|y| < \infty$ для всякого $y \in X^*$; следовательно, $z \in X^{**} = X$.

Замечание. Не всякое нормальное пространство является совершенным. Приведем два примера таких пространств.

.1 Пусть C_0 — совокупность тех ограниченных функций из S, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Очевидно, C_0 — линейное нормальное пространство. Легко видеть, что C_0^* состоит из всех суммируемых функций из S. Действительно, очевидно, что для всякой суммируемой функции $y \in S$ имеем

$$|y\ x| = \left|\int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt\right| < \infty$$

при любом $x \in C_0$. Если $y \in S$ не суммируема, то легко построить $x \in C_0$ так, что $|yx| = \infty$. Очевидно, далее, что C_0^{**} содержит все ограниченные функции из S. Таким образом, $C_0^{**} \neq C_0$.

2. Определим множество X_0 следующим образом. Пусть $x \in S$ и пусть

$$E_N(x) = \{t:\ \ x(t) \neq 0,\ \ t \in (0, N),$$

то есть E_N — совокупность тех точек из интервала $(0, N)$, в которых значение $x(t)$ отлично от нуля. Если

$$\lim_{N\to\infty} \frac{m E_N(x)}{N} = 0,$$

где $mE_N(x)$ — мера множества $E_N(x)$, то, по определению, $x \in X_0$. Очевидно, X_0 — линейное нормальное пространство и $X_0^* \supset \bar{S}$. Покажем что $X_0^* = \bar{S}$. Предположим напротив, что имеется $y \in X_0^*$ и $y \bar{\in} \bar{S}$. Пусть

$$F_n = \{t:\ y(t) \neq 0,\ \ t \in (n, n+1)\},\ \ n = 1,2,....$$

Найдется, как не трудно видеть, последовательность множеств F_{n_κ} и последовательность чисел $\delta_\kappa > 0$ такие, что

$$F_{n_\kappa} = m\{t:\ |y(t)| > \delta_\kappa,\ \ t \in (n_\kappa,\ n_{\kappa+1})\} > 0,\ \ \kappa = 1,2....$$

Очевидно, можно считать, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{m\left[0, N) \cap \left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} F_{n_\kappa}\right)\right]}{N} = 0.$$

Пусть далее

$$x_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{mF_{n_\kappa}}, & \text{если } t \in F_{n_\kappa}, \\ 0, & \text{если } t \bar{\in} F_{n_\kappa} \end{cases}$$

и

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_\kappa(t)}, & \text{если } t \in F_{n_\kappa} \\ 0, & \text{если } t \bar{\in} F_{n_\kappa}. \end{cases}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Нетрудно видеть, что $x \in X_0$ и

$$|y|\ |x| = \int_0^{\infty} |x(t)\, y(t)|\, dt = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_{n_\kappa}^{n_{\kappa+1}} |x(t)\, y(t)|\, dt = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{mF_{n_\kappa}}{mF_{n_\kappa}} = \infty.$$

Последнее противоречит тому предположению, что $y \in X_0^*$ и $y \bar{\in} S$. Следовательно, $X_0^* = S$. Но, очевидно, X_0^{**} содержит любую функцию $x(t) \equiv C$, которая, очевидно, не принадлежит X_0. Таким образом, X_0, будучи нормальным пространством, не является совершенным.

Теорема 10. Всякое совершенное пространство X слабо полно.

Доказательство. Известно, что пространство $L_1(\alpha, \beta)$ $0 \leqslant \alpha < \beta$ слабо полно и, как замечено ранее, все его элементы принадлежат X. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — слабо фундаментальная последовательность. Положим

$$x_n^{[m,\, m+1)}(t) = \begin{cases} x_n(t), & \text{если } t \in [m,\, m+1) \\ 0, & \text{если } t \bar{\in} [m,\, m+1). \end{cases}$$

Очевидно, последовательность $x_n^{[m,\, m+1)}$, $n = 1, 2, \ldots$ будет слабо фундаментальной при любом m. Пусть $x^{[m,\, m+1)}$ — ее слабый предел. Положим

$$x(t) = x^{[m,\, m+1)}(t),$$

если $t \in [m, m+1)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Докажем, что x есть слабый предел последовательности $\{x_n\}$. Будем доказывать от противного. Предположим напротив, что имеется $y \in X^*$ такой, что $yx = \int_0^{\infty} yx\, dt$ не существует. Не теряя общности, можно считать, что $yx = +\infty$ и что $y(t)\, x(t) \geqslant 0$ почти для всех t. Действительно, иначе можно было бы взять функцию $\bar{y}(t) = |y(t)| \operatorname{sign} x(t)$, для которой, очевидно, $\bar{y}x = +\infty$. Заметим, что $\bar{y} \in X^*$, поскольку X^* — всегда нормально. Так как

$$yx = \int_0^{\infty} xy\, dt = +\infty,$$

то найдется $A_1 > 0$ такое, что

$$\int_0^{A_1} xy\, dt > C > 0.$$

Поскольку, далее последовательность $\{x_n^{(A_1)}\}$, где

$$x_n^{(A_1)}(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in [0,\, A_1], \\ 0, & t \bar{\in} [0,\, A_1], \end{cases}$$

слабо сходится в пространстве $L_1(0, A_1)$ и элементу $x^{(A_1)}(t) = x(t)$ при $t \in [0, A_1]$, то найдется натуральное число N_1 такое, что при $n \geqslant N_1$ будем иметь $\int_0^{A_1} x_n\, y\, dt > C$. Возьмем $n_1 \geqslant N_1$. Тогда

$$\int_0^{A_1} yx_{n_1}\, dt > C.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Выберем теперь $A_2 > A_1$ столь большим, чтобы

$$\int_{A_2}^{\infty} |yx_{n_1}|\,dt < \varepsilon.$$

Пусть $A_{2\kappa-2}$, $A_{2\kappa-1}$, $A_{2\kappa}$, N_κ, x_{n_κ} уже выбраны. Поскольку

$$\int_{A_{2\kappa}}^{\infty} xy\,dt + \infty,$$

выбираем $A_{2\kappa+1} > A_{2\kappa}$ таким, чтобы

$$\int_{A_{2\kappa}}^{A_{2\kappa+1}} xy dt > C.$$

Затем выбираем $N_{\kappa+1} > N_\kappa$ такое, чтобы при $n \geqslant N_{\kappa+1}$

$$\int_{A_{2\kappa}}^{A_{2\kappa+1}} x_n y dt > C.$$

Возьмем $n_{\kappa+1} \geqslant N_{\kappa+1}$. Тогда

$$\int_{A_{2\kappa}}^{A_{2\kappa+1}} x_{n_{\kappa+1}} y dt > C.$$

После этого выбираем $A_{2\kappa+2}$ столь большим, чтобы

$$\int_{A_{2\kappa+2}}^{\infty} |xy|\,dt < \varepsilon \text{ и т. д.}$$

Таким образом будут определены последовательности чисел

$$A_0 = 0 < A_1 < A_2 < \ldots, \quad N_1 < N_2 < \ldots$$

и последовательность элементов из $\{x_n\}$. Положим

$$y_0(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [A_{2\kappa-2}, \quad A_{2\kappa-1}] \\ 0, & t \overline{\in} [A_{2\kappa-2}, \quad A_{2\kappa-1}]. \end{cases}$$

Заметим, что $y_0 \in X^*$ в силу нормальности пространства X^*. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\kappa\to\infty} \int_0^{\infty} y_0(t)\, x_{n_\kappa}(t)\, dt = \infty.$$

Последнее противоречит тому, что последовательность по условию слабо фундаментальная. Теорема доказана.

§ 2. Слабо непрерывные линейные функционалы

Определение 5. Линейный функционал $F(x)$, определенный на линейном пространстве X, называется слабо непрерывным, если из того, что x есть слабый предел последовательности $\{x_n\}$, следует

$$\lim F(x_n) = F(x).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Множество всех линейных слабо непрерывных функционалов на X будем обозначать X'.

Теорема 11. Если пространство X содержит Φ и нормально, то функционал F_y, определяемых на X равенством

$$F_y(x) = yx,$$

где $y \in X^*$, является линейным слабо непрерывным функционалом. Наоборот, для всякого линейного слабо непрерывного функционала F, заданного на X, найдется единственный элемент $y \in X^*$ такой что

$$F(x) = yx$$

при любом $x \in X$. Кратко: $X^* = X'$.

Доказательство. а). Очевидно, что равенство $F_y(x) = yx$ определяет слабо непрерывный, линейный функционал; б). Наоборот, пусть $F \in X'$. Так как F можно рассматривать как линейный непрерывный функционал на $L_1(n-1, n)$, то, как известно, найдется существенно ограниченная функция $y_n(t)$ (равная нулю вне промежутка $[n, n-1)$) такая, что для прозвольного $x_n \in L_1(n-1, n)$ ($x_n(t) = 0$ вне $[n, n-1)$ имеет место равенство

$$F(x_n) = \int_n^{n-1} x_n(t)\, y_n(t)\, dt.$$

Положим $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots$. Тогда

$$F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_1 + \dots + x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{\kappa-1}^{\kappa} x(t)\, y(t)\, dt = \int_0^{\infty} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Теорема доказана.

Пусть Y — линейное пространство такое, что $Y \subset X^*$. Тогда можно говорить о слабой фундаментальности, слабом пределе и слабой полноте пространства X относительно Y, так что в частном случае будем иметь определение 3.

Теорема 12. Если $\Phi \subset Y \subset X^*$, $X \supset \Phi$ и слабо полно относительно Y, то X совершенно и $X = Y^*$.

Доказательство. Пусть $x \in X^{**}$ и x_α — его отрезок. Заметим, что $x_\alpha \in X^{**}$. Найдется последовательность $\varphi_n \in \Phi$ такая, что $\varphi_n \to x_\alpha$ в метрике пространства $L_1(0, \alpha)$. Тогда для любого $y \in Y$ будем иметь $\lim y\varphi_n = yx_\alpha$, откуда в силу полноты пространства X относительно Y вытекает $x_\alpha \in X$. Так как далее существует

$$\lim_{\alpha_n\to\infty} yx_{\alpha_n} = yx,$$

$y \in Y$, то опять, в силу полноты пространства X относительно Y, будем иметь $x \in X$, то есть X совершенно.

Очевидно, $$Y^* \supset X^{**} = X.$$

С другой стороны, пусть $z \in Y^*$. Тогда $|zy| < \infty$ для любого $y \in Y^{**} \subset X^*$. Следовательно, $z \in Y$, то есть $Y^* \subset X^{**}$, откуда следует, что $Y^* = X$.

Следующие две теоремы мы только сформулируем, опуская доказательства ввиду очевидности.

Теорема 13. Если Y нормально и содержит Φ, то Y^* полно относительно Y.

Теорема 14. Если $\Phi \subset Y \subset U \subset X^*$ и, кроме того, Y и U — нормальны и X полно относительно Y, то оно полно и относительно U. В частности, из относительной слабой полноты пространства X следует его слабая полнота.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 3. Сильная сходимость и метризуемость

Определение 1. Множество $E \subset X$, где X — линейное пространство, называется ограниченным, если для каждого $y \in X^*$ существует положительное число $r(y)$ такое, что

$$|xy| \leqslant r(y)$$

для каждого $x \in E$.

Теорема 15. Множество E ограничено тогда и только тогда, если для каждого $y \in X^*$ найдется $r(y)$ такое, что

$$|y|\ |x| \leqslant r(y)$$

для любого $x \in X$.

Доказательство. Если существует $r(y)$ такое, что $|y|\ |x| \leqslant r(y)$ при любом $x \in E$, то, очевидно, и $|yx| \leqslant r(y)$ при любом $x \in E$. Пусть теперь E — ограниченное множество. Допустим, вопреки утверждению, что имеется элемент $y_0 \in X^*$ такой, что $\sup |y|\,|x| = \infty$, где sup берется по всем $x \in E$. Тогда найдется последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что

$$|y_0|\ |x_n| \geqslant 2^{2n}. \tag{1}$$

В силу ограниченности множества E имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\, yx_n = 0$$

для любого $y \in X^*$. Последовательность $\left\{\frac{1}{2^n}\, x_n\right\}$ можно рассматривать как сходящуюся к нулю последовательность регулярных функционалов на пространстве X^*. При этом регулярным функционалом мы называем функционал, мажорируемый положительным функционалом

В рассматриваемом нами случае $\frac{1}{2^n}\, x_n$ мажорируется функционалом $\frac{1}{2^n}|x_n|$. Но тогда, как известно, последовательность чисел $\frac{1}{2^n}\ |y|\ |x_n$ ограничена при любом $y \in X^*$ (см. [2], стр. 267—269). В частности, эта последовательность ограничена при $y = y_0$. Последнее противоречит соотношению 1, согласно которому

$$\frac{1}{2^n}\ |y_0|\ |x_n| \geqslant 2^n.$$

Определение 5. Множество $E \subset X$ называется вполне ограниченным, если для каждого ограниченного множества $U \subset X^*$ существует такое положительное число $r(U)$, что

$$|yx| \leqslant r(U)$$

при любом $x \in E$ и $y \in U$.

Теорема 16. Множество $E \subset X$ тогда и только тогда вполне ограничено, если оно ограничено.

Доказательство Очевидно, любое вполне ограниченное множество функций просто ограничено.

Пусть теперь $E \subset X$ — ограниченное множество. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что E не вполне ограничено. Тогда найдется ограниченное множество $U \subset X^*$ такое, что

$$\sup |y\,x| = +\infty,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где sup берется по всем $x \in E$ и всем $y \in U$. Положим

$$r(y) = \sup_{x \in E} |yx|, \quad s(x) = \sup_{x \in U} |yx|.$$

Выберем $x_1 \in E$ и $y_1 \in U$ так, что

$$|y_1 x_1| > 2$$

и натуральное число $\kappa_1 > 0$ так, что $s(x_1) < 2^{\kappa_1} \cdot 1$. Указанный выбор элементов x_1 и y_1 возможен в силу соотношения (1) и ограниченности множеств E и U. Далее выберем элементы $x_2 \in E$, $y_2 \in U$ так, что

$$\frac{1}{2^{\kappa_1}} |y_2 x_2| > r(y_1) + 2 \cdot 2$$

и натуральное число $\kappa_2 > \kappa_1$ так, что

$$s(x_2) < 2^{\kappa_2} \cdot 2.$$

Далее аналогично выбираем x_3, y_3 и натуральное число $\kappa_3 > \kappa_2$ так, что

$$\frac{1}{2^{\kappa_2}} |y_3 x_3| > r(y_1) + \frac{1}{2^{\kappa_1}} \cdot r(y_2) + 2.3.$$

Вообще, если элементы $x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}$, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и натуральные числа $\kappa_1 > \kappa_2 \ldots > \kappa_{n-1}$ уже выбраны, то выбираем элементы $x_n \in E$ и $y_n \in U$ так, что

$$\frac{1}{2^{\kappa_{n-1}}} |y_n \cdot x_n| > r(y_1) + \frac{1}{2^{\kappa_1}} r(y_2) + \ldots + \frac{1}{2^{\kappa_{n-2}}} r(y_{n-1}) + 2n$$

и натуральное число $\kappa_n > \kappa_{n-1}$ так, что

$$s(x_n) < 2^{\kappa_n} \cdot n.$$

Положим,

$$\bar{y}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} y_i, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где κ_0 считаем равным нулю. Покажем, что последовательность $\bar{y}_n$ слабо фундаментальная. Пусть $x \in X^{**}$ — произвольный элемент. Имеем

$$x\bar{y}_{n+m} - x\bar{y}_n| = |\sum_{n-1}^{n+m} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} |xy_i| \leqslant \sum_{n+1}^{n+m} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} |xy_i| \leqslant \frac{1}{2^{\kappa_{n-1}}} \sup |xy| < \varepsilon$$

при $n \geqslant N(\varepsilon)$, где sup берется по всем $y \in U$, что означает слабую фундаментальность последовательности $\bar{y}_n$. В силу слабой полноты пространства X^* существует слабый предел у этой последовательности. Поэтому

$$yx = \lim_{n \to \infty} y_n x = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} y_i x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} y_i x.$$

Пусть теперь $x = x_n$. Тогда

$$yx_n = \sum_{i-1}^{n} \frac{1}{2^{\kappa_{n-1}}} y_i x_n + \frac{1}{2^{\kappa_{n-1}}} y_n x_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} y_i x_n. \tag{2}$$

Но

$$|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} y_i x_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} |y_i x_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} r(y_i) \tag{3}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и

$$\frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}}\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} y_i x_n\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}}|y_i x_n| \leqslant \frac{1}{2^{\kappa_{n-1}}} s(x_n) < n. \qquad (4)$$

Из соотношений (1), (2), (3), (4) следует, что

$$|x_n y| > \frac{1}{2^{\kappa_{n-1}}}|y_n x_n| - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{\kappa_{i-1}}} r(y_i) - n > 2n - n = n.$$

Последнее неравенство противоречит условию ограниченности множества E. Теорема доказана.

Определение 6. Множество $\tilde{E}$ называется нормальной оболочкой ограниченного множества $E \subset X$, если оно состоит из всех точек $\tilde{x} \in S$ таких, что $|\tilde{x}(t)| \leqslant |x(t)|$ почти всюду, где $x \in E$.

Теорема 17. Если X нормально, то нормальная оболочка ограниченного множества E также ограничена.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидным образом следует из теоремы 9.

Определение 7. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ будем называть сильно фундаментальной, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ и каждого ограниченного множества $U \subset X^*$ существует натуральное число $N(\varepsilon, U)$ такое, что

$$|y(x_p - x_q)| < \varepsilon$$

при $p, q \geqslant N$ и любом $y \in U$. Соответственно определяется сильный предел и сильная полнота.

Теорема 18. Всякое слабо полное пространство X будет и сильно полным.

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\} \subset X$ сильно фундаментальна, то, очевидно, она будет и слабо фундаментальной и, следовательно, по условию будет иметь слабый предел x. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $U \subset X$ — произвольное ограниченное множество. Имеем

$$|y(x_p - x_q)| = |y[(x_p - x) - (x_q - x)]| \geqslant ||y(x_p - x)| - |y(x_q - x)|| \quad (*)$$

при любом $y \in U$. Пусть $N(\varepsilon, U)$ такое, что левая часть в (*) меньше ε при $p, q \geqslant N$. Тогда нетрудно видеть, что $|y(x_p - x)| < \varepsilon$ при $p \geqslant N(\varepsilon, U)$. Действительно, допущение, что при некотором $y_0 \in U$ имеет место соотношение

$$|y_0(x_p - x)| \geqslant \varepsilon$$

противоречит неравенству

$$||y_0(x_p - x)| - |y_0(x_q - x)|| < \varepsilon,$$

вытекающему из (*), поскольку q произвольно. Теорема доказана.

Определение 8. Совершенное пространство называется нормируемым, если в нем можно ввести норму так, что сходимость по этой норме эквивалентна сильной сходимости.

Теорема 19. Совершенное пространство X тогда и только тогда нормируемо, если в дуальном пространстве X^* существует такое ограниченное множество U, что для всякого другого ограниченного множества $N \subset X^*$ существует r такое, что $N \subset rU$, где

$$rU = \{r u\},\ u \in U.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство. а. Пусть множество $U \subset X^*$, удовлетворяющее условиям теоремы, существует. Введем в X норму, полагая для всякого $x \in X$,

$$\| x \| = \sup_{y \in U} | yx |.$$

Легко проверяется, что эта норма удовлетворяет аксиомам нормированного пространства. Убедимся, что сходимость последовательности по этой норме эквивалентна сильной сходимости. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сильно сходится к x, V — произвольное ограниченное множество, такое, что $V \subset rU$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда

$$\sup_{y \in V} | y(x - x_n)| \leqslant \sup_{y \in rU} |y(x - x_n)| = r \sup_{y \in U} |y(x - x_n)| = r \|x - x_n\| < \varepsilon,$$

Если n достаточно велико $n \geqslant N(\varepsilon)$ — то есть последовательность $\{x_n\}$ сходится к x по норме. Пусть, наоборот, последовательность $\{x_n\}$ сходится к x относительно введенной нормы и пусть $V \subset X^*$ — произвольное ограниченное множество. Тогда

$$|\sup_{y \in V}| y_n (x - x_n)| \leqslant \sup_{y \in rU} |y(x - x_n)| = r \sup |y(x - x_n)| = r \|x - x_n\| \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

что и означает сильную сходимость последовательности.

б. Пусть X — нормированное пространство с некоторой нормой $\|x\|$ и сходимость по этой норме эквивалентна сильной сходимости. Покажем сначала, что ограниченность множества $M \subset X$ по норме равносильна её ограниченности. Пусть M—ограниченное множество по норме, то есть $\|x\| \leqslant C < \infty$ при любом $x \in M$. Если допустить, что M неограничено, то нашлась бы точка $y \in X^*$ и последовательность $\{x_n\}$ такие, что

$$\|yx_n\| \geqslant n^2,$$

откуда

$$\left| y \frac{1}{n} x_n \right| \geqslant n, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Но, так как последовательность $\frac{1}{n} x_n$, очевидно, сходится к нулю по норме, а, стало быть, сильно сходится к нулю, то последнее неравенство невозможно. Таким образом, M есть ограниченное множество. Пусть, наоборот, множество $M \subset X$ есть ограниченное множество. Допустим, напротив, что оно не ограничено по норме. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что последовательность $\left\{\frac{1}{n} x_n\right\}$ тоже неограничена по норме. Пусть $V \subset X^*$ — произвольное ограниченное множество. Так как ограниченное множество M сильно ограничено, то

$$\sup |yx_n| \leqslant K < \infty,$$

следовательно,

$$\sup \left| \frac{1}{n} x_n y \right| \leqslant \frac{K}{n}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

то есть последовательность $\frac{1}{n} x_n$ сильно сходится к нулю и, следовательно, сходится к нулю по норме. Полученное противоречие показывает, что M ограничено по норме. Покажем теперь, что в качестве множества, существование которого утверждается в теореме,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

можно взять множество $U = \{y\} \subset X^*$ точек, удовлетворяющих соотношению

$$\sup |yx| \leqslant 1,$$

где sup берется по множеству E точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\|x\| \leqslant |$. Как показано выше, E — ограниченное множество. Множество U тоже ограничено, так как

$$|yx| \leqslant r(x),$$

если r столь велико, что $\left\| \frac{x}{r} \right\| \leqslant 1$. Пусть теперь $N \subset X$ — произвольное ограниченное множество. Так как E, будучи ограниченным, является и вполне ограниченным, то

$$\sup |yx| \leqslant r(E), \quad x \in E, \quad y \in N.$$

Отсюда

$$\sup \left| \frac{1}{r} y \right| |x| \leqslant 1,$$

следовательно, $\frac{1}{r} y \in U$, или $y \in rU$ при $y \in N$, то есть $N \subset rU$ и теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Köthe und O. Toeplitz. Journ. für Reine und Angew. Math. Band 171, H. 4. (1934).

2. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, 1961.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

ОБ ОПЕРАТОРАХ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ЛОКАЛЬНО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ и Г. С. ШАХНОВИЧ

Эта статья является продолжением нашей статьи, публикуемой в этом сборнике [1]. Здесь исследуются кольца операторов в подпространствах пространства локально суммируемых функций, рассмотренных в [1]. Аналогичное исследование проведено в работе [2] для пространств числовых последовательностей. Мы пользуемся терминологией статьи [1] без специальных ссылок.

Пусть X — линейное функциональное пространство и $K(t, s)$ — измеримая функция, определенная на $R \times R$, где $R = [0, \infty)$. Если существует для почти всех $t \in [0, \infty)$ $t \overline{\in} A$, мера $A = 0$,

$$Kx = \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)\, ds$$

для любого элемента $x \in X$ и если функция $z(t) = Kx$ является снова элементом из X, то будем говорить, что функция $K(t, s)$ (ядро) или оператор K принадлежит пространству X.

Ядро $K(t, s)$, принадлежащее пространству X, будем называть положительным, если оно всякий положительный элемент $x \in X$ переводит в неотрицательный элемент $Kx \in X$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $K(t, s)$ локально суммируемы на $R \times R$ и что K представляется в виде

$$K = K_1 - K_2 \tag{1}$$

разности положительных ядер, принадлежащих пространству X. Совокупность всех таких операторов будем обозначать через $\sum(X)$.

Теорема 1. Если X — нормальное пространство, $x \in X$, то

$$|K|\, x \equiv \int_0^\infty |K(t, s)|\, x(s)\, ds \in X.$$

Другими словами, если $K \in \sum(X)$, то и $|K| \in \sum(X)$.

Доказательство. Очевидно имеет место неравенство

$$|K(s, t)| \leqslant K_1(t, s) + K_2(t, s),$$

в силу чего существует

$$z(t) \equiv \int_0^\infty |K(t, s)|\, |x(s)|\, ds \leqslant \int_0^\infty [K_1(t, s) + K_2(t, s)]\, |X(s)|\, ds \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

для почти всех $t \in [0, \infty)$. Так как правая часть в (2) является функцией из X, то в силу нормальности пространства X, $z(t) \in X$. Далее при любом $x \in X$ очевидно

$$|\bar{z}(t)| \equiv \left| \int_0^\infty |K(t, s)|\, x(s)\, ds \right| \leqslant z(t)$$

при почти всех $t \in [0, \infty)$ и в силу нормальности пространства X, $\bar{z}(t) \in X$, то есть $|K| \in \sum(X)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Ядро K будем называть регулярным, если оно может быть представлено в виде разности (2) положительных ядер. Как мы только что показали, если ядро K регулярно, то $|K| \in \sum(X)$. Верно и обратное, то есть если $|K| \in \sum(X)$, то K — регулярное ядро. Заметим также, что если K_+ и K_- соответственно положительные и отрицательные части ядра K, то $|K| = K_+ + K_-$ и из принадлежности одного из этих ядер, совокупности $\sum(X)$, вытекает принадлежность этой совокупности двух других ядер.

Теорема 2. Если X — нормальное пространство и $K \in \sum(X)$, то почти все „s-сечения“ $K(t, \bar{s})$, $\bar{s} \in [0, \infty)$, суть элементы из X и „транспонированное“ ядро

$$K'(t, s) = K(s, t) \in \sum(X^*).$$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме $|K| \in \sum(X)$. Следовательно, существует двойной интеграл, и по теореме Фубини

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty K(t, s)\, x(s)\, ds \right] y(t)\, dt = \int_0^\infty \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)\, y(t)\, ds dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty K(t, s)\, y(t)\, dt \right] x(s)\, ds$$

для любых $x \in X$ и $y \in X^*$. Последнее означает, что почти при всяком фиксированном s, $K(t, s) \in X$ и $K(s, t) \in X^*$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Для всякой функции $a(t) \in X$ найдется ядро $K \in \sum(X)$ такое, что $a(t)$ является некоторым сечением $K(t, \bar{s})$ этого ядра.

Доказательство. Пусть $K_\delta(t, s) = \begin{cases} a(t), & \text{если } x \in (\bar{s}-\delta, \bar{s}+\delta), \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$ где $\delta > 0$, произвольно. Очевидно, $K(t, s) = a(t)$. Нетрудно видеть также, что $K_\delta \in \sum(X)$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t, s)\, x(s)\, ds = \int_{\bar{s}-\delta}^{\bar{s}+\delta} a(t)\, x(s)\, ds = a(t) \int_{\bar{s}-\delta}^{\bar{s}+\delta} x(s)\, ds \in X$$

для любого $x \in X$. Теорема доказана.

Теорема 4. Если $X \supset \Phi$, то почти всякое сечение $K(\bar{t}, s)$ ядра $K \in \sum(X)$ есть точка из X^*. Наоборот, для всякой точки $y \in X^*$ найдется ядро $K \in \sum(X)$ и сечение $K(\bar{t}, s)$ этого ядра такое, что $y(s) = K(\bar{t}, s)$.

Доказательство. а. Так как почти при всяком t

$$\left| \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)\, ds \right| < \infty$$

для любого $x \in X$, то функция $y(s) = K(t, s) \in X^*$ почти при всяком t.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

б. Наоборот, пусть $y \in X^*$. Положим

$$K(t, s) = \begin{cases} y(s), & t \in [0, 1] \\ 0, & t \bar{\in} [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда при любом $x \in X$ имеем

$$(Kx)(t) = \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)\, ds = \begin{cases} \int_0^\infty y(s)\, x(s)\, ds, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, далее, что $Kx \in \Phi \subset X$ при любом t. Теорема доказана.

Определение 2. Множество $R = \{K, A, B, \ldots\} \subset \Sigma(X)$ операторов называется кольцом, если из $A \in R$, $B \in R$ следует:

а) $\int_0^\infty A(t, \tau)\, B(\tau, s)\, d\tau$

существует при почти всех $(t, s) \in [0, \infty;\ 0, \infty)$;

б) сумма $A + B$ и произведение AB принадлежит R;

в) если выполнен ассоциативный закон для умножения и дистрибутивный закон.

Замечание. Множество $\Sigma(X)$ не для всякого $X \supset \Phi$ является кольцом. Рассмотрим соответствующий пример.

Пусть $\Theta = \{x\}$ — совокупность всех таких функций, каждая из которых имеет вид $x(t) = C + f(t)$, где C — постоянная и f — существенно ограниченная финитная функция. Очевидно, $\Theta \supset \Phi$ Θ^* состоит из всех функций $y(s)$ таких, что $\int_0^\infty |y(s)|\, ds < \infty$ и Θ^{**} есть множество всех существенно ограниченных функций. Таким образом, $\Theta \neq \Theta^{**}$.

Пусть теперь

$$A(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, & \text{если } t \in [0, 1],\ s \in [n-1, n), \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

а оператор $B(t, s)$ определен следующим образом.

$$B(t, z) = \begin{cases} n^3, & \text{если } t \in [n-1, n),\ s \in [n-1, n) \\ & \text{если } t \subset [n-1, n),\ s \in [n, n+1), \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Нетрудно видеть, что A и B принадлежат $\Sigma(\Theta)$. Действительно, если $x \in \Theta$, то Ax представляет собой сумму числового сходящегося ряда, следовательно $Ax \in \Theta$. Аналогично

$$Bx = \int_0^\infty B(t, s)\, x(s)\, ds = \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n B(t, s)\, x(s)\, ds$$

представляет собой ступенчатую финитную функцию, следовательно, $Bx \in \Theta$. Однако пусть $x^*(t) \equiv 1$. Тогда $x^* \in \Theta$ и

$$(AB)(x) = A(Bx) = \int_0^\infty A(t, \tau) \left[\int_0^\infty B(\tau, s)\, x^*(s)\, ds \right] d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty A(t, s)\, B(\tau, s)\, d\tau \right] ds.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Но

$$\int_0^\infty A(t,\tau)\,B(t,s)\,d\tau = -\frac{(n-1)^3}{(n-1)^2}+\frac{n^3}{n^2}=1$$

при $n=1, 2, \ldots$. Теперь легко видеть, что $(AB)x=(A(Bx)=\infty$, то есть $AB\overline{\in}\Sigma(\Theta)$ и, таким образом, $\Sigma(\Theta)$ не является кольцом.

Теорема 5. Если X — совершенное пространство, то $\Sigma(X)$ представляет собой кольцо.

Доказательство. Пусть A и B из $\Sigma(X)$ произвольны. Так как X нормально, то по теореме 2 почти при всяком s функция $B(\tau, s)\in X$ и по теореме 4 при всяком t функция $A(t,\tau)\in X^*$, следовательно, $\left|\int_0^\infty A(t,\tau)\,B(\tau,s)\,d\tau\right|<\infty$ почти при всех $(t,s)\in[0,\infty;\ 0,\infty)$. Далее, если $x\in X$, то, воспользовавшись теоремами 2 и 4 и теоремой Фубини, убеждаемся, что $(AB)x=BA(x)$, т. е. что $AB=BA\in\Sigma(X)$. Остальные требования в определении кольца, очевидно, также выполняются.

Замечание. Как видно из доказательства, для того чтобы $\Sigma(X)$ представляла собой кольцо, достаточно требования нормальности пространства X.

Теорема 6. Если X — совершенное пространство, $\Sigma(X^*)$ то совпадает с совокупностью $\Sigma'(X)$ всех операторов, „транспонированных" к операторам из $\Sigma(X)$.

Доказательство. По теореме Фубини и теореме 1 для любых $x\in X$ и $y\in X^*$ имеем

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\left|A(t,s)\,x(s)\,ds\right]\right|y(t)\left|dt=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\left|A(t,s)\,y(t)\right|dt\right]\right|x(s)|\,ds,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 7. Пусть $X\supset\Phi$ и $P(X)$ совокупность всех тех операторов из $\Sigma(X)$, для которых при любых $x\in X$ и $y\in X^*$ имеет место равенство $y(Ax)=(yA)x$, то есть

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty A(t,s)\,x(s)\,ds\right]y(t)\,dt=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty A(t,s)\,y(t)\,dt\right]x(s)\,ds.$$

Тогда $P(X)$ представляет собой кольцо, у которого совокупность s-сечений представляет собой X и совокупность t-сечений представляет собой X^*. При этом $P(X)$ есть пересечение $\Sigma(X)$ и $\Sigma(X^{**})$.

Доказательство. Если $y(Ax)=(yA)x$ для любых $x\in X$ и $y\in X^*$, то $yA=v\in X^*$, то есть транспонированный оператор A' отображает X^* в себя. Следовательно, оператор $(A')'$, как видно из теоремы 6, преобразует пространство X^* в себя, то есть $P(X)\subset\Sigma(X)$. Пусть теперь $A\in\Sigma(X)$ и $A\in\Sigma(X^{**})$. Так как X^{**} совершенно, то по теореме 5 $\Sigma(X)$ есть кольцо. Если $x\in X$, $y\in X^*$, то эти точки принадлежат соответственно X^{**} и X^{***}, следовательно, $y(Ax)=(yA)x$, то есть $A\in P(X)$ и, таким образом, $P(X)$ есть указанное в теореме пересечение.

Убедимся, что $P(X)$ есть кольцо. Так как $P(X)$ входит в $\Sigma(X^{**})$ и X^{**} совершенно, то как и при доказательстве теорем 5 и 6 убедимся, что если $A\in P$, $B\in P$, то $AB\in P$.

Наконец столь же просто убедимся, что совокупность всех s-сечений представляет собой X и совокупность всех t-сечений представляет собой X^*.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 3. Линейный оператор, отображающий пространство X в себя, называется слабо непрерывным, если из слабой сходимости последовательности $\{x_n\} \subset X$ следует $\lim Ax_n = A(\lim X_n)$.

Легко доказывается.

Теорема 8. Если X совершенно, то каждый оператор $A \in \sum(x)$ представляет собой слабонепрерывный оператор.

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ и $y \in X^*$ — произвольный элемент. Имеем $\lim yAx_n = yAx$, то есть $\lim Ax_n = Ax$, что и утверждается в теореме.

Теорема 9. Если $X \subset \Phi$ нормально, то оператор $K \in \sum(X)$ переводит всякое ограниченное множество $E \subset X$ в ограниченное множество.

Доказательство. Для каждого $x \in E$ на основании теоремы 1 имеем

$$|y||K'x| \leqslant |x||K'|(|y|) \equiv \int_0^\infty |x(s)| \left[\int_0^\infty |K(s,t)\,y(t)|\,dt\right] ds,$$

где через K' обозначается транспонированное ядро. Согласно теореме 2 элемент $|K'(|y|) \in X^*$. Следовательно, $|y(Kx)| \leqslant r(y)$ для любого $x \in E$ в силу ограниченности множества E, что требовалось доказать.

Теорема 10. Если $X \supset \Phi$ нормально, то оператор $K \in \sum(X)$ всякую сильно сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.

Доказательство опускаем.

Определение 4. Пространства X_1 и X_2 называются гомеоморфными, если существуют слабонепрерывные отображения T и T^{-1}.

Теорема 11. Гомеоморфизм $z = Tx$ пространств $X = \{x\}$ и $Z = \{z\}$ индуцирует сопряженный гомоморфизм $y = T^*v$ дуальных пространств $X^* = \{y\}$ и $Z^* = \{v\}$.

Доказательство. Определим оператор $T^*v = y$ равенством

$$(T^*v)\,x = v(Tx).$$

Нетрудно проверить, что оператор T^* осуществляет гомеоморфное отображение пространств X^* и Z^* друг на друга. Мы, однако, опускаем подробности доказательства.

Теорема 12. Если гомеоморфизм пространств X и Z осуществляется ядрами K и K^{-1}, то гомеоморфизм пространств Z^* и X^* осуществляется ядрами K^* и $(K^*)^{-1}$, причем $K^* = K'$ и $(K^*)^{-1} = (K^{-1})'$.

Доказательство. По определению имеем

$$(K^*v)\,x = \int_0^\infty v(t) \left[\int_0^\infty K(t,s)\,x(s)\,ds\right] dt = \int_0^\infty x(s) \left[\int_0^\infty K(t,s)\,x(t)\,dt\right] ds,$$

что означает $K^* = K'$ и, следовательно, $(K^*)^{-1} = (K')^{-1}$.

Следствие. Ядра K и K' осуществляют также гомеоморфизм пространств Z^{**} и X^{**}.

Действительно, $(K^*)^* = (K')^* = (K')' = K$.

Аналогично $[(K^{-1})^*]^* = [(K^{-1})']^* = [(K^{-1})']' = K^{-1}$.

Теорема 13. Если нормальные пространства $X \supset \Phi$ и $Z \supset \Phi$ гомеоморфны, $Z = K(X)$, $X = K^{-1}(Z)$, то кольца $\sum(X)$ и $\sum(Z)$ изоморфны и $K^{-1} \sum(Z) K = K \sum(X) K^{-1} = \sum(Z)$.

Утверждение теоремы, если K — ядро, доказывается без труда.

Теорема 14. Если из двух гомеоморфных пространств $X \supset \Phi$, $Z \supset \Phi$ одно совершенно, то и другое совершенно.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство. Пусть X совершенно. Если T — гомеоморфизм указанных пространств и $\{z_n\} \subset Z$ слабо фундаментальная последовательность, то последовательность $x_n = Tz_n$, $n = 1, 2, \ldots$, тоже слабо фундаментальна. Следовательно, в силу полноты пространства X существует $x = \lim x_n = \lim T^{-1} J_n$. Если теперь $z = Tx$, то $z = Tx = \lim Tx_n = \lim z_n$. Таким образом, Z — слабополное пространство и, следовательно, совершенное пространство. Теорема доказана.

Легко доказывается также

Теорема 15. Если нормальные пространства $X \supset \Phi$ и $Z \supset \Phi$ гомеоморфны, то они гомеоморфны также относительно сильной сходимости.

Доказательство опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. И Клементьев и Г. С. Шахнович. Настоящий сборник.

2. G. Köthe und O. Toeplitz, Iourn. für Reine und. Angew. Math., Band 171 H. 4 (1934).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. М. МАЛАХОВСКАЯ

Настоящая работа посвящена применению операционного метода, основанного на понятии и свойствах обобщенных функций, к линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. Обобщенные функции, рассматриваемые здесь, суть линейные непрерывные функционалы, заданные на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций. Носители функционалов предполагаются ограниченными с одной и той же стороны, в данном случае слева. Основные сведения об обобщенных функциях заимствованы из [1].

1. Рассмотрим однородное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)}(x) - g_0(x)\, y^{(n-1)}(x) - \cdots - g_{n-1}(x)\, y(x) = 0,\ x \geqslant 0 \qquad (1)$$

при следующих начальных данных Коши:

$$\left.\begin{aligned} y^{(\kappa)}(0) &= 0,\ \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n-2 \\ y^{(n-1)}(0) &= 1 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Предположим сначала, что коэффициенты $g_\kappa(x)$, $\kappa = 0, 1, \ldots, n-1$ — бесконечно дифференцируемые на всей оси x, функции. Известно, что (см., например, [1], стр. 58) уравнение (1), рассматриваемое как уравнение в обобщенных функциях, в классе обобщенных функций в этом случае не имеет иных решений, кроме классических.

Будем рассматривать y в уравнении (1) как обобщенную функцию с носителем на полуоси $[0, \infty]$. Введем следующие обозначения: через s будем обозначать обобщенную производную от дельта-функции $\delta(x)$, так что $s \equiv \delta'(x)$; через $f * g$ — свертку обобщенных функций f и g. Множество всех обобщенных функций с ограниченными слева носителями условимся обозначать через K'_+, а пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ — через K. Множество K'_+ образует кольцо без делителей нуля с обычной операцией сложения обобщенных функций и операцией умножения — сверткой. Единицей кольца служит дельта-функция $\delta(x)$.

Пусть T — оператор, определенный на пространстве K'_+, ставящий в соответствие всякой обобщенной функции $f \in K'_+$ обобщенную функцию

$$Tf = [g_0(x)\, s^{n-1} + g_1(x)\, s^{n-2} + \cdots + g_{n-1}(x)\, \delta(x)]\, f,$$

значение которой на любой функции $\varphi \in K$ определяется равенством

$$(Tf, \varphi) = \left(f,\ \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^\kappa \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} [g_{n-\kappa-1}(x)\, \varphi(x)]\right). \qquad (3)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда уравнение (1) с условиями (2) запишется в следующей операторной форме:

$$(s^n - T)\, y = \delta(x), \tag{4}$$

откуда решение y получим в виде

$$y = \frac{1}{s^n - T} \equiv \frac{\delta(x)}{s^n - T}.$$

Произведя формально деление дельта-функции $\delta(x)$ на оператор $s^n - T$, получим решение y в виде следующего ряда:

$$y = \frac{1}{s^n} + \frac{1}{s^n} * \left[T\left(\frac{1}{s^n}\right)\right] + \frac{1}{s^n} * \left[T\left\{\frac{1}{s^n} * \left[T\left(\frac{1}{s^n}\right)\right]\right\}\right] + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{s^n} * \left[T\left\{\frac{1}{s^n} * \left[T\left\{\cdots * \left[T\left\{\frac{1}{s^n} * \left[T\left(\frac{1}{s^n}\right)\right]\right\}\right]\cdots\right\}\right]\right]\right] + \ldots, \tag{5}$$

который кратко запишем в виде

$$y = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s^n} * T\right)^{\kappa} \frac{1}{s^n}; \tag{6}$$

здесь $1 \equiv \delta(x)$.

Покажем сходимость ряда (6) в пространстве K_+' обобщенных функций. Нетрудно видеть, что члены ряда суть функционалы типа функций. В самом деле, имеем очевидные равенства:

$$\frac{1}{s^n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{s^n} * \left[T\left(\frac{1}{s^n}\right)\right] = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} * \left[g_0(x) + g_1(x)\frac{x}{1!} + \cdots + g_{n-1}(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right] =$$

$$= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{p=0}^{n-1} g_p(t)\frac{t^p}{p!}\, dt \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F_1(t)\, dt,$$

где

$$F_1(x) = \sum_{p=0}^{n-1} g_p(x)\frac{x^p}{p!}. \tag{8}$$

Вообще,

$$\left(\frac{1}{s^n} * T\right)^{\kappa} \frac{1}{s^n} = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F_\kappa(t)\, dt, \tag{9}$$

где

$$F_\kappa(x) = \int_0^x F_{\kappa-1}(t) \sum_{p=0}^{n-1} g_p(x)\frac{(x-t)^p}{p!}\, dt, \quad \kappa = 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Справедливость равенства (9) для любого κ легко доказывается методом математической индукции. Таким образом, ряд (6), с учетом равенств (7) — (10), примет вид

$$y = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F_\kappa(t)\, dt, \quad x \geqslant 0. \tag{11}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Покажем, что этот ряд абсолютно сходится для всех $x \geqslant 0$; тем самым будет доказана его сходимость и в пространстве обобщенных функций. Пусть $x \in [0, a]$, где a — любое положительное число. Из равенств (9) и (10) при любом κ имеем

$$\left|\left(\frac{1}{s^n} * T\right)^{\kappa} \frac{1}{s^n}\right| \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |F_\kappa(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M^\kappa \frac{(1+N)}{2} \cdot \frac{(1+N)}{2} \cdot \frac{(2+N)}{3} \cdots \frac{(\kappa-1+N)}{\kappa} \frac{x^{n+\kappa-1}}{(n+\kappa-1)!}, \tag{12}$$

где

$$M = \max_{x \in [0,\, a]} (|g_0(x)|, |g_1(x)|, \ldots, |g_{n-1}(x)|), \tag{13}$$

$$N = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда сразу следует сходимость ряда (11) как в пространстве обобщенных функций, так и абсолютная сходимость на всей полуоси $[0, \infty]$. Кроме того, очевидно, что члены ряда (11), в предположении о бесконечной дифференцируемости коэффициентов уравнения $g_\kappa(x)$, также являются бесконечно дифференцируемыми функциями в каждой точке $x \geqslant 0$ и что ряд (11) можно почленно дифференцировать в рассматриваемой области любое число раз. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция y, определенная формулой (11), удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2)

2. Пусть теперь имеем задачу Коши для неоднородного уравнения

$$Ly \equiv y^{(n)}(x) - g_0(x)\, y^{(n-1)}(x) - \cdots - g_{n-1}(x)\, y(x) = f(x), \quad x \geqslant 0, \tag{14}$$

при начальных условиях (2). Коэффициенты $g_\kappa(x)$, $\kappa = 0, 1, \ldots, n-1$, по-прежнему будем предполагать бесконечно дифференцирумыми функциями, а правую часть $f(x)$ — непрерывной на полуоси $[0, \infty)$. Решение этого уравнения в операторной форме в данном случае будет иметь вид

$$y = \frac{\delta}{s^n - T} + \frac{f}{s^n - T}. \tag{15}$$

Как и в предыдущем случае равенство (15) запишем в виде ряда

$$y = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s^n} * T\right)^{\kappa} \frac{1}{s^n} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s^n} * T\right)^{\kappa} \frac{f}{s^n}, \tag{16}$$

или, более подробно, в виде ряда

$$y = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F_\kappa(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} G_\kappa(t)\, dt, \tag{17}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где F_1, $F_\kappa(x)$, $\kappa = 2, 3, \ldots$, определяются соответственно равенствами (8) и (10), а $G_\kappa(x)$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ имеют вид:

$$G_\kappa(x) = \int_0^x \sum_{p=0}^{n-1} g_p(x) \frac{(x-t)^p}{p!} G_{\kappa-1}(t)\,dt, \quad \kappa = 2, 3, \ldots, \tag{18}$$

$$G_1(x) = \int_0^x \sum_{p=0}^{n-1} g_p(x) \frac{(x-t)^p}{p!} f(t)\,dt. \tag{19}$$

Сходимость ряда

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} G_\kappa(t)\,dt \tag{20}$$

устанавливается аналогично тому, как это делалось для ряда (11), при этом имеют место неравенства: $(\kappa = 1, 2, \ldots)$

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} G_\kappa(t)\,dt \right| \leqslant AM^\kappa \frac{(1+N)(2+N)\cdots(\kappa+N)\,x^{n+\kappa}}{(\kappa+1)!(n+\kappa)!}, \tag{21}$$

где M, N имеют значения из (13), $A = \max\limits_{x \in [0,\, a]} |f(x)|$.

Таким образом, в правой части равенства (17) ряд (11) представляет собой решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (2), а ряд (20) суть частное решение неоднородного уравнения (14), удовлетворяющее нулевым начальным условиям

3. Пусть теперь коэффициенты $g_\kappa(x)$, $\kappa = 0, 1, \ldots, n-1$, уравнений (1) и (14) и правая часть $f(x)$ — непрерывные на полуоси $[0, \infty)$ функции. Как известно, [2], в этом случае при любых начальных данных существует единственное непрерывное и n раз дифференцируемое решение во всем открытом интервале, в котором коэффициенты и правая часть уравнения непрерывны. Нетрудно убедиться, что ряды (11) и (17) и являются такими решениями соответственно уравнений (1) и (14) при начальных условиях (2). Для доказательства существования непрерывных производных до n-го порядка включительно для функций (11) и (17) достаточно построить неравенства, аналогичные неравенствам (12) и (21), соответствующие рядам, полученным формальным дифференцированием рядов (11) и (20).

Замечание 1. Выбор начальных условий в виде (2), очевидно, не нарушает общности, поскольку дифференциальное уравнение

$$Lu = F(x) \tag{22}$$

при условиях $u^{(\kappa)}(0) = u_\kappa$, $\kappa = 0, 1, \ldots, n-1$, с помощью замены $y = u(x) - p(x)$, где

$$p(x) = u_0 + u_1 x + \cdots + u_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + (u_{n-1} - 1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

приводится к уравнению $Ly = f(x)$, то есть к уравнению вида (14) с начальными условиями (2); при этом $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = F(x) - Lp(x).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Полагая $y(x) = u(x) - p(x)$, где

$$p(x) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} u_\kappa \frac{x^\kappa}{\kappa!},$$

придем к уравнению $Ly = f$ с нулевыми начальными условиями.

Замечание 2. Иногда для получения решения уравнения

$$Ly \equiv y^{(n)}(x) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} g_\kappa(x)\, y^{(n-1-\kappa)}(x) = f(x) \tag{23}$$

оператор L удобнее представить в виде суммы

$$L = S(s) + T,$$

где $S(s)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами n-го порядка, T — дифференциальный оператор с переменными коэффициентами; при этом наибольший порядок производной, входящей в T, не превосходит $n-1$. Тогда решение уравнения (23), например, при нулевых начальных условиях, может быть получено из отношения

$$y = \frac{f}{S(s) + T}. \tag{24}$$

В обобщенных функциях решение (24) можно записать в виде

$$y = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \left(\frac{1}{S(s)} * T\right)^\kappa \frac{f}{S(s)}. \tag{25}$$

Если через $s_1, s_2, \ldots, s_n$ обозначим нули многочлена $S(s)$, то обобщенная функция $\frac{1}{S(s)}$ реализуется обычной функцией вида

$$\frac{1}{S(s)} = e^{s_1 x} * e^{s_2 x} * \cdots * e^{s_n x}. \tag{26}$$

С помощью последнего равенства ряд (25) реализуется в виде ряда по обычным функциям. Если коэффициенты уравнения (23) — непрерывные функции на $[0, a]$, то ряд (25) абсолютно и равномерно сходится на $[0, a]$.

4. Примеры. 1. Уравнение

$$u''(x) + bxu'(x) + cu(x) = 0,\ b, c - \text{const} \tag{27}$$

при условиях $u(o) = u_0$, $u'(0) = u_1$ приведем к виду

$$y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$$

с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Здесь

$$f(x) = \alpha x + \beta,\ \alpha = -(b+c)(u_1 - 1),\ \beta = -cu_0,$$
$$y = u(x) - u_0 - (u_1 - 1)x.$$

Из (17) для уравнения (27) получим

$$u(x) = u_0 + u_1 x + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(\gamma+\alpha)(3\gamma+2c)(5\gamma+4c)\cdots[(2\kappa-1)\gamma+(2\kappa-2)c]}{(2\kappa+1)!} x^{2\kappa+1} +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\beta(2\gamma+c)(4\gamma+3c)\cdots[2\kappa\gamma+(2\kappa-1)c]}{(2\kappa+2)!} x^{2\kappa+1},\ \gamma = -(b+c).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставив значения α, β, γ, получим

$$u = u_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\kappa}\frac{c\,(2b+c)\cdots[(2\kappa-2)\,b+c]\,x^{2\kappa}}{(2\kappa)\,!}\right]+$$

$$+u_1\left[x+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(-1)^{\kappa}\frac{(b+c)\,(3b+c)\cdots[(2\kappa-1)\,b+c]\,x^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)\,!}\right].$$

При соответствующих значениях b и c получим решения уравнений 2.39 – 2.44, 2.46, 2.52 в [3], стр. 544—547. Например, при $b=1$, $c=-1$ будем иметь

$$u(x) = u_1 x + u_0\left[e^{-\frac{x^2}{2}} + x\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right].$$

2. Для уравнения

$$u'' - ax^p u' - bx^{p-1}u = 0,\ p>0,$$

с условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= u_0\\ u'(0) &= u_1\end{aligned}\right\},$$

которое с помощью замены $y(x) = u(x) - u_0 - u_1 x$ приведем к уравнению

$$y'' - ax^p y' - bx^{p-1}y = f(x),$$

где

$$f(x) \equiv (a+b)\,u_1 x^p + u_0 b x^{p-1},$$

с нулевыми начальными условиями, по формуле (20) получим решение в виде

$$u = u_0 + u_1 x + u_0\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{b\,[a\,(p+1)+b]\,[2a\,(p+1)+b]\cdots}{(p+1)^{\kappa+1}\,(\kappa+1)\,!\,p\,(2p+1)\cdots[(\kappa+1)\,p+\kappa]}\cdots$$

$$\cdots\frac{\cdots[\kappa a\,(p+1)+b]\,x^{(\kappa+1)\,(p+1)}}{(p+1)^{\kappa+1}\,(\kappa+1)\,!\,p\,(2p+1)\cdots[(\kappa+1)\,p+\kappa]}+$$

$$+u_1\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(a+b)\,[(p+2)\,a+b]\,[(2p+3)\,a+b]\cdots}{(p+1)^{\kappa+1}\,(\kappa+1)\,!\,(p+2)\,(2p+3)\cdots[(\kappa+1)\,p+\kappa+2]}\cdots$$

$$\cdots\frac{\cdots[\kappa p+\kappa+1)\,a+b]\,x^{(\kappa+1)\,(p+1)+1}}{(p+1)^{\kappa+1}\,(\kappa+1)\,!\,(p+2)\,(2p+3)\cdots[(\kappa+1)\,p+\kappa+2]}.$$

Отсюда при соответствующем выборе значений a, b, p, получим решения уравнений 2.56, 2.59, 2.60 из [3], стр. 549. Например, полагая $p=2$, $a=1$, $b=-1$, получим

$$u(x) = u_1 x + u_0\left[e^{\frac{x^3}{3}} - x\int_0^x te^{\frac{t^3}{3}}\,dt\right].$$

3. Рассмотрим уравнение

$$u''(x) + u'(x) + e^{-2x}u(x) = 0 \qquad (28)$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= u_0\\ u'(0) &= u_1\end{aligned}\right\}. \qquad (29)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Задача (28) — (29) эквивалентна задаче

$$y'' + y' + e^{-2x} y = f(x) \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x) - u_0 - u_1 x, \\ f(x) &\equiv -[u_1 + (u_0 + u_1 x) e^{-2x}]. \end{aligned} \tag{32}$$

В обобщенных функциях задача (30) — (31) может быть записана в виде

$$Ly \equiv (S(s) + T) y = f(x),$$

где $S(s) = s(s+1)$, $T = e^{-2x}$, решение которой имеет вид (25). Ряд (25) в данном случае реализуется в виде

$$y = \Theta(x) * e^{-x} * f(x) - \Theta(x) * e^{-x} * e^{-2x} * e^{-3x} * e^{-2x} f(x) + \cdots +$$

$$+ (-1)^{\kappa} \Theta(x) * e^{-x} * e^{-2x} * e^{-3x} * \cdots * e^{-(2\kappa+1)x} * e^{-2\kappa x} f(x) + \cdots \tag{33}$$

Здесь

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

и $\Theta(x) * e^{-x}$ суть реализация обобщенной функции

$$\frac{1}{S(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

по формуле (26). Подставив в (33) выражение $y(x)$ и $f(x)$ из (32), после простых преобразований получим решение задачи (28) — (29) в виде

$$u = u_0 \cos(1 - e^{-x}) + u_1 \sin(1 - e^{-x}).$$

Замечание 3. В том случае, когда интегралы, входящие в формулу для решения, не выражаются в элементарных функциях, или вычисление их связано с громоздкими выкладками, бывает целесообразнее пользоваться приближенным решением. В качестве приближенного решения задачи (14) — (2) можно рассматривать функцию

$$y_m(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{\kappa-1}^{m} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [F_\kappa(t) + G_\kappa(t)]\, dt.$$

Погрешность этого приближенного решения нетрудно определить, используя неравенства (12), (21). Для реализации этого приближенного метода на ЭВМ процесс построения последовательных приближений (например, для однородного уравнения) удобнее записать в виде

$$y_0(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \int_0^x y_0(x-t)\, T[y_{m-1}(t)]\, dt, \quad m = 1, 2, \ldots;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$T[y(x)] = \sum_{p=0}^{n-1} g_{n-1-p}(x)\, y^{(p)}(x);$$

$$y_m^{(\kappa)}(x) = y_0^{(\kappa)}(x) + \int_0^x y_0^{(\kappa)}(x-t)\, T[y_{m-1}(t)]\, dt,$$

$$\kappa = 1,\ 2,\ldots,\ n-1;\ m = 1,\ 2,\ldots.$$

Отсюда для численного приближенного решения задачи получим следующую итерационную формулу:

$$y_m(x_j) = y_0(x_j) + \int_0^{x_j} y_0(x_j - t)\, T[y_{m-1}(t)]\, dt, \tag{34}$$

$$y_m^{(\kappa)}(x_j) = y_0^{(\kappa)}(x_j) + \int_0^{x_j} y_0^{(\kappa)}(x_j - t)\, T[y_{m-1}(t)]\, dt, \tag{35}$$

$$\kappa = 1,\ 2,\ldots,\ n-1;\ m = 1,\ 2,\ldots,\ y_0(x_j) = \frac{x_j^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$T[y_m(x_j)] = \sum_{p=0}^{n-1} g_{n-1-p}(x_j)\, y_m^{(p)}(x_j),$$

$$x_j = jh,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ N_0,$$

где h — постоянный шаг, $h = \dfrac{a}{N_0}$. Для приближенного вычисления интегралов в (34) и (35) могут быть использованы формулы численного интегрирования. Погрешность полученного численного приближенного решения задачи (1) — (2), в конечном счете, определяется точностью используемой формулы численного интегрирования.

Аналогичная итерационная формула имеет место и в случае неоднородного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1, 1958.
2. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М.-Л., 1950.
3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, М., 1950.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

A-ОПЕРАТОР И ЗНАЧЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ В НУЛЕ

Г. В. СИБИРЯКОВ

Умножение обычных функций одного переменного, заданных на оси $(-\infty, \infty)$, на функцию $\chi_{(0,\infty)}$, равную единице на $(0, \infty)$ и нулю вне $(0, \infty)$, обладает следующими свойствами:

1. Для любых чисел α и β и функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ справедливо равенство

$$\chi_{(0,\infty)}[\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)] = \alpha\chi_{(0,\infty)}\varphi(x) + \beta\chi_{(0,\infty)}\psi(x).$$

2. Функция $\chi_{(0,\infty)}\varphi(x)$ равна $\varphi(x)$ на $(0, \infty)$ и нулю вне $(0, \infty)$.

3. Если функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $M \cap (0, \infty)$, где $M \subset (-\infty, \infty)$, то функция $\chi_{(0,\infty)}\varphi(x)$ абсолютна интегрируема на всем множестве M.

4. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна всюду, кроме точки нуль, имеет в нуле разрыв первого рода и обладает кусочно-непрерывной производной $\varphi'(x)$, то функция $\chi_{(0,\infty)}\varphi(x)$, $\chi_{(0,\infty)}\varphi'(x)$ локально интегрируемы и соответствующие им регулярные обобщенные функции (в смысле [1]) удовлетворяют равенству

$$\frac{d}{dx}\chi_{(0,\infty)}\varphi(x) - \chi_{(0,\infty)}\frac{d\varphi(x)}{dx} = [\lim_{x\to+0}\varphi(x)]\,\delta(x).$$

При рассмотрении разностных уравнений в пространстве обобщенных функций одного переменного $K' = K'_1$ необходимо распространить операцию умножения на функцию $\chi_{(0,\infty)}$, которую можно считать определенной для регулярных функционалов из K'_1, на произвольные обобщенные функции. Этому вопросу посвящены статья [5] и данная заметка. В [5] доказано существование A-оператора, т. е. линейного оператора A, отображающего пространство K'_1 в себя и обладающего свойствами:

I. Образ Af любой обобщенной функции $f \in K'_1$ равен f на $(0, \infty)$ и сосредоточен на $(0, \infty)$.

II. Если обобщенная функция f регулярна в $G \supset (0, \infty)$, где множество $G \subset (-\infty, \infty)$ открыто, то ее образ Af регулярен в G.

Таким образом, A-оператор является расширением операции умножения на $\chi_{(0,\infty)}$, при котором продолжают выполняться свойства, аналогичные свойствам 1. — 3.

В данной заметке доказано существование A-оператора, обладающего свойством, аналогичным свойству 4:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

III. Для всякой обобщенной функции f из K_1' справедливо равенство

$$\frac{d}{dx} Af - A\frac{df}{dx} = a_f \delta(x),\ a_f = \text{const},$$

причем, если обобщенная функция f имеет в нуле значение $f(0)$, например, в смысле определения Лоясевича (см. [3]), то константа a_f равна $f(0)$.

Свойство III позволяет ввести понятие правого и левого значения обобщенной функции в нуле относительно A-оператора A, обладающего этим свойством.

Терминология из теории обобщенных функций и теории частично упорядоченных множеств заимствована соответственно из [1] и [4].

Теорема 1. Существует A-оператор A такой, что для любой обобщенной функции $f \in K_1'$ выполняется равенство

$$\frac{d}{dx} Af - A\frac{d}{dx} f = a_f \delta(x),\ a_f = \text{const},$$

причем, если f имеет в нуле значение $f(0)$ в смысле Лоясевича, то это значение совпадает с константой a_f.

Доказательство. Обозначим через M_ρ совокупность тех и только тех обобщенных функций f из K_1', для которых существуют числа $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ и регулярные обобщенные функции $g = g(f)$ из K_1' такие, что $f = g(f)$ в интервале $(0, \varepsilon(f))$. Для каждой f из M_ρ число $\varepsilon(f) > 0$ может быть сделано как угодно малым. Поэтому для двух обобщенных функций f и h из M мы можем положить $\varepsilon(f) = \varepsilon(h)$ и тогда линейная комбинация $\alpha f + \beta h$ этих обобщенных функций (α и β — числовые множители) совпадает в интервале

$$(0, \varepsilon(f)) = (0, \varepsilon(h))$$

с регулярной обобщенной функцией $\alpha g(f) + \beta g(h)$. Таким образом, M_ρ является линейным подмножеством пространства K_1'.

Определим числа $(A_\rho f, \varphi)$ для основных функций $\varphi \in K_1$, обращающихся в нуль вне полуоси $(0, \infty)$, условием

$$(A_\rho f, \varphi) = (f, \varphi), \tag{1}$$

а для основных функций φ из K_1, равных нулю вне полуоси $(-\infty, \varepsilon(f))$, условием

$$(A_\rho f, \varphi) = (\chi_{(0,\infty)} g(f), \varphi) \equiv \int_0^\infty g(f)(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

где $\chi_{(0,\infty)}$ — характеристическая функция множества $(0, \infty)$. Если $\varphi = 0$ как вне $(0, \infty)$, так и вне $(-\infty, \varepsilon(f))$, то равенства (1) и (2) дают одно и то же значение для $(A_\rho f, \varphi)$, поскольку для такой основной функции φ мы можем записать

$$(f, \varphi) = (g(f), \varphi) = \int_{-\infty}^\infty g(f)\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty g(f)\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, функционал $A_\rho f$ определен однозначно и в области своего определения, он, очевидно, линеен и непрерывен по φ. Согласно [1], стр. 185, в K_1' имеется единственная обобщенная функция, совпадающая с функционалом $A_\rho f$ на тех основных функциях $\varphi \in K_1$, для которых он определен. Эту обобщенную функцию мы также будем обозначать через $A_\rho f$. Докажем, что она определяется однознач-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

но элементом $f \in M_\rho$. Для этого возьмем какие-нибудь другие $\varepsilon_1(f) > 0$ и регулярную обобщенную функцию $g_1(f)$, совпадающую с f в интервале $(0, \varepsilon(f))$. Обобщенные функции

$$(A_\rho f)\ (\varepsilon(f),\ g(f)) \text{ и } (A_\rho f)\ (\varepsilon_1(f),\ g_1(f)) \tag{3}$$

в силу (1) совпадают на $(0, \infty)$ с функционалом f и на полуоси $(-\infty, 0)$, в силу (2), — с нулем. Следовательно, разность Δ обобщенных функций (3) сосредоточена в нуле. Из (2) следует регулярность обобщенных функций (3) в окрестности нуля, следовательно, и их разность Δ также регулярна в окрестности нуля. Последнее, вместе с тем фактом, что разность Δ сосредоточена в нуле, означает $\Delta = 0$, и этим самым доказана единственность $A_\rho f$ для заданной обобщенной функции f из M_ρ.

Оператор A_ρ: $M_\rho \to K_1'$, определенный таким образом, линеен и в области своего определения обладает свойством I.

Если далее f входит в M_ρ вместе с производной f', то $f' = g(f')$ в некотором интервале $(0, \varepsilon(f))$. Функционал $g(f')$ регулярен, значит соответствующая ему функция $g(f')(x)$ локально интегрируема и поэтому функция

$$g(f)(x) = \int_0^x g(f')(t)\,dt + C \tag{4}$$

абсолютно непрерывна и при определенном C регулярный функционал $g(f)$, порожденный функцией (4), совпадает в интервале $(0, \varepsilon(f))$ с функционалом f. Обобщенные функции $A_\rho f'$ и $(A_\rho f)'$ совпадают на полуоси $(0, \infty)$ с функционалом f', а следовательно, и между собой. Отсюда разность $A_\rho f' - (A_\rho f)'$ сосредоточена на полуоси $(-\infty, 0)$. На полуоси $(-\infty, \varepsilon(f))$, используя равенство (2) и (4), получаем

$$\frac{d}{dx} A_\rho f - A_\rho \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(\chi_{(0,\infty)} g(f)) - \chi_{(0,\infty)} g(f') =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \chi_{(0,\infty)}(t)\, g(f')(t)\,dt + C \cdot \chi_{(0,\infty)}(x)\right] - \chi_{(0,\infty)}(x)\, g(f') =$$

$$= \chi_{(0,\infty)} g(f') + C \cdot \delta(x) - \chi_{(0,\infty)} g(f') = C\,\delta(x).$$

Если при этом обобщенная функция f имеет в нуле значение $f(0)$ в смысле Лоясевича, то в силу равенства $f = g(f)$ на интервале $(0, \varepsilon(f))$ и непрерывности функции это значение равно значению функции $g(f)$ в нуле. Из (4) тогда получаем

$$f(0) = g(f)(0) = C.$$

Таким образом, оператор A_ρ обладает в области своего определения свойством III.

Рассмотрим теперь семейство $W = \{\omega\}$ всех пар $\omega = (M_\omega, A_\omega)$, где M_ω — линейное расширение в пространстве K_1' множества M_ρ, содержащее в себе вместе с какой-нибудь обобщенной функцией $f \in K_1'$ все ее первообразные, и оператор A_ω: $M_\omega \to K_1'$ является линейным расширением оператора A_ρ с множества M_ρ на M_ω, обладающим в области своего определения свойствами I и III. Семейство W не пусто, ибо, очевидно, $\rho = (M_\rho,\ A_\rho) \in W$.

Введем в семействе W отношение порядка $\leqslant$, считая $\omega \leqslant \lambda$, если $M_\omega \subset M_\lambda$ и $A_\omega f = A_\lambda f$ при всех $f \in M_\omega$.

Пусть W_0 — линейно упорядоченное подсемейство частично упорядоченного семейства $(W, \leqslant)$. Обозначим через M_σ объединение

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

всех тех M_ω, для который $\omega \in W_0$. В силу соответствующих свойств множеств M_ω множество M_σ является линейным расширением в пространстве K_1' множества M_ρ и вместе с любым своим элементом f содержит все его первообразные $\int f\,dx$. Если $f \in M_\sigma$, то может быть, что f содержится в двух различных множествах M_ω и M_λ ($\omega, \lambda \in W_0$). Тогда мы можем считать, ввиду линейной упорядоченности подсемейства W_0, что $\omega \leqslant \lambda$ и, следовательно, $A_\omega f = A_\lambda f$. Вследствие этого существует единственное расширение $A_\sigma: M_\sigma \to K_1'$ всех операторов A_ω, $\omega \in W_0$, с их областей определения M_ω на множество M_σ. Из соответствующих свойств операторов A_ω и линейной упорядоченности подсемейства W_0 следует, что оператор A_σ линеен на линейном множестве M_σ, является расширением на M_σ оператора A_ρ с множества M_ρ и, кроме того, обладает в области своего определения свойствами I и III.

Таким образом, пара $\sigma = (M_\sigma, A_\sigma)$ содержится в семействе W и мажорирует подсемейство W_0. По лемме Цорна [4] частично упорядоченное семейство $(W, \leqslant)$ обладает максимальным элементом $\rho = (M_\mu, A_\mu)$.

Допустим, что $M_\mu \neq K_1'$. Тогда $K_1' \setminus M_\mu \neq \varnothing$.

Рассмотрим два случая.

Случай I: В M_μ существует обобщенная функция f, имеющая в нуле значение $f(0)$ в смысле Лоясевича, производная f', которой не принадлежит M_μ. Обозначим через M_δ линейную оболочку множества $M_\mu \cup \{f'\}$. Каждая обобщенная функция h из множества M_σ однозначно представима в виде

$$h = r(h) + \gamma(h) f', \quad r(h) \in M_\mu, \quad \gamma(h) = \text{const}. \tag{5}$$

Множество M_δ линейно, содержит в себе множество M_μ, а следовательно, и множество M_ρ. Какова бы ни была обобщенная функция h из M_δ, все ее первообразные

$$\int h\,dx = \int r(h)\,dx + \gamma(h) f$$

принадлежит множеству M_μ (а значит и M_δ) в силу свойств множеств M_ω, $\omega \in W_0$, и того, что $f \in M_\mu$, $r(h) \in M_\mu$.

Определим оператор $A_\delta: M_\delta \to K_1'$ по формуле

$$A_\delta h = A_\mu r(h) + \gamma(h) \frac{d}{dx} A_\mu f - \gamma(h) f(0)\,\delta(x). \tag{6}$$

Этот оператор, очевидно, является расширением оператора A_μ с множества M_μ на множество M_δ. Из линейности оператора A_μ легко следует линейность оператора A_δ:

$$A_\delta(\alpha h_1 + \beta h_2) = A_\delta\{\alpha r(h_1) + \beta r(h_2) +$$

$$+ [\alpha\gamma(h_1) + \beta\gamma(h_2)] f'\} = A_\mu[\alpha r(h_1) + \beta r(h_2)] +$$

$$+ [\alpha\gamma(h_1) + \beta\gamma(h_2)] \frac{d}{dx} A_\mu f - [\alpha\gamma(h_1) + \beta\gamma(h_2)] f(0)\,\delta(x) =$$

$$= \alpha\left[A_\mu r(h_1) + \gamma(h_1) \frac{d}{dx} A_\mu f - \gamma(h_1) f(0)\,\delta(x)\right] +$$

$$+ \beta\left[A_\mu r(h_2) + \gamma(h_2) \frac{d}{dx} A_\mu f - \gamma(h_2) f(0)\,\delta(x) = \alpha A_\delta h_1 + \beta A_\delta h_2.\right.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Поскольку оператор A_μ обладает свойством I, из определения (6) вытекает, что на полуоси $(-\infty, 0)$

$$A_\delta h = 0 + \gamma(h) \cdot \frac{d}{dx} 0 - \gamma \cdot f(0) \cdot 0 = 0.$$

Аналогично на полуоси $(0, \infty)$ имеем

$$A_\delta h = r(h) + \gamma(h) \frac{df}{dx} - \gamma(h) f(0) \cdot 0 = r(h) + \gamma)(h) f' = h.$$

Таким образом, оператор A_μ обладает в области своего определения свойством I. Докажем, что он обладает также и свойством III. Пусть обобщенная функция h входит в M_δ вместе со своей производной h'. Тогда

$$h' = r(h') + \gamma(h') f', \quad r(h') \in M_\mu, \quad \gamma(h') = \text{const}. \tag{5}$$

Отсюда

$$h = \int h' \, dx = \int r(h') \, dx + \gamma(h') f \in M_\mu. \tag{7}$$

Следовательно,

$$A_\delta h = A_\mu h.$$

Теперь, используя определение (6), имеем

$$A_\delta h' = A_\mu r(h') + \gamma(h') \frac{d}{dx} A_\mu f - \gamma(h') f(0) \delta(x) =$$

$$= A_\mu \frac{d}{dx} \left(\int r(h') \, dx \right) + \frac{d}{dx} A_\mu (\gamma(h') f) - \gamma(h') f(0) \delta(x), \tag{8}$$

Поскольку оператор A_μ обладает в области своего определения свойством III и $r(h') \in M_\mu$, то

$$A_\mu \frac{d}{dx} \left(\int r(h') \, dx \right) = \frac{d}{dx} A_\mu \left(\int r(h') \, dx \right) - a_{\int r(h') dx} \delta(x). \tag{9}$$

Из (8) и (9) в силу линейности операторов A_μ и $\frac{d}{dx}$ имеем

$$A_\delta h' = \frac{d}{dx} A_\mu \left(\int r(h') \, dx \right) - a_{\int r(h') dx} \delta(x) + \frac{d}{dx} A_\mu (\gamma(h')) f -$$

$$- \gamma(h') f(0) \delta(x) = \frac{d}{dx} A_\mu \left(\int r(h') \, dx + \gamma(h') f \right) -$$

$$- (a_{\int \tau(h') dx} + \gamma(h') f(0)) \delta(x).$$

Отсюда, используя равенство (7), получаем

$$A_\delta h' = \frac{d}{dx} A_\mu h - a_h \cdot \delta(x), \text{ где } a_h = a_{\int r(h') dx} + \gamma(h') f(0),$$

Если обобщенная функция h имеет в нуле значение $h(0)$ в смысле Лоясевича, то из (7) следует, что первообразная $\int r(h') \, dx$ в нуле также имеет значение в смысле Лоясевича (ибо $f(0)$ в смысле Лоясевича существует по предположению). Из (9) и свойства III, которым

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

обладает оператор A_μ, вытекает равенство $\left(\int r(h')\,dx\right)(0) = a_{\int r(h')dx}$. Отсюда в силу (7)

$$h(0) = a_{\int r(h')dx} + \gamma(h')f(0) = a_h,$$

и свойство III для оператора A_δ полностью доказано. Следовательно, пара $\delta = (M_\delta, A_\delta)$ входит в семейство W и строго мажорирует элемент μ, чего не может быть в силу максимальности μ.

Случай 2: В M_μ не существует обобщенной функции, имеющей в нуле значение в смысле Лоясевича и такой, что ее производная не содержится в M_μ. Однако в M_μ существует обобщенная функция f, производная которой не содержится в M_μ.

В самом деле, множество $K_1' \setminus M_\mu$, по предположению, не пусто. Пусть $f_1 \in K_1' \setminus M_\mu$ и $a(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $|x| \leqslant 1$ и единице при $|x| \geqslant 2$. Тогда обобщенная функция $a(x)f_1$ равна нулю в интервале $(-1, 1)$ и поэтому принадлежит $M_\rho \subset M_\mu$. Отсюда обобщенная функция

$$[1 - a(x)]f_1 = f_1 - a(x)f_1 \in M_\mu$$

(ибо в противном случае $f_1 \in M_\mu$) и сосредоточена на сегменте $[-2, 2]$. Согласно [2] (стр. 146) всякая финитная, т. е. сосредоточенная на ограниченном множестве, обобщенная функция пространства K_1' является производной конечного порядка от регулярной обобщенной функции. Следовательно, функционал $[1-a(x)]f_1$ также является производной некоторого порядка от $f_2 \in M_\mu$. Тогда среди производных обобщенной функции f_2 (включая самое f_2) найдется такая обобщенная функция $f \in M_\mu$, производная f' которой уже не содержится в M_μ.

Линейная оболочка M_δ в K_1' множества $M_\mu \cup \{f'\}$ содержит M_μ и, следовательно, M. Каждый элемент $h \in M_\delta$ однозначно представим в виде (5'). Определим оператор A_δ: $M_\delta \to K_1'$ формулой

$$A_\delta h = A_\mu r(h) + \gamma(h)\frac{d}{dx}A_\mu f. \qquad (10)$$

Как и в первом случае, оператор A_δ является линейным расширением оператора A_μ с множества M_μ на M_δ и обладает в области определения свойством I. Докажем для него свойство III. Пусть h и h' входят в M_δ. Тогда имеют место представления (5') и (7). Используя (5), (7), (10) и свойство III для оператора A_μ, получаем

$$A_\delta \frac{d}{dx}h = A_\mu r(h') + \gamma(h')\frac{d}{dx}A_\mu f =$$

$$= A_\mu \frac{d}{dx}\left(\int r(h')\,dx\right) + \frac{d}{dx}A_\mu(\gamma(h')f) =$$

$$= \frac{d}{dx}A_\mu\left(\int r(h')\,dx\right) - a_{\int r(h')dx}\delta(x) + \frac{d}{dx}A_\mu(\gamma(h')f) =$$

$$= \frac{d}{dx}A_\mu\left[\int r(h')\,dx + \gamma(h')f\right] - a_{\int r(h')dx}\delta(x) =$$

$$= \frac{d}{dx}A_\mu h - a_h\delta(x),\quad a_h = a_{\int r(h')dx}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Если обобщенная функция h имеет в нуле значение $h(0)$, в смысле Лоясевича, то $h' \in M_\mu$ в силу предположения и поэтому

$$\gamma(h') = 0, \quad h' = r(h'), \quad h = \int r(h')\,dx, \quad h(0) = \left(\int r(h')\,dx\right)(0).$$

По свойству 3 для оператора A_μ

$$a_{\int r(h')dx} = \left(\int r(h')\,dx\right)(0)$$

и, следовательно, $h(0) = a_h$. Таким образом, свойство III для оператора A_δ доказано. Но тогда пара $\delta = (M_\delta, A_\delta)$ снова принадлежит семейству W и строго мажорирует в W его максимальный элемент μ.

В обоих случаях мы приходим к противоречию, следовательно, наше предположение, что $K_1' \neq M_\mu$, не соответствует истине. Но если $M_\mu = K_1'$, то оператор $A_\mu: K_1' \to K_1'$ является A-оператором и обладает свойством III, ч. т. д.

Замечание. В данной теореме речь шла о значении обобщенной функции в нуле в смысле определения Лоясевича. Однако теорема остается справедливой, если принять какое-нибудь иное определение значения обобщенной функции в нуле, лишь бы выполнялись следующие свойства:

1. Если функционал f регулярен и соответствует непрерывной функции $\varphi(x)$, то значение $f(0)$ определено и равно $\varphi(0)$.

2. Если $f(0)$ и $h(0)$ определены для двух обобщенных функций f и h из K_1' и α, β — числа, то обобщенная функция $\alpha f + \beta h$ также имеет и притом равное $\alpha f(0) + \beta h(0)$ значение в нуле.

3. Если обобщенные функции f и h совпадают в интервале $(0, \varepsilon)$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$ и значения $f(0)$, $h(0)$ определены, то $f(0) = h(0)$.

Определение. Пусть задан некоторый A-оператор A, обладающий свойством III. Правым значением $f(+0)$ в нуле обобщенной функции $f \in K_1'$ относительно этого оператора A мы будем называть число $f(+0) = a_f$, однозначно определяемое согласно свойству III при помощи равенства

$$a_f \delta(x) = \frac{d}{dx} Af - A \frac{d}{dx} f.$$

Левое значение $f(-0)$ в нуле обобщенной функции $f \in K_1'$ относительно оператора A совпадает, по определению, с правым значением в нуле относительно A, функционала $U^* f \equiv f(-x)$, определяемого формулой

$$(U^* f, \varphi(x)) \equiv (f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)).$$

Нетрудно показать, что правое значение в нуле обобщенных функций f относительно A-оператора, A обладает свойствами 1 — 3.

Для любой обобщенной функции f из K_1' функционал

$$A_0 f = f - Af - U^* A U^* f \tag{11}$$

в силу свойства I оператора A сосредоточен в нуле. Этот функционал можно назвать сингулярной частью функционала f в нуле. Такое название оправдывается следующим утверждением.

Если функционал $f \in K_1'$ представим в виде суммы регулярного в окрестности нуля функционала r из K_1' с функционалом Δ, сосредоточенным в нуле, то $A_0 f = \Delta$.

В самом деле, согласно свойству II функционалы Af и $U^* A U^* f$, регулярны в окрестности $(-\varepsilon, \varepsilon)$ нуля. По свойству I функционал Af равен f в $(0, \infty)$ и нулю в $(-\infty, 0)$. Из этого же свойства следует, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

функционал U^*AU^*f равен f на интервале $(-\infty, 0)$ и нулю в $(0, \infty)$. Стало быть функционал

$$A_0 f - \Delta = (f - \Delta) - Af - U^*AU^*f$$

регулярен в окрестности нуля и сосредоточен в нуле. Эти два факта совместимы лишь для нулевого функционала, и наше утверждение доказано.

Пусть функция f непрерывна всюду за исключением нуля, имеет в нуле разрыв первого рода со скачком

$$h = \lim_{x \to +0} f(x) - \lim_{x \to -0} f(x)$$

и обладает кусочно непрерывной производной $f'(x)$. Известно ([2], стр. 38), что в этом случае производная от регулярного функционала, определяемого функцией $f(x)$, равна сумме регулярного функционала, соответствующего функции $f'(x)$ с сингулярным функционалом $h\delta(x)$. Этому факту аналогично следующее утверждение.

Сингулярная часть производной функционала f равна сумме производной от сингулярной части этого функционала с сингулярным функционалом

$$h\delta(x) = [f(+0) - f(-0)]\,\delta(x).$$

Иначе говоря, справедлива формула

$$A_0 \frac{df}{dx} = \frac{dA_0 f}{dx} + [f(f+0) - f(-0)]\,\delta(x).$$

Действительно, используя очевидные равенства

$$U^* \frac{df}{dx} = -\frac{dU^* f}{dx}, \quad U^*\delta(x) = \delta(x),$$

свойство III для оператора A и определение (11), получаем

$$A_0 \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} - A\frac{df}{dx} - U^*AU^*\frac{df}{dx} =$$

$$= \frac{df}{dx} - A\frac{df}{dx} + U^*A\frac{dU^*f}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dAf}{dx} + f(+0)\,\delta(x) +$$

$$+ U^*\frac{dAU^*f}{dx} - U^*[f(-0)\,\delta(x)] = \frac{df}{dx} - \frac{dAf}{dx} - \frac{dU^*AU^*f}{dx} +$$

$$+ [f(+0) - f(-0)]\,\delta(x) = \frac{dA_0 f}{dx} + [f(+0) - f(-0)]\,\delta(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции. Выпуск 1. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1959
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции. Выпуск 2. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М, 1958.
3. Я. Микусинский, Р. Сикорский. Элементарная теория обобщенных функций. Издательство иностранной литературы, 1959.
4. А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре, Физматгиз, М., 1962.
5. Г. В. Сибиряков. Тр. Томского университета, т. 179, 1966, стр. 79—84.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ

В монографии Л. В. Канторовича, Б. З Вулиха и Г. А. Пинскера [1] установлен общий вид линейных операций в абстрактных функциональных пространствах (гл. 8). Там же указаны и аналитические представления операций для некоторых конкретных пространств; в настоящей заметке дается обобщение этих представлений на случай, когда элементами пространств являются функции, заданные на абстрактных измеримых пространствах с мерой. В изложении мы следуем монографии [1]; однако формулируемые нами теоремы и их доказательства содержат элементы нового, обусловленные указанным выше обобщением. В терминологии и обозначениях относительно понятий теории полуупорядоченных пространств и теории меры мы придерживаемся соответственно монографий [1] и [2].

Через (X, S) обозначается измеримое пространство, то есть абстрактное множество X с заданным σ-кольцом подмножеств из X; будем предполагать, что $X \in S$. Пусть $\mu(E)$ — конечная мера на (X, S) и $w(E)$ — аддитивная функция множества $E \in S$ со значениями в KB-пространстве Y; аддитивность функции $w(E)$ означает, что если $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то

$$w(E_1 \cup E_2) = w(E_1) + w(E_2).$$

Функцию $w(E)$ будем называть абсолютно (t)-непрерывной относительно меры μ, если из $\mu(E) \to 0$, $i \to \infty$ следует $w(E_i) \overset{(t)}{\to} 0$. Заметим, что в KB-пространстве (t)-сходимость равносильна (b)-сходимости, то есть сходимости по норме. Элемент

$$w^* = \sup \sum_i |w(E_i)|,$$

где sup берется по всем конечным разбиениям пространства X на непересекающиеся множества $E_i \in S$, $X = \bigcup_i E_i$, называется полной вариацией функции w; если элемент w^* конечен, то w называется функцией ограниченной вариации. Аналогично определяется полная вариация $w^*(E)$ функции w на произвольном множестве $E \in S$; при этом, как обычно, показывается, что $w^*(E) = w_+(E) + w_-(E)$, где $w_+(E)$ и $w_-(E)$ — соответственно положительная и отрицательная части функции $w(E)$ и функции $w^*(E)$, $w_+(E)$, $w_-(E)$ суть аддитивные функции ограниченной вариации и абсолютно (t)-непрерывные, если $w(E)$ абсолютно (t)-непрерывна. Будем писать $w > 0$, если $w(E) \geqslant 0$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

для $E \in S$ и $w \neq 0$. Через M, L, L^p,... будем обозначать пространства μ-измеримых функций, связанные с мерой μ, аналогичные обычным пространствам, связанным с мерой Лебега в эвклидовых пространствах.

Пусть $x(t)$ — почти всюду ограниченная измеримая функция точки $t \in X$, заданная на измеримом пространстве (X, S) с мерой μ. Будем рассматривать суммы вида

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i w(E_i), \quad l_i \leqslant \gamma_i < l_{i+1}, \tag{1}$$

где $E_i = \{t : l_i \leqslant x(t) < l_{i+1}\}$, $l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_n = \bar{l}$, $l_0 \leqslant x(t) < \bar{l}$ почти всюду. Предел сумм (1) относительно (t)-сходимости при условии, что $\lambda \to 0$, где $\lambda = \max (l_{i+1} - l_i)$ $i = 0, 1, \ldots, n-1$, будем обозначать через

$$I = \int x(t)\, dw. \tag{2}$$

Другими словами, $I \in Y$ такой элемент, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\| I - \sigma \| < \varepsilon,$$

если $\lambda \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Существование интеграла (2) доказывается аналогично обычному случаю. Если $x(t) \geqslant 0$ — неограниченная функция, то по определению

$$\int x(t)\, dw = \lim_{N \to \infty} \int x_N(t)\, dw_+ - \lim_{N \to \infty} \int x_N(t)\, dw_-,$$

где

$$x_N(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } x(t) \leqslant N \\ N & \text{если } x(t) > N \end{cases}$$

и где предполагается существование пределов; если $x(t) = x_+(t) - x_-(t)$ — произвольная измеримая функция, то по определению

$$\int x(t)\, dw = \int x_+(t)\, dw - \int x_-(t)\, dw,$$

где $x_+(t)$ и $x_-(t)$, — соответственно положительная и отрицательная части функции $x(t)$. Интеграл по произвольному множеству $E \in S$ определяется равенством

$$\int_E x(t)\, dw = \int \chi_E(t)\, x(t)\, dw,$$

где $\chi_E(t)$ — характеристическая функция. Аддитивность интеграла и как функции множества E, и как функции от $x(t)$, устанавливаются как обычно.

Обозначим через $M = \{x\}$ K — пространство всех существенно ограниченных функций на X ([1], стр. 214).

Теорема 1. Общий вид операции $y = U(x)$ класса H_0^0, отображающей M в произвольное KB — пространство Y, дается интегралом вида (2):

$$y = U(x) = \int x(t)\, dw, \tag{3}$$

где $w(E)$ — абсолютно, (t)-непрерывна.

Доказательство. Покажем, что интеграл (3) представляет операцию класса H_0^0. Как указано выше, интеграл (3) существует для каждого $x \in M$ и является аддитивной операцией. Проверим ее (00)-непрерывность. Пусть $x_n \xrightarrow{(t)} 0$. Это означает, что $x_n(t) \to 0$ по мере на X

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и почти всюду $|x_n(t)| \leqslant C$ при всех n. В силу абсолютной непрерывности функции $w(E)$, следовательно, и $w^*(E)$, для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\| w^*(E) \| < \varepsilon$, если $\mu(E) < \delta$, а так как $x_n \overset{(t)}{\to} 0$, то при $n \geqslant N(\delta)$

$$\mu(E_n) = \mu\{t : |x_n(t)| \geqslant \varepsilon\} < \delta.$$

Поэтому при $n \geqslant N$

$$\left\| \int x_n(t)\, dw \right\| \leqslant \int |x_n(t)|\, d\|w\| = \left\| \int_{E_n} |x_n(t)|\, dw^* + \int_{X-E_n} |x_n(t)|\, dw^* \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon + \varepsilon \| w^* \| = \varepsilon (C + \| w^* \|),$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ означает

$$\int x_n(t)\, dw \overset{(t)}{\to} 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, для операции U, выраженной интегралом (3), имеем: $U \in H_t^t$ и, как видно из построения доказательства, также $U^* \in H_t^t$, где

$$U^*(E) = \int x(t)\, dw^*.$$

Так как U^* — положительная операция, то $U^* \in H_0^0$ ([1], стр. 249), а тогда и $U \in H_0^0$.

Пусть, обратно, дана операция $U \in H_0^0$, отображающая M в KB-пространство Y. Тогда существует операция $|U| \in H_0^0$. Пусть $\chi_E(t)$ — характеристическая функция множества $E \in S$. Положим для $E \in S$

$$w(E) = U(\chi_E). \tag{4}$$

Очевидно, $w(E)$ в (4) есть аддитивная функция; кроме того, если $\mu(E_i) \to 0$, то $\chi_{E_i} \overset{(t)}{\to} 0$ и

$$U(\chi_{E_i}) = w(E_i) \overset{(t)}{\to} 0,$$

то есть $w(E)$ — абсолютно (t) — непрерывная функция и, следовательно, функция ограниченной вариации. Поэтому интеграл (3) для функции $w(E)$ существует при всяком $x \in M$ и, как доказано выше, изображает операцию класса H_0^0. Но равенство

$$U(x) = \int x(t)\, dw,$$

как нетрудно видеть, верно для простых (конечнозначных) функций и, так как множество простых функций, плотно в M смысле в (0)-сходимости, то равенство (3) имеет место для любого $x \in M$. Теорема доказана.

Теорема 2. Общий вид операции $y = U(x)$ класса $H_t^t = H_0^0 = H_b^b$ отображающей L в KB-пространство Y, дается интегралом вида

$$y = U(x) = \int x(t)\, dw, \tag{5}$$

где $w(E)$ удовлетворяет „условию Липшица“:

$$\| w(E) \| \leqslant C\mu(E); \tag{6}$$

если в (6) C — наименьшая возможная постоянная, то $\| U \|_b = C$.

Доказательство. Покажем, что интеграл (5) является операцией, указанной в формулировке теоремы. Пусть сначала $x(t)$ почти всюду ограничена и пусть

$$E_i = \{t : l_i \leqslant x(t) < l_{i+1}\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда по теореме о среднем

$$\int_{E_i} x(t)\,dt = \gamma_i \mu(E_i),$$

где $l_i \leqslant \gamma_i \leqslant l_{i+1}$ и интеграл следует понимать как интеграл Лебега-Стильтьеса относительно меры μ, и

$$\|U(x)\| = \left\|\int x(t)\,dw\right\| = \left\|\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i w(E_i)\right\| = \left\|\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{E_i} x(t)\,dt \times\right.$$

$$\left.\times\frac{w(E_i)}{\mu(E_i)}\right\| \leqslant C\left|\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{E_i} x(t)\,dt\right| \leqslant G\|x\|. \qquad (7)$$

Из неравенства (7) следует его справедливость также и для произвольного $x \in L$ и принадлежность интеграла к указанному в теореме классу операций.

Пусть, обратно, дана операция $U \in H_0^0$. Так как из $x_n \xrightarrow{(0)} x$ в пространстве M следует $x_n \xrightarrow{(0)} x$ в пространстве L, то U можно рассматривать и как операцию класса H_0^0 в M, и тогда U выражается по теореме 1 интегралом (5), где $w(E) = U(\chi_E)$; так как, далее, для $\chi_E \in L$ имеем

$$\|U(\chi_E)\| = \|w(E)\| \leqslant \|U\|_b \|\chi_E\| = \|U\|_b \mu(E), \qquad (8)$$

то функция $w(E)$ удовлетворяет условию Липшица и по доказанному интеграл (5) представляет операцию класса H_0^0 в L. Пусть $x \in L$ — произвольный элемент и последовательность $x_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $x_n \xrightarrow{(0)} x$ в L. Тогда $U(x_n) \xrightarrow{(0)} U(x)$ и в силу непрерывности интеграла (5)

$$U(x_n) = \int x_n(t)\,dw \to \int x(t)\,dw = U(x).$$

Из неравенства (8) вытекает, что наименьшее возможное C в неравенстве (6) равно $\|U\|_b$. Теорема доказана.

Пусть

$$V = \{\nu, \lambda, \ldots\}$$

— множество всех обобщенных конечных действительных мер, заданных в (X, S). Если линеаризовать множество V обычным образом и полагать $\nu > \lambda$ при условии $\nu(E) \geqslant \lambda(E)$ для всякого $E \in S$, $\nu \neq \lambda$, то V становится K — пространством. Если, далее, ввести в V норму, полагая

$$\|\nu\| = \||\nu|\| = |\nu|(X),$$

где $|\nu|$ — полная вариация обобщенной меры ν, то V будет одновременно KB-пространством. Заметим, что $|\nu|$, рассматриваемый как элемент KB-пространства V, совпадает с абсолютным значением элемента ν.

Теорема 3. Общий вид операции $y = U(x)$ класса $H_l^l = H_0^0 = H_b^b$, отображающей L в V, дается формулой

$$U(x) = y(F) = \int K_F(t)\,x(t)\,dt, \qquad (9)$$

где $F \in S$, $K_F(t)$ — ограниченная измеримая относительно меры μ функция точки t при любом фиксированном $F \in S$ такая, что если $F = \bigcup_i F_i$ где $F_i \cap F_j = 0$, $i \neq j$, то

$$\int_E K_{\bigcup_i F_i}(t)\,dt = \sum_i \int_E K_{F_i}(t)\,dt$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и

$$K_{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}(t) = \sum_{i=1}^{n} K_{F_i}(t)$$

почти для всех $t \in X$.

Доказательство. Пусть $U \in H_0^0$. По теореме 2

$$y = U(x) = \int x(t)\, dw, \tag{10}$$

где $w(E) = U(\chi_E) \in V$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|w(E)\| \leqslant \|U\|_b \mu(E); \tag{11}$$

очевидно, что $w(E)$ — аддитивная функция. Значение $w(E)$ на множестве $F \in S$ будем обозначать через $w_F(E)$. Пусть сначала $U > 0$. Тогда $w(E)$ есть положительный элемент из V, то есть мера. Так как в силу $U > 0$ и (11)

$$w_F(E) \leqslant w_X(E) = \|w(E)\| \leqslant \|U\|_b \mu(E), \tag{12}$$

то $w_F(E)$ при фиксированном F есть счетно-аддитивная функция множества E, то есть мера, при этом абсолютно непрерывная относительно меры μ. Следовательно, по теореме Радона-Никодима

$$w_F(E) = \int_E K_F(t)\, dt, \tag{13}$$

где $K_F(t)$ — измеримая (относительно μ) существенно ограниченная функция точки t; ограниченность вытекает из соотношения (12). Если теперь

$$E_i = \{t: l_i \leqslant x(t) < l_{i+1}\}, \qquad l_0 \leqslant x(t) < l_n,$$

$\alpha_i \leqslant K_F(t) < \alpha_{i+1}$ почти всюду на E_i, то по теореме о среднем

$$\int_{E_i} K_F(t)\, dt = \beta_i(F)\, \mu(E_i),$$

где $\alpha_i \leqslant \beta_i(F) < \alpha_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$y(F) = U(x)(F) = \int x(t)\, dw_F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i w_F(E_i) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \int_{E_i} K_F(t)\, dt = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \beta_i(F)\, \mu(E_i) = \int x(t)\, K_F(t)\, dt.$$

Так как $w_F(E)$ — счетно-аддитивная функция множества F, то из (13) имеем, что если $F = \bigcup_i F_i$, где F_i попарно не пересекаются, то

$$w_{\bigcup_i F_i}(E) = \int_E K_{\bigcup_i F_i}(t)\, dt = \sum_i w_{F_i}(E) = \sum_i \int_E K_{F_i}(t)\, dt.$$

Очевидно,

$$\int_E K_{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}(t)\, dt = \int_E \sum_{i=1}^{n} K_{F_i}(t)\, dt,$$

и поскольку это равенство имеет место при любом $E \in S$, то $K^{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}(t) = \sum_{i=1}^{n} K_{F_i}(t)$ почти для всех $t \in X$. Так как, далее, согласно (12)

$$\int_E K_X(t)\, dt \leqslant \|U\|_b \mu(E)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

при любом $E \in S$, то

$$\operatorname{vrai}\max_t |K_X(t)| \leqslant \|U\|_s. \tag{14}$$

Справедливость представления (9) и соотношения (14) для произвольной операции $U \in H_0^0 = H_t^t = H_s^s$ получается на основании равенства

$$U(x) = U_+(x) - U_-(x),$$

где U_+ и U_- — положительная и отрицательная части операции U. Переход к случаю неограниченного x — обычный.

Наоборот, пусть рассматриваемая операция задана формулой (9), где $K_F(t)$ удовлетворяет условиям, указанным в теореме. Тогда, очевидно, $U(x)(F)$ есть обобщенная мера и

$$|U(x)(F)| = \left|\int K_F(t)\, x(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |K_X(t)\, x(t)|\, dt \leqslant \operatorname{vrai}\max_t |K_X(t)| \cdot \|x\|,$$

откуда следует, что $U \in H_s^s = H_0^0$ и

$$\|U\|_s \leqslant \operatorname{vrai}\max_t |K_X(t)|. \tag{15}$$

Из (14) и (15) получаем равенство

$$\|U\|_s = \operatorname{vrai}\max_t |K_X(t)|,$$

чем завершается доказательство теоремы.

Замечание. Для того, чтобы интеграл (9) представлял операцию класса $H_0^0 = H_t^t = H_s^s$, значения которого принадлежат подпространству $A \subset V$ обобщенных мер, абсолютно непрерывных относительно меры μ, необходимо и достаточно, чтобы кроме условий теоремы 3 было выполнено условие: интеграл

$$\int_E K_F(t)\, dt \tag{16}$$

представляет обобщенную меру, то есть счетно-аддитивную функцию множества $F \in S$, при любом $E \in S$, абсолютно непрерывную относительно меры μ.

Необходимость следует из того, что

$$\int_E K_F(t)\, dt = U(\chi_E)(F).$$

Обратно, если интеграл (16) есть абсолютно непрерывная функция, то интеграл (9) будет, очевидно, абсолютно непрерывной функцией при любой простой функции $\bar{x}(t)$. Но всякий элемент $x \in L$ есть предел в L последовательности $\{\bar{x}_n\}$ простых функций, а тогда $U(\bar{x}_n)$ сходится по норме к $U(x)$ в пространстве V и, следовательно, $U(x) \in A$. (См., также [1], стр. 305).

Заметим еще, что в силу изоморфности пространств L и A, (которая устанавливается аналогично случаю, рассмотренному в [1], стр. 221) общий вид операции $y = U(x)$ класса $H_t^t = H_0^0 = H_s^s$, отображающей L в L дается формулой

$$y(s) = \frac{d}{d\mu} K_F(t)\, x(t)\, dt,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где $K_F(t)$ удовлетворяет условию теоремы 3 и дополнительному условию абсолютной непрерывности интеграла (16), $\frac{d}{d\mu}$ означает производную Радона-Никодима.

Если в S имеется счетный базис $B=\{E_i\}$, $X\in R$, то есть такая счетная система множеств $E_i\in S$, что наименьшее $\sigma=$ — кольцо, порожденное этой системой, совпадает с S, то пространство (X, S) называется сепарабельным.

Теорема 4. Если (X, S) — сепарабельное пространство, то общий вид операции $y=U(x)$ класса $H_t^t=H_0^0=H_\beta^\beta$, отображающей L в L^p, $p>1$, дается формулой

$$y(s)=\int x(t)\,K(s,\ t)\,dt, \tag{17}$$

где $K(s, t)$ — измеримая функция в декартовом произведении $(X\times X, S\times S)$ с мерой $\mu\times\nu$, $(\mu=\nu)$, и

$$C=\operatorname{vrai}\max_t\int|K(s,\ t)|^p ds<\infty, \tag{18}$$

при этом $\|U\|_\beta=C^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Пользуясь известным неравенством (см. например, [1], стр. 307) для элемента y, определяемого равенством (17), получаем

$$\|y\|=\left\{\int\left|\int K(s,\ t)\,x(t)\,dt\right|^p ds\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\int\left[\int|K(s,\ t)|^p|x(t)|^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}}dt\leqslant C^{\frac{1}{p}}\left\{\int|x(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}=C^{\frac{1}{p}}\|x\| \tag{19}$$

и, следовательно, $U\in H_\beta^\beta$, $\|U\|_\beta\leqslant C^{\frac{1}{p}}$.

Обратно, пусть дана операция $U\in H_0^0=H_\beta^\beta$. Тогда, согласно теореме 2, U определяется формулой

$$y=U(x)=\int x(t)\,dw(E),$$

где $w(E)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|w(E)\|\leqslant\|U\|_\beta\mu(E), \tag{20}$$

и где значения $w(E)$ принадлежат пространству L^p. Таким образом, $w(E)$ представляется в виде функции $D_E(s)$, причем:

а) $D_E(s)\in L^p$ при любом $E\in S$,

б) $\int|D_E(s)|^p as\leqslant\|U\|_\beta^p[\mu(E)]^p$.

Отсюда для любого подразделения $T=\{E\}$ пространства X на конечное число непересекающихся множеств $E_i\in R(B)$,*) $i=1, 2, \ldots, n$,

$$\int\sum_{i=1}^n\frac{|D_{E_i}(s)|^p}{[\mu(E_i)]^{p-1}}\,ds\leqslant\|U\|^p\sum_{i=1}^n\mu(E_i)=\|U\|^p\mu(X). \tag{21}$$

Покажем, что при каждом фиксированном s все суммы $v(s)$, стоящие под интегралом в (20), ограничены в совокупности по всем указанным подразделениям, за исключением может быть $s\in E_0$, где $\mu E_0=0$. Назовем подразделение T_1 входящим в T_2, $T_1<T_2$, если

*) $R(B)$ — кольцо, порожденное системой B.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

каждое $E \in T_1$ представляется в виде суммы множеств из T_2. Так как множество всех подразделений счетно, то (как нетрудно видеть) существует последовательность

$$T_1 < T_2 < \dots \tag{22}$$

такая, что всякое $T < T_\kappa$ при $\kappa \geqslant K(T)$. Очевидно, что для соответствующей последовательности сумм, имеем

$$v_1(s) \leqslant v_2(s) \leqslant \dots . \tag{23}$$

Если теперь предположить, что указанного множества E_0 не существует, то нашлось бы множество A, $\mu A > 0$, что на каждом $s \in A$ суммы $\{v(s)\}$, а следозательно, и суммы в (23), не были бы ограничены в совокупности, тогда

$$\lim_{\kappa \to \infty} \int v_\kappa(s)\, ds = \infty,$$

что противоречит (21).

Далее, в силу предполагаемой сепарабельности пространства, суммы $v(s)$ ограничены в совокупности при любом разбиении $\bigcup_i E_i = X$, $E_i \in S$, $s \bar{\in} E_0$, то есть $D_E(s) \in V^p$, когда s не принадлежит множеству E_0. Можно показать (аналогично тому, как это сделано в [1], стр, 223) что для того, чтобы $D_E(s) \in V^p$, необходимо и достаточно, чтобы

$$D_E(s) = \int_E K(s, t)\, dt,$$

где $K(s, t) \equiv \dfrac{d}{d\mu} D_E(s) \in L^p$; нетрудно видеть что $K(s, t)$ является измеримой функцией в пространстве $X \times X$. По теореме Фубини

$$\int \left[\int |K(s, t)|^p dt \right] ds = \int \left[\int |K(s, t)|^p ds \right] dt,$$

откуда в силу (19)

$$\int |K(s, t)|^p ds \leqslant \|U\|^p$$

почти для всех t, то есть

$$C = \operatorname{vrai}\max_t |K(s, t)| \leqslant \|U\|. \tag{24}$$

Докажем теперь равенство (17). Пусть сначала $x(t)$ почти всюду ограничена. По формуле (5) $y(s) = U(x)$ представляется в виде интеграла, как (t)-предел интегральных сумм, следовательно, найдется подпоследовательность интегральных сумм такая, что

$$y(s) = U(x) = (0) - \lim_{\lambda \to 0} \sum_i \gamma_i w(E_i) =$$

$$= (0) - \lim_{\lambda \to 0} \sum_i \gamma_i D_{E_i}(s) = (0) - \lim_{\lambda \to 0} \sum_i \gamma_i \int_{E_i} K(s, t)\, dt =$$

$$= (0) - \lim_{\lambda \to 0} \sum_i \gamma_i \beta_i(s)\, \mu(E_i) = \int x(t) K(s, t)\, dt$$

для почти всех s. Справедливость равенства (17) для любого $x \in L$ вытекает из того, что множество ограниченных функций плотно в L, и из того, что как U, так и интеграл принадлежат H_0^0. Наконец, из сопоставления (19) и (24), получаем равенство $\|U\| = C^{\frac{1}{p}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, ГИТТМ, М.,1950.
2. П. Халмош. Теория меры. ИЛ, М., 1950.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

ПРОГРАММА АВТОМАТИЧЕСКОГО ТРАНСКОДИРОВАНИЯ ИНТЕРПРЕТИРУЮЩЕГО ТИПА

М. А. ТЫНКЕВИЧ

В последние годы, когда многие вычислительные центры работают на базе нескольких вычислительных машин разных типов, оказывается целесообразным по многим причинам создание программ-посредников между машинами, позволяющих исполнять в машине программу, составленную и, быть может, отлаженную для другой машины.

В настоящей статье мы рассмотрим такую программу, в дальнейшем называемую ПАТИТ („программа автоматического транскодирования интерпретирующего типа"), которая позволяет исполнять в машине М-20 программу, составленную для двухадресной машины „Минск-1" с оперативной памятью (МОЗУ) емкостью 2048 31-разрядных ячеек.

§ 1. Описание ПАТИТ

ПАТИТ работает на принципе полной интерпретации команд ЭЦВМ „Минск-1". Исполнение приказа происходит здесь в следующей последовательности.

Выбирается адрес очередного приказа и формируется обращение к т. н. таблице характеристик (ТХ). Для операций с модификациями (арифметических, логических и сдвигов) из ТХ осуществляется обращение к блоку проверки типа модификаций, который выбирает информацию для исполнения приказа и формирует команды записи результата в соответствии с указанной модификацией, после чего происходит обращение к группе команд, интерпретирующих данный приказ (такая группа обычно называется аналогом). Для операций без модификаций из ТХ управление передается на периферийные блоки установления типа операции и лишь затем к аналогу. (Бессистемность в номерах этих операций значительно удлиняет программу и увеличивает расход машинного времени).

Стремление к сокращению затрат машинного времени (даже за счет компактности программы) обусловило ряд несущественных ограничений на приказы рабочей программы.

Исключена из рассмотрения операция подвода магнитной ленты (−04). Отрицательный ноль вырабатывается только при сложении и вычитании:

$$(-a)+(+a)=-0,$$
$$(-a)-(-a)=-0,$$
$$(-0)+(\pm 0)=-0,$$
$$(-0)-(\pm 0)=-0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Операция +27 работает как останов по +37, операции +57, +67, +77 исполняются как останов по +47.

Не включены в рассмотрение операции умножения с удвоенным числом разрядов произведения и деления с сохранением остатка, хотя для них оставлены строки ТХ и место для записи аналогов. Операции ±14, ±64, ±74, ±35, ±45, ±55, ±65, ±75, −44, не предусмотренные системой команд, вызывают „авост".

Все остальные операции системы команд „Минск-1" расшифровываются согласно [1].

§ 2. Практическая работа с ПАТИТ

Приведенный ниже вариант ПАТИТ размещается в МОЗУ в ячейках с 7300 до 7674. В качестве рабочих используются ячейки с 7770 до 7777. Если рабочая программа предусматривает работу с магнитной лентой, то к работе привлекаются нулевой магнитный барабан и нулевой магнитофон. Ячейки МОЗУ с 0001 до 3777 отведены для хранения рабочей программы.

Команды и восьмеричные числа ЭЦВМ „Минск-1", имеющие вид

$$\pm\,\pi_1\pi_2 \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \quad \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4,$$

при использовании ПАТИТ записываются на бланках и перфорируются в форме 45 — разрядного двоичного кода:

$$+\pm-00 \quad 00\pi_1\pi_2 \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \quad \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4.$$

Десятичные числа вида

$$\pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8$$

перфорируются в форме

$$-\pm-00 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad \gamma_4\gamma_5\gamma_6 \quad \gamma_7\gamma_80.$$

Для решения задачи необходимо поставить на ЧУ перфокарту с кодами вида

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & 7300 & 0002 & 0000 \\ 0 & 56 & 0000 & 7610 & 0000, \end{vmatrix}$$

за которой следуют перфокарты с ПАТИТ и рабочей программой. Каждая группа кодов рабочей программы должна быть снабжена адресным кодом. В конце всей программы и в конце каждой группы кодов, вводимой в процессе работы, должен находиться код контрольной суммы, определяющий конец ввода.

В ячейку 7777 по второму адресу должен быть записан адрес начального приказа рабочей программы. Кроме того, на первом регистре пульта управления должен быть набран код вида

0С0 УЧ 0000 0000,

где УЧ, равное 0100 или 0500, определяет режим десятичной или восьмеричной печати. Печатаемая информация имеет ту же форму, что и вводимый материал.

О получении „авоста" сигнализируют „авосты", естественные для команд М-20, и останов вида

777 7777 7777 7777.

Заметим, что в ячейке 7777 всегда находится адрес следующего приказа и ячейка 7776 выступает в роли сумматора.

Программный останов производится в ячейке 7627 и имеет вид

077 7774 7775 0000.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 3. Программа

7300		72	0000	7777	0000	
1	4	55	0000	7754	7770	000 0000 α β
2		34	7362	7770	7771	000 α β 0000
3	4	55	0000	7355	7772	Выделение $\pm\pi_2$
4		41	7362	7772	7774	Формирование α_{TX}
5	4	55	0000	7356	7773	Выделение π_1
6	4	72	0001	7774	7777	Увеличение (КРА) на 1.
7	2	16	7300	0000	7413	ПУ $\rightarrow \alpha_{TX}$.
7310		16	7630	7330	7327	ТАБЛИЦА ХАРАКТЕРИСТИК
1		16	7444	7330	7327	$-\pi_1$ 7 Сдвиг
2		16	0000	7446	0000	$-\pi_1$ 6 Логич. слож.
3		16	0000	7504	0000	$-\pi_1$ 5
4						$-\pi_1$ 4
5						$-\pi_1$ 3 Умн. 2
6		16	7437	7330	7327	$-\pi_1$ 2 Дел. 2
7		16	7373	7330	7327	$-\pi_1$ 1 Сравнение
7320		16	7414	7330	7327	$\pm\pi_1$ 0 Слож. и цикл слож.
1		16	7426	7330	7327	$+\pi_1$ 1 Вычитание
2		16	7422	7330	7327	$+\pi_1$ 2 Деление
3		16	0000	7504	0000	$+\pi_1$ 3 Умножение
4		16	0000	7446	0000	$+\pi_1$ 4
5		16	7442	7330	7327	$+\pi_1$ 5
6		16	0000	7603	0000	$+\pi_1$ 6 Логич. умн.
7		00	0000	0000	0000	$+\pi_1$ 7 Ввод и остановы
						Обращение к аналогу команды.
7330		34	7670	7773	7773	
1		72	0000	7773	0000	Проверка типа модификации.
2	2	56	0000	7333	0000	
3		72	0000	7771	0000	
4	4	00	0000	0000	7776	
5	4	72	0000	7770	7411	$\pi_1 = 0$
6	4	56	0000	7327	7775	
7		72	0000	7771	0000	
7340	4	00	0000	0000	7776	
1		72	0000	7770	7411	$\pi_1 = 1$
2	4	56	0000	7327	7775	
3		72	0000	7771	0000	
4	4	72	0000	7770	7411	$\pi_1 = 2$
5	4	56	0000	7327	7775	
6	1	00	0077	7777	7777	
7		72	0000	7777	7411	
7350	4	56	0000	7320	7775	$\pi_1 = 3$
1		00	0100	0000	0000	
2	2	00	0000	0000	0000	
3		16	7656	7333	7413	$\pi_1 = 4$
4		00	0000	3777	3777	
5	3	00	0007	0000	0000	
6		00	0070	0000	0000	
7		72	0000	7771	0000	
7360	4	55	0000	7346	7776	$\pi_1 = 5$
1		56	0000	7370	0000	
2	1	14	0000	7317	0000	
3		16	7652	7343	7413	$\pi_1 = 6$
4		00	0077	7777	7777	
5	1	06	7700	0000	0001	
6	1	00	0000	0000	0000	
7		55	7776	7346	7776	
7370		72	0000	7770	7411	
1	4	55	0000	7346	7775	$\pi_1 =$
2		56	0000	7327	0000	
3		41	7776	7775	7774	
4		55	7772	7352	0000	
5		76	0000	7403	0000	

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

6		55	7774	7351	0000	
7		76	0000	7655	0000	
7400		55	7774	7364	0000	Сложение
1		36	0000	7671	0000	±0
2		56	7774	7411	7776	
3		55	7774	7351	0000	
4		36	0000	7406	0000	
5		13	7774	7465	7776	Циклическое сложение
6		55	7776	7364	0000	
7		76	0000	7411	0000	
7410		00	7366	0000	7776	
1		00	0000	0000	0000	β или 0000 → *PA*
2	1	00	7776	0000	0000	ПУ → 7300, печать,
3		00	0000	0000	0000	интервал
4		42	7776	7775	7774	
5		55	7774	7351	0000	
6		76	0000	7655	0000	Вычитание
7		55	7774	7364	0000	±0
7420		36	0000	7671	0000	
1		56	7774	7411	7776	
2		34	7365	7775	7775	
3		65	7776	7775	7776	
4		75	7776	7366	7776	Умножение
5		56	0000	7411	0000	
6		24	7776	7775	7774	
7		36	0000	7655	0000	
7430		34	7774	7774	7774	
1		34	7300	7774	7774	
2		36	7366	7411	7776	
3		55	7774	7436	7776	Деление
4		75	7776	7366	7776	
5		56	0000	7411	0000	
6	2	00	0077	7777	7777	
7		15	7776	7775	7776	
7440		75	7776	7366	7776	Сравнение
1		56	0000	7411	0000	
2		55	7776	7775	7776	
3		55	0000	7411	0000	Логич. умнож.
4		75	7776	7775	7776	
5		56	0000	7411	0000	Логич. слож.
6		15	7773	0000	0000	
7		76	0000	7454	0000	
7450		72	0000	7770	0000	
1	4	00	0000	0000	7776	Передача ±05
2		72	0000	7771	0000	
3	1	56	7776	7300	0000	
4		15	7773	7500	0000	
5		36	0000	7461	0000	
6		35	7773	7477	0000	
7		72	0000	7770	0000	
7460	4	00	0000	0000	7776	
1		01	7776	0000	7775	
2		34	7457	7775	7776	Нормализация
3		55	7776	7436	7776	±15 и ±25
4		75	7776	7366	7776	

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

5		72	0000	7771	0000	
6	1	00	7776	0000	0001	
7		26	7365	7775	7775	
7470		34	7460	7775	7775	
1		55	7775	7476	7775	
2	1	36	6366	7300	0000	
3		33	7475	7775	7775	
4	1	56	7775	7300	0000	
5	3	00	0000	0000	0100	
6		00	0000	0000	0077	
7		00	0010	0000	0000	
7500		00	0020	0000	0000	
1		00	0030	0000	0000	
2		00	0040	0000	0000	
3		00	0050	0000	0000	
4		15	7773	7500	0000	
5		76	0000	7511	0000	
6		72	0000	7771	0000	
7	1	00	7776	0000	0000	БПУ ± 24
7510		56	7770	7300	7777	
1		15	7773	7501	0000	
2		36	0000	7517	0000	
3		15	7773	7503	0000	
4		76	0000	7522	0000	
5		55	7776	7364	0000	
6		36	0000	7300	0000	ПУ ± 54
7		55	7776	7352	0000	
7520		36	7770	7300	7777	ПУ ± 34
1		56	7771	7300	7777	
2		75	7772	7773	7774	Выделение $\pm \pi_1\pi_2$
3		15	7774	7555	0000	
4		36	0000	7560	0000	
5		35	7774	7554	0000	
6		50	0414	0001	3777	
7		70	0001	7530	0000	
7530		72	0000	7770	0000	МОЗУ → НМЛ +04
1	2	50	0420	0000	3777	
2		70	0001	7533	0000	
3		72	0000	7777	0000	
4	4	55	0000	7557	7774	
5		35	7774	7554	0000	
6	4	55	0000	7354	7774	
7		34	7556	7774	7775	
7540		33	7774	7775	7775	
1		13	7553	7775	7543	
2	4	72	0001	7771	7777	
3		00	0000	0000	0000	
4	4	70	0000	7545	0000	
5		72	0000	7770	0000	
6	2	50	0421	0000	3777	
7		70	0001	7550	0000	
7550		50	0410	0001	3777	
1		70	0001	7552	0000	
2		56	0000	7300	00 0	
3	1	50	0410	0000	0000	
4	1	00	0004	0000	0000	
5	1	00	0044	0000	0000	
6		64	0000	0000	0037	
7	3	00	0077	0000	0000	
7560		50	0414	0001	3777	НМЛ → МОЗУ +44
1		70	0001	7562	0000	

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2		72	0000	7770	0000	
3	2	50	0420	0000	3777	
4		70	0001	7565	0000	
5		72	0000	7777	0000	
6	4	55	0000	7557	7774	
7		35	7774	7555	0000	
7570	4	55	0000	7354	7774	
1		34	7556	7774	7775	
2		33	7774	7775	7775	
3		13	7602	7775	7575	
4	4	72	0001	7771	7777	
5		00	0000	0000	0000	
6	4	70	0000	7577	0000	
7		50	0410	0001	3777	
7600		70	0001	7601	0000	
1		55	0000	7300	0000	
2	1	50	2014	0000	0000	
3		15	7773	7477	0000	
4		36	0000	7610	0000	
5		15	7773	0000	0000	
6		76	0000	7621	0000	
7		72	0000	7770	0000	
7610	4	00	0000	7611	0000	
1		52	0000	0000	0000	Блок операций ввода с преобразованием десятичной информации
2	4	55	0001	7620	0000	
3		36	0000	7616	0000	
4	3	34	7607	0001	0001	
5	3	15	7620	0001	0001	
6	1	12	3776	7612	0001	
7	1	56	0000	7300	0000	
7620	4	00	0000	0000	0000	
1		55	7773	7502	0000	Блок остановов
7622		36	7776	7625	7775	
3		72	0000	7771	0000	
4	4	00	0000	0000	7775	
5		72	0000	7770	0000	
6	4	00	0000	0000	7774	
7		77	7774	7775	0000	
7630		55	7776	7352	7774	
1		74	7670	7774	7774	Сдвиг
2		13	7774	7776	7774	
3		55	7775	7556	7773	
4		55	7775	7352	0000	
5		76	0000	7640	0000	
6		13	7475	7773	7773	
7		56	0000	7611	0000	
7640		33	7475	7773	7773	
1		74	7651	7773	7773	
2		74	7773	7774	7774	
3		55	7774	7346	7776	
4		55	7774	7351	0000	
5		36	0000	7647	0000	
6		75	7352	7776	7776	
7		75	7365	7776	7776	
7650		56	0000	7411	0000	
1	1	44	0000	0000	0000	
2		50	0100	0777	7655	
3		70	7655	7651	0000	Интервал
4		16	0000	7300	0000	
5	7	77	7777	7777	7777	Код „авоста“
6		20	0001	0000	7775	
7		13	7667	7775	7662	

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

7660		15	7351	7775	0000	Блок печати
1		36	7776	7665	7774	
2		00	0000	0000	0000	
3		70	7774	7664	0000	
4		56	0000	7300	0000	
5		34	7365	7776	7774	
6		56	0000	7662	0000	
7		50	0000	0777	7774	
7670		63	0000	0000	0000	
1		55	7776	7352	0000	
2		36	7366	7411	7776	Блок выработки ±0
3		56	7674	7411	7776	при сложении и вычитании
4	3	00	0000	0000	0000	
		Контрольная сумма.				

§ 4. Замечания

Использование ПАТИТ, естественно, ведет к увеличению расхода машинного времени по сравнению со временем решения задачи в машине „Минск-1", что хорошо видно из следующей таблицы (время исполнения дано для операций без печати)

Название операции	Время в мксек для ЭЦВМ „Минск-1"	Время в мксек для ЭЦВМ 20
Сложение	250	580—730
Вычитание	270	540—640
Умножение	1408	580—680
Деление	1695	670—840
Логические операции	200	480—620
Сдвиг	200—250	800—900
Операции управления	200	320—460

При решении задач арифметического характера расход машинного времени возрастает в 2—3 раза. Значительно можно было бы сократить время и длину ПАТИТ, если отказаться от использования в рабочих программах, исполняемых с ПАТИТ, отрицательного или положительного нуля (до 120 *мксек*).

Заметим, что построение программы-посредника с компиляцией представляет значительно большие трудности. Такая программа оказывается целесообразной лишь в случае работы с нормализованными числами и не будет универсальной. Рабочие программы, обрабатываемые такой программой, могут составляться только по весьма жестким правилам, например, с помощью ГП.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность Г. В. Сибирякову за ряд ценных идей, позволивших значительно сократить время работы и размеры некоторых блоков ПАТИТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Дымарский и др. Справочник программиста. Т. 1, Судпромгиз, Л., 1963, стр. 373—396.
2. И. Г. Илзиня. Программирование для двухадресных цифровых вычислительных машин. Изд. АН Латв. ССР, 1962.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН В МАТЕМАТИКЕ. I—II.

Г. В. СИБИРЯКОВ

Введение

В данной работе предлагается один способ формализации математического аппарата, связанного с преобразованием аналитических выражений по известным правилам. Прежде всего определяются формулы как конечные последовательности $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ некоторых символов с единственным условием, чтобы встречающиеся в них скобки были попарно согласованы. А именно, требуется, чтобы во всей формуле раскрывающих скобок было столько же, сколько и закрывающих, причем в любой последовательности вида $\alpha_1 \ldots \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ первых должно быть не меньше, чем вторых. Если несколько видоизменить обозначения степени, производной, интеграла, предела и т. д., то большинство аналитических выражений превратятся в формулы описанного вида. В этой же части вводятся понятия главной связи формулы, пары соответствующих скобок, вхождения одной формулы в другую и т. п. Во второй части определяются понятия простой и обобщенной подстановок в одну формулу по другой. На примере дифференцирования элементарных функций показывается, что преобразования аналитических выражений по известным правилам есть не что иное, как обобщенные подстановки. В следующей статье будут приведены алгоритмы простой и обобщенной подстановок, нормализации формул и др.

Используемая в работе терминология из теории частично упорядоченных множеств и бинарных отношений заимствована из книги А. Г. Куроша „Лекции по общей алгебре“, Физматгиз, М., 1962. Выражения

„{()“, „{(,)}“, „α = (“, „α =)“ и т. п.

соответственно означают: „множество, состоящее из одной раскрывающей скобки“, „множество, состоящее из двух элементов: раскрывающей и закрывающей скобок“, „символ α является раскрывающей скобкой“, „символ α является закрывающей скобкой“ и т. д.

I.

1. Формулы. Пусть даны три попарно непересекающиеся множества Σ, Ω и Φ символов, причем в первом множестве содержатся круглые раскрывающая и закрывающая скобки. Элементы этих трех множеств называются соответственно связями, постоянными и переменными символами. Допустим, что множество $\Xi = \Sigma \cup \Omega \cup \Phi$ вполне упорядочено некоторым отношением порядка $\leqslant$ так, что его

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

первым и вторым элементами являются раскрывающая и закрывающая скобки и каждая связь слабее любого постоянного или переменного элемента. Пусть, наконец, во множестве Σ выделены два подмножества Σ_a и Σ_κ, элементы которых называются соответственно ассоциативными и коммутативными связями.

Элементы множества Ξ будем обозначать малыми греческими буквами, а последовательности этих элементов — заглавными буквами латинского алфавита. В начале и в конце любой конечной последовательности элементов множества Ξ будем ставить символ Δ, называемый граничным. При этом предполагается, что $\Delta \overline{\in} \Xi$. Если, далее, последовательность $\Delta\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m\Delta$ обозначена через B, то всегда под выражением

$$\Delta\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\kappa B\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n\Delta$$

понимается последовательность

$$\Delta\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\kappa\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n\Delta.$$

Конечная последовательность

$$A = \Delta\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\Delta$$

символов из Ξ называется формулой класса $\mathfrak{F}[\Xi]$ или просто формулой, если в ней число раскрывающих скобок равно числу закрывающих, а в любой ее подпоследовательности вида $\Delta\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i\Delta$, $1 \leqslant i \leqslant n$ раскрывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

Обозначим через $\Gamma_+[A]$ и $\Gamma_-[A]$ соответственно число раскрывающих и число закрывающих скобок в последовательности A. Если A — формула, то

$$\Gamma_+[A] = \Gamma_-[A],\ \Gamma_+[A_{1i}] \geqslant \Gamma_-[A_{1i}],\ \Gamma_+[A_{in}] \leqslant \Gamma_-[A_{in}], \qquad (1)$$

где $A_{pq} = \Delta\alpha_p\alpha_{p+1} \ldots \alpha_q\Delta\ (p \leqslant q)$ и $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формула A может быть и пустой. В этом случае мы пишем

$$A = \Delta\Delta.$$

Класс $\mathfrak{F}[\Xi]$ можно линейно упорядочить отношением порядка $\leqslant$ считая

$$\Delta\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\Delta \leqslant \Delta\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m\Delta,$$

если справедливо одно из утверждений:

α) $n \leqslant m$ и $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

β) $\alpha_j < \beta_j$ для некоторого j, $j \leqslant n$, $j \leqslant m$, и $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, j-1$.

При таком отношении порядка минимальным элементом класса $\mathfrak{F}[\Xi]$ является пустая формула.

Приведем пример, иллюстрирующий понятие формулы. Рассмотрим множества:

$$\Sigma^0 = \{(,\ ),\ =,\ +,\ -,\ \lim,\ \Sigma,\ \int,\ :,\ \cdot,\ \downarrow,\ \uparrow,\ \perp,\ {}^\circ,\ \vdots\},$$

$$\Omega^0 = \{\infty,\ 0,\ 1, \ldots,\ 9, \ldots,\ \arccos, \ldots,\ \mathrm{mod}, \ldots,\ \mathrm{tg}, \ldots\},$$

$$\Phi^0 = \{\alpha,\ \beta, \ldots,\ \omega,\ a,\ b, \ldots,\ z\}.$$

Отношение порядка $\leqslant$ в $\Xi^0 = \Sigma^0 \cup \Omega^0 \cup \Phi^0$ зададим порядком перечисления его элементов. Так, $+ \leqslant \cdot \leqslant 1 \leqslant \mathrm{tg} \leqslant \alpha$. Связи $+$ и $\cdot$ коммутативны и ассоциативны. Связь $=$ коммутативна, но не ассоциативна. Остальные связи не коммутативны и не ассоциативны.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Установим соответствие между некоторыми обычными аналитическими выражениями и некоторыми формулами класса $\mathfrak{F}[\Xi^0]$ следующим индуктивным путем.

1. Обычной формуле A, состоящей только из одного символа $\alpha_i \in \Xi^0$, сопоставим формулу $\Delta\alpha_i\Delta$ класса $\mathfrak{F}[\Xi^0]$.

2. Если обычным формулам A, B, C, D соответствуют формулы A', B', C' и D' класса $\mathfrak{F}[\Xi^0]$, то формулам

$$A = B,\ A + B,\ A - B,\ -B,\ \lim_{A \to B} C,\ \sum_{A=B}^{C} D,\ \int AdB,$$

$$\int_C AdB,\ A:B,\ A \cdot B,\ A_B,\ A_{B,C},\ A_{B,C,D},\ A^B,\ \frac{dA}{dB}$$

$$A(B),\ A(B, C),\ A(B, C, D)$$

сопоставим соответственно следующие формулы из $\mathfrak{F}[\Xi^0]$:

$$\begin{gathered}
\Delta(A') = (B')\Delta,\ \Delta(A') + (B')\Delta,\ \Delta(A') + -(B')\Delta,\\
\Delta - (B')\Delta,\ \Delta(A') \vdots (B') \lim (C')\Delta,\ \Delta(A') \vdots (B') \vdots (C')\Sigma(D')\Delta,\\
\Delta(B') \int (A')\Delta,\ \Delta(B') \vdots (C') \int (A')\Delta,\ \Delta(A'):(B')\Delta,\\
\Delta(A') \cdot (B')\Delta,\ \Delta(A') \downarrow (B')\Delta,\ \Delta(A') \downarrow (B') \vdots (C')\Delta,\\
\Delta(A') \downarrow (B') \vdots (C') \vdots (D')\Delta,\ \Delta(A') \uparrow (B')\Delta,\ \Delta(B') \perp (A')\Delta,\\
\Delta(A') \circ (B')\Delta,\ \Delta(A') \circ (B') \vdots (C')\Delta,\ \Delta(A') \circ (B') \vdots (C') \vdots (D')\Delta.
\end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, выражениям

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ \frac{d}{dx}\int f dx = f$$

соответствуют формулы

$$A = \Delta((((\cos) \circ (x)) \uparrow (2)) + (((\sin) \circ (x)) \uparrow (2))) = (1)\Delta, \tag{3}$$

$$B = \Delta((x) \perp ((x) \int (f))) = (f)\Delta. \tag{4}$$

2. Пары скобок. Пусть дана формула $A = \Delta\alpha_1 .. \alpha_n\Delta$ и в ней α_i и α_j суть соответственно раскрывающая и закрывающая скобки. Будем говорить, что эти скобки образуют в A пару (соответствующих) скобок $[i, j]$, если $i < j$ и последовательность $A_{i+1, j-1} = \Delta\alpha_{i+1} \ldots \alpha_{j-1}\Delta$ является формулой.

В формуле (4), например, имеются следующие пары скобок:

$$[1, 15],\ [2, 4],\ [6, 14],\ [7, 9],\ [11, 13] \text{ и } [17, 19].$$

Из соотношений (1) вытекает, что каждая скобка в формуле входит в одну и только одну пару скобок.

Заметим, что смысл выражения „$[i, j]$ есть пара скобок в A“ зависит от выбора вполне упорядоченного индексного множества для нумерации членов A. До сих пор под таковым подразумевался отрезок $[1, n]$ множества натуральных чисел с естественным отношением порядка. В дальнейшем, однако, эта „естественная“ нумерация членов последовательностей не всегда будет самой удобной. В частности, при рассмотрении формулы A вместе с ее подпоследовательностями иногда выгоднее сохранить за членами последних те номера, которые эти члены имели в формуле A. Такую нуме-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

рацию членов подпоследовательностей данной формулы мы будем называть „старой" нумерацией.

Две пары скобок $[i, j]$ и $[\kappa, l]$ в формуле A по определению различны, если $i \neq \kappa$ или $j \neq l$.

Непосредственно из определений следуют две леммы.

Лемма 1. Если $[i, j]$ и $[\kappa, l]$ суть две различные пары скобок в формуле A, то справедливо одно из соотношений

$$i<j<\kappa<l,\ i<\kappa<l<j,\ \kappa<i<j<l,\ \kappa<l<i<j. \tag{5}$$

Лемма 2. Если $[i, j]$ — пара скобок в формуле $A=\Delta\alpha_1 \ldots \alpha_n\Delta$, то последовательность $[i, j]\, A$,

$$[i,\ j]\, A=\Delta\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\alpha_{i+1} \ldots \alpha_{j-1}\alpha_{j+1} \ldots \alpha_n\Delta \tag{6}$$

также является формулой. Если, кроме того, $[\kappa, l]$ есть пара скобок в A, отличная от пары $[i, j]$, то она является парой скобок и в формуле (6) (в смысле старой нумерации).

3. Главные связи. Если $A=\Delta\alpha_1 \ldots \alpha_n\Delta$ — формула, то через $\mathfrak{U}[A]$ обозначается множество тех и только тех элементов α_κ, $1 \leqslant \kappa \leqslant n$, которые принадлежат $\Sigma \setminus \{(,)\}$ и удовлетворяют условию

$$\Gamma_+ [A_{1,\kappa-1}] = \Gamma_- [A_{1,\kappa}]. \tag{7}$$

В этом определении равенство (7) можно заменить любым из равенств:

$$\Gamma_+ [A_{1,\kappa}] = \Gamma_- [A_{1,\kappa}],\ \Gamma_+ [A_{\kappa,n}] = \Gamma_- [A_{\kappa,n}],\ \Gamma_+ [A_{\kappa+1,n}] = \Gamma_- [A_{\kappa+1,n}].$$

Минимальный элемент множества $\mathfrak{U}[A]$ называется главной связью формулы A и обозначается через $\sigma[A]$. Если множество $\mathfrak{U}[A]$ пусто, то в качестве главной связи формулы A мы будем условно брать символ ∞, предполагая, что этот символ сильнее любой связи и не сильнее никакого постоянного или переменного символа.

Главными связями формул (3) и (4), например, служит знак равенства. Главная связь пустой формулы $\Delta\Delta$ равна ∞.

Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что главная связь формулы класса $\mathfrak{F}[\Xi^0]$ есть знак операции, выполняемой в последнюю очередь. Часто главная связь отражается в названии формулы: сумма $\Delta a+b\Delta$, интеграл $\Delta x \int f \circ x\Delta$, функция $\Delta\cos \circ x\Delta$ и т. д.

4. Вхождения. Пусть дана формула A. Мы говорим, что справедливо высказывание $\Re[A, i, j]$, если выполняются условия:

1. Члены α_i и α_j последовательности A таковы, что следующий за α_j член расположен в A не левее члена α_i. В случае естественной нумерации членов формулы

$$A = \Delta\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\Delta$$

это условие равносильно условию

$$1 \leqslant i \leqslant j+1 \leqslant n+1;$$

при этом, если $j=0$, то $\alpha_j=\Delta$, если $i=n+1$, то $\alpha_i=\Delta$.

2. Подпоследовательность $\Delta\alpha_i\alpha_{i+1} \ldots \alpha_j\Delta$ формулы A, содержащая все члены α_κ формулы A, расположенные в A не левее α_i и не правее α_j, пустая в том случае, когда член α_j расположен левее члена α_i, является формулой. Ее главную связь мы обозначим через $\sigma=\sigma[\Delta\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\Delta]$.

3. Если α_i не есть первый член A, то его предыдущий член α' не сильнее σ (следовательно, является связью) и отличен от закрывающей скобки.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

4. Если α_j не есть последний член A, то его последующий член β' отличен от раскрывающей скобки и $\beta' \leqslant \sigma$. Кроме того, $\beta' \neq \sigma$, если связь σ не ассоциативна.

Высказывание $\mathfrak{R}[A, i, j]$ называется вхождением формулы $\Delta\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots\alpha_j\Delta$ в формулу A. Если это высказывание справедливо, то будем говорить, что формула $\Delta\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots\alpha_j\Delta$ входит в формулу A или является частью A.

Отметим, что смысл высказывания $\mathfrak{R}[A, i, j]$ также зависит от конкретного выбора индексного упорядоченного множества для нумерации членов формулы A.

Если $[i, j]$ — пара скобок в формуле A с естественной нумерацией, то $\mathfrak{R}[A, i+1, j-1]$ истинно. Для формулы (3), например, при естественной нумерации членов справедливы утверждения $\mathfrak{R}[A, 4, 6]$, $\mathfrak{R}[A, 5, 5]$ и др. Вхождения $\mathfrak{R}[A\ 8, 10]$ и $\mathfrak{R}[A, 24, 26]$ одной и той же формулы $\Delta(x)\Delta$ считаются различными. В формуле $A = \Delta x : y : z\Delta$ из вхождений $\mathfrak{R}[A, 1, 3]$ и $\mathfrak{R}[A, 3, 5]$ в силу условия 4) истинно только второе. Для пустой формулы истинно только одно высказывание $\mathfrak{B}[\Delta\Delta, 1, 0]$.

Множество всех (истинных) вхождений в формулу A можно вполне упорядочить отношением порядка $\leqslant$, считая

$$\mathfrak{R}[A, i, j] \leqslant \mathfrak{R}[A, \kappa, l],$$

если член α_l формулы A расположен левее α_κ, либо если $i = \kappa$ и член α_j расположен не правее α_l.

5. Устранимые пары скобок. Пара скобок $[i, j]$ в формуле A называется устранимой, если между скобками α_i и α_j в A заключена возможно пустая подпоследовательность $\Delta\alpha_\kappa, \ldots, \alpha_l\Delta$ и истинно вхождение $\mathfrak{R}[[i, j]\ A, \kappa, l]$, где через $[i, j]\ A$ обозначена формула, полученная из A удалением скобок α_i и α_j (см. лемму 2) и наделенная старой нумерацией (т. е нумерацией принятой в формуле A). Если в A принята естественная нумерация, то в этом определении $\kappa = i + 1$, $l = j - 1$.

Переход от формулы A к формуле $[i, j]\ A$ называется устранением устранимой пары скобок $[i, j]$ в A или просто упрощением формулы A.

Пусть $\mathfrak{B}[A]$ — множество всех устранимых пар скобок в формуле A. Отношение $[i, j] \sim [\kappa, l]$, определенное в $\mathfrak{B}[A]$ и означающее $[i, j]\ A = [\kappa, l]\ A$, рефлексивно, транзитивно и симметрично, т. е. является отношением эквивалентности. Устранимые пары скобок $[i, j]$ и $[\kappa, l]$ в этом случае называются эквивалентными.

Пример. В формуле (4) не устранима только одна пара скобок [6, 14]. Все устранимые пары скобок в (4) попарно не эквивалентны друг другу. В формуле $\Delta(((a + b)))\Delta$ все пары скобок устранимы и попарно эквивалентны. В формуле $\Delta a(\ ) \cdot (a + b) + (\ )(\ )\Delta$ устранимых пар скобок нет.

Лемма 3. Пусть $[i, j]$ и $[\kappa, l]$ суть две неэквивалентные друг другу устранимые пары скобок в формуле A. Тогда в $[i, j]\ A$ устранима (в смысле старой нумерации) пара $[\kappa, l[$, а в $[\kappa, l]\ A$ устранима пара $[i, j]$. При этом справедливо равенство

$$[i, j]\ [\kappa, l]\ A = [\kappa, l]\ [i, j]\ A.$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что формула $A = \Delta\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\Delta$ наделена естественной нумерацией. Нам придется рассматривать наряду с этой формулой некоторые ее подпоследовательности. Все эти подпоследовательности мы наделяем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

старой нумерацией. По-прежнему через A_{pq}, $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, $p \leqslant q+1$ будет обозначаться под последовательность $\Delta\alpha_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_q\Delta$, пустая в случае $p = q+1$. Поскольку $[i,j]$ и $[\kappa,l]$ суть различные устранимые пары скобок в A, то справедливы утверждения:

(α) Если $i-1 \geqslant 1$, то $\alpha_{i-1} \in \Sigma \setminus \{)\}$, $\alpha_{i-1} \leqslant \sigma[A_{i+1,j-1}]$.

(β) Если $\kappa-1 \geqslant 1$, то $\alpha_{\kappa-1} \in \Sigma \setminus \{)\}$, $\alpha_{\kappa-1} \leqslant \sigma[A_{\kappa+1,l-1}]$.

(γ) Если $j+1 \leqslant n$, то $\alpha_{j+1} \in \Sigma \setminus \{(\}$, $\alpha_{j+1} \leqslant \sigma[A_{i+1,j-1}]$ и в случае $\sigma[A_{i+1,j-1}] \overline{\in} \Sigma_a$ еще $\alpha_{j+1} \neq \sigma[A_{i+1,j-1}]$.

(δ) Если $l+1 \leqslant n$, то $\alpha_{l+1} \in \Sigma \setminus \{(\}$, $\alpha_{l+1} \leqslant \sigma[A_{\kappa+1,l-1}]$ и в случае $\sigma[A_{\kappa+1,l-1}] \overline{\in} \Sigma_a$, кроме того, $\alpha_{l+1} \neq \sigma[A_{\kappa+1,l-1}]$.

(ξ) $A_{i+1,j-1}$—формула (возможно пустая); $\Gamma_+[A_{i+1,j-1}] = \Gamma_-[A_{i+1,j-1}]$.

(ζ) $\Gamma_+[A_{i+1,s}] \geqslant \Gamma_-[A_{i+1,s}]$, $s = i+1, \ldots, j-1$.

(η) $A_{\kappa+1,l-1}$—формула (возможно пустая); $\Gamma_+[A_{\kappa+1,l-1}] = \Gamma_-[A_{\kappa+1,l-1}]$.

(ϑ) $\Gamma_+[A_{\kappa+1,s}] \geqslant \Gamma_-[A_{\kappa+1,s}]$, $s = \kappa+1, \ldots, l-1$.

(ι) $[i,j]A = \Delta\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\alpha_{i+1} \ldots \alpha_{j-1}\alpha_{j+1} \ldots \alpha_n\Delta = A_{1,i-1}A_{i+1,j-1}A_{j+1,n}$.

($\varkappa$) $[\kappa,l]A = \Delta\alpha_1 \ldots \alpha_{\kappa-1}\alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_{l-1}\alpha_{l+1} \ldots \alpha_n\Delta = A_{1,\kappa-1}A_{\kappa+1,l-1}A_{l+1,n}$.

Рассмотрим различные случаи взаимного расположения скобок α_i, α_j, α_κ и α_l.

Случай 1. $j < \kappa$. Если $j+1 = \kappa$, то $\alpha_{j+1} = \alpha_\kappa$ является раскрывающей скобкой, что противоречит утверждению (γ). Следовательно, $j < \kappa-1$. Согласно определению устранимой пары скобок лишь члены между $\alpha_{\kappa-1}$ и α_{l+1} (включая $\alpha_{\kappa-1}$ и α_{l+1}) обуславливают устранимость пары $[\kappa,l]$ в A. Но между $\alpha_{\kappa-1}$ и α_{l+1} в $[i,j]A$ расположены те же самые члены и в том же самом порядке, как и в A. Поэтому из устранимости пары $[\kappa,l]$ в A следует устранимость этой пары в $[i,j]A$.

Случай 2. $l < i$. Этот случай аналогичен первому.

Случай 3. $i = \kappa-1$, $l < j-1$. Согласно утверждению (δ), $\alpha_{l+1} \in \Sigma \setminus \{(\}$. Если допустить, что α_{l+1} есть закрывающая скобка, то это вместе с утверждением (η) даст неравенство

$$\Gamma_+[A_{i+1,l+1}] = \Gamma_+[A_{\kappa,l+1}] < \Gamma_-[A_{\kappa,i+1}] = \Gamma_-[A_{l+1,l+1}],$$

которое противоречит, в силу $l+1 \leqslant j-1$, неравенствам (ζ). Следовательно, $\alpha_{l+1} \in \Sigma$, $\alpha_{l+1} \neq (, \alpha_{l+1} \neq)$. Поэтому $\alpha_{l+1} \in \mathfrak{U}[A_{\kappa,j-1}]$, так как из утверждения (η) следует равенство $\Gamma_+[A_{\kappa,l}] = \Gamma_-[A_{\kappa,l}]$. Но тогда из утверждений (α) и (δ) вытекает

$$\alpha_{l-1} \leqslant \sigma[A_{l+1,j-1}] = \sigma[A_{\kappa,j-1}] \leqslant \alpha_{l+1} \leqslant \sigma[A_{\kappa+1,l-1}].$$

Отсюда и из утверждений (α), (δ) и (η) получаем истинность вхождения $\mathfrak{N}[[\kappa,l][i,j]A, \kappa+1, l-1]$ формулы $A_{\kappa+1,l-1}$ в формулу

$$[\kappa,l][i,j]A = \Delta\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1}\alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_{l-1}\alpha_{l+1} \ldots \alpha_{j-1}\alpha_{j+1} \ldots \alpha_n\Delta.$$

Последнее эквивалентно устранимости пары $[\kappa,l]$ в $[i,j]A$.

Случай 4. $i < \kappa+1$ и $l+1 = j$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Случай 5. $i < \kappa+1$ и $l+1 < j$. Этот случай аналогичен первому случаю.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Случай 6. $\kappa < i$ и $j+1 < l$. $A_{\kappa+1, l-1}$ является формулой, стало быть, по лемме 2 последовательность

$$[i,j]\, A_{\kappa+1, l-1} = \Delta\, \alpha_{\kappa+1} \ldots \alpha_{i-1}\, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{j-1}\, \alpha_{j+1} \ldots \alpha_{l-1}\, \Delta$$

также есть формула, Допустим, что

$$\alpha_{j+1} \in \mathfrak{U}\, [A_{\kappa+1, l-1}]. \qquad (*)$$

Тогда

$$\Gamma_+ [A_{\kappa+1, j}] = \Gamma_- [A_{\kappa+1, j}].$$

Отсюда, поскольку α_i и α_j суть раскрывающая и закрывающая скобки и справедливо равенство (ξ), получаем

$$\Gamma_+ [A_{\kappa+1, i-1}] = \Gamma_- [A_{\kappa+1, i-1}]. \qquad (8)$$

Используя это равенство, можно показать, что

$$\mathfrak{G}\, [[i,j]\, A_{\kappa+1, l-1}] = \mathfrak{G}\, [A_{\kappa+1, l-1}] \cup \mathfrak{G}\, [A_{i+1, j-1}]. \qquad (9)$$

В самом деле, пусть

$$\alpha_s \in \mathfrak{G}\, [[i,j]\, A_{\kappa+1, l-1}]. \qquad (10)$$

Тогда

$$\alpha_s \in \Sigma \setminus \{(\ ,\ )\}. \qquad (11)$$

Если $\kappa + 1 \leqslant s \leqslant i-1$, то из (10), кроме того, следует

$$\Gamma_+ [A_{\kappa+1, s-1}] = \Gamma_- [A_{\kappa+1, s-1}]. \qquad (12)$$

Это равенство вместе с включением (11) обеспечивает

$$\alpha_s \in \mathfrak{A}\, [A_{\kappa+1, l-1}]. \qquad (13)$$

Если $i+1 \leqslant s \leqslant j-1$, то из (10) следует

$$\Gamma_+ [A_{\kappa+1, i-1}\, A_{i+1, s-1}] = \Gamma_- [A_{\kappa+1, i-1}\, A_{i+1, s-1}].$$

Отсюда в силу (8)

$$\Gamma_+ [A_{i+1, s-1}] = \Gamma_- [A_{i+1, s-1}],$$

что в месте с (11) означает

$$\alpha_s \in \mathfrak{G}\, [A_{i+1, j-1}].$$

Если, наконец, $j+1 \leqslant s \leqslant l-1$, то из (10) получаем

$$\Gamma_+ [A_{\kappa+1, i-1}\, A_{i+1, j-1}\, A_{j+1, s-1}] = \Gamma_- [A_{\kappa+1, i-1}\, A_{i+1, j-1}\, A_{j+1, s-1}].$$

Поскольку $[i,j]$ — пара скобок, то отсюда снова получаем равенство (12), а вместе с ним и включение (13). Таким образом,

$$[[i,j]\, A_{\kappa+1, l-1}] \subseteq \mathfrak{G}\, [A_{\kappa+1, l-1}] \cup \mathfrak{G}\, [A_{i+1, j-1}].$$

Обратное включение доказывается аналогично.

Из равенства (9) вытекает

$$\sigma\, [[i,j]\, A_{\kappa+1, l-1}] = \min \{\sigma\, [A_{\kappa+1, l-1}]\ \sigma\, [A_{i+1, j-1}]\}.$$

С другой стороны, из определения главной связи предположения (*) относительно α_{j+1} и утверждения (γ) следует

$$\sigma\, [A_{\kappa+1, l-1}] = \min \mathfrak{G}\, [A_{\kappa+1, l-1}] \leqslant \alpha_{j+1} \leqslant \sigma\, [A_{i+1, j-1}].$$

Поэтому

$$\sigma\, [[i,j]\, A_{\kappa+1, l-1}] = \sigma\, [A_{\kappa+1, l-1}]. \qquad (14)$$

Пусть теперь предположение относительно α_{j+1} неверно, т. е.

$$\alpha_{j+1} \bar{\in} \mathfrak{A}\, [A_{\kappa+1, l-1}]. \qquad (15)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Согласно определению множества $\mathfrak{U}[A_{\kappa+1, l-1}]$ это означает, что либо

$$\alpha_{j+1} \overline{\in} \Sigma \setminus \{(,)\},$$

либо

$$\Gamma_+[A_{\kappa+1, j}] \neq \Gamma_-[A_{\kappa+1, j}]. \tag{16}$$

В первом варианте α_{j+1} может быть в силу утверждения (γ) только закрывающей скобкой. Из неравенств (ϑ) (ибо $\kappa+1<j+1\leqslant l-1$) имеем

$$\Gamma_+[A_{\kappa+1, j+1}] \geqslant \Gamma_-[A_{\kappa+1, j+1}].$$

откуда в силу $\Gamma_+[\alpha_{j+1}] < \Gamma_-[\alpha_{j+1}]$ (ибо α_{j+1} — закрывающая скобка) вытекает неравенство

$$\Gamma_+[A_{\kappa+1, j}] > \Gamma_-[A_{\kappa+1, j}]. \tag{17}$$

Во втором варианте, т. е. если имеет место неравенство (16), неравенство (17) получается непосредственно из утверждений (ϑ) при $s=j$. Таким образом, из (15) следует (17). Неравенство (17) влечет равенство

$$\mathfrak{U}[[i, j] A_{\kappa+1, l-1}] = \mathfrak{U}[A_{\kappa+1, l-1}]$$

точно такое, как равенство (8) влечет равенство (9). Поэтому и здесь справедливо (14).

Рассмотрим теперь утверждения

$$\mathfrak{R}[A_{1, \kappa-1} A_{\kappa+1, l-1} A_{l+1, n},\ \kappa+1,\ l-1], \tag{18}$$

$$\mathfrak{R}[A_{1, \kappa-1} [i, j] A_{\kappa+1, l-1} A_{l+1, n},\ p, l-1], \tag{19}$$

где $p=\kappa+1$, если $\kappa+1<i$ и $p=\kappa+2=i+1$, если $\kappa+1=i$. Согласно предположению $j<l-1$, поэтому в формуле

$$A_{1\kappa-1}[i, i] A_{\kappa+1, l-1} A_{l+1, n}$$

имеются члены α_p и α_{l-1}.

Утверждение (18) верно, ибо $[\kappa, l]$ — устранимая пара скобок в формуле A. В силу равенства (14) (верного при любом предположении относительно α_{j+1}) условия 3) и 4) в определении вхождения (п. 4) для утверждений (18) и (19) совпадают. Для первого они выполняются, следовательно, выполняются и для второго. Условия 1) и 2) в определении вхождения для утверждения (19) очевидны. Стало быть, высказывание (19) истинно. В силу (l) формула $A_{i+1, j+1}$ не пуста, а значит не пуста и формула $[i\ j] A_{\kappa+1, l-1}$. Так что вывысказывание (19) влечет устранимость пары $[\kappa, l]$ в формуле

$$[i, j] A = A_{1, \kappa-1} \alpha_\kappa [i, j] A_{\kappa+1, l-1} \alpha_l A_{l+1, n}.$$

Случай 7. $\kappa<i-1, j<l$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Покажем, что иных случаев нет. По лемме 1 может быть $i<j<\kappa<l$, либо $\kappa<l<i<j$, либо $i<\kappa<l<j$, либо $\kappa<i<j<l$. Первые две возможности рассмотрены соответственно в случаях 1 и 2. Третья возможность охватывается случаями 3, 4 и 5 (поскольку $i=\kappa-1$ и $j=l+1$ одновременно быть не может в силу не эквивалентности устранимых пар скобок $[i, j]$ и $[\kappa, l]$). Последняя возможность $\kappa<i<j<l$ рассмотрена в случаях 6 и 7 (за исключением того варианта, в котором $i=\kappa+1$ и $j=l-1$. Этот вариант, однако, также противоречит неэквивалентности пар $[i, j]$ и $[\kappa, l]$).

Итак, пара $[\kappa, l]$ устранима в $[i, j] A$. Аналогично пара $[i, j]$ устранима в $[\kappa, l] A$. Равенство

$$[i, j] [\kappa, l] A = [\kappa, l] [i, j] A$$

очевидна, и лемма 3 доказана.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

6. Нормальные формулы. Формула A называется нормальной, если пусто множество $\mathfrak{B}[A]$, т. е. если в ней нет устранимых пар скобок.

Пример. Формулы (3) и (4) не являются нормальными. Формулы $\Delta x : y : z \Delta$, $\Delta (x : y) : z \Delta$, $\Delta x (+) \Delta$ нормальны.

Теорема 1. Какова бы ни была формула A из класса $\mathfrak{I}[\Xi]$, последовательность формул $A_1, A_2, \ldots$, где $A_1 = A$ и A_{s+1} получается из A_s $(s = 1, 2, \ldots)$ устранением в ней какой-нибудь устранимой пары скобок, всегда конечна и ее последний член, не имеющий устранимых пар скобок, зависит только от выбора формулы A.

Этот последний член является, следовательно, нормальной формулой и называется нормальным видом формулы A.

Доказательство. Поскольку каждая формула состоит из конечного числа символов и содержит лишь конечное число пар скобок, первая часть теоремы тривиальна. Докажем вторую часть (единственность). Будем для краткости обозначать устранимые пары скобок буквами a и b с различными индексами. Допустим что нормальны формулы

$$A_1 = a_m a_{m-1} \cdots a_2 a_1 A, \quad A_2 = b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 A, \tag{20}$$

где

$$a_\kappa \in \mathfrak{B}[a_{\kappa-1} \cdots a_2 a_1 A], \quad b_\kappa \in \mathfrak{B}[b_{\kappa-1} \cdots b_2 b_1 A]$$

и формулы

$$a_\kappa a_{\kappa-1} \cdots a_2 a_1 A, \quad b_\kappa b_{\kappa-1} \cdots b_2 b_1 A$$

суть соответствующие упрощения формул

$$a_{\kappa-1} \cdots a_2 a_1 A, \quad b_{\kappa-1} \cdots b_2 b_1 A.$$

По лемме 3 найдется такое число i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что

$$a_1 \in \mathfrak{B}[b_{\kappa-1} \cdots b_1 A], \ a_1 \text{ не эквивалентно } b_\kappa, \ \kappa = 1, \cdots, i-1$$

$$a_1 \in \mathfrak{B}[b_{i-1} \cdots b_1 A], \ a_1 \sim b_i.$$

В самом деле, если это неверно, то по той же лемме получаем $a_1 \in \mathfrak{B}[b_n \cdots b_1 A]$, что противоречит нормальности формулы (20). Заменяя в выражении $b_n \cdots b_1 A$ устранимую пару b_i на эквивалентную ей пару a_1 и применяя конечное число раз последнее утверждение леммы 3, получаем $A_2 = b_n \cdots b_{i+1} b_{i-1} \cdots b_1 a_1 A$. Продолжая такой процесс, в конце концов получим $A_2 = b'_n \cdots b'_{m+1} a_m \cdots a_1 A$ или, точнее, $A_2 = a_m \cdots a_1 A = A_1$, поскольку $\mathfrak{B}[a_m \cdots a_1 A]$ пусто в силу нормальности формулы A. Теорема доказана.

Пример. Из формулы (3) и (4) получаются нормальные формулы

$$\Delta \cos \circ x \uparrow 2 + \sin \circ x \uparrow 2 = 1 \Delta, \quad \Delta x \perp (x \int f) = f \Delta.$$

В дальнейшем будем считать, что в определении закона соответствия между обычными формулами и формулами класса $\mathfrak{F}[\Xi^\circ]$ формулы (2) соответственно заменены их нормальными видами.

п. 7. Инверсии. Будем говорить, что вхождение $\mathfrak{R}[A, i, j]$ формулы B в формулу A образует в последней инверсию, если формула B представима в виде $B_1 \delta B_2$, где B_1 и B_2 суть формулы, из которых первая (строго) сильнее второй (в смысле отношения порядка $\leqslant$, введенного в п. 1 для класса $\mathfrak{F}[\Xi]$), и коммутативная ассоциативная связь δ (строго) слабее главных связей $\sigma[B_1]$ и $\sigma[B_2]$ формул B_1 и B_2. В этом случае формула A имеет вид $A' B_1 \delta B_2 A''$. Переход от формулы A к формуле $A' B_2 \delta B_1 A''$ называется устранением указанной инверсии в формуле A.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема 2. Какова бы ни была формула A, последовательность $\{A_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$, где $A = A_1$ и A_{s+1} при $s = 1, 2, \ldots$ получается из формулы A_s устранением в ней какой-нибудь инверсии, всегда конечна и ее последний член, не имеющий инверсий, однозначно определяется выбором формулы A.

Доказательство. Для пустой формулы теорема очевидна. Пусть она справедлива для всех формул, число членов которых не превышает некоторого n, и пусть формула A содержит $n+1$ член. Если $\sigma[A] = \infty$, то теорема очевидна. В самом деле, тогда в формуле A нет связей вообще и, следовательно, нет инверсий, либо в ней связи есть, и тогда она, в соответствии с определением главной связи имеет вид

$$A = \Delta\alpha_1 \cdots \alpha_\kappa (C) \beta_1 \cdots \beta_l \Delta, \quad \alpha_i, \beta_j \in \Omega \cup \Phi.$$

Здесь последовательность C является формулой, содержащей не более $n-1$ членов, и все возможные в формуле A инверсии являются одновременно инверсиями формулы C. Устранение инверсии в A есть одновременное устранение инверсии в C и наоборот. Для формулы C теорема справедлива. Значит, она справедлива и для формулы A.

Пусть теперь $\sigma[A] = \delta \neq \infty$. Тогда формула A в соответствии с определением главной связи имеет вид

$$A = A_1 \delta A_2 \delta \cdots \delta A_m,$$

где A_i, $i = 1, \ldots, m$ суть формулы, главные связи которых сильнее связи δ. Рассмотрим последовательность $\{C_s\}$ формул C_s такую, что $C_1 = A$ и при любом натуральном s формула C_{s+1} получается из формулы C_s устранением в ней некоторой инверсии i_s. Поскольку класс $\mathfrak{F}[\Xi]$ линейно упорядочен отношением $\leqslant$ и система формул $\{A_1, \ldots, A_m\}$ конечна, найдется такое s, что инверсия i_s, устраняемая при переходе от формулы C_s к формуле C_{s+1}, содержится в одной из формул $A_i (i = 1, \ldots, m)$. Таким образом, при переходе от C_s к C_{s+1} устраняется одна из инверсий в одной из формул A_i. Поскольку каждая формула A_i содержит не более n членов, согласно предположению, при некотором, достаточно большом j формула C_j примет вид

$$C_j = A^0_{i_1} \delta A^0_{i_2} \delta \ldots \delta A^0_{i_m},$$

где $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, 2, \ldots, m\}$ и при $r = 1, \ldots, m$ формула A^0_r является единственной формулой без инверсий, получающейся по предположению из формулы A_r последовательным устранением в ней конечного числа инверсий. Но из формулы C_j конечным числом устранений инверсий вида $A^0_{i_q} \delta A^0_{i_p}$, где $A^0_{i_p} \leqslant A^0_{i_q}$, получается единственная формула, свободная от инверсий, и теорема доказана.

Если в исходной формуле A нет устранимых пар скобок, то после устранения в A какой-нибудь инверсии результат также не содержит ни одной устранимой пары скобок.

п. 8. Нормализованный вид формулы.

Формула, получающаяся после устранения в нормальном виде формулы A всех инверсий (такая формула существует и единственна в силу последней теоремы) называется нормализованным видом формулы A.

Нормализованная формула нормальна.

Примеры. Формулы класса $\mathfrak{F}[\Xi^\circ]$

$$\Delta(b \cdot 30 + - a \cdot 20) \cdot (a \cdot 15 + - 3 \cdot a) \Delta, \quad \Delta(\cos \circ (b + a)) \Delta$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

после нормализации (приведения к нормализованному виду) имеют вид

$$\Delta(-20\cdot a+30\cdot b)\cdot(-3\cdot a+15\cdot a)\Delta,\quad \Delta\cos\circ(a+b)\Delta.$$

Пустая формула и формулы $\Delta\alpha\Delta$, $\alpha\in\Omega\cup\Phi$ нормализованы. Формулы $\Delta\alpha=\beta\Delta$ и $\Delta\beta=\alpha\Delta$ из $\mathfrak{F}[\Xi^\circ]$ обе нормализованы, ибо связь $=$ коммутативна, но не ассоциативна.

II.

п. 9. Равенства. Допустим, что множество Σ содержит знак равенства $=$. Формула вида

$$A=\Delta\alpha_1\dots\alpha_n=\beta_1\dots\beta_m\Delta$$

называется равенством, если подпоследовательности

$$A^-=\Delta\alpha_1\dots\alpha_n\Delta,\quad A^+=\Delta\beta_1\dots\beta_m\Delta$$

суть формулы, главные связи которых удовлетворяют условиям $\sigma[A^-]>=$, $\sigma[A^+]\geqslant=$. A^- и A^+ называются, соответственно, левой и правой частями равенства A.

Примеры. В классе $\mathfrak{F}[\Xi^\circ]$ формулы

$$\Delta\cos\circ x\uparrow 2+\sin\circ x\uparrow 2=1\Delta,\quad \Delta\sin\circ(2\cdot x)=\cos\circ x\uparrow 2+-\sin\circ x\uparrow 2\Delta$$

являются равенствами. Не являются равенствами такие формулы, как

$$\Delta\cos\circ x\uparrow 2\Delta,\ \Delta(a=b=c)\Delta,\ \Delta a\downarrow(\kappa=l)\Delta\ \text{и т. д.}$$

В каждом равенстве левая и правая части единственны.

п. 10. Простые подстановки по системе равенств. Пусть $A_1^-,\dots,A_s^-$ и $A_1^+,\dots,A_s^+$ суть соответственно (непустые) левые и правые части равенств $A_1,\dots,A_s$. Произвольная формула $B=\Delta\beta_1\dots\beta_n\Delta$ единственным образом представима в виде

$$B=\Delta\beta_1\dots\beta_{\kappa_1}A^-_{r_1}\beta_{i_1}\dots\beta_{\kappa_m}A^-_{r_m}\beta_{im}\dots\beta_n\Delta,$$

где $\kappa_p, r_p, i_p\ (p=1,\dots,m)$ определяются тем, что вхождения $\boldsymbol{R}[B,\kappa_p+1, i_p-1]$ формулы $A^-_{r_p}$ в формулу B истинно и является первым элементом множества $\mathfrak{B}_p$ всех истинных вхождений $\boldsymbol{R}[B,i,j]$ формул A_l^-, $l=1,\dots,s$ в B, удовлетворяющих условию $i>i_{p-1}$ или, в случае $p=1$, условию $i\geqslant 1$, и m таково, что множество $\mathfrak{B}_{m+1}$ пусто.

Нормализованный вид формулы

$$\Delta\beta_1\dots\beta_{\kappa_1}(A^+_{r_1})\beta_{i_1}\dots\beta_{\kappa_m}(A^+_{r_m})\beta_{im}\dots\beta_n\Delta$$

называется простой подстановкой в формулу B по системе равенств $A_1,\dots,A_s$ и обозначается через $P[B;A_1,\dots,A_s]$. Для однозначности простой подстановки $P[B;A_1,\dots,A_s]$ необходимо, чтобы левые части $A_1^-,\dots,A_s^-$ равенств $A_1,\dots,A_s$ были попарно различными.

Примеры. Простой подстановкой в формулу

$$\Delta a+a+a+a+a+b+b+a+a\cdot c\Delta$$

по системе равенств

$$\Delta a+a=2\cdot a\Delta,\ \Delta b+b=2\cdot b\Delta,\ \Delta c=a+b\Delta$$

является формула

$$\Delta 2\cdot a+2\cdot a+2\cdot b+a+a\cdot(a+b)\Delta.$$

Простой подстановкой в формулу

$$\Delta\cos\circ x\uparrow 2+-\sin\circ x\uparrow 2\Delta$$

по одному равенству

$$\Delta\cos\circ x\uparrow 2+-\sin\circ x\uparrow 2=1\Delta$$

является формула $\Delta 1\Delta$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

п. 11. Следствия. Следствием формулы называется любая простая подстановка в нее по системе равенств вида

$$\Delta\xi_1 = A_1\Delta, \ldots, \Delta\xi_s = A_s\Delta, \tag{21}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_s$ суть попарно различные переменные символы (т. е. элементы множества Φ).

Следствием формулы

$$\Delta a + b)\cdot(a + -b) = a\uparrow 2 + -b\uparrow 2\Delta$$

является, например, формула

$$\Delta(\cos\circ x + \sin\circ x)\cdot(-\sin\circ x + \cos\circ x) = -\sin\circ x\uparrow 2 + \cos\circ x\uparrow 2\Delta.$$

п. 12. Обобщенные вхождения. Пусть в формулу B из всех формул вида $\Delta\xi\Delta$, $\xi\in\Phi$, входят формулы $\Delta\xi_1\Delta, \ldots, \Delta\xi_s\Delta$, причем для любых i и j, $1\leqslant i<j\leqslant s$, первое вхождение формулы $\Delta\xi_i\Delta$ строго предшествует первому вхождению формулы $\Delta\xi_j\Delta$. Будем говорить, что имеет место обобщенное вхождение $\boldsymbol{R}[A, i, j; B; A_1, \ldots, A_s]$ формулы B в формулу A, если $\boldsymbol{R}[A, i, j]$ есть истинное вхождение в формулу A следствия формулы B, полученного с помощью простой подстановки в нее по системе равенств (21).

Истинные обобщенные вхождения данной формулы B в данную формулу A можно вполне упорядочить отношением $\leqslant$,

$$\boldsymbol{R}[A, i, j; B; A_1, \ldots, A_s] \leqslant \boldsymbol{R}[A, \kappa, l; B; A'_1, \ldots, A'_s],$$

означающим, по определению, справедливость одного из утверждений

а) $i<\kappa$;

б) $i=\kappa$, $A_1 = A'_1, \ldots, A_{j-1} = A'_{j-1}$, $A_j < A'_j$

при некотором $j = 1, 2, \ldots, s-1, s$;

в) $i=\kappa$, $A_1 = A'_1, \ldots, A_s = A'_s$.

Примеры. Рассмотрим формулы

$$A = \Delta\ln\circ x \perp (\cos\circ\ln\circ x + \sin\circ\ln\circ x + \operatorname{tg}\circ x)\Delta, \tag{22}$$
$$B = \Delta x \perp (y+z)\Delta.$$

Для этих формул справедливы следующие утверждения:

$$\boldsymbol{R}[A, 1, 21; B; \Delta\ln\circ x\Delta, \Delta\cos\circ\ln\circ x\Delta, \Delta\sin\circ\ln\circ x + \operatorname{tg}\circ x\Delta],$$

$$\boldsymbol{R}[A, 1, 21; B; \Delta\ln\circ x\Delta, \Delta\cos\circ\ln\circ x + \sin\circ\ln\circ x\Delta, \Delta\operatorname{tg}\circ x\Delta];$$

при этом первое предшествует второму.

п. 13. Обобщенные подстановки. Пусть формула A является равенством, в котором A^- и A^+ суть соответственно левая и правая части. Пусть из всех формул вида $\Delta\xi\Delta$, $\xi\in\Phi$, в A^- входят лишь формулы $\Delta\xi_i\Delta$, $i=1, \ldots, s$ причем первое вхождение формулы $\Delta\xi_i\Delta$ строго предшествует первому вхождению $\Delta\xi_j\Delta$, если $i<j$. Произвольная формула $B = \Delta\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\Delta$ единственным образом представима в виде

$$\Delta\beta_1\ldots\beta_{\kappa_1} P[A^-; \Delta\xi_1 = A_1^1\Delta, \ldots, \Delta\xi_s = A_s^1\Delta]\,\beta_{i_1}\ldots$$
$$\ldots\beta_{\kappa_m} P[A^-; \Delta\xi_1 = A_1^m\Delta, \ldots, \Delta\xi_s = A_s^m\Delta]\,\beta_{i_m}\ldots\beta_n\Delta,$$

где формулы A_j^p и числа κ_p, i_p $(p=1, 2, \ldots, m)$ определяются тем, что обобщенное вхождение

$$\boldsymbol{R}[B, \kappa_p+1, i_p-1; A^-; A_1^p, \ldots, A_s^p]$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

формулы A^- в формулу B истинно и является первым элементом (в смысле отношения $\leqslant$, определенного в п. 12) множества $\mathfrak{B}'_p$ всех истинных обобщенных вхождений

$$\boldsymbol{R}[B, i, j;\ A^-;\ A_1, \ldots, A_s] \tag{23}$$

формулы A^- в формулу B, удовлетворяющих условию $i > i_{p-1}$ или, если $p = 1$, условию $i \geqslant 1$ и m таково, что множество $\mathfrak{B}^0_{m+1}$ пусто. Обобщенной подстановкой в формулу B по равенству $A = \Delta A^- = A^+\Delta$ называется нормализованный вид формулы

$$\Delta\beta_1 \ldots \beta_{\kappa_1}(P[A^+;\ \Delta\xi_1 = A_1^1\Delta, \ldots, \Delta\xi_s = A_s^1\Delta])\beta_{i_1} \ldots$$

$$\ldots \beta_{\kappa m}(P[A^+;\ \Delta\xi_1 = A_1^m\Delta, \ldots, \Delta\xi_s = A_s^m\Delta])\beta_{i_m} \ldots \beta_n\Delta.$$

Обобщенная подстановка в формулу B по равенству A обозначается через $P_0[B; A]$.

Пример. Обобщенной подстановкой в формулу (22) по равенству

$$\Delta x \perp (y + z) = x \perp y + x \perp z\Delta$$

является формула

$$\Delta \ln \circ x \perp \cos \circ \ln \circ x + \ln \circ x \perp (\sin \circ \ln \circ x + \operatorname{tg} \circ x)\Delta.$$

Обобщенная подстановка в формулу B по формуле A при условии $\sigma[\xi_1, \ldots, \xi_s]$ определяется точно так же, как обобщенная подстановка $P_0[B; A]$, но от элементов (23) множества $\mathfrak{B}^0_p$ дополнительно требуется, чтобы были истинными утверждения $\sigma[A_1, \ldots, A_s]$.

Пример. Обобщенной подстановкой в формулу

$$\Delta x \perp \cos \circ \alpha + x \perp \cos \circ x + y \perp x\Delta$$

по равенству $\Delta x \perp y = 0\Delta$ при условии, что формула $\Delta x\Delta$ не входит в формулу $\Delta y\Delta$, является формула

$$\Delta 0 + 0 + x \perp \cos \circ x\Delta.$$

Большинство преобразований аналитических выражений по известным правилам можно формализовать при помощи операции обобщенной подстановки (при условии) в одну формулу по другой, выражающей в общем виде данное правило. Приведем в качестве примера алгоритм дифференцирования элементарных функций. В этом алгоритме используются следующие формулы, представляющие собой известные правила дифференцирования:

1. $B_1 = \Delta x \perp (f + g) = x \perp f + x \perp g\Delta$,
2. $B_2 = \Delta x \perp (f \cdot g) = f \cdot x \perp g + g \cdot x \perp f\Delta$,
3. $B_3 = \Delta x \perp (f : g) = (-f \cdot x \perp g + g \cdot x \perp f) : g \uparrow 2\Delta$,
4. $B_4 = \Delta x \perp c = 0\Delta$,
5. $B_5 = \Delta x \perp x = 1\Delta$,
6. $B_6 = \Delta x \perp (f \uparrow g) = g \cdot f \uparrow (g + -1) \cdot x \perp f + f \uparrow g \cdot \ln \circ f \cdot x \perp g\Delta$,
7. $B_7 = \Delta x \perp f \circ d = x \perp d \cdot d \perp f \circ d\Delta$,
8. $B_8 = \Delta x \perp \ln \circ x = 1 : x\Delta$,
9. $B_9 = \Delta x \perp \sin \circ x = \cos \circ x\Delta$,
10. $B_{10} = \Delta x \perp \cos \circ x = -\sin \circ x\Delta$,
11. $B_{11} = \Delta x \perp \operatorname{tg} \circ x = 1 : \cos \circ x \uparrow 2\Delta$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

12. $B_{12} = \Delta x \perp \operatorname{ctg} \circ x = -1 : \sin \circ x \uparrow 2\Delta$,

13. $B_{13} = \Delta x \perp \arcsin \circ x = (1 + - x \uparrow 2) \uparrow (-1 : 2)\,\Delta$,

14. $B_{14} = \Delta x \perp \arccos \circ x = -(1 + - x \uparrow 2) \uparrow (-1 : 2)\,\Delta$,

15. $B_{15} = \Delta x \perp \operatorname{arctg} \circ x = 1 : (1 + x \uparrow 2)\,\Delta$,

16. $B_{16} = \Delta x \perp \operatorname{arc\,ctg} \circ x = -1 : (1 + x \uparrow 2)\,\Delta$.

Алгоритм дифференцирования элементарной функции $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(x)$ имеет следующий вид:

№ 1. Образовать формулу $A = \Delta x \perp (\mathfrak{F})\,\Delta$ и нормализовать ее.

№ 2. Положить $i = 1$.

№ 3. Найти $P_0[A, B_i]$ при условии, что $\Delta x \Delta$ в $\Delta c \Delta$ не входит и $\Delta x \Delta$ не совпадает с $\Delta d \Delta$.

№ 4. Если $A = P_0[A, B_i]$, то перейти к № 6, иначе к № 5.

№ 5. Положить $A = P_0[A, B_i]$ и перейти к № 2.

№ 6. Если $i = 16$, то перейти к № 8, иначе к № 7.

№ 7. Положить $i = i + 1$ (увеличить i на единицу) и перейти к № 3.

№ 8. Оформить результат.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ε-ЭНТРОПИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ МАЛЫХ ε

Ю. Н. ЛИНЬКОВ

Будем рассматривать n-мерные случайные величины $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, принимающие значения в n-мерном эвклидовом пространстве X. С некоторыми ограничениями на плотность распределения вероятностей случайной величины ξ в работах [1] и [2] получены асимптотические выражения ε-энтропии $H_\varepsilon(\xi)$ при $\varepsilon \to 0$. Целью данной заметки является получение аналогичных выражений ε-энтропии $H_\varepsilon(\xi)$ для случайных величин $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, удовлетворяющих условию $D\xi_\kappa < \infty$, $\kappa = \overline{1, n}$.

В этой заметке мы будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в [2].

Теорема. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — n-мерная случайная величина со значениями в n-мерном эвклидовом пространстве X, распределение вероятностей которого задается плотностью $p_\xi(x)$, и $|h(\xi)| < \infty$ и $D\xi_\kappa < \infty$, $\kappa = \overline{1, n}$. Пусть функция потерь $\rho(x, y)$ является неотрицательной измеримой функцией, определенной на пространстве $X \times X$, и удовлетворяет условиям:

1) $\rho(x, y) = \rho(x - y)$,

2) $\rho(x) = 0$ лишь только при $|x| = 0$ и существует такое число $\nu > 0$, что

$$\overline{\lim_{|x| \to 0}} |x|^{-\nu} \rho(x) < \infty,$$

3) $\rho(x) \geqslant \psi(|x|)$, где $\psi(\cdot)$ — такая функция одного переменного, что $\psi(u) \not\equiv 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(u_1) \leqslant \psi(u_2)$, если $0 \leqslant u_1 < u_2$,

4) существуют интегралы

$$\int_X \rho^2(x)\, e^{-\psi(|x|)} dx, \quad \int_X |x|^2 e^{-\rho(x)} dx.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$H_\varepsilon(\xi) = \log [a(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon b(\varepsilon)}] + h(\xi) + o(1),$$

где $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ суть решение системы уравнений

$$a \int_X e^{-b\rho(x)} dx = 1,$$

$$a \int_X \rho(x)\, e^{-b\rho(x)} dx = \varepsilon.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

всегда имеющей единственное решение, причем функции $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ являются монотонными непрерывными и дифференцируемыми функциями.

Для доказательства этой теоремы необходимо доказать следующую лемму (ср. с [2], лемма 3).

Лемма. Пусть $(\xi, \bar{\eta})$ — пара n-мерных случайных величин со значениями в пространстве $X \times X$, удовлетворяющая условию

$$M\rho(\xi, \bar{\eta}) = \varepsilon.$$

Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — фиксированная n-мерная случайная величина, удовлетворяющая условиям теоремы, а $\bar{\eta}$ — n-мерная случайная величина, задаваемая плотностью условного распределения

$$p_{\bar{\eta}/\xi}(y/x) = a(\varepsilon)\, e^{-b(\varepsilon)\rho(x, y)},$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h(\bar{\eta}) = h(\xi).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что $|h(\bar{\eta}) - h(\xi)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого разность $h(\bar{\eta}) - h(\xi)$ представим в виде

$$h(\bar{\eta}) - h(\xi) = \int_{u_r} [p_\xi(x) \log p_\xi(x) - p_{\bar{\eta}}(x) \log p_{\bar{\eta}}(x)]\, dx +$$

$$+ \int_{\bar{u}_r} [p_\xi(x) \log p_\xi(x) - p_{\bar{\eta}}(x) \log p_{\bar{\eta}}(x)]\, dx = I' + I'',$$

где r — произвольное положительное число. I' — интеграл по сфере U_r, а I'' — интеграл по дополнительной области. В работе [2] (см. лемму 3) доказано, что $|I'| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого фиксированного r. Интеграл I'' можно оценить так:

$$|I''| \leqslant \left| \int_{\bar{U}_r} p_\xi(x) \log p_\xi(x)\, dx \right| + \left| \int_{\bar{U}_r} p_{\bar{\eta}}(x) \log p_{\bar{\eta}}(x)\, dx \right|,$$

где каждое слагаемое в силу конечности дифференциальной энтропии $h(\xi)$ и $h(\bar{\eta})$ можно сделать сколь угодно малым равномерно по $\varepsilon \in [0, 1]$, выбрав r достаточно большим. Конечность дифференциальной энтропии $h(\bar{\eta})$ следует из таких оценок:

$$h\,\xi) \leqslant h(\bar{\eta}) \log \sqrt{(2\pi e)|B|},$$

где $|B|$ — определитель корреляционной матрицы вектора $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$. Здесь определитель $|B|$ конечен в силу условия 4 теоремы. Справедливость этих оценок следует из известных свойств дифференциальной энтропии (см., например, [3], стр. 296—300). Этим самым лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы в работе [2], и поэтому здесь приводиться не будет.

Следствия 1 и 2, указанные в работе [2], здесь также справедливы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров. Теория передачи информации. Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства, 1956. Изд-во АН СССР, 1957, 66—99.

2. Ю. Н. Линьков. Вычисление ε-энтропии случайных величин при малых ε. Проблемы передачи информации, том 1, № 2, 1965, 18—23.

3. К. Шеннон. Математическая теория связи. Сб. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963, 243—332.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ГРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 198 Серия механико-математическая

О ФОРМУЛАХ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ n КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Е. Н. АРАВИЙСКАЯ

Пусть Z^n — комплексное аналитическое однородное связное многообразие n комплексных измерений со счетной базой и полным атласом карт $\{U_i, \psi_i\}$. Известно [1], что по заданному покрытию $\{U_i\}$ многообразия Z^n можно построить открытое покрытие $\{U_i'\}$ этого многообразия, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\{U_i'\}$ подчинено покрытию $\{U_i\}$, т. е. замыкание $\bar{U}_i'$ заключено в одном из U_κ, 2) покрытие $\{U_i'\}$ локально конечно, т. е. любое компактное множество на Z^n пересекается только с конечным числом множеств U_κ', 3) замыкание $\bar{U}_i'$ любого U_i заключено в области определения одной системы локальных координат. Покажем, что можно построить и такое покрытие $\{G_i\}$, чтобы оно, кроме условий 1), 2), 3), удовлетворяло бы и четвертому условию. А именно: каждое G_i было бы гомеоморфно аналитическому полиэдру в пространстве C^n (пространство n комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$). Так как Z^n имеет счетную базу открытых множеств, то из покрытия $\{U_i\}$ можно выделить счетное покрытие. Будем считать само $\{U_i\}$ счетным покрытием. Для любой точки p на Z^n можно взять такое открытое множество $U'эр$, принадлежащее области одной системы локальных координат, что U' принадлежит одному из U_i и гомеоморфно n-мерному параллелепипеду R в C^n, $R=\{a_\kappa < x_\kappa < b_\kappa,\ c_\kappa < y_\kappa < d_\kappa,\ z_\kappa = x_\kappa + iy_\kappa,\ \kappa = 1, 2, \ldots n\}$, R — частный случай аналитического полиэдра. Построенное таким образом покрытие удовлетворяет условиям 1) и 3). Если оно не удовлетворяет условию 2), то, используя построение де Рама [1] и несколько дополняя его, получим новое покрытие, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3). Сначала строим последовательность компактных множеств $K_1, K_2, \ldots$. Полагаем $K_1=U_1'$. Берем наименьшее положительное число $\kappa_2 > 1$ так, чтобы $\bigcup_{\kappa=1}^{\kappa_2} U_\kappa' \supset K_1$, $K_2=\bigcup_{\kappa=1}^{\kappa_2} \bar{U}_\kappa'$. Затем берем наименьшее целое положительное число $\kappa_3 > \kappa_2$ так, чтобы $\bigcup_{\kappa=1}^{\kappa_3} U_\kappa' \supset K_2$, $K_3=\bigcup_{\kappa=1}^{\kappa_3} \bar{U}_\kappa'$ и т. д. Очевидно, K_{m-1} лежит внутри K_m, и любое компактное множество на Z^n заключено в K_m, если m достаточно велико. Строим теперь множества G_i', $i=1,2,\ldots$ следующим образом: $G_i'=U_i'$, если $i \leqslant \kappa_2$, $G_i'=U_i' \cap \complement K_{m-1}$, если $\kappa_m < i \leqslant \kappa_{m+1}$ $m > 1$, $\complement K_{m-1}$ есть дополнение множества K_{m-1}. Мно-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

жества G_i', $i=1, 2\ldots$ образуют покрытие многообразия Z^n, так как $\bigcup_{\kappa=1}^{\kappa_m} G_i' = \bigcup_{\kappa=1}^{\kappa_m} U_\kappa'$ при всяком m. Покрытие удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Строим, наконец, покрытие $\{G_i\}$, удовлетворяющее всем четырем условиям. Обозначим через ρ_m положительное расстояние между двумя компактами ∂K_{m-1} и ∂K_m, $m=2, 3, \ldots$, не имеющими общих точек. ∂K_m — граница множества K_m. Параллелепипед R_i (образ G_i' в C^1) $\kappa_m < i \leqslant \kappa_{m+1}$, гиперплоскостями, параллельными координатным, разобьем на закрытые параллелепипеды диаметра меньше ρ_m. Пусть $\sigma_{1i}^m, \ldots \sigma_{\nu i}^m$ — те из частичных параллелепипедов, которые имеют непустые пересечения с замыканием $\overline{G_i' \frown K_m}$. Каждому

$$\sigma_{\kappa i}^m = \{a_{\kappa i s}^m \leqslant x_s \leqslant b_{\kappa i s}^m,\ c_{\kappa i s}^m \leqslant y_s \leqslant d_{\kappa i s}^m,\ s=1, 2, \ldots n\}$$

ставим в соответствие открытый параллелепипед

$$\delta_{\kappa i}^m = \{a_{\kappa i s}^m - \varepsilon_m < x_s < b_{\kappa i s}^m + \varepsilon_m,\ c_{\kappa i s}^m - \varepsilon_m < y_s < d_{\kappa i s}^m + \varepsilon_m,\ s=1, 2, \ldots n,$$
$$0 < \varepsilon_m < \rho_m\}.$$

Обозначим через $C_{\kappa i}$ пересечение прообраза $\delta_{\kappa i}^m$ с G_i', $\kappa_m \leqslant i < \kappa_{m+1}$. Полагаем $G_i = G_i'$, $i \leqslant \kappa_2$, G_{κ_2+s} равно прообразу δ_{si}^m, $s=1, 2, \ldots \nu$, $\kappa_m \leqslant i < \kappa_{m+1}$. Полученное счетное покрытие $\{G_i\}$ удовлетворяет всем четырем условиям.

Существование счетного открытого покрытия $\{G_i\}$ многообразия Z^n обеспечивает существование локально конечного разбиения единицы, подчиненного покрытию $\{G_i\}$ [1].

Пусть это разбиение единицы составляет семейство функций φ_κ, $\kappa=1, 2, \ldots$. В силу вышесказанного интеграл от замкнутой внешней дифференциальной формы α по многообразию Z^n определится равенством

$$\int_{Z^n} \alpha = \sum_\kappa \int_{Z^n} \varphi_\kappa \alpha. \qquad (1)$$

Каждое слагаемое этой суммы сводится к интегралу по одному из множеств $\delta_{i\kappa}^m$. Изменив нумерацию полиэдров $\delta_{i\kappa}^m$, будем в дальнейшем их обозначать через Δ_s, $s=1, 2, \ldots$. Каждый полиэдр Δ_s задается своими определяющими функциями, т. е.

$$\overline{\Delta}_s = \{|f_\kappa^{(s)}| \leqslant |,\ \kappa=1, 2, \ldots N_s\}. \qquad (2)$$

Функции $f_{\kappa_s}^{(s)}$ голоморфны в $\overline{\Delta}_s$. Возьмем один из таких полиэдров $\overline{\Delta} = \{|f_\kappa| \leqslant 1,\ \kappa=1, 2, \ldots N\}$, f_κ голоморфны в $\overline{\Delta}$.

Пусть X^n — некоторое комплексное n-мерное аналитическое компактное подмногообразие многообразия Z^n. Пусть S_i, $i=1, 2, \ldots \nu$, заданные на Z^n — комплексных аналитических подмногообразий коразмерности 1. Будем называть множества S_i поверхностями. Пусть поверхности S_i в окрестности каждой своей точки z_0 задаются в локальных координатах неприводимыми уравнениями $S_i = \{z \in Z^n,\ \varphi_i(z/z_0) = 0\}$ $z = (z_1, \ldots z_n)$, где $\varphi(z/z_0)$ — голоморфная функция в одном из полиэдров Δ. Предположим, что поверхности S_i не имеют особых точек, находятся в общем положении [2] и в пересечении с границей компакта X^n образуют конечное множество непересекающихся между собой гладких $2n-3$ мерных циклов $\Gamma_\kappa^{2n-3} = \{S_\kappa \bigcap \partial X^n\}$, ∂X^n — граница X^n, $\kappa=1, 2, \ldots N$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Для каждого из циклов Γ_κ^{2n-3} построим соответствующее ему многообразие $\delta\Gamma_\kappa^{2n-3}$, где δ — оператор Лерэ [2]. Построение многообразия $\delta\Gamma_\kappa^{2n-3}$ возможно, так как Γ_κ^{2n-3} состоит из обыкновенных точек и топологические размерности ∂X^n и Γ_κ^{2n-3} отличаются на две единицы. $\delta\Gamma_\kappa^{2n-3} \subset X^n/S$, где $S=\bigcup_{i=1}^{\nu} S_i$ является циклом топологической размерности $2n-2$, ориентацию которого можно поставить в соответствие с ориентацией цикла Γ_κ^{2n-3}.

Пусть α — замкнутая дифференциальная форма, голоморфная на X^n/S, имеющая $S_1, S_2, \ldots S_\nu$ своими полярными многообразиями соответственно порядков $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ [3]. Будем рассматривать интегралы от α по циклам вида $\delta\Gamma_\kappa^{2n-3}$. В силу теоремы де Рама достаточно рассмотреть интегралы, взятые по циклам специального вида, лежащим на границах аналитических полиэдров Δ_i, $i=1, 2, \ldots$. Для простоты записи ограничимся в дальнейшем случаем $n=2$. Пусть аналитический полиэдр $\Delta=\{|f_\kappa(z_1, z_2)|\leqslant 1, \kappa=1, 2, \ldots N\}$ принадлежит области одной системы локальных координат z_1, z_2. $\gamma=S\bigcap\partial\Delta$ состоит из конечного множества непересекающихся одномерных циклов $\gamma=\bigcup_{\kappa=1}^{\nu}\gamma_\kappa$; $\gamma_\kappa=\bigcup_{i=1}^{N}\gamma_i^\kappa$; $\gamma_i^\kappa=\{|f_i(z_1, z_2)|=1, \varphi_\kappa(z_1, z_2)=0\}$. Каждому циклу γ_κ ставим в соответствие цикл $\delta\gamma_\kappa=\delta\bigcup_{i=1}^{N}\gamma_i^\kappa$. δ — оператор Лерэ.

Подчиним множество $S=\bigcup_{i=1}^{\nu}S_i$ полярных поверхностей формы α следующим условиям: а) каждая из поверхностей S_i пересекает границу Δ только по одной грани и пересечение всех S_i с границей Δ представляет собой конечное множество непересекающихся простых гладких одномерных циклов; б) поверхности из S не имеют особых точек, находятся в общем положении, и любая из поверхностей S может пересекаться с другой поверхностью из S только во внутренних точках полиэдра Δ; в) множество точек внутри Δ, принадлежащих более, чем одной поверхности из S, конечно. Пусть это будут точки

$$O_1, O_2, \ldots O_{\varsigma^n}; \tag{3}$$

г) $\dfrac{\partial(f_\kappa, \varphi_i)}{\partial(z_1, z_2)}\neq 0$ в любой из точек (3) для любых $\kappa=1, 2, \ldots N$, $i=1, 2, \ldots \nu$.

Построим около каждой точки O_i гипершар Ω_i^ε с центром O_i достаточно малого радиуса, чтобы все Ω_i^ε, $i=1, \ldots \varsigma^n$ находились внутри Δ и не пересекались. Обозначим через a_κ^i значение функции $f_\kappa(z_1, z_2)$ в точке O_i. При наших условиях многообразия $\gamma_\kappa^i=\{|f_\kappa|=1, |\varphi_i|=\varepsilon\}$ будут двумерными циклами, лежащими на границе Δ. Рассмотрим одномерный цикл $\gamma_\kappa^i=\{|f_\kappa|=1, \varphi_i=0\}$.

Множество $F_\kappa^i=\{|f_\kappa|\leqslant 1, \varphi_i=0\}\bigcap\bar{\Delta}$ является куском поверхности S_i, натянутым на γ_κ^i. Очевидно, F_κ^i и F_κ^s могут иметь общими только точки (3). Рассмотрим семейство одномерных контуров $\gamma_{\kappa t}^i=\{|f_\kappa(z_1, z_2)-ta_\kappa^s|=1-t(1-\varepsilon_1), 0\leqslant t\leqslant 1, \varphi_s(z_1, z_2)=0\}\bigcap\bar{\Delta}$. При достаточно малом $\varepsilon_1>0$ цикл $\gamma_{\kappa t}^i\subset F_\kappa^i$, $\gamma_{\kappa 0}^i=\gamma_\kappa^i$; $\gamma_{\kappa 1}^i=\{|f_\kappa(z_1, z_2)-a_\kappa^s|=\varepsilon_1, \varphi_i(z_1, z_2)=0\}$. Если s_i проходит через O_s, то, выбрав ε_1 достаточно малым, можно цикл γ_κ^i поместить в произвольно малую окрестность точки O_s. Если на F_κ^i имелась единственная точка из (3),

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

то цикл $\gamma^i_{\kappa 1}$ будет гомологичен циклу γ^i_κ в $\bar{\Delta}/S$. А так как индекс зацепления $All(\gamma^i_\kappa,\ \delta\gamma^i_\kappa) = 1$ [4], то двумерный цикл $\delta\gamma^i_\kappa$ будет гомологичен циклу $\delta\gamma^i_{\kappa 1} = \{|f_\kappa(z_1, z_2) - a^s_\kappa| = \varepsilon_1,\ |\varphi_i(z_1, z_2)| = \varepsilon\}$, и, в силу условия г), отображение

$$\begin{cases} f_\kappa(z_1, z_2) - a^s_\kappa = \tilde{z}_1, \\ \varphi_i(z_1, z_2) = \tilde{z}_2 \end{cases} \tag{4}$$

будет биголоморфным в достаточно малом гипершаре Ω^i_s. Отображение (4) переведет цикл $\delta\gamma^i_{\kappa 1}$ в остов бицилиндра $\{|\tilde{z}_1| = \varepsilon,\ |\tilde{z}_2| = \varepsilon\}$. Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть S_1 является единственной полярной поверхностью 1-го порядка для замкнутой дифференциальной формы $\alpha = f(z_1, z_2)\,dz_1 \wedge dz_2$, голоморфной в $\bar{\Delta}/S_1$. Пусть S_1 пересекает только κ-ую грань полиэдра Δ. Интегральное представление функции $f(z_1, z_2)$ в полиэдре $\Delta_\varepsilon = \{|f_\kappa(z_1, z_2)| \leqslant 1,\ |\varphi(z_1, z_2)| \geqslant \varepsilon\}$ дает возможность форму α представить следующим образом [5]:

$$\alpha = f(z_1, z_2)\,dz_1 \wedge dz_2 = \Phi(z_1, z_2)\,dz_1 \wedge dz_2 + \frac{b_0(z_1, z_2)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1}(z_1, z_2)}\,\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge dz_2,$$

где $\Phi(z_1, z_2)$, $b_0(z, z_2)$ голоморфны в Δ. Тогда

$$\int\limits_{\delta\gamma^i_\kappa} \alpha = 2\pi i \int\limits_{\gamma^i_\kappa} \left[\frac{b_0(z_1, z_2)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1}(z_1, z_2)}\right]_{\varphi=0} dz_2 = 2\pi i \int\limits_{\gamma^i_\kappa} \text{rés}\,[\alpha];\ \text{rés}\,[\alpha] =$$

$$= \left[\frac{b_0(z_1, z_2)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1}(z_1, z_2)}\right]_{\varphi=0} dz_2$$

— форма-вычет Лерэ [2].

Пусть форма α имеет в Δ две полярные поверхности S_1 и S_2 1-го порядка, пересекающиеся в единственной точке внутри Δ. Тогда в локальных координатах z_1, z_2 форма $\alpha = \dfrac{\psi(z_1, z_2)\,dz_1 \wedge dz_2}{\varphi_1(z_1, z_2)\,\varphi_2(z_1, z_2)}$, где $\psi(z_1, z_2)$ голоморфна в Δ. В этом случае цикл $\delta\gamma$ будет состоять из двух непересекающихся циклов

$$\delta\gamma_1 = \{|f_\kappa(z_1, z_2)| = 1,\ |\varphi_1(z_1, z_2)| = 1\} \text{ и } \delta\gamma_2 = \{|f_\kappa(z_1, z_2)| = 1,$$

$$|\varphi_2(z_1, z_2)| = 1\},$$

и [6]

$$\int\limits_{\delta\gamma} \alpha = 2\pi i \int\limits_{\gamma_1} \left[\frac{\psi(z_1, z_2)}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}\varphi_2}\right]_{\varphi_1=0} dz_2 + 2\pi i \int\limits_{\gamma_2} \left[\frac{\psi(z_1, z_2)}{\varphi_1 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z_1}}\right]_{\varphi_2=0} dz_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Де Рам. Дифференцируемые многообразия. М., И. Л. (1956).
2. Лерэ. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., И. Л. (1961).
3. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Гл. IV, 2. М., (1962).
4. Martinelli. Contributi alla teoria dei usidui per le funzioni di due variabili complesse. Ann. di mat. pura ed appl (1955), 3).
5. Е. Н. Аравийская. Аналог ряда Лорана и вычет функции 2-х переменных. Вопросы математики. ТГУ, т. 179
6. S. Bergmann. On the surface integrals of functions of two complex variables. Amer. Journ. Math. (1941) 63.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Бокк, З. И. Клементьев. К обобщению теорем вложения на случай векторных функций 4
З. И. Клементьев, Г. С. Шахнович. Об одном классе векторных пространств 17
З. И. Клементьев, Г. С. Шахнович. Об операторах в подпространствах локально суммируемых функций 28
Р. М. Малаховская. Применение операционного исчисления в обобщенных функций к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами . . 34
Г. В. Сибиряков. А-оператор и значение обобщенной функции в нуле . 42
З. И. Клементьев. Об аналитическом представлении линейных операций в некоторых функциональных полуупорядоченных пространствах 51
М. А. Тынкевич. Программа автоматического траскодирования интерпретирующего типа 58
Г. В. Сибиряков. Об одном способе применения вычислительных машин в математике. I—II. 65
Ю. Н. Линьков. К вопросу вычисления ε энтропии случайных величин при малых 79
Е. Н. Аравийская. О формулах вычетов для функций и комплексных переменных 81

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Научная библиотека ТГУ

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 2

Редактор издательства **Л. Г. Мордовина**
Технический редактор **Э. Н. Страшкова**
Корректор **Г. А. Азовцева**

К302628о. Сдано в набор 8/VIII-67 г. Подписано к печати 19/XII-67 г.
Формат 70×108 1/16; печ. л. 5,4; уч.-изд. л. 7,3; усл. печ. л. 5,3.
Заказ 3358. Тираж 700 Цена 73 коп.

Томск, Издательство ТГУ, проспект Ленина, 36.
Областная типография № 1 Управления по печати, г. Томск, ул. Советская, 47.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

965039

Цена 73 коп.

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00964144