Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET MÊCANIQUE A L'UNIVERSITÉ KOUYBYCHEFF DE TOMSK.

Vol I. Fasc. II.

MITTEILUNGEN DES FORSCHUNGS-INSTITUTS FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK AN DER KUJBYSCHEW-UNIVERSITÄT TOMSK.

Bd. I. Heft II.

# ИЗВЕСТИЯ

## НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

### ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

им. КУЙБЫШЕВА В. В.

222889

Редакционная коллегия:
С. Б. Бергман.
Ф. Э. Молин.
Ф. М. Нетер.
Ответств. ред.: Ф. Э. Молин.

Redaktions-Kommission
Comité de rédaction
St Bergmann.
Th. Molien.
F. Noether.
Verantw. Red. / Le réd. resp. } Th. Molien

ТОМ ПЕРВЫЙ
ВЫПУСК ВТОРОЙ

ТОМСК 1935

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

## ОТ РЕДАКЦИИ.

Редакция обращается к авторам работы с просьбой присылать рукописи напечатанными, по возможности, на пишущей машинке и на одной стороне листа.

Работы могут быть написаны на русском, немецком, английском, французском или итальянском языках. Каждая работа должна сопровождаться резюме, делающим понятным сущность содержания работы для читателя, незнакомого с языком, на котором написана работа. Перевод резюме на русский или другой язык, в случае необходимости, берет на себя редакция.

Авторы получают бесплатно 75 отдельных оттисков их работ.

Адрес: Научно-Исследовательский Инст-т Математики и Механики при Томском Гос. Университете им. Куйбышева, Томск, СССР.

## MITTEILUNG DER REDAKTION.

Die Autoren der für diese Zeitschrift bestimmten Arbeiten werden gebetem, die Manuskripte möglichst maschinenschriftlich auf einseitig beschriebenen Bögen einzureichen.

Die eingesandten Arbeiten können in russischer, deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache verfasst sein Jeder Arbeit soll eine Zusammenfassung beigefügt werden, die ihren wesentlichen Inhalt auch für die der Originalsprache nicht kundigen Leser verständlich macht. Die Übersetzung derselben in die russische oder eine andere Sprache wird nötigenfalls die Redaktion selbst übernehmen.

Die Verfasser erhalten kostenlos 75 Sonderabdrucke ihrer Artikel.

Adresse: Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik an der Kujbyschew Staats-Universität, Tomsk, UdSSR.

## LA RÉDACTION.

La rédaction prie les auteurs de vouloir bien envoyer leurs manuscrits écrits avec le dactylographe sur un côté de la feuille.

Les articles présentés peuvent être rédigés en russe, allemand, anglais, français ou italien.

Chaque travail doit avoir un résumé écrit en termes clairs qui donnent une idée nette sur le sujet de ce travail même pour les lecteurs qui ne connaissent pas la langue du texte du travail.

La rédaction se charge de la traduction du résumé en russe ou dans une autre langue.

Les auteurs reçoivent gratuitement 75 tirages à part de leurs articles.

Adresse. Institut de mathématiques et de mécanique à l'Université Kouybycheff de Tomsk. L'U.R.S.S.

## COMMUNICATIONS OF THE EDITORIAL STAFF.

The authors of the treatises which shall be published in this journal, are asked to present their manuscripts, if possible, in type-writing, on sheets, written upon only on one side.

The treatises may be written in Russian, English, French, German, or Italian. A résumé, which makes it possible for the reader not acquainted with the original language to understand the essential contents, shall be added. If necessary, the editors will translate the résumé into Russian or other languages.

The authors will get 75 copies of their treatises free of charge.

Address: Research Institute for Mathematics and Mechanics at the Kuibysheff State-University. Tomsk, Siberia.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET MÊCANIQUE A L'UNIVERSITÉ KOUYBYCHEFF DE TOMSK.

Vol. I. Fasc. II.

MITTEILUNGEN DES FORSCHUNGS-INSTITUTS FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK AN DER KUJBYSCHEW-UNIVERSITÄT TOMSK.

Bd. I. Heft II.

51+531

# ИЗВЕСТИЯ

## НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

### ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

им. КУЙБЫШЕВА В. В.

222889

Редакционная коллегия:
С. Б. Бергман.
Ф. Э. Молин.
Ф. М. Нетер.
Ответств. ред.: Ф. Э. Молин.

Redaktions-Kommission
Comité de rédaction
St. Bergmann.
Th. Molien.
F. Noether.
Verantw. Red. / Le réd. resp. } Th. Molien

ТОМ ПЕРВЫЙ
ВЫПУСК ВТОРОЙ

ТОМСК 1935

дослала чиновника, чтобы узнать, нѣтъ ...

**Город.** Экъ куда хватили! Еще умный человѣкъ! ...родѣ измѣна! Что онъ, пограничный, что ли? Да ...и года скачи, ни до какого государства не доѣде...

**Аммосъ Ѳедор.** Нѣтъ, я вамъ скажу. Вы не т... ...чальство имѣетъ тонкіе виды; даромъ, что далеко ...таетъ на усъ.

**Город.** Мотаетъ, или не мотаетъ, а я васъ, госп... ...милъ. Смотрите! по своей части я кое-какія распо... ...лъ, совѣтую и вамъ. Особенно вамъ, Артемій Фили... ...мнѣнія, проѣзжающій чиновникъ захочетъ прежде во... ...двѣдомственныя вамъ Богоугодныя заведенія—и по... ...йте такъ, чтобы все было прилично. Колпакы был... ...больные не походили бы на кузнецовъ, какъ обы... ...дятъ по-домашнему.

**Артемій Филип.** Ну, это еще ничего. Колпа... ...жно надѣть и чистые.

...ное въ комедіи: его понятія, думы, симпатіи и пр.—... ...его къ Софьѣ, Фамусову и ко всему Москов. обществ... ...тріотъ.—Справедливы ли слова *Пушкина*—«*Чацкій ...*

ПРОВЕРЕНО 1958 г.

Электронная библиотека (репозиторий) Томского государственного университета http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

И. И. ПРИВАЛОВ (Москва).

Одной из задач алгебры является изучение полиномов и рациональных функций.

Теория функций комплексного переменного в первую очередь изучает, как самые простые, целые и мероморфные функции.

Целая функция, будучи представлена в виде степенного ряда, может рассматриваться как бесконечный полином. Мероморфная функция, будучи отношением двух целых функций, может рассматриваться как бесконечная дробь.

Однако, несмотря на эту формальную аналогию функций, изучаемых в алгебре, с целыми и мероморфными функциями, имеется существенное принципиальное внутреннее различие между теми и другими. Это различие основано на наличии существенно особой точки в бесконечности у функций целых и мероморфных. Правда функции мероморфные, в частности рациональные, имеют полюсы на конечном расстоянии в плоскости комплексного переменного, но эти точки в теории функций не должны рассматриваться как особые, потому что бесконечность в комплексном анализе есть обыкновенная величина, изобразимая, как и всякое другое комплексное число, единственной точкой в плоскости или на сфере Римана, служащей стереографической проекцией плоскости.

Множество особых точек характеризует функцию. С этой точки зрения целые и мероморфные функции являются самыми простыми, так как для них множество особых точек состоит из единственного элемента. Чтобы судить о поведении функции в плоскости комплексного переменного, мы изучаем распределение корней уравнения $f(z)=a$, где $a$ произвольное фиксированное постоянное.

Так в случае полинома $P(z)$ мы знаем, что число корней уравнения $P(z)=a$ возрастает вместе со степенью полинома. С другой стороны, очевидно, что $|P(z)|$, когда $r=|z|$ стремится к бесконечности, неограниченно возрастает как $r^n$. Следовательно полином принимает произвольное значение $a$ тем большее число раз, чем быстрее растет его модуль, когда $r$ неограниченно возрастает. Другими словами можно констатировать тесную связь между числом нулей $P(z)-a$ и быстротой возрастания модуля $P(z)$. В более общем случае произвольной целой функции при изучении распределения нулей $f(z)-a$ мы естественно приходим к вопросу, как ведет себя $M(r)=\underset{|z|=r}{Max}\,|f(z)|$ когда $r$ неограниченно возрастает.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



До 1879 г. было известно весьма мало относительно поведения целой функции. Это немногое концентрировалось в известном предложении Вейерштрасса, согласно которому $|f(z)-a|$ становится величиной сколь угодно малой, когда $z$ по некоторому закону стремится к бесконечности. Иными словами, всякое число $a$ является предельным для множества значений целой функции в окрестности существенно особой бесконечно удаленной точки. Значительный шаг был сделан Пикаром в 1879 г., когда он доказал, что уравнение $f(z)=a$ имеет для любого $a$, кроме быть может одного исключительного конечного значения, бесконечное множество корней. После открытия Пикара естественно встала в теории целых функций проблема об изучении распределения корней уравнения $f(z)=a$, где $a$ не есть исключительное значение, при чем как в отношении модулей этих корней, так и их аргументов.

Для задач первого типа, трактующих о модулях корней уравнения $f(z)=a$ характерным является вопрос: как число $n(r, a)$ корней, заключенных внутри круга радиуса $r$, возрастает вместе с $r$.

Для задач второго типа, в которых мы интересуемся аргументами нулей $f(z)-a$, характерным является вопрос: каковы прямые сгущения направлений соединяющих начало координат с этими нулями.

В проблемах первого типа изучается распределение нулей $f(z)-a$ прежде всего для целых функций, для которых $M(r)$ имеет определенный рост сравнимый например с $e^r$, $e^{r^p}$, $e^{e^r}$, и т. д. Результаты этих изысканий можно в общих чертах разюмировать таким образом: чем быстрее растет $M(r)$, тем больше плотность нулей $f(z)-a$. Теоремы Пуанкаре, Адамара, Бореля фиксируют точно связи, которые существуют между ростом $M(r)$ и ростом модуля $n^{zo}$ нуля $f(z)-a$. Этот закон, вообще говоря, не зависит от значения $a$, но очевидно, не всегда, как это сразу видно, если $a$ есть исключительное значение в смысле Пикара. Как показал Борель, может случиться, что для числа $a$ распределение нулей $f(z)-a$ будет более редким, чем для других значений $a$, тогда это число $a$ исключительное в смысле Бореля. Борель показал, что это может быть лишь для одного конечного значения $a$. Параллельно с развитием теории целых функций протекало исследование и мероморфных функций. При этом сначала метод заключался в том, что при изучении мероморфной функции брали ее в виде отношения $\frac{g(z)}{h(z)}$ двух целых функций и интересовались распределением корней уравнения $g(z)-ah(z)=o$ в связи с ростом $G(r)=\underset{(z)=r}{Max}|g(z)|$ и

$$H(r)=\underset{(z)=r}{Max}|h(z)|$$

Оказалось, что теорема Пикара в области мероморфных функций может приносить два исключительных значения, теорема Бореля два исключительных распределения.

С этой точки зрения целые функции должны рассматриваться,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



как мероморфные, выпускающие бесконечность. Необходимо отметить, что указанные обобщения результатов теории целых функций на мероморфные, носили вплоть до последних лет не полный и далеко не законченный характер. Более того, можно видеть во многих предложениях теории мероморфных функций, трактуемых в виде отношений двух целых функций, некоторого рода искуственность, вытекающую из того обстоятельства, что одна и та же мероморфная функция может быть бесконечно разнообразными способами представлена посредством отношения двух целых. Остро чувствовалось отсутствие аналитического аппарата, который был бы внутренне связан с мероморфной функцией. Все эти затруднения были преодолены Неванлинной, который создал новый аналитический аппарат, интимно связанный с мероморфными функциями, позволивший ему придать теории таких функций определенную и законченную форму, теорию, включающую в себя, как частный случай, основные классические результаты для целых функций.

Он связал с каждой функцией, целой или мероморфной, характеристическую функцию $T(r)$, зависящую одновременно от роста ее модуля и распределения ее полюсов.

Характеристическая функция $T(r)$ есть сумма двух членов. Первый есть среднее значение положительных величин логарифма модуля $f(z)$ на окружности $|z| = r$, он тем больше, чем эти модули больше, это будет, следовательно,

$$m(r,\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi$$

Второй зависит от числа полюсов находящихся внутри круга радиуса $r$; он тем больше, чем это число больше. Это будет

$$N(r,\infty) = \int_0^r \frac{n(t,\infty) - n(o,\infty)}{t}\, dt + n(o,\infty)\ln r$$

Оказывается, функция $T(r)$ не изменяется при замене $f(z)$ на $\frac{1}{f(z)-a}$ или, более точно, два значения $T(r)$ относящиеся к этим двум функциям имеют разность, которая остается ограниченной, когда $r \to \infty$. Отсюда вытекает закон равновесия между двумя членами $m$ и $N$ при переходе от одного значения $a$ к другому. Если один из членов $m$ или $N$ увеличивается, другой уменьшается. Первый увеличивается когда $f(z)$ приближается к $a$, второй, когда $f(z)$ принимает $a$. Если функция медленнее приближается к $a$, то плотность нулей $f(z) - a$ возрастает и обратно. В этом заключается первая фундаментальная теорема Неванлинны. Характеристическая функция позволяет также некоторым образом измерить степень редкости нулей $f(z) - a$ для исключительных значений $a$. С каждым числом $a$ можно связать $\delta(a)$, называемое эксцессом, которое изменяется от 0 до 1, будучи нулем для обыкновенного

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



распределения нулей $f(z)-a$ и единицей для исключительного значения Пикара. Аналитическое выражение эксцесса есть:

$$\delta(a)=1-\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,a)}{T(r)}$$

Как доказал Неванлинна, множество значений $a$, для которых $\delta(a)>0$ есть конечное или счетное и всегда $\Sigma\delta(a)\leqslant 2$.

Эта теорема, содержащая как частный случай предложение Пикара, дает понятию исключительного значения наиболее глубокий и общий смысл. Она вытекает из второго фундаментального неравенства Неванлинны.

Нерешенным является вопрос о том, может ли для индивидуальной мероморфной функции это множество исключительных значений быть бесконечным и если да, то какова структура этого счетного множества.

В последних своих работах Неванлинна показал, что любое конечное множество рациональных чисел, сумма которых не превосходит 2, может быть принято за множество исключительных значений некоторой мероморфной функции.

Известно, каким образом может быть представлена мероморфная функция, для которой известны все нули и полюсы. Аппаратом для такого изображения функции служит бесконечное произведение. Обозначим, вообще, через $E(a)$ множество всех точек $z$, где $f(z)$ принимает значение $a$, каждая точка $E(a)$ считается столько раз, какова кратность корня уравнения $f(z)=a$. В частности $E(\infty)$ есть множество полюсов, а $E(0)$ множество нулей функции $f(z)$. Ясно, что мероморфная функция не является определенной, когда известны множества $E(o)$ и $E(\infty)$, так как нашу функцию можно умножить на произвольный показательный фактор, не изменяя ее нулей и полюсов. Таким образом мы приходим к изучению проблем единственности мероморфных функций (Полиа, Картан, Неванлинна). Наиболее общий в этом направлении результат есть следующий: существует не более двух различных функций $f(z)$ и $g(z)$, мероморфных во всей плоскости, для которых множества $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ даны. Вообще знание трех множеств $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ определяет единственную мероморфную функцию $f(z)$. Случай, когда решениями проблемы служат две мероморфные функции $f(z)$ и $g(z)$, есть исключительный. Дана форма функций $f(z)$ и $g(z)$ в этом исключительном случае, а именно:

$$f(z)=\frac{c(a-b)a^{\varphi(z)}+a(b-c)e^{\psi(z)}+b(c-a)e^{\theta(z)}}{(a-b)e^{\varphi(z)}+(b-c)e^{\psi(z)}+(c-a)e^{\theta(z)}}$$

$$g(z)=\frac{c(a-b)e^{-\varphi(z)}+a(b-c)e^{-\psi(z)}+b(c-a)e^{-\theta(z)}}{(a-b)e^{-\varphi(z)}+(b-c)e^{-\psi(z)}+(c-a)e^{-\theta(z)}}$$

где $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ суть множества точек, в которых соответ-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ственно $e^{\varphi(z)}=e^{\theta(z)}$, $e^{\psi(z)}=e^{\varphi(z)}$, $e^{\theta(z)}=e^{\psi(z)}$. Если, далее, две различные функции $f(z)$ и $g(z)$, которые имеют общими множества $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$, допускают общее четвертое множество $E(d)$, то в этом случае две из величин, например, $a$ и $b$ являются пустыми, $(a, b, c, d)=-1$ и $(f, g, c, d)=-1$. Например, функции $f(z)=e^{z}$, $g(z)=e^{-z}$ имеют общими множества $E(0)$, $E(\infty)$, $E(1)$, $E(-1)$. Итак, вообще говоря знание трех множеств $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ определяет мероморфную функцию $f(z)$. Конечно, обратно, если даны три произвольные множества, то вообще не существует мероморфной функции принимающей соответственно значения $a$, $b$, $c$ в точках данных множеств.

Следовательно множества $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ мероморфной функции не могут быть взяты произвольными. Переходя к изучению аргументов нулей $f(z)-a$, заметим, что метод иследования заключается здесь в делении на куски плоскости около особой точки и покрытии ее окрестности посредством сети, например, бесконечных круговых дисков центрированных в особой точке. Значения функции в точках $z$ каждого элемента сети рассматриваются, как образующие частную функцию.

Более точно, выполняя конформное отображение каждого элемента сети на постоянную область $D$, мы приходим к изучению в этой области $D$ бесконечной последовательности функций

$$f_1(\xi),\ f_2(\xi),\ldots f_n(\xi),\ldots$$

таких, что значения принимаемые функцией $f_n$ области $D$ совпадают со значениями, которые принимает $f(z)$ в $n^{ом}$ элементе сети. Таким путем мы достигаем раздробления в изучении функций в окрестности особой точки. Для бесконечной последовательности функций, определенных в одной и той же области, может случиться, что всякая ее часть содержит бесконечную последовательность равномерно сходящуюся внутри области; тогда говорят, что функции последовательности образуют нормальное семейство. В противном случае, существуют в области точки такие, что во всяком круге, как бы мал он ни был, с центром в этой точке, семейство не есть нормальное. Такая точка называется иррегулярной точкой. Иррегулярная точка в отношении семейства функций играет роль аналогичную роли особой точки относительно аналитической функции. Это есть, по выражению Монтеля, особая коллективная точка. Используя свойства нормальных семейств и иррегулярных точек, Жюлиа получил важные результаты относительно распределения аргументов нулей $f(z)-a$.

Пусть $f(z)$ целая функция. Существует по крайней мере одна полупрямая $OJ$ такая, что во всяком угле, содержащем $OJ$ внутри, функция принимает бесконечное число раз всякое значение, за исключением не более одного исключительного значения.

Другими словами, направления нулей $f(z)-a$ сгущаются на полупрямых $OJ$. Например для $f(z)=e^{z}$ имеется два направления $OJ$, идущие по мнимой оси.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



В случае мероморфной функции, полупрямые $OJ$ будут полупрямыми сгущения направлений нулей $f(z)—a$, при любом фиксированном $a$, исключая быть может два значения $a$, конечные или нет. Однако не всякая мероморфная функция допускает обязательно направления $OJ$.

Используя теорию нормальных семейств мероморфных функций, Островский показал, что всякая мероморфная функция допускает по крайней мере одну полупрямую $OJ$, за исключением некоторых исключительных функций, которые будут формы

$$f(z)=z^{n}\frac{\Pi\left(1-\frac{z}{a_i}\right)}{\Pi\left(1-\frac{z}{b_j}\right)}$$

Не всякая, однако, функция этого вида обязательно исключительная. Нужно, чтобы распределение нулей $a_i$ и полюсов $b_j$, подчинялось частным условиям регулярности, точно установленным Островским. Посредством метода близкого к методу Островского, но заменяя нормальные семейства квазинормальными, т. е. допускающими конечное число иррегулярных точек, Заксер получил результаты более полные относящиеся к плотности нулей $f(z)—a$ в каждом угле.

Рассмотрим, следуя Заксеру, полупрямую $OJ$ и угол с началом $O$, имеющий ее биссектрисой. Отметим в этом в угле криволинейные четыреугольники, ограниченные дугами окружностей, радиусы которых возрастают в геометрической прогрессии. Исключая быть может двух значений $a$, имеются нули $f(z)—a$ в бесконечности этих четыреугольников, Но число нулей расположенных в каждом четыреугольнике может остаться ограниченным или неограниченно расти, когда $a$ фиксировано. Оказывается, что это число неограниченно возрастает, исключая быть может два значения $a$, лишь бы только функция не была исключительной указанного выше вида, но для которой распределение $a_i$ и $b_j$ удовлетворяет условиям регулярности естественно менее ограничительным, чем для функций Островского. Блох впервые заметил, что направления $OJ$ должны иметь свойства близкие к свойствам особых точек, лежащих на окружности круга сходимости ряда Тэйлора. Так как целая функция есть ряд Тэйлора с бесконечным радиусом сходимости, то естественно, является мысль сравнить направления $OJ$ с радиусами; проходящими через особые точки, расположенные на круге сходимости ряда Тэйлора с конечным радиусом сходимости.

В этом направлении были предприняты исследования различными авторами. Весьма важные результаты, полученные Полиа, вскрыли ту глубокую аналогию, которая существует между этими вопросами. Так оказалось, что большинству теорем об особых точках круга сходимости можно поставить в соответствие теоремы о прямых $OJ$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Например, известная теорема Фату утверждает, что путем надлежащего изменения знаков у коэффициентов произвольного степенного ряда, можно достигнуть того, чтобы окружность его круга сходимости стала особой линией. В соответствии с этим, посредством надлежащего изменения знаков у коэффициентов степенного ряда, изображающего целую функцию бесконечного порядка, можно достигнуть того, чтобы всякое направление, выходящее из начала координат, сделалась направлением $OJ$.

В качестве другого примера, возьмем известное предложение Фабри: если степенной ряд представляет достаточно широкие пустоты, т. е. если два последовательных не нулевых коэффициента содержат между собою некоторое число нулевых коэффициентов, которое неограниченно растет вместе с рангом пустоты, то окружность круга сходимости есть особая линия. Параллельно этому, в тех же условиях, если ряд изображает целую функцию бесконечного жанра, то всякое направление, выходящее из начала координат, есть полупрямая $OJ$.

В своих последних работах Полиа показал, каким образом изучение ряда Тэйлора на круге сходимости связывается с исследованием некоторой целой функции.

Вообще следует заметить, что проблема распределения направлений $OJ$ является актуальной в современной теории функций. Важные результаты были получены относительно сравнения числа этих направлений и быстротой возрастания модуля функции, относительно существования направлений $OJ$ для нулей функций $f(z) - R(z)$, где $R(z)$ произвольная рациональная функция. Здесь имеется широкое поле для исследований. Если изучение распределения модулей нулей $f(z) - a$ очень продвинуто, то изучение распредения аргументов далеко еще от того, чтобы быть законченным. Первый круг вопросов, имеющий за собой несколько десятилетий, основывается на изучении быстоты, с которой функция приближается к данному значению. Второй цикл задач, насчитывающий за собой всего одно десятилетие, основывается в настоящее время на изучении нормальных семейств и их иррегулярных точек; каждая из этих точек играет относительно семейства роль подобную роли особой точки относительно индивидуальной функции.

До сих пор, излагая современное состояние теории мероморфных функций, мы касались результатов установленных на базе аналитических методов. Однако картина не была бы полной, если бы мы не коснулись геометрических принципов, которые за последнее время начинают применяться весьма успешно при изучении и классической теории мероморфных функций. Известно, что любая односвязная поверхность Римана может быть конформно отображена или на круг (гиперболический случай), или на плоскость с выколотой бесконечно-удаленной точкой (параболический случай) или навсю плоскость (эллиптический случай).

В параболическом случае функция реализующая конформное отображение пунктирной плоскости на поверхности Римана будет мероморфной функцией наиболее общего вида. Таким образом, на-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



пример, теорема Пикара о том, что всякая мероморфная функция принимает все значения, кроме быть может двух, на геометрическом языке значит, что всякая односвязная поверхность Римана не содержащая трех точек есть обязательно поверхность гиперболического типа. В связи с этим большое значение для теории мероморфных функций приобретает проблема изыскания, по возможности, полных характеристик поверхностей параболического типа.

Эти критерии позволят дать существенные дополнения к классической теореме Пикара и ее уточнений (Неванлинна). Одно из первых исследований в этом направлении принадлежит Неванлинне. Он установил, что поверхность Римана с конечным числом логарифмических точек ветвимости всегда принадлежит к параболическому типу.

До конца изучая геометрическое строение такой поверхности, он получает отсюда ряд весьма интересных дополнений в своей теории мероморфных функций. В частности, проблема о том,что существует мероморфная функция с заданным конечным числом исключительных значений, разрешена им на базе геометрических методов. Здесь мы имеем синтез аналитических результатов крупнейшего математика с геометрическими, и можно надеяться, что на этом стыке двух различных методов, трактующих одни и те же вопросы, в дальнейшем получатся чрезвычайно важные результаты классической теории мероморфных функций.

В предыдущем мы видели, сколь большое значение играет проблема Пикара в теории мероморфных функций. Однако, надо сказать, что и в общей теории однозначных аналитических функций большой удельный вес принадлежит исследованиям связанным с кругом вопросов, идущих от Пикара.

Известно, что в 1887 г. Пикар доказал свою, так называемую большую теорему: в любой окрестности изолированной существенно особой точки функция принимает все значения кроме быть может двух (полюсы считаются за обыкновенные точки). Это предложение долгое время занимало изолированное положение в теории функций. Все громадное значение частного случая этого предложения для развития теории целых и мероморфных функций, как мы видели, было выявлено в результате классических работ Бореля, Неванлинны и др. Лишь за последнее десятилетие вскрыто значение теоремы Пикара и для общей теории функций. В 1923 году Валирон доказал, что поверхность Римана для функции, обратной целой, содержит однолистные круги сколь угодно большого радиуса.

Основываясь на этом результате Блох в следующем 1924 г. установил чрезвычайно важную теорему, весьма точно характеризующую геометрическую картину поведения голоморфной функции в единичном круге.

Он доказал, что поверхность Римана, соответствующая функции, обратной для любой функции вида: $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ правильной при $|z|<1$ содержит однолистный круг радиуса большего некоторой абсолютной константы $B$. В частности, из этой теоремы следует, что значения функции $w=f(z)$ в плоскости $w$ образуют

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



область, покрывающую круг радиуса большего некоторой абсолютной константы $L$, Эти теоремы являясь естественным обобщением известного свойства Кебэ-Бибербаха однолистных функций, оказались самым тесным образом связанными со всем кругом вопросов Пикара, так как уже из существования константы $L$ весьма просто и элементарно выводятся теоремы Шоттки, Ландау и большая теорема Пикара.

Эти классические теоремы, ранее доказанные помощью свойств модулярной функции или элементарными методами, но достаточно сложными по выкладками, не могли найти себе места на страницах общих руководств по теории функций. Можно сказать, что предложение Блоха, доказываемое просто и элементарно, позволило впервые, вместе с ним, включить теорему Пикара и с ней связанные результаты в общее руководство, что и было мною сделано при новом издании моего курса теории функций комплексного переменного. В связи с большим значением теоремы Блоха „о покрытиях" для общей теории функций комплексного переменного появились за последнее время ряд работ по ее уточнению. Наиболее общим и плодотворным методом для получения такого рода результатов является метод нормальных семейств, который в указанном направлении был использован Монтелем и мною.

Однако метод нормальных семейств, будучи весьма сильным качественным методом, дает возможность лишь доказать существование констант. Если же мы хотим выяснить структуру функции дающей наихудшее покрытие, а также интересуемся точными значениями констант, то тогда мы должны пользоваться геометрическим методом, идущим от Линделефа, к изложению которого мы и приступим.

Источником для принципа Линделефа послужило известное предложение общей теории функций, известное под именем леммы Шварца.

Шварц доказал, что всякая функция $z=f(x)$, голоморфная в единичном круге $|x|<1$ и удовлетворяющая условиям: $f(0)=0, |f(x)|<1$ обладает свойствами:

1° $|z|<|x|$ всюду в круге $|x|<1$,

2° Если для некоторой точки $x, |x|<1$ имеем $|z|=|x|$, то $z\equiv xe^{i\alpha}$

3° $|f'(0)|\leqslant 1$, при чем знак равенства имеет место лишь в случае, когда $z\equiv xe^{i\alpha}$

Это предложение весьма просто доказывается, пользуясь принципом максимума модуля. В целях дальнейшего его обобщения, представляется удобным придать ему геометрическую формулировку. Дано, что функция $z=f(x)$ конформно отображает круг $X, |x|<1$, на поверхность Римана $Z_1$ плоскости $z$ со следующими свойствами:

а) проекция поверхности $Z_1$ на плоскость принадлежит кругу $z, |z|<1$.

*b*) один из листьев поверхности $Z_1$ содержит точку $z=0=f(0)$

При этих условиях доказывается, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



а) всякий круг $|x|\leqslant r<1$ переходит при отображении в кусок поверхности Римана $Z_1$, проекция которого на $z$—плоскость будет принадлежать кругу $|z|\leqslant r$.

*b*) если точка $x$ находится на окружности $|x|=r$, а соответствующая точка $z$ проектируется в точку окружности $|z|=r$, то функция $z=f(x)$ дает конформное отображение круга $X$ на круг $Z$ $(Z_1\equiv Z)$

с) растяжение в точке $x=0$ не больше 1, при чем наибольшее растяжение будет лишь в случае, когда функция $z=f(x)$ реализует конформное отображение круга $X$ на круг $Z$.

Отметив это предложение, рассмотрим две любые односвязные поверхности Римана $Z$ и $Z_1$ плоскости $z$. Следуя Линделефу, скажем, что поверхность $Z$ несет поверхность $Z_1$, если существует отображение $Z_1$ на часть поверхности $Z$ такое, что, во первых, каждой точке с проекцией $z$ поверхности $Z_1$ отвечает на $Z$ единственная точка с той же проекцией $z$, и, во вторых, всякий замкнутый контур на $Z_1$ переходит при отображении $Z_1$ на $Z$ тоже в замкнутый контур.

Считая $Z$ и $Z_1$ односвязными поверхностями Римана гиперболического типа плоскости $z$ и, предполагая, что $Z$ несет $Z_1$, отобразим конформно круг $X$ на каждую из этих поверхностей так, чтобы точке $x=0$ соответствовали точки на $Z$ и $Z_1$, с одной и той же проекцией в $z$ плоскости. Пусть $z=F(x)$, $z=f(x)$ функции реализующие эти отображения. При этих условиях Линделеф доказал:

а) Поверхность Римана, образованная значениями $z=F(x)$ при $|x|\leqslant r$ несет поверхность Римана образованную значениями $z=f(x)$ при $|x|\leqslant r$.

*b*) Если для некоторого значения $x$ области $|x|\leqslant r$ соответствующая точка $z=f(x)$ находится на границе куска Римановой поверхности $Z$, то функция $f(x)$ реализует конформное отображение $X$ на $Z$, т. е. $f(x)\equiv F(xe^{i\alpha})$

с) $|f'(0)|\leqslant|F'(0)|$, при чем знак равенства имеет место только в случае, когда $f(x)\equiv F(xe^{i\alpha})$

Оставляя пока условия приложимости принципа Линделефа в геометрической форме, выразим аналитически самый принцип.

Это возможно сделать, введя в рассмотрение функции Грина для областей $X$ и $Z$.

Утверждение а) принципа Линделефа соответствует утверждению 1° леммы Шварца. Поэтому запишем, сперва, неравенство 1° леммы Шварца в другой форме:
$|z|\leqslant|x|$ откуда $-ln|z|\geqslant-ln|x|$ или $G_z(0,z)\geqslant G_x(0,x)$, где $G_z(0,z)$ и $G_x(0,x)$ обозначают функции Грина для областей $Z$ и $X$ с логарифмическими особенностями в начале координат (в данном случае $Z=X$ и потому $G_z\equiv G_x$
Считая $Z$ поверхностью Римана, о которой шла речь в принципе Линделефа, первое утверждение этого принципа выразится в виде:

а) $G_z(0,z)\geqslant G_x(0,x)$ т. е. если точка $x$ находится в замкнутой

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



области, ограниченной кривой $G_x(0, x) = \lambda > 0$, точка $z = f(x)$ лежит в замкнутой области, ограниченной кривой $G_z(0, z) = \lambda$

*b*) Если $G_x(0, x) = G_z(0, z)$ для некоторой точки $x$ области $X$ то это равенство справедливо для всех точек $X$ и функция $z = f(x)$ конформно отображает $X$ на $Z$ ($Z_1 \equiv Z$)

Другими словами, если для частного значения $x$ области $G_x(o,x) \geqslant \lambda$ соответствующая точка $z = f(x)$ находится на границе области $GZ(o,z) \geqslant \lambda$, то $z = f(x)$ реализует конформое отображение $X$ на $Z$, т. е. $f(x) \equiv F(xe^{i\alpha})$

c) $|f'(0)| \leqslant |F'(0)|$, при чем экстремальный случай будет лишь в случае, когда $z = f(x)$ дает конформное отображение $X$ на $Z$, т. е. $f(x) \equiv F(xe^{i\alpha})$.

Основным моментом доказательства принципа Линделефа является инвариантность функции Грина при конформном отображении. Значительный шаг вперед в развитии идей Линделефа был сделан Литтлевудом, который придал аналитическую форму условиям приложимости самого принципа и перенес его на средние значения модуля функции $f(x)$. Как доказал Литтлевуд, необходимое и достаточное условие для того, чтобы поверхность Римана $Z_1$ $[z = f(x)]$ была несомой поверхностью Римана $Z$ $[z = F(x)]$ выражается следующим соотношением:

$$f(x) = F[\omega(x)]$$

где $\omega(x)$ есть функция, удовлетворяющая условиям леммы Шварца. Считая $\omega(x)$ произвольной функцией, удовлетворяющей условиям $\omega(0) = 0, |\omega(x)| < 1$ мы получаем семейство функций $f(x) = F[\omega(x)]$ подчиненных одной и той же функции $F(x)$. Отсюда естественно мы приходим к мысли изучать свойства семейства функций $f(x)$ в зависимости от свойств индивидуальной функции $F(x)$, что и составляет сущность принципа Линделефа. В первую очередь важно получить наилучшие универсальные оценки для модулей функций семейства $\{f(x)\}$, их средних, значений, а также действительной и мнимой частей функции $f(x)$.

В целях об'единения всех этих вопросов, а также ради общности, мы введем понятие подчиненности для субгармонических функций, имея в виду, что модуль аналитической функции, ее действительная и мнимая части принадлежат к этому классу. Согласно Риссу, функция $v(x)$ названа субгармонической в области $D$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1° $v(x)$ однозначна и полунепрерывна сверху в области $D$.

2° во всякой точке $x$ области $D$ удовлетворяется неравенство

$$v(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x + \rho e^{i\theta})\, d\theta$$

для всех достаточно малых значений $\rho$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Условимся называть субгармоническую функцию $v(x)$, определенную в единичном круге $|x|<1$, подчиненной в этом круге функции $V(x)$, субгармонической при $|x|<1$, если имеет место соотношение:

$$v(x)=V[\omega(x)]$$

где $\omega(x)$ функция леммы Шварца.

Подобно тому как путем применения принципа максимума возможно установить лемму Шварца, посредством использования принципа гармонической мажоранты возможно доказать ряд экстремальных теорем для подчиненных субгармонических функций, заключающих в себе существенную часть утверждений принципа Линделефа.

Центральным является здесь предложение о средних значениях подчиненных субгармонических функций, выражаемое неравенством:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\rho e^{i\theta})\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

при любом $\rho<1$. Это предложение легко получается путем применения принципа гармонической мажоранты.

Из этого неравенства, предполагая функции $v(x)$, $V(x)$ гармоничгскими или субгармоническими, не имеющими минимума внутри круга, весьма просто устанавливаются точные экстремальные предложения:

$$\operatorname{Min}_{|x|=\rho} V(x) \leqslant v(x) \leqslant \operatorname{Max}_{|x|=\rho} V(x)$$

Все эти предложения, будучи применены к аналитическим функциям, дают возможность установить наилучшие мажоранты и миноранты для модуля функции $f(x)$, его среднего значения, действительной и мнимой части, предполагая функцию $f(x)$ принадлежащей тому или иному классу. Например, можно изучить аналитические в единичном круге функции $f(x)$ с положительной действительной частью, органиченные по модулю, опускающие два значения 0,1 и т. д. Наконец следует отметить, что одно лишь третье утверждение принципа Линделефа, касающееся растяжения в начале координат, служит мощным средством при решении задач теории функций экстремального характера.

В заключение отметим, что принцип гармонической мажоранты, при помощи которого, как мы видели можно получить существенную часть утверждений Линделефа, вообще является чрезвычайно полезным орудием для исследования многих общих проблем теории функций комплексного переменного. Он позволяет дать изложение ряда классических проблем теории аналитических функций на основании свойств так называемых субгармонических функций. Этот новый методологический подход к задачам теории функций

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



комплексного переменного, с одной стороны, дает упрощение доказательств и об'единяет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом, с другой стороны, позволяет формулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций. Более того, поскольку класс субгармонических функций возможно рассматривать для пространства любого числа измерений, постановка задач в терминах субгармонических функций дает нам возможность вывести их за пределы плоскости и получить теоремы в пространстве, аналогичные известным предложениям классической теории функций комплексного переменного.

Я не буду детализировать эти вопросы, тем более, что им был посвящен мой доклад на конференции НИИММ в сентябре прошлого года, содержание которого читатель может найти в статье, имеющей появиться в Мат. Сб. т. 41, в. 4.

(Примечание редакции. См. статью И. И. Привалова „О методе Линделефа", помещенную в настоящем выпуске).

**Zusammenfassung.**

**Gegenwärtige Probleme der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.**

**I. I. Priwaloff** (Moskau).

Verfasser gibt eine Übersicht der neuern Richtungen in der Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen im komplexen Gebiet.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# О РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛАХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ЭРМИТА.

Ф. М. НЕТЕР (Томск).

Теория Бесселевых и родственных функций математической физики может основываться на обыкновенных дифференциальных уравнениях второго порядка. Ввиде побочного результата из разложений функций в ряды или из интегральных выражений будут найдены затем рекуррентные формулы, связывающие, например, функцию $J_n$ с функциями $J_{n-1}$ и $J_{n+1}$. С другой стороны, например, у Нильсена*), как раз эти рекуррентные формулы становятся исходным пунктом теории и служат определениями без более подробного обоснования. Дифференциальные уравнения второго порядка получаются из дифференциального уравнения в частных производных: $\Delta U + k^2 U = 0$ по методу решений, имеющих вид одного произведения. При этом методе не была замечена близкая связь между рекуррентными формулами и уравнением в частных производных, так что в отношении этих формул дифференциальное уравнение в частных производных является настоящим исходным пунктом теорий. Я докажу это в дальнейшем на примере функций Бесселя и полиномов Эрмита.

Рассмотрим функцию $U(x, y)$ удовлетворяющую дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0. \tag{1}$$

Так как речь идет об уравнении, имеющем постоянные коэффициенты, то каждая производная $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ или линейные комбинации этих производных будут так же решением уравнения (1). В частности

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = V \tag{2}$$

есть решение, и наоборот:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y} = -U, \tag{3}$$

*) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig 1904.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



что следует непосредственно, если мы вставим (2) в (3). Эта непосредственно понятная линейная система уравнений есть та, которая изображается в рекуррентных формулах, о которых идет речь.

Введем теперь полярные координаты, а именно:

$$x = r\cos\alpha \qquad dr = \cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy$$
$$y = r\sin\alpha \quad \text{или} \quad r\,d\alpha = -\sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy$$

и определяем, как обыкновенно, общую цилиндрическую функцию n-ого порядка $Z_n(r)$ через:

$$U(x,y) = e^{in\alpha} Z_n(r), \qquad [i = \sqrt{-1}]. \tag{4}$$

Из уравнения (2) следует:

$$V = \frac{\partial U}{\partial r}(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \alpha}(-\sin\alpha + i\cos\alpha)$$
$$= e^{i\alpha}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right) = e^{i(n+1)\alpha}\left(\frac{dZ_n}{dr} - \frac{n}{r}Z_n\right)$$

222889

Так как и $V$ решение дифференциального уравнения в частных производных (1), то по определению (4) выражение

$$\frac{dZ_n}{dr} - \frac{n}{r}Z_n = Z_{n+1} \tag{5}$$

будет цилиндрической функцией $(n+1)$-ого порядка. Это уже первая из рекуррентных ф рмул, о которых идет речь. Далее из уравнения (3) следует тем же самым образом:

$$-U = \frac{\partial V}{\partial r}(\cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \alpha}(\sin\alpha + i\cos\alpha)$$
$$= e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) = e^{in\alpha}\left(\frac{dZ_{n+1}}{dr} + \frac{n+1}{r}Z_{n+1}\right),$$

следовательно:

$$\frac{dZ_{n+1}}{dr} + \frac{n+1}{r}Z_{n+1} = Z_n \tag{6}$$

будет второй рекуррентной формулой. Из уравнений (5), (6) путем исключения получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функций $Z_n$ или $Z_{n+1}$, точно так же, как из системы уравнений (2), (3) путем исключения получится первоначальное дифференциальное уравнение в частных производных (1).

В качестве второго примера мы рассмотрим полиномы, или функции Эрмита. Можно получить эти функции, введя вместо

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



координат $x$, $y$ параболические координаты $\xi$, $\eta$, определяемые формулами[1]):

$$x = {}^1/_2\,(\xi^2 - \eta^2) \qquad d\xi = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\,dx + \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\,dy$$

(7) или

$$y = \xi\eta \qquad d\eta = \frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2}\,dx + \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\,dy,$$

следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\xi \pm i\eta}{\xi^2+\eta^2}\,\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{-\eta \pm i\xi}{\xi^2+\eta^2}\,\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi \mp i\eta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \pm i\frac{\partial}{\partial \eta}\right),$$

и уравнения (2), (3) преобразуются в

(8) $$\frac{\partial U}{\partial \xi} + i\frac{\partial U}{\partial \eta} = (\xi - i\eta)\,V$$

(9) $$\frac{\partial V}{\partial \xi} - i\frac{\partial V}{\partial \eta} = -(\xi + i\eta)\,U.$$

Исключение дает вместо уравнения (1):

(10) $$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + (\xi^2+\eta^2)\,U = 0$$

и то же для функции $V$.

Уравнение (10) может быть решено подстановкой вместо $U$ произведения: $f(\xi).g(\eta)$ и разделением переменных. В уравнениях (8), (9) это разделение переменных непосредственно невозможно, однако же если мы введем функции:

$$\Phi = U + iV; \qquad \Psi = U - iV,$$

то уравнения примут вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + i\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -i\xi\Phi + \eta\Psi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + i\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = i\xi\Psi - \eta\Phi,$$

или:

(11) $$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \imath\xi\Phi = -i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \imath\eta\Psi\right)$$

(12) $$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - i\xi\Psi = -i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - i\eta\Phi\right).$$

---

[1]) Сравн., например: В. Н. Смирнов, Курс высшей математики, том III, гл. IX, § 3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Сюда можно подставить вместо $\Phi$ и $\Psi$ произведения двух множителей, из которых один зависит от $\xi$, а другой от $\eta$:

$$\Phi = \varphi_m(\xi)\cdot\psi_m(\eta), \qquad \Psi = \varphi_n(\xi)\cdot\psi_n(\eta)$$

где индексы $m$, $n$ пока служат только для различения. Получим:

$$(13)\qquad \frac{1}{\varphi_n(\xi)}[\varphi_m'(\xi)+i\xi\varphi_m(\xi)] = \frac{-i}{\psi_m(\eta)}[\psi_n'(\eta)+i\eta\psi_n(\eta)]$$

$$(14)\qquad \frac{1}{\varphi_m(\xi)}[\varphi_n'(\xi)-i\xi\varphi_n(\xi)] = \frac{-i}{\psi_n(\eta)}[\psi_m'(\eta)-i\eta\psi_m(\eta)].$$

Здесь переменные $\xi$, $\eta$ разделены. Приравнивая, по известному способу, левую и правую части уравнения (13) постоянному $k$, а уравнения (14) постоянному $l$, имеем следующие 4 соотношения:

$$(15)\qquad \varphi_m'(\xi)+i\xi\varphi_m(\xi) = k\varphi_n(\xi); \qquad \varphi_n'(\xi)-i\xi\varphi_n(\xi) = l\varphi_m(\xi).$$

$$(16)\qquad \psi_n'(\eta)+i\eta\psi_n(\eta) = ik\psi_m(\eta); \qquad \psi_m'(\eta)-i\eta\psi_m(\eta) = il\psi_n(\eta).$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, очевидно, имеет вид искомых рекуррентных формул между парами функций $\varphi_m$, $\varphi_n$ или $\psi_m$, $\psi_n$. Эти уравнения будут вещественны, если введем новые переменные $z = \sqrt{i}\,\xi$, $w = \sqrt{-i}\,\eta$, а затем они могут быть написаны (при обозначениях $k = \sqrt{i}\,\bar{k}$, $l = \sqrt{i}\,\bar{l}$) в виде

$$(17)\qquad \varphi_m'(z)+z\varphi_m(z) = \bar{k}\varphi_n(z); \qquad \varphi_n'(z)-z\varphi_n(z) = \bar{l}\varphi_m(z)$$

$$(18)\qquad \psi_n'(w)-w\psi_n(w) = -\bar{k}\psi_m(w); \qquad \psi_m'(w)+w\psi_m(w) = -\bar{l}\psi_n(w).$$

При исключении из уравнений (17) получаются дифференциальные уравнения второго порядка:

$$(19)\qquad \varphi_m''+(1-\bar{k}\,\bar{l}-z^2)\varphi_m = 0; \qquad \varphi_n''+(-1-\bar{k}\,\bar{l}-z^2)\varphi_n = 0$$

и из (18) те же самые уравнения для $\psi_m(w)$, $\psi_n(w)$. Это те уравнения, которым удовлетворяют ортогональные функции Эрмита, т. е. полиномы Эрмита, умноженные на $e^{\frac{z^2}{2}}$, если $\bar{k}.\bar{l}$ четное целое число, а именно

$$-1-\bar{k}\,\bar{l} = 2n+1, \text{ так что } 1-\bar{k}\,\bar{l} = 2(n+1)+1.^1)$$

Итак, индекс $n$ должен быть целым числом, а $m = n+1$.

Уравнения (17), таким образом, являются в самом деле рекуррентными формулами, связывающими 2 ортогональные функции Эрмита,

[1]) См. Смирнов, упом. место, Нр 213. Курант-Гильберт: методы математической физики, том I; гл. V; Нр. 4.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



индексами которых являются два последовательных целых числа. Как функции $\varphi(z)$, так и функции $\psi(w)$—ортогональные функции Эрмита.

Если включить постоянный множитель $-l$ в определение функций $\varphi_m(z) = \varphi_{n+1}(z)$, то эти рекуррентные формулы запишутся:

$$(20) \qquad \frac{d\varphi_n}{dz} - z\varphi_n = -\varphi_{n+1}; \qquad \frac{d\varphi_{n+1}}{dz} + z\varphi_{n+1} = 2(n+1)\varphi_n$$

или:

$$(21) \qquad e^{\frac{z^2}{2}}\varphi_{n+1}(z) = -\frac{d}{dz}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\varphi_n(z)\right);$$

$$(22) \qquad 2(n+1)e^{\frac{z^2}{2}}\varphi_n(z) = \frac{d}{dz}\left(e^{\frac{z^2}{2}}\varphi_{n+1}(z)\right).$$

Для $n=0$ второе уравнение (19) будет:

$$\varphi_o'' + (1-z^2)\varphi_o = 0$$

и одно решение этого уравнения будет

$$\varphi_o = e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Затем из формулы (21) следует постепенно:

$$\varphi_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right)$$

как знакомое нам выражение функций Эрмита. Интегрируя уравнение (22) находим, что $e^{\frac{z^2}{2}}\varphi_n(z)$ является полиномом n-ого порядка, называемым „полиномом Эрмита".

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



# ZUSAMMENFASSUNG.

**Über die Rekursionsformeln der Besselschen und Hermiteschen Funktionen.**

F. Noether (Tomsk).

Bei verschiedenen Funktionssystemen der mathematischen Physik sind Rekursionsformeln bekannt, die Funktionen mit aufeinanderfolgendem Index verbinden. Es wird gezeigt, dass diese Rekursionsformeln unmittelbar aus der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+U=0$$

hervorgehen, wenn man diese durch ein System von 2 Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt, etwa:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=V; \qquad \frac{\partial V}{\partial x}-i\frac{\partial V}{\partial y}=-U.$$

In Polarkoordinaten z. B. geschrieben führen diese Gleichungen durch Trennung der Variabeln auf die Rekursionsformeln der Besselschen Funktionen, in parabolischen Koordinaten auf die Rekursionsformeln der Hermiteschen Polynome, bzw, Orthogonalfunktionen.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЛИНДЕЛЕФА.

И. И. ПРИВАЛОВ (Москва).

1. В нашем мемуаре: „О некоторых вопросах теории субгармонических и аналитических функций" (Мат. Сб. т. 41, в. 4) содержится следующее предложение:

Если $v(z)=V[w(z)]$, где $V(z)$ есть функция субгаромническая в единичном круге, а $w(z)$ голоморфная и удовлетворяющая условиям: $w(0)=0$, $|w(z)|<1$, то имеет место неравенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

каково бы ни было $r<1$; если при некотором значении $r$ неравенство обращается в равенство, то это возможно лишь в случаях, когда либо $V(z)$ гармоническая функция внутри круга радиуса $r$ либо $w(z)\equiv ze^{i\alpha}$. Доказательство этой теоремы, данное в упомянутой работе, основано на принципе гармонической мажоранты и состоит в следующем. Обозначим через $g(z)$ и $G(z)$ наилучшие гармонические мажоранты функций $v(z)$ и $V(z)$ для круга $|z|\leqslant r$.

Заметив, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})\,d\varphi=g(0)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(re^{i\varphi})\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\varphi})\,d\varphi=G(0)$$

мы докажем наше предложение, если установим неравенство $g(0)\leqslant G(0)$.

Так как $v(re^{i\varphi})=V[w(re^{i\varphi})]\leqslant G[w(re^{i\varphi})]$, $|w(re^{i\varphi})|\leqslant r$, последнее в силу классического неравенства Шварца, то

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G[w(re^{i\varphi})]\,d\varphi=G[w(0)]=G(0),$$ что и нужно.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Сверх того из изложенного видно, что знак равенства будет лишь, когда $g(0)=G(0)$, т. е. только в тех случаях, если $w(z)$ есть выражение вида $ze^{i\alpha}$ или $V(z)$ совпадает с мажорантой $G$, т. е. есть гармоническая функция внутри круга радиуса $r$.

2. Предположим теперь, что $w(z)$ есть любая функция, голоморфная в единичном круге, удовлетворяющая лишь условию: $|w(z)|<1$

Выполним линейные преобразования

$$\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}=t,\quad \frac{w(z)-w(z_0)}{1-\overline{w(z_0)}\,w(z)}=w_1,$$

из которых найдем: $w_1=w_1(t)$, $w_1(0)=0$, $|w_1(t)|<1$ при $|t|<1$. Полагая $z=l(t)$, $w=L(w_1)$ и обозначая $v$. $l$ через $v_1$, а $VL$ через $V_1$ перепишем соотношение $v(z)=V[w(z)]$ в виде: $v_1(t)=V_1[w_1(t)]$,

В силу доказанного

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1(re^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_1(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

каково бы ни было $r<1$.

Возвращаясь к переменному $z$ при помощи подстановки $t=\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ и обозначая через $\sigma$ и $\Sigma$ неэвклидовы окружности с центром $z_0$ и $w(z_0)$ одного и того же неэвклидова радиуса $\rho=\ln\dfrac{1+r}{1-r}$, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma v(z)\,d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma V(Z)\,d\Theta\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

где $d\theta$ и $d\Theta$ углы между бесконечно близкими неэвклидовыми радиусами в $\sigma$ и $\Sigma$.

Знак равенства возможен, очевидно, лишь в случаях, когда либо $V(z)$ есть гармоническая функция внутри $\Sigma$, либо $w(z)$ есть неэвклидово движение переводящее $\sigma$ в $\Sigma$:

$$\frac{w(z)-w(z_0)}{1-\overline{w(z_0)}\,w(z)}=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}e^{i\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

3. Пусть $V(z)$ любая неотрицательная субгармоническая функция в единичном круге, $w(z)$ голоморфная и удовлетворяющая условию $|w(z)|<1$. Положим $v(z)=V[w(z)]$ и докажем, что

$$M_p[v,\sigma]\leqslant M_p[V,\Sigma],\ p\geqslant 1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

где положено:

$$M_p[v,\sigma]=\left[\frac{1}{2\pi}\int_\sigma v^p(z)\,d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



а $\sigma$ и $\Sigma$ суть неэвклидовы окружности с центрами $z_0$ и $w(z_0)$ одного и того же неэвклидова радиуса $\rho$. В самом деле, применяя неравенство (1) к функциям $v^p$ и $V^p$, которые будут субгармоническими, если $p \geqslant 1$, получим (2).

Неравенство (2) имеет место при любом $p > 0$, если функция $V(z)$ логарифмически-субгармоническая в единичном круге, потому что тогда $v^p$ и $V^p$ будут субгармоническими, если $p > 0$. Знак равенства в (2) возможен, очевидно, лишь в случае, когда $w(z)$ есть неэвклидово движение переводящее $\sigma$ в $\Sigma$ (при $p = 1$, как было показано в $n^o$ 2, также в случае, когда $V(z)$ гармоническая внутри $\Sigma$).

4. Заставляя $p$ неограниченно возрастать, и переходя в этом предположении к пределу в неравенстве (2), получим для любой непрерывной субгармонической функции $V(z)$ соотношение:

$$\mathrm{Max}_{\sigma} v(z) \leqslant \mathrm{Max}_{\Sigma} V(Z), \qquad \text{или } v(z) \leqslant \mathrm{Max}_{\Sigma} V(Z) \ldots\ldots (3)$$

где $z$ принадлежит замкнутому неэвклидову кругу с центром $z_o$, неэвклидова радиуса $\rho$, а $\Sigma$ обозначает неэвклидову окружность того же радиуса $\rho$ с неэвклидовым центром $w(z_o)$. Гипотеза $V \geqslant 0$ здесь может быть отброшена, так как неравенство (3) не изменится, если заменить $v$ и $V$ через $v + C$ и $V + C$, где $C$ постоянное. Впрочем неравенство (3) может быть непосредственно получено, если заметить, что в силу теоремы Шварца-Пика $w(z)$ либо выражает неэвклидово движение переводящее $\sigma$ в $\Sigma$, либо $w(z)$ находится внутри $\Sigma$, когда $z$ описывает $\sigma$. Это последнее замечание, сверх того, показывает, что знак равенства в (3) может быть только в случае, когда $w(z)$ есть неэклидово движение переводящее $\sigma$ в $\Sigma$, ибо субгармоническая функция отличная от постоянного, не может достигать максимума внутри области.

5. Установив принцип максимума, выражаемый неравенством (3), для любой непрерывной субгармонической функции $V(z)$, естественно поставить вопрос о том, при каком условии будет иметь место принцип минимума, т. е. $\min_{\sigma} v(z) \geqslant \min_{\Sigma} V(Z)$. Прежде всего, очевидно, что для субгармонических функций, допускающих минимум внутри области, этот принцип вообще не верен, как показывает тривиальный пример:

$$V(z) = |z|^2, \quad w(z) = az, \quad a < 1.$$

Однако, если предположить, что непрерывная субгармоническая функция $V(z)$ не имеет минимума ни в какой точке единичного круга, то справедлив и принцип минимума, выражаемый неравенством:

$$v(z) \geqslant \min_{\Sigma} V(Z) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

где $z$ принадлежит неэвклидову замкнутому кругу с центром $z_o$ неэвклидова радиуса $\rho$, а $\Sigma$ есть неэвклидова окружность того же радиуса $\rho$ с центром $w(z_o)$, при чем знак равенства в (4) возможен

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



лишь в случае, когда $w(z)$ есть неэвклидово движение, переводящее $\sigma$ в $\Sigma$. Это непосредственно следует из теоремы Шварца-Пика.

В частности оба принципа (3) и (4) имеют место для гармонической функции $V(z)$.

6. Из принципа максимума (3), как частный случай, получим теорему Шварца-Пика, если примем $V(z) = D[w(z_0), z]$, где

$$D[w(z_0), z] = \ln \frac{|1 - \overline{w(z_0)}\, z| + |z - w(z_0)|}{|1 - \overline{w(z_0)}\, z| - |z - w(z_0)|}$$

обозначает неэвклидово расстояние между точками $w(z_0)$ и $z$. Так как $D[w(z_0), z]$ есть функция непрерывная субгармоническая в единичном круге, то применяя (3) получим:

$$D[w(z_0),\ w(z)] \leqslant \mathrm{Max}_{\Sigma}\, D[w(z_0), Z] = \rho,$$

где $z$ удовлетворяет неравенству $D[z_0, z] \leqslant \rho$, при чем экстремальный случай возможен лишь, когда $w(z)$ выражает неэвклидово движение.

7. Чтобы распространить предыдущие исследования на любую односвязную область $D$, предварительно перепишем неравенство (1) в иной форме.

Обозначим через $G(z_0, z)$ функцию Грина для единичного круга с логарифмической особенностью при $z = z_0$. Рассматривая неэвклидову окружность с центром $z_0$ неэвклидова радиуса $\rho$, мы немедленно заключаем:

$$d\theta = \frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}\, ds$$

где $d\theta$ есть угол между двумя бесконечно близкими неэвклидовыми радиусами, $ds$ соответствующая эвклидова дуга окружности $\sigma$ и производная взята по внутренней нормали.

Действительно, это равенство очевидно, если $z_0 = 0$; с другой стороны при линейном преобразовании, переводящем круг с центром в начале координат неэвклидова радиуса $\rho$, в неэвклидов круг того же радиуса с центром (неэвклидовым) $z_0$, величина $d\theta$ сохраняется, а $\dfrac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}\, ds$ есть инвариант конформного отображения; следовательно наше равенство справедливо.

Заметив это, перепишем неравенство (1) в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} v(z)\, \frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}\, ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} V(Z)\, \frac{\partial G(w(z_0), Z)}{\partial N}\, dS \quad \ldots\ldots (1')$$

После этого можем обратиться к исследованию общего случая. Пусть $V(z)$ есть функция субгармоническая в односвязной области

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$D$, $w(z)$ любая голоморфная функция в области $D$, удовлетворяющая тому условию, что проекция точек ее Римановой поверхности дает область являющуюся частью области $D$.

Обозначим через $\sigma_\lambda$ и $\Sigma_\lambda$ соответственные кривые Грина $G(z_0,z)=\lambda$ и $G(w(z_0),z)=\lambda$ области $D$; наконец положим $v(z)=V[w(z)]$.

При этих условиях имеет место соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} v(z)\frac{\partial G(z_0,z)}{\partial n}ds\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_\lambda} V(Z)\frac{\partial G(w(z_0),Z)}{\partial N}dS \quad \ldots\ldots (5)$$

Доказательство неравенства (5) легко приводится к вышеустановленному принципу (1) посредством конформного отображения области $D$ на единичный круг. В самом деле, пусть $u=f(z,z_0)$, $f(z_0,z_0)=0$ есть функция реализующая конформное отображение области $D$ на круг $|u|<1$ с переводом точки $z_0$ в начало координат. Положим $f[w(z),w(z_0)]=w_1$, откуда следует, что $w_1=w_1(u)$ $w_1(0)=0$, $|w_1(u)|<1$.

Данное соотношение $v(z)=V[w(z)]$ перепишется в виде: $v_1(u)=V_1[w_1(u)]$, где $V_1$ функция субгармоническая в единичном круге, причем положено $v_1=vf^{-1}(u,z_0)$, $V_1=Vf^{-1}(u,w(z_0))$.

Доказываемое неравенство (5), с помощью конформного отображения $f(Z,w(z_0))=f(z,z_0)$ области $D$ в самое себя переходит в следующее:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} v(z)\frac{\partial G(z_0,z)}{\partial n}ds\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} V_1[f(z,z_0)]\frac{\partial G(z_0,z)}{\partial n}ds$$

Далее, выполняя конформное отображение области $D$ на единичный круг, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1(u)\,d\varphi\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_1(u)\,d\varphi, \text{ где } u=re^{i\varphi},$$

что было ранее доказано.

Очевидно, что знак равенства в соотношении (5) возможен лишь в случаях, когда либо $V(z)$ есть гармоническая функция внутри $\Sigma_\lambda$, либо $w(z)$ конформно отображает область $D$ самое в себя с переводом точки $z_0$ в $w(z_0)$.

8. Пусть $V(z)\geqslant 0$ субгармоническая функция в области $D$, $w(z)$ голоморфная, отображающая область $D$ на Риманову поверхность проектирующуюся на часть $D$. Положим $v(z)=V[w(z)]$ и докажем, что $M_p[v,\sigma_\lambda]\leqslant M_p[V,\Sigma_\lambda]$, $p\geqslant 1$ . . . . . (6),

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где положено:

$$M_p[v, \sigma_\lambda] = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} v^p(z)\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

$\sigma_\lambda$ и $\Sigma_\lambda$ суть линии Грина с уравнениями $G(z_0, z)=\lambda$ и $G[w(z_0), z]=\lambda$.

Для этого стоит только применить неравенство (5) к функциям $v^p$ и $V^p$, которые будут субгармоническими, если $p \geqslant 1$. Неравенство (6) имеет место при любом $p>0$, если функция $V(z)$ логарифмически субгармоническая в области $D$, потому, что тогда $v^p$ и $V^p$ будут субгармоническими при любом $p>0$. Знак равенства в (6) возможен лишь в случае, когда $w(z)$ реализует конформное отображение области $D$ самое в себя.

Аналогично $n^o$ 4, из (6) при $p \to +\infty$ найдем:

$$v(z) \leqslant \operatorname{Max}_{\Sigma_\lambda} V(Z). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

где $z$ принадлежит области $G(z_0, z) \geqslant \lambda$, а $\Sigma_\lambda$ обозначает линию Грина с уравнением $G[w(z_0), z]=\lambda$. Функция $V(z)$ произвольная непрерывная субгармоническая в $D$.

Впрочем неравенство (7) может быть непосредственно получено, если выполнить конформное отображение области $D$ на единичный круг $f(z, z_0)=u, f(z_0, z_0)=0$ и положить $f[w(z), w(z_0)]=w_1=w_1(u)$. Тогда $w_1(0)=0$, $|w_1(u)|<1$ при $|u|<1$.

Применяя классическую лемму Шварца, мы видим, что $w(z)$ либо реализует конформное отображение области $D$ самое в себя переводя $\sigma_\lambda$ в $\Sigma_\lambda$, либо $w(z)$ находится внутри $\Sigma_\lambda$, когда $z$ описывает $\sigma_\lambda$. Это замечание, сверх того, показывает, что знак равенства в (7) может быть только в случае, когда $w(z)$ конформно отображает область $D$ самое в себя, ибо субгармоническая функция, отличная от постоянного, не может достигать максимума внутри области.

Также легко показывается: при гипотезе, что $V(z)$ не имеет минимума ни в какой точке области $D$, справедлив также принцип:

$$v(z) \geqslant \min_{\Sigma_\lambda} V(Z) \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

где $z$ принадлежит области $G(z_0, z) \geqslant \lambda$, а $\Sigma_\lambda$ определяется уравнением $G[w(z_0); z]=\lambda$.

Знак равенства в (8) возможен лишь в случае, когда $w(z)$ конформно отображает область $D$ самое в себя.

9. Приложим принцип, выражаемый неравенством (5), к частному случаю, приняв $V(z)=-G[w(z_0), z]$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Очевидно $V(z)$ функция субгармоническая в области $D$.
В силу неравенства (5) имеем:

$$-G[w(z_0), w(z)] \leqslant -\operatorname{Max}_{\Sigma_\lambda} G[w(z_0), Z] = -\lambda$$

откуда следует, что $G[w(z_0), w(z)] \geqslant \lambda$, когда $G(z_0, z) \geqslant \lambda$.

Более обще положим $f(z) = F[w(z)]$, где $F(z)$ есть функция голоморфная в области $D$, и $w(z)$, голоморфная в $D$, удовлетворяет условиям: $w(0) = 0$, $w(z)$ отображает область на Риманову поверхность проектирующуюся на часть $D$.

Примем за субгармоническую функцию $V(z)$ выражение:

$$V(z) = -G_F[F(z), f(0)],$$

где $G_F[z, f(0)]$ есть функция Грина для поверхности Римана, образованной значениями $F(z)$, с особенностью при $z = f(0)$. Тогда применяя тоже неравенство (5), получим: если $G_D(z, 0) \geqslant \lambda$
то
$-G_F[f(z), f(0)] \leqslant -\operatorname{Max} G_F[F(z), F(0)] = -\operatorname{Max} G_D(z, 0) = -\lambda$,
откуда $G_F[f(z), f(0)] \geqslant \lambda$, что выражает собою известный принцип Линделефа. Очевидно экстремум достигается лишь в случае, когда $w(z)$ реализует конформное отображение области $D$ самое в себя.

10. Пусть $w(z)$ голоморфная функция в единичном круге, модуль которой меньше единицы; предположим, далее, что существует последовательность чисел $z_1, z_2, \ldots z_k, \ldots$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} w(z_k) = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1-|w(z_k)|}{1-|z_k|} = \alpha$, где $\alpha$ конечно.

Тогда, как известно, $\alpha \geqslant \dfrac{1-|w(0)|}{1+|w(0)|} > 0$.

Обозначим через $K_k$ и $\Gamma_k$ неэвклидовы окружности, имеющие центры $z_k$ и $w(z_k)$, одного и того же неэвклидова радиуса, а через K и Γ предельные линии неэвклидовой плоскости $|z| < 1$, к которым стремятся соответственно $K_k$ и $\Gamma_k$ при $k \to \infty$.

Пусть $v(z) = V[w(z)]$, где $V(z)$ субгармоническая функция в единичном круге.

В силу предыдущего имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{K_k} v(z)\frac{\partial G(z_k, z)}{\partial n}\,ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k} V(z)\frac{\partial G[w(z_k), z)}{\partial n}\,ds,$$

где $G$ функция Грина для единичного круга. Заметив, что

$$\frac{\partial G(z_k, z)}{\partial n}\,ds = \frac{1-|z_k|^2}{|z-z_k||1-\bar{z}_k z|}\,ds,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



из последнего неравенства в пределе при $k \to \infty$ получим.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{K} v(z)\frac{ds}{|1-z|^2} \leqslant \frac{\alpha}{2\pi}\int_{\Gamma} V(z)\frac{ds}{|1-z|^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

При переходе к пределу мы предполагали, что функция $V(z)$ в замкнутом круге $\Gamma$ удовлетворяет условию: $\frac{|V(z)|}{|1-z|^2} < C$.

В этом случае в круге с окружностью K функция $v(z)$ удовлетворяет тому же условию, вследствие теоремы Julia.

11. Предположим, что $F(z)$ функция голоморфная в единичном круге, включая точку $z=1$, удовлетворяющая условиям:

$$F(1)=0,\ F'(1)=0.$$

Обозначая через $w(z)$ произвольную функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Julia, рассмотрим семейство функций $f(z)=F[w(z)]$ Полагая в неравенстве (9) $V(z)=|F(z)|$ и переходя к пределу в полученном соотношении

$$\frac{1}{K}\int_{K}\left|\frac{f(z)}{(1-z)^2}\right| ds \leqslant \frac{\Gamma\alpha}{K}\,\frac{1}{\Gamma}\int_{\Gamma}\left|\frac{F(z)}{(1-z)^2}\right| ds$$

в предположении, что радиусы окружностей K и $\Gamma$ стремятся к нулю, найдем:

$$|f''(1)| \leqslant \alpha^2 |F''(1)| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Это неравенство обращается в равенство, если за $w(z)$ принять неэвклидово движение

$$w(z)=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\cdot\frac{1-\bar{z}_0}{1-z_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

12. Обозначая снова через $w(z)$ функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Julia, а через $V(z)$ субгармоническую непрерывную функцию в единичном круге, положим: $v(z)=V[w(z)]$. Непосредственно из теоремы Julia вытекает, что

$$v(z) \leqslant \mathrm{Max}_{\Gamma}\, V(Z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

где $z$ принадлежит замкнутому кругу с окружностью K, касающейся в точке $z=1$ основной окружности, а $\Gamma$ окружность, касающаяся основной окружности в точке $Z=1$, при чем их радиусы $r$ $\rho$ связаны соотношением Julia:

$$\rho=\frac{\alpha r}{1-r(1-\alpha)}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Если предположить, что $V(z)$ не имеет минимума ни в какой точке внутри окружности Γ, то справедлив также принцип минимума:

$$v(z) \geqslant \min_{\Gamma} V(Z) \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Соотношения (11) и (12) обращаются в равенства лишь в случае, когда $w$ $(z)$ выражает неэвклидово движение, определяемое формулой (b).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# VERALLGEMEINERUNG EINER METHODE VON LINDELÖF.

**I. I. Priwaloff** (Moskau).

1. In meiner Abhandlung: „Über einige Fragen aus der Theorie der subharmonischen und der analytischen Funktionen“[1]) ist folgender Satz enthalten:

Wenn $v(z)=V[w(z)]$, wo $V(z)$ eine subharmonische Funktion im Innern des Einheitskreises, und $w(z)$ eine holomorphe Funktion, die folgenden Bedingungen genügt: $w(0)=0$, $|w(z)|<1$, so gilt folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

für jedes beliebige $r<1$; dass für irgend einen Wert von $r$ statt des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen gilt, ist nur in zwei Fällen möglich, nämlich enweder wenn $V(z)$ eine harmonische Funktion im Innern des Kreises vom Radius $r$, oder, wenn $w(z)\equiv ze^{i\alpha}$. Der Beweis dieses Theorems, der in der erwähnten Arbeit gegeben ist, beruht auf dem Prinzip der harmonischen Majoranten und besteht in Folgendem: Verstehen wir unter $g(z)$ und $G(z)$ die besten harmonischen Majoranten der Funktionen $v(z)$ und $V(z)$ für die Kreisfläche $|z|\leqslant r$, und bemerken, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})\,d\varphi=g(0)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(re^{i\varphi})\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\varphi})\,d\varphi=G(0),$$

so ist unser Satz bewiesen, wenn wir die Ungleichung feststellen: $g(0)\leqslant G(0)$. Da gilt

$$v(re^{i\varphi})=V[w(re^{i\varphi})]\leqslant G[w(re^{i\varphi})],\ |w(re^{i\varphi})|\leqslant r,$$

[1]) Math. Sbornik, Bd. 41, H. 4, 1934 (russisch).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



letzteres auf Grund der klassischen Schwarzschen Ungleichung, so folgt

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G[w(re^{i\varphi})]\,d\varphi = G[w(0))]=G(0),$$

was zu beweisen ist. Darüber hinaus ist aus dem Entwickelten ersichtlich, dass das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $g(0)=G(0)$, d. h. nur in den Fällen, dass $w(z)$ ein Ausdruck von der Form $ze^{i\alpha}$ ist, oder aber wenn $V(z)$ mit der Majoranten $G$ zusammenfällt, d. h. eine harmonische Funktion im Innern des Kreises vom Radius $r$ ist.

2. Wir setzen jetzt voraus, das $w(z)$ eine willkürliche, im Einheitskreis holomorphe Funktion ist, die nur der Bedingung $|w(z)|<1$ genügt. Dann führen wir die linearen Transformationen aus:

$$\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}=t,\quad \frac{w(z)-w(z_0)}{1-\overline{w(z_0)}\,w(z)}=w_1,$$

womit wir erhalten: $w_1=w_1(t)$, $w_1(0)=0$, $|w_1(t)|<1$ für $|t|<1$. Setzen wir $z=l(t)$, $w=L(w_1)$, und bezeichnen $v.$ $l$ mit $v_1$, sowie $VL$ mit $V_1$, so schreiben wir damit die Beziehung $v(z)=V[w(z)]$ in die Form um: $v_1(t)=V_1[w_1(t)]$.

Auf Grund des vorangehenden Beweises ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_1(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

für jedes beliebige $r<1$.

Kehren wir zu der Variabeln $z$ zurück mittels der Substitution $t=\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ und bezeichnen mit $\sigma$ und $\Sigma$ die nichteuklidischen Kreisumfänge, die die Zentren $z_0$ und $w(z_0)$ und ein und denselben nichteuklidischen Radius $\rho=\ln\frac{1+r}{1-r}$ haben, so folgt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma v(z)\,d\vartheta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma V(Z)\,d\Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wobei $d\vartheta$ und $d\Theta$ Winkel zwischen unendlich benachbarten nichteuklidischen Radien in $\sigma$ und $\Sigma$ bezeichnen.

Das Gleichheitszeichen ist offenbar nur in den Fällen möglich, wenn entweder $V(z)$ eine harmonische Funktion innerhalb von $\Sigma$, oder wenn $w(z)$ die nichteuklidische Bewegung

$$\frac{w(z)-w(z_0)}{1-\overline{w(z_0)}\,w(z)}=\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}e^{i\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

ist, die $\sigma$ in $\Sigma$ überführt.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



3. Es sei $V(z)$ eine beliebige nicht negative subharmonische Funktion im Einheitskreis, $w(z)$ eine holomorphe Funktion, die der Bedingung $|w(z)|<1$ genügt. Wir setzen $v(z)=V[w(z)]$ und zeigen, dass

$$M_p[v,\sigma] \leqslant M_p[V,\Sigma],\ p \geqslant 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wobei

$$M_p[v,\sigma]=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} v^p(z)\,d\vartheta\right]^{\frac{1}{p}},$$

gesetzt ist, während $\sigma$ und $\Sigma$ nichteuklidische Kreise mit den Zentren $z_0$ und $w(z_0)$, und mit ein und demselben nichteuklidischen Radius $\rho$ sind. In der Tat erhalten wir (2) durch Anwendung der Ungleichung (1) auf die Funktionen $v^p$ und $V^p$, die subharmonisch sind, wenn $p \geqslant 1$.

Für beliebige $p>0$ findet die Ungleichung (2) statt, wenn die Funktion $V(z)$ eine logarithmisch—subharmonische im Einheitskreis ist; denn dann sind $v^p$ und $V^p$ subharmonisch, wenn nur $p>0$. Das Gleichheitszeichen in (2) ist offensichtlich nur dann möglich, wenn $w(z)$ eine nichteuklidische Bewegung darstellt, die $\sigma$ in $\Sigma$ überfuhrt. (Für $p=1$ auch dann, wenn $V(z)$ eine harmonische Funktion innerhalb von $\Sigma$, wie in Nr. 2 bewiesen wurde).

4. Lassen wir nun $p$ unbegrenzt wachsen und gehen in diesem Sinne in der Ungleichung (2) zur Grenze über, so erhalten wir für eine beliebige stetige, subharmonische Funktion $V(z)$ die Beziehung:

$$\operatorname*{Max}_{\sigma} v(z) \leqslant \operatorname*{Max}_{\Sigma} V(Z) \text{ oder } v(z) \leqslant \operatorname*{Max}_{\Sigma} V(Z) \ldots\ldots (3)$$

wobei $z$ der abgeschlossenen nichteuklidischen Kreisfläche mit dem Zentrum $z_0$ und dem nichteuklidischen Radius $\rho$ angehört, während $\Sigma$ den nichteuklidischen Kreisumfang mit dem nämlichen Radius $\rho$ und dem nichteuklidischen Zentrum $w(z_0)$ bezeichnet. Die Annahme $V \geqslant 0$ kann hier fortgelassen werden, weil die Ungleichung (3) unverändert bleibt, wenn man $v$ und $V$ durch $v+C$, bzw. $V+C$ ersetzt, mit einer Konstanten $C$. Übrigens lässt sich die Ungleichung (3) unmittelbar erhalten, wenn man bemerkt, dass nach einem Satze von **Schwarz** und **Pick** $w(z)$ entweder eine nichteuklidische Bewegung darstellt, die $\sigma$ in $\Sigma$ überführt, oder aber $w(z)$ im Innern von $\Sigma$ verläuft, wenn $z$ den Kreis $\sigma$ beschreibt. Diese letztere Bemerkung zeigt ausserdem, dass das Gleichheitszeichen in (3) nur bestehen kann, wenn $w(z)$ eine nichteuklidische Bewegung ist, die $\sigma$ in $\Sigma$ überführt, da eine subharmonische Funktion, die nicht eine Konstante ist, im Innern ihres Bereichs kein Maximum erreichen kann.

5. Nachdem wir das Maximumprinzip, ausgedrückt durch die Ungleichung (3), für eine beliebige stetige, subharmonische Funktion $V(z)$ festgestellt haben, so ist es natürlich, die Frage zu stellen, unter welcher Bedingung ein Minimumprinzip gelten wird, d. h. eine Ungleichung der Form $\min_{\sigma} v(z) \geqslant \min_{\Sigma} V(Z)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Vor allem ist klar, dass für subharmonische Funktionen, die ein Minimum im Innern ihres Bereichs zulassen, dieses Prinzip im Allgemeinen nicht zutrifft, wie das triviale Beispiel zeigt:

$$V(z)=|z|^2, \quad w(z)=\alpha z, \quad \alpha<1.$$

Wenn man indes voraussetzt, dass die stetige subharmonische Funktion $V(z)$ in keinem Punkte des Einheitskreises ein Minimum besitzt, so gilt auch ein Minimumprinzip, das sich durch die Ungleichung

$$v(z)\geqslant \min_{\Sigma} V(Z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ausdrückt, wobei $z$ in der nichteuklidischen abgeschlossenen Kreisfläche mit dem Zentrum $z_0$ und dem nichteuklidischen Radius $\rho$ liegt, während $\Sigma$ ein nichteuklidischer Kreisumfang mit dem nämlichen Radius $\rho$ und Zentrum $w(z_0)$; das Gleichheitszeichen in (4) ist dabei nur möglich, wenn $w(z)$ eine nichteuklidische Bewegung ist, die $\sigma$ in $\Sigma$ überführt. Das folgt unmittelbar aus dem Satze von Schwarz und Pick.

Insbesondere gelten die beiden Prinzipe (3) und (4), für eine harmonische Funktion $V(z)$.

6. Aus dem Maximumprinzip (3) folgt, als Spezialfall, der Satz von **Schwarz** und **Pick**, wenn wir annehmen $V(z)=D[w(z_0), z]$, wobei

$$D[w(z_0),\ z]=\ln\frac{|1-\overline{w(z_0)}\,z|+|z-w(z_0)|}{|1-\overline{w(z_0)}\,z|-|z-w(z_0)|}$$

den nichteuklidischen Abstand zwischen den Punkten $w(z_0)$ und $z$ bedeutet. Da $D[w(z_0), z]$ eine stetige subharmonische Funktion im Einheitskreis ist, so folgt durch Anwendung von (3):

$$D[w(z_0),\ w(z)]\leqslant \operatorname*{Max}_{\Sigma} D[w(z_0),\ Z]=\rho,$$

wobei $z$ der Ungleichung $D[z_0, z]\leqslant\rho$ genügt; der Extremalfall ist nur möglich, wenn $w(z)$ eine nichteuklidische Bewegung darstellt.

7, Um die vorangehenden Untersuchungen auf einen beliebigen einfach zusammenhängenden Bereich $D$ zu erweitern, schreiben wir vorläufig die Ungleichung (1) in einer anderen Form. Mit $G(z_0, z)$ bezeichnen wir die Greensche Funktion für den Einheitskreis, mit logarithmischer Singularität bei $z=z_0$. Durch Betrachtung des nichteuklidischen Kreises mit dem Zentrum $z_0$ und Radius $\rho$ schliessen wir sofort:

$$d\vartheta=\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}\,ds,$$

wo $d\vartheta$ der Winkel zwischen zwei unendlich benachbarten nichteuklidischen Radien, $ds$ der entsprechende euklidische Bogen auf dem Umfang $\sigma$ ist, und die Ableitung nach der inneren Normalen genommen wird.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Diese Gleichung ist in der Tat klar, wenn $z_0=0$; andererseits bleibt bei einer linearen Transformation, die den Kreis mit Zentrum im Koordinatenanfangspunkt und ntchteuklidischen Radius $\rho$ in einen nichteuklidischen Kreis vom nämlichen Radius mit dem (nichteuklidischen) Mittelpunkt $z_0$ überführt, die Grösse $d\vartheta$ erhalten, während $\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}$ eine Invariante der konformen Abbildung ist; folglich ist unsere Gleichung richtig.

Nach dieser Bemerkung geben wir der Ungleichung (1) die Form:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} v(z)\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} V(Z)\frac{\partial G[w(z_0), Z]}{\partial N}dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Hiernach können wir uns der Untersuchung des allgemeinen Falles zuwenden. Es sei $V(z)$ eine subharmonische Funktion in dem einfach zusammenhängenden Gebiete $D$, $w(z)$ eine beliebige, in $D$ holomorphe Funktion, die der Bedingung genügt, dass die Punktprojektion ihrer Riemannschen Flache als Abbildung von $D$ ein Gebiet ergibt, das als Teilgebiet in $D$ enthalten ist.

Mit $\sigma_\lambda$ und $\Sigma_\lambda$ bezeichnen wir die entsprechenden Greenschen Kurven $G(z_0, z)=\lambda$ und $G(w(z_0), z)=\lambda$ des Gebietes $D$; schliesslich setzen wir $v(z)=V[w(z)]$. Unter diesen Bedingungen gilt die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} v(z)\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_\lambda} V(Z)\frac{\partial G[w(z_0), Z]}{\partial N}dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Der Beweis dieser Beziehung (5) liegt einfach in der Zurückführung auf das oben festgestellte Prinzip (1) mittels konformer Abbildung des Gebietes $D$ auf den Einheitskreis. In der Tat, sei $u=f(z, z_0)$, $f(z_0, z_0)=0$ eine Funktion, die die konforme Abbildung des Gebietes $D$ auf den Kreis $|u|<1$ bewirkt und den Punkt $z_0$ in den Koordinatenanfang überführt. Wir setzen $f[w(z), w(z_0)]=w_1$, woraus folgt, dass $w_1=w_1(u)$, $w_1(0)=0$, $|w_1(u)|<1$. Die gegebene Beziehung $v(z)=V[w(z)]$ nimmt die Form an: $v_1(u)=V_1[w_1(u)]$, wobei $V_1$ eine subharmonische Funktion im Einheitskreise, während $v_1=vf^{-1}(u, z_0)$, $V_1=Vf^{-1}[u, w(z_0)]$ gesetzt ist.

Die zu beweisende Ungleichung (5) geht durch die konforme Abbildung $f(Z, w(z_0))=f(z, z_0)$ des Gebietes $D$ auf sich selbst in folgende über:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} v(z)\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} V_1[f(z, z_0)]\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}ds$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Indem man ferner die konforme Abbildung des Gebietes $D$ auf den Einheitskreis ausführt, erhält man:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1(u)\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_1(u)\,d\varphi, \text{ mit } u = re^{i\varphi}, \text{ und dies ist in der Tat}$$

früher bewiesen.

Offenbar ist das Gleichheitszeichen in der Beziehung (5) nur möglich, wenn entweder $V(z)$ eine harmonische Funktion innerhalb $\Sigma_\lambda$, oder wenn $w(z)$ das Gebiet $D$ konform auf sich selbst abbildet und dabei den Punkt $z_0$ in $w(z_0)$ überführt.

8. Es sei $V(z) \geqslant 0$ eine subharmonische Funktion im Gebiete $D$, und $w(z)$ eine holomorphe Funktion, die das Gebiet $D$ auf eine Riemannsche Fläche abbildet, die sich auf einen Teil von $D$ projizieren lässt. Wir setzen $v(z) = V[w(z)]$ und beweisen, dass

$$M_p[v, \sigma_\lambda] \leqslant M_p[V, \Sigma_\lambda], \; p \geqslant 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

wobei

$$M_p[v, \sigma_\lambda] = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\lambda} v^p(z)\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial n}\,ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

gesetzt ist, während $\sigma_\lambda$ und $\Sigma_\lambda$ Greensche Kurven mit den Gleichungen $G(z_0, z) = \lambda$ bzw. $G[w(z_0), z] = \lambda$ sind.

Zu diesem Zwecke braucht man nur die Ungleichung (5) auf die Funktionen $v^p$ und $V^p$ anzuwenden, die subharmonisch sind, wenn $p \geqslant 1$. Die Ungleichung (6) gilt für beliebiges $p > 0$, wenn die Funktion $V(z)$ logarithmisch subharmonisch im Gebiete $D$, weil dann $v^p$ und $V^p$ subharmonisch bei beliebigem $p > 0$ werden. Das Gleichheitszeichen in (6) ist nur dann möglich, wenn $w(z)$ eine konforme Abbildung des Gebietes $D$ auf sich selbst bewirkt.

Analog zu Nr. 4 finden wir aus (6) durch den Grenzübergang $p \to +\infty$:

$$v(z) \leqslant \mathrm{Max}_{\Sigma_\lambda}\, V(Z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

wobei $z$ dem Gebiet $G(z_0, z) \geqslant \lambda$ angehört, während $\Sigma_\lambda$ die Greensche Kurve mit der Gleichung $G[w(z_0), z] = \lambda$ bedeutet. $V(z)$ ist eine willkürliche stetige subharmonische Funktion in $D$.

Übrigens kann man die Ungleichung (7) auch unmittelbar erhalten, indem man die konforme Abbildung des Bereiches $D$ auf den Einheitskreis: $f(z, z_0) = u$, $f(z_0, z_0) = 0$ ausführt und $f[w(z), w(z_0)] = w_1 = w_1(u)$ setzt. Dann ist $w_1(0) = 0$, $|w_1(u)| < 1$ bei $|u| < 1$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Indem man das klassische Lemma von **Schwarz** anwendet, sieht man, dass $w(z)$ entweder die konforme Abbildung des Gebietes $D$ auf sich selbst bewirkt und dabei $\sigma_\lambda$ in $\Sigma_\lambda$ überfuhrt, oder sich im Innern von $\Sigma_\lambda$ befindet, wenn $\sigma_\lambda$ von $z$ durchlaufen wird. Diese Bemerkung zeigt überdies, dass das Gleichheitszeichen in (7) nur dann bestehen kann, wenn $w(z)$ das Gebiet $D$ konform auf sich selbst abbildet, da eine subharmonische Funktion, die keine Konstante ist, im Innern ihres Bereichs kein Maximum erreichen kann.

Ebenso zeigt man leicht unter der Annahme, dass $V(z)$ in keinem Punkte des Gebiets $D$ ein Minimum hat, die Richtigkeit des Prinzips:

$$v(z) \geqslant \min_{\Sigma_\lambda} V(Z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

wobei $Z$ dem Gebiet $\Sigma_\lambda$ $G(z_o, z) \geqslant \lambda$ angehört, und $\Sigma_\lambda$ durch die Gleichung $G\ [w\ (z_o), z] = \lambda$ definiert ist. Das Gleichheitszeichen in (8) ist nur möglich, wenn $w(z)$ das Gebiet konform auf sich selbst abbildet.

9. Wir wenden nun das durch die Ungleichung (5) ausgedrückte Prinzip auf einen speziellen Fall an, indem wir $V(z) = -G[w(z_o), z]$ annehmen. Offenbar ist dann $V(z)$ eine subharmonische Funktion in dem Bereiche $D$.

Vermöge der Ungleichung (5) haben wir:

$$-G[w(z_o), w(z)] \leqslant -\operatorname{Max}_{\Sigma_\lambda} G[w(z_0), Z] = -\lambda$$

woraus folgt, dass $G\ [w(z_o),\ w(z)] \geqslant \lambda$, wenn $G\ (z_o, z) \geqslant \lambda$.

Allgemeiner setzen wir $f(z) = F[w(z)]$, wobei $F(z)$, eine holomorphe Funktion im Gebiete $D$, und die ebenfalls in $D$ holomorphe Funktion $w(z)$ genügt noch den Bedingungen, dass sie das Gebiet auf eine Riemannsche Fläche abbildet, die sich auf einen Teil von $D$ projizieren lässt, ferner dass $w(0) = 0$.

Als subharmonische Funktion $V(z)$ nehmen wir den Ausdruck:

$$V(z) = -G_F[F(z), f(0)],$$

wo $G_F[z, f(0))$ die Greensche Funktion, mit Singularität bei $z = f(0)$, für die aus den Werten $F(z)$ gebildete Riemannsche Fläche ist. Indem wir dann ebenfalls die Ungleichung (5) anwenden, erhalten wir das Resultat: Wenn

$$G_D(z, 0) \geqslant \lambda,$$

so ist

$$-G_F[f(z), f(0)] \leqslant -\operatorname{Max} G_F[F(z),\ F(0)] = -\operatorname{Max} G_D(z, 0) = -\lambda$$

wonach $G_F[f(z), f(0)] \geqslant \lambda$, was ein Ausdruck für ein bekanntes Prinzip von **Lindelöf** ist. Offenbar wird das Extremum nur erreicht, wenn $w(z)$ die konforme Abbildung des Gebietes $D$ auf sich selbst bewirkt.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



10. Es sei $w(z)$ eine holomorphe Funktion im Einheitskreis, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist; ferner setzen wir eine solche Folge von Zahlen $z_1, z_2, \ldots z_k, \ldots$ als vorhanden voraus, dass

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 1, \quad \lim_{k\to\infty} w(z_k) = 1 \text{ und } \lim_{k\to\infty} \frac{1-|w(z_k)|}{1-|z_k|} = \alpha \text{ mit endlichem } \alpha.$$

Bekanntlich ist dann

$$\alpha \geqslant \frac{1-|w(0)|}{1+|w(0)|} > 0,$$

Mit $K_k$ und $\Gamma_k$ bezeichnen wir nichteuklidische Kreise mit den Mittelpunkten $z_k$, bzw. $w(z_k)$, von ein und demselben nichteuklidischen Radius, mit K und $\Gamma$ dagegen Grenzlinien in der nichteuklidischen Ebene $|z|<1$, denen entsprechend $K_k$ und $\Gamma_k$ zustreben für $k\to\infty$.

Ferner sei $v(z) = V[w(z)]$, wobei $V(z)$ eine subharmonische Funktion im Einheitskreis. Auf Grund des Vorangehenden haben wir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{K_k} v(z)\frac{\partial G(z_k, z)}{\partial n}\,ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k} V(z)\frac{\partial G(w(z_k), z)}{\partial n}\,ds,$$

worin $G$ die Greensche Funktion für den Einheitskreis. Beachtet man, dass

$$\frac{\partial G(z_k, z)}{\partial n}\,ds = \frac{1-|z_k|^2}{|z-z_k|\,|1-z_k z|}\,ds,$$

so folgt aus der letzten Ungleichung in der Grenze für $k\to\infty$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{K} v(z)\frac{ds}{|1-z|^2} \leqslant \frac{\alpha}{2\pi}\int_{\Gamma} V(z)\frac{ds}{|1-z|^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Bei diesem Grenzübergang haben wir vorausgesetzt, dass die Funktion $V(z)$ in der abgeschlossenen Kreisfläche $\Gamma$ der Bedingung $\frac{|V(z)|}{|1-z|^2} < C$ genügt. In diesem Falle genügt in dem Kreise mit dem Umfang K die Funktion $v(z)$ der nämlichen Bedingung, zufolge einem Satze von **Julia.**

11. Wir setzen voraus, dass $F(z)$ eine holomorphe Funktion im Einheitskreis, mit Einschluss des Punktes $z=1$, die den Bedingungen genügt: $F(1)=0$, $F'(1)=0$. Mit $w(z)$ bezeichnen wir eine beliebige Funktion, die den Bedingungen des Satzes von **Julia** genügt, und betrachten die Gesamtheit der Funktionen: $f(z) = F[w(z)]$. Indem wir

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



in der Ungleichung (9) $V(z)=|F(z)|$ setzen und in der so erhaltenen Beziehung

$$\frac{1}{K}\int_K \left|\frac{f(z)}{(1-z)^2}\right| ds \leqslant \frac{\Gamma_\alpha}{K}\,\frac{1}{\Gamma}\int_\Gamma \left|\frac{F(z)}{(1-z)^2}\right| ds$$

zur Grenze übergehen, so finden wir unter der Voraussetzung, dass die Radien der Kreise K und Γ gegen Null streben:

$$|f''(1)| \leqslant \alpha^2 |F''(1)| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Diese Ungleichung verwandelt sich in eine Gleichung, wenn für $w(z)$ die nichteuklidische Bewegung

$$w(z)=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\cdot\frac{1-\bar{z}_0}{1-z_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

angenommen wird.

12. Indem wir wieder unter $w(z)$ eine Funktion verstehen, die den Bedingungen des Satzes von **Julia** genügt, und unter $V(z)$ eine subharmonische Funktion im Einheitskreise, setzen wir $v(z)=V[w(z)]$. Dem Satze von Julia entspringt dann unmittelbar die Beziehung:

$$v(z) \leqslant \mathrm{Max}_\Gamma V(Z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

wobei $z$ der abgeschlossenen Kreisfläche mit dem Umfang K angehört, der im Punkte $z=1$ den Hauptkreis berührt, während Γ ein Kreisumfang, der den Hauptkreis im Punkte $Z=1$ beruhrt. Ihre Radien $r$ und $\rho$ sind durch die Beziehung von Julia verbunden:

$$\rho=\frac{\alpha r}{1-r(1-\alpha)}$$

Wenn man annimmt, dass $V(z)$ in keinem Punkte im Innern des Umfangs Γ ein Minimum hat, so besteht auch das Minimumprinzip zu Recht:

$$v(z) \geqslant \min_\Gamma V(Z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Die Beziehungen (11) und (12) gehen in Gleichungen nur dann über, wenn $w(z)$ eine nichteuklidische Bewegung darstellt, die nach der Formel (b) definiert ist.

Ins Deutsche übertragen von F. Noether.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# ÜBER DIE VEREINFACHUNG EINES LANDAUSCHEN SATZES.

P. ERDÖS (Manchester) und P. TURAN (Budapest).

Es bedeute $l_a(k)$ die kleinste Zahl für welche $a^{l_a(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl. Wir wollen beweisen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(l_a(k))^{\varepsilon}} < C_1 \operatorname{loglog} a$$

ist, wo $C_1$ nur von $\varepsilon$ abhängt.

Romanoff[1]) bewies zuerst, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\, l_a(k)}$ konvergiert.

Landau[2]) zeigte, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\, l_a(k)} < C_2 (\operatorname{loglog} a)^2$ gilt.

Unser Beweis ist kürzer und elementarer, als die vorherigen. Wir können offenbar voraussetzen, dass $a$ beliebig gross ist. Zuerst beweisen wir

Hilfsatz 1.

Bei $n > e^{(\operatorname{loglog} a)^2}$ seien $\left[\frac{\log a\ (\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}}}{\log 2}\right]$ Primzahlen $p_i \leqslant n$ gegeben. Wir behaupten, dass die Anzahl der Zahlen $\leqslant n$, die aus den gegebenen Primzahlen zusammengesetzt sind, kleiner als $\frac{n}{(\log n)^2}$ ist.

Wir teilen diese Zahlen in zwei Gruppen. In der ersten Gruppe sind die Zahlen mit mehr, als 10 $\operatorname{loglog} n$ verschiedenen Primfaktoren. Zur zweiten Gruppe hingegen gehören die Zahlen mit nicht mehr, als 10 $\operatorname{loglog} n$ verschiedenen Primfaktoren.

---

[1]) N. P. Romanoff. — Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie, Math. Ann., 109 (1934) S. 668—678.

[2]) E. Landau.—Verschärfung eines Romanoffschen Satzes, Acta Arithmetica (1935) S. 43–62.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Für jede Zahl $m$ der ersten Gruppe $\vartheta$ ist $d_n(m) > 2^{10 \log\log n}$ ($d(m)$ bedeutet die Anzahl der Teiler von $m$). Es ist $\sum_{\gamma=1}^{n} d(\gamma) < C_3 n \log n$, also ist die Anzahl der Zahlen der ersten Gruppe kleiner als

$$\frac{C_3 n \log n}{2^{10 \log\log n}} < \frac{1}{2} \frac{n}{(\log n)^2}.$$

Die Anzahl der $p^\alpha$ mit $p^\alpha \leqslant n$ ist höchstens $\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]$, also ist die Anzahl der $p_i^{\alpha_i}$ mit $p_i^{\alpha_i} \leqslant n$ höchstens $\frac{\log a . (\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}+1}}{(\log 2)^2}$. Daher ist die Anzahl der Zahlen der zweiten Gruppe offenbar kleiner oder gleich

$$\left(1 + \frac{\log a^{\vartheta} (\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}+1}}{(\log 2)^2}\right)^{10 \log\log n};$$

dies ist kleiner als

$$(\log a)^{10 \log\log n} \left(\frac{2 \log n}{(\log 2)^2}\right)^{10 \log\log n \left(\frac{4}{\varepsilon}+1\right)}$$

Nun ist $n \geqslant e^{(\log\log a)^2}$, also $\log\log a \leqslant (\log n)^{\frac{1}{2}}$,

so dass $(\log a)^{10 \log\log n} = e^{10 \log\log a . \log\log n} \leqslant e^{10 (\log n)^{\frac{1}{2}} \log\log n} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}$,

und $\left(\frac{2 \log n}{(\log 2)^2}\right)^{10 \log\log n} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log^2 n}$.

Also ist die Anzahl der Zahlen der zweiten Gruppe ebenfalls kleiner als $\frac{1}{2} \frac{n}{\log^2 n}$, womit Hilfsatz 1. bewiesen ist.

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} + \sum_{k=}^{\infty} \frac{1}{k \left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

wobei für $\sum_1$: $l_a(k) > (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ und für $\sum_2$: $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ gilt.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Ferner ist offenbar $\Sigma_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2} < C_4$

mit $l_a(k) > (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$.

Es ist ferner

$$\Sigma_2 = \sum_{k > e^{(\log\log a)^2}} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} + \sum_{k \leqslant e^{(\log\log a)^2}} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = \Sigma_2' + \Sigma_2'',$$

wobei $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ ist.

Es sei nun $n > e^{(\log\log a)^2}$. Wir bezeichnen durch $f(n)$ die Anzahl der Zahlen $k \leqslant n$, für welche $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Eine jede solche Zahl $k$ ist als Faktor in einer der Zahlen $a-1, a^2-1, a^3-1, \ldots a^{\left[(\log n)^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]}-1$ enthalten, also ist jede solche Zahl $k$ aus den Primfaktoren dieser Zahlen zusammengesetzt. Da aber eine Zahl $x$ höchstens $\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$ Primfaktoren hat, ist die Anzahl der in Betracht kommenden Primfaktoren höchstens $\left[\frac{\log a\,(\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}}}{\log 2}\right]$, es ist also nach Hilfsatz (1) $f(n) < \frac{n}{(\log n)^2}$, und daraus folgt unmittelbar

$$\sum_2' < \sum_{k > e^{(\log\log a)^2}}^{\infty} \frac{1}{k} < \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s(\log s)^2} < C_4,$$

mit $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$.

Nun müssen wir $\Sigma_2''$ abschätzen.

Die Zahlen mit $k \leqslant e^{(\log\log a)^2}$ und $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ sind offenbar alle in einer der Zahlen $a-1, a^2-1, a^3-1, \ldots, a^{\left[(\log\log a)^{\frac{4}{\varepsilon}}\right]}-1$ als Faktoren

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



enthalten. Diese $k$ sind daher Teiler des Produktes $\Pi = (a-1)(a^2-1)\ldots(a^{\left[(\log\log a)^{\frac{4}{\varepsilon}}\right]}-1)$. Nun ist $\Pi < a^{(\log\log a)^{\frac{8}{\varepsilon}}}$, also offenbar $\Sigma_2'' < \sum_{d/\pi} \frac{1}{d} < C_5 \log\log (a^{(\log\log a)^{\frac{8}{\varepsilon}}}) < C_6 \log\log a$, da nämlich $\sum_{d|x} \frac{1}{d} < C_7 \log\log x$.

Wir haben daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2' + \Sigma_2'' < 1 + 2C_4 + C_6 \log\log a < C_8 \log\log a.$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Ungleichung sich nicht verbessern lässt, da $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} > \sum_{d|a-1} \frac{1}{d} > C_9 \log\log a$ für entsprechend gewähltes $a$.

## Об упрощении одной теоремы Ландау.

**П. Эрдеш** (Манчестер) **и П. Туран** (Будапешт).

В настоящей работе дается упрощенное доказательство одной теоремы Ландау, помещенной в его работе, указанной в сноске 2-й настоящей статьи.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# SUR QUELQUES MODES DE CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS, À UNE VARIABLE RÉELLE SUR $(-\infty, +\infty)$.

A. S. KOVANKO (Tomsk).

C'est la théorie des fonctions presque-périodiques classiques et généralisées qui nous pose le problème général de la convergence des suites de fonctions mésurables et sommables qui sont définis sur $(-\infty < x < +\infty)$.

## Chapitre I.

## LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS MESURABLES.

Introduisons les significations suivantes. Soit $E$ un ensemble mesurable linéaire, défini sur $(-\infty < x < +\infty)$, et soit $E(a,b)$ sa partie situé sur $(a < x < b)$. Posons $\delta E(a,b) = \dfrac{Mes\, E(a,b)}{b-a}$: De plus posons: $\delta_s^e E =$ borne supérieure $_{(-\infty < a < +\infty)} \delta E(a, a+e)$. Il est bien évident, que

$$\delta_s^e (E_1 + E_2) \leqslant \delta_s^e E_1 + \delta_s^e E_2,\ \delta_s^e E \leqslant \delta_s^{e'} E,\ \text{si } e > e'.$$

Définition I. Nous disons que la suite $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\ldots\ldots)$ $(-\infty < x < +\infty)$ converge „S en mesure", si quelque soit $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ et $e > 0$ il existe un nombre $N > 0$, assez grand et tel, que $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour tout $n > N$, et pour tout $p$ et pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_{n,n+p}$, $\delta_s^e E_{n,n+p} < \varepsilon$.

Théorème I. Soit $\{f_n(x)\}$ $(n = 1,2,3,\ldots.)$ une suite de fonctions qui converge „S en mesure", alors quelque soit $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ et $e > 0$, il est possible d'extraire une suite $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1,2,3\ldots.)$, qui converge uniformément vers une fonction $f(x)$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E$ avec $\delta_s^e E < \varepsilon$. De plus il existe un nombre $N > 0$ tel, que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour $n > N$ et pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_n$, avec $\delta_s^e E_n < \varepsilon$. Pour démontrer ce théorème nous avons à prouver le lemme suivant.

Lemme. Si $\delta E(a, a+d) < e$ pour tout „$a$" alors $\delta E(a, a+d') < 2\varepsilon$ si $d' > d$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Démonstration: Soit „$n$“ un entier tel, que $(n+1)d \geqslant d' \geqslant nd$. Soit donc $d' = nd + r$ $(r < d)$. Nous avons alors $\delta E(a, a+d') =$

$$= \frac{\text{Mes } E(a, a+d')}{d'} = \frac{\text{Mes } E(a, a+dn+r)}{nd+r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{Mes } E(a, a+d(n+1))}{nd} < \frac{\varepsilon . d(n+1)}{d.n} = \varepsilon\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 2\varepsilon.\ c.\ q.\ f.\ d.$$

Revenons à notre théorème.

Donnons à $\varepsilon$ et $e$ respectivement les deux suites de valeurs

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots\ldots\ldots\ldots \to 0.$$

$$e_1 > e_2 > e_3 > \ldots\ldots\ldots\ldots \to 0.$$

De plus supposons, que la série: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$ soit convergente. Alors nous avons une suite de nombres entiers $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ telle, que $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon_k$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut—être d'un ensemble $E_{n_k \cdot n_{k+1}}$ tel, que $\delta E_{n_k n_{k+1}}(a, a+e_k) < \varepsilon_k$ quelque soit $a$ [car $\delta_s^{e_k} E_{n_k n_{k+1}} < \varepsilon_k$].

Examinons l'ensemble $E^m = E_{n_m n_{m+1}} + E_{n_{m+1} n_{m+2}} + E_{n_{m+2} n_{m+3}} + \ldots$

Nous avons évidemment, que Mes $E^m(a, a+e_m) \leqslant$

$$\leqslant \text{Mes } E_{n_m n_{m+1}}(a, a+e_m) + \text{Mes } E_{n_{m+1} n_{m+2}}(a, a+e_m) + \ldots.$$

Mais comme $\delta E_{n_{m+p} n_{m+p+1}}(a, a+e_{n+p}) < \varepsilon_{p+m}$ par suite, à cause de notre lemme, nous avons

$$\delta E_{n_{m+p} n_{m+p+1}}(a, a+e_m) < 2\varepsilon_{m+p} \text{ (car } e_m > e_{m+p}).$$

Donc nous avons:

$$\delta E^m(a, a+e_m) \leqslant \delta E_{n_m n_{m+1}}(a, a+e_m) + \delta E_{n_{m+1} n_{m+2}}(a, a+e_m) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \leqslant \varepsilon_m + 2(\varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} + \ldots\ldots) < 2\sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k = \eta_m.$$

Nous avons évidemment que $\eta_m \to 0$ $(m \to \infty)$. Ainsi nous sommes venus au résultat suivant $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon_m$ $(k = m, m+1, m+2 \ldots)$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être de l'ensemble $E^m$ tel, que $\delta E^m(a, a+e_m) < \eta_m$. Cela nous démontre, que la suite $\{f_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ converge uniformément hors de $E^m$ avec $\delta_s^{e_m} E^m \leqslant \eta_m$. Soit $f(x)$ la fonction limite. $f(x)$ est définie presque partout, car $\eta_m$ et $e_m$ sont aussi petits que nous voulons.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Nous avons par suite, quelque soit $\varepsilon<1$ $e>0$, un nombre $M>0$ tel, que $|f(x)-f_{n_m}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ hors de l'ensemble $E_{n_m}$, avec $\delta_s^e E_{n_m}<\frac{\varepsilon}{2}$ pour $m>M$. De plus, à cause des conditions de notre théorème, nous avons $|f_{n_m}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ hors de l'ensemble $E_{n\,n_m}$ avec $\delta_s^e E_{n\,n_m}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Par suite de ces deux inégalités nous avons à conclure, que $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_n$ avec $\delta_s^e E_n<\varepsilon$ $(E_n=E_{n_m}+E_{n,n_m})$ Nous dirons que $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,3\ldots.)$ converge „S en mesure vers $f(x)$". Supposons qu'il existe une autre fonction $\varphi(x)$ vers laquelle notre suite converge aussi „S en mesure". Alors quelque soit $\varepsilon<1$ et $e>0$ nous avons un nombre $N>0$ tel, que $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n>N$ et pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_n$ avec $\delta_s^e E_n<\frac{\varepsilon}{2}$ et $|\varphi(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n>N$ et pour toute valeur de $x$ exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_n'$ avec $\delta_s^e E_n'<\frac{\varepsilon}{2}$. Nous avons donc évidemment, que $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E=E_n+E_n'$ avec $\delta_s^e E<\varepsilon$. Comme $\varepsilon$ et $e$ sont arbitraires, nous avons à conclure, que $f(x)=\varphi(x)$ presque partout.

Théorème II. Si une suite de fonctions presque-périodiques S (I)[1] $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,3\ldots.)$ converge „S en mesure", alors la fonction limite $f(x)$ est aussi une fonction presque-périodique S (I) (*p. p. S*).

Démonstration.

Comme $f_n(x)$ est une fonction *p. p. S* alors quelque soit $\varepsilon<1$ et $e>0$ il existe un polynôme trigonométrique $P_n(x)$ tel, que $|f_n(x)-P_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ [2]) pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_n$ avec $\delta_s^e E_n<\frac{\varepsilon}{2}$. Comme la suite converge „en mésure" alors: $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $\overline{E}_n$ tel, que $\delta_s^e \overline{E}_n<\frac{\varepsilon}{2}$. Donc $|f(x)-P_n(x)|\leqslant$ $\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-P_n(x)|<\varepsilon$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être de l'ensemble $E_n+\overline{E}_n$. Par suite $f(x)$ est *p. p. S.*

[1]) Stepanoff. Math. Ann. 1926, Bd. 95.

[2]) Franklin. Math. Zeitsch. 1928, Bd. 29, C'est une propriété nécessaire et suffisante d'une fonction p. p. S.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



## Chapitre II.

## LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS SOMMABLES.

Introduisons les significations suivantes.

Soit $\omega$ un nombre positif $\geqslant 1$. Posons $D^e_{s_\omega}[f(x), \varphi(x), E] =$ $=$ borne supérieure $_{(-\infty<a<+\infty)} \frac{1}{e}\int_{E(a,a+e)} |f(x)-\varphi(x)|^\omega dx$ et $D^e_{s_\omega}[f(x),\varphi(x)] =$ $=$ borne supérieure $_{(-\infty\leqslant a<+\infty)} \frac{1}{e}\int_a^{a+e} |f(x)-\varphi(x)|^\omega dx$. Il est bien évident, que $\{D^e_{s_\omega}[f_1, f_2, E]\}^{\frac{1}{\omega}} + \{D^e_{s_\omega}[f_2, f_3, E]\}^{\frac{1}{\omega}} \geqslant \{D^e_{s_\omega}[f_1, f_3, E\}]^{\frac{1}{\omega}}$ à cause de l'inégalité bien connue de Hölder. De plus: si $m \leqslant f \leqslant M$ alors

$$m^\omega \delta^e_s \; E \leqslant D^e_{s_\omega}[f, 0, E] \leqslant M^\omega \delta^e_s \; E.$$

$$D^e_{s_\omega}[f, \varphi, E_1] \leqslant D^e_{s_\omega}[f, \varphi, E_1 + E_2] \leqslant D^e_{s_\omega}[f, \varphi, E_1] + D^e_{s_\omega}[f, \varphi_1 E_2].$$

Définition II. Nous disons que la suite $\{f_n(x)\}$ $(-\infty<x<+\infty)$ converge „$S_\omega$ en moyenne", si quelque soit $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$ et $e>0$, il existe un nombre $N>0$ tel, que $D^e_{s_\omega}[f_{n+p}, f_n]<\varepsilon$ pour $n>N$ et pour tout $p$.

Théorème III. Toute suite de fonctions sur $(-\infty<x<+\infty)$ qui converge „$S_\omega$ en moyenne" converge aussi „$S$ en mesure".

Démonstration.

Soit $\{f_n(x)\}$ une telle suite. Nous avons donc l'inegalité $D^e_{s_\omega}[f_{n+p}, f_n]<\varepsilon$. Soit $\varepsilon'$ un nombre positif quelconque $<1$, et soit $E_{n,n+p}$ l'ensemble des valeurs de $x$, où $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon'$. Nous avons alors

$$\varepsilon > D^e_{s_\omega}[f_{n+p}, f_n] \geqslant D^e_{s_\omega}[f_{n+p}, f_n, E_{n,n+p}] \geqslant \varepsilon'^\omega \delta^e_s E_{n,n+p}.$$

Par suite $\delta^e_s E_{n,n+p} \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon'^\omega}$ ; choisissons $\varepsilon' = \varepsilon^{\frac{1}{\omega+1}}$ nous avons alors, que $\delta^e_s E_{n,n+p} \leqslant \frac{\varepsilon'^{\omega+1}}{\varepsilon'^\omega} = \varepsilon'$ [Nous supposons que $\varepsilon<1$].

Nous avons ainsi, quelque soit $\varepsilon'<1$, que l'ensemble $E_{n,n+p}$ des valeurs de $x$, où $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|>\varepsilon'$ est tel, que $\delta^e_s E_{n,n+p}<\varepsilon'$ c. a. d., que $\{f_n(x)\}$ converge „$S$ en mesure" c. q. f. d.

Théorème IV. Si $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3...)$ est une suite de fon-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ctions, qui converge „$S_\omega$ en moyenne“ il existe une fonction (limite) $f(x)$ telle, que quelque soit $\varepsilon > 0$ et $e > 0$ il existe un nombre $N > 0$ assez grand, que $D^e_{s\omega}[f(x), f_n(x)] < \varepsilon$ pour tout $n > N$,

Démonstration.

A cause du théorème III la suite $\{f_n(x)\}$ converge „$S$ en mesure“ vers une fonction $f(x)$, Il est aisé de voir que notre suite, qui converge „$S_\omega$ en moyenne“ converge „en moyenne“ sur tout intervalle fini. Donc à cause d‚un théorème bien connu de Fischer-Riesz elle possède une fonction limite $f(x)$. Examinons donc la suite d'intervalles

$$[ke \leqslant x \leqslant (k+1)e]$$
$$[k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots]$$

Nous avons, quelque soit $\varepsilon > 0$, que $\frac{1}{e}\int_{ke}^{(k+1)e} |f(x) - f_m(x)|^\omega dx < \frac{\varepsilon}{2^\omega}$

pour $m > N_k$ ($N_k$ assez grand) par exemple pour $m = N_k + 1$.

Nous avons de plus un nombre fixe $N > 0$ tel, que

$\frac{1}{e}\int_{ke}^{(k+1)e} |f_m(x) - f_n(x)|^\omega dx < \frac{\varepsilon}{2^\omega}$ quelque soit $n > N$ et $m > N$, à cause des conditions de notre théorème.

Choisissons dans la deuxièmé inégalité $m = N_k + 1$.

Nous avons á choisir $N < N_k$. Nous avons alors des deux inégalités précédentes, que

$$\frac{1}{e}\int_{ke}^{(k+1)e} |f(x) - f_n(x)|^\omega dx \leqslant \left[\left\{\frac{1}{e}\int_{ke}^{(k+1)e} |f(x) - f_{Nk+1}(x)|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}} + \left\{\frac{1}{e}\int_{ke}^{(k+1)e} |f_n(x) - f_{Nk+1}(x)|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}\right]^\omega$$
$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{\omega}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{\omega}}}{2}\right)^\omega = (\varepsilon^{\frac{1}{\omega}})^\omega = \varepsilon$$

pour toute valeur de $n > N$ et cela quelque soit „$k$“.

Soit $a$ un nombre quelconque, et soit $k > 0$ le plus grand nombre entier, moindre que $\frac{a}{e}$; alors il est évident, que

$$\frac{1}{e}\int_a^{a+e} |f(x) - f_n(x)|^\omega dx \leqslant \frac{1}{e}\int_{ke}^{(k+2)e} |f(x) - f_n(x)|^\omega dx < 2\varepsilon.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Par suite nous avons à conclure, que $D^{e}_{s_\omega}[f(x), f_n(x)] < 2\varepsilon$ c.q.f.d.

Théorème V. Si une suite de fonctions presque-périodiques $S_\omega$ (p.p. $S_\omega$) converge „$S_\omega$ en moyenne", alors la fonction limite est aussi „p.p. $S_\omega$"

Démonstration:

Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions „presque-périodiques $S_\omega$", qui converge „$S_\omega$ en moyenne" vers la fonction $f(x)$".

Nous avons alors, quelque soit $\varepsilon > 0$ et $e > 0$, un nombre $N > 0$ tel, que $D^{e}_{s_\omega}[f(x), f_n(x)] < \frac{\varepsilon}{2^\omega}$ pour $n > N$.

De plus il exite pour chaque fonction $f_n(x)$ un polynôme trigonométrique $P_n(x)$ tel, que $D^{e}_{s_\omega}[f_n(x), P_n(x)] < \frac{\varepsilon}{2^\omega}$ *).

Par suit:

$$D^{e}_{s_\omega}[f(x), P_n(x)] \leqslant \left\{\left[D^{e}_{s_\omega}[f(x), f_n(x)]\right]^{\frac{1}{\omega}} + \left[D^{e}_{s_\omega}[f_n(x), P_n(x)]\right]^{\frac{1}{\omega}}\right\}^{\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{\omega}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{\omega}}}{2}\right)^{\omega} = \left(\varepsilon^{\frac{1}{\omega}}\right)^{\omega} = \varepsilon.$$

Cela veut dire, que $f(x)$ est „presque—périodique $S_\omega$" c.q.f.d.

Exemples.

1) Soit $f_n(x) = 1$ sur $(n-1) \leqslant x < n$, et $f_n(x) = 0$ hors de cet intervalle. C'est une suite qui converge vers $f(x)$, au sens ordinaire, mais elle ne converge pas „$S$ en mésure".

2) Soit $f_n(x) = n^{\frac{1}{3}}$ sur $n-1 \leqslant x < n-1+\frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ hors de cet intervalle.

C'est uue suite qui converge „$S_\omega$ en moyenne ($\omega < 3$).

Remarques sur les fonctions presque-périodiques.

1) $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ est dite être „p.p. $S$" si quelque soit les nombres positifs $\varepsilon < 1$ et $l$ il existe un nombre $L > 0$ tel, que dans chaque intervalle de longueur $L$ il existe un nombre $\tau$ tel, que $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ pour toute valeur de $x$, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_\tau$ avec $\delta^{e}_{s} E_\tau < \varepsilon$.

2) $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ est dite „p.p. $S_\omega$" si quelque soit $\varepsilon > 0$ et $l > 0$ il existe un nombre $L > 0$ tel, que dans chaque intervalle de longueur $L$ il existe un nombre $\tau$ tel, que

$$D^{l}_{s_\omega}[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

*) C'est uue propriété nécessaire et suffsante d'une fonction p.p. $S_\omega$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



# О некоторых видах сходимости последовательностей функций одной действительной переменной на $(-\infty, +\infty)$.

А. С. Кованько (Томск).

Автор рассматривает следующие два вида сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3.....)$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится „$S$ по мере", если как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$ и число $e > 0$ существует такое число $N > 0$, что имеет место неравенство:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

при всяком $n > N$ и при любом $p$, для всех значений $x$ исключая быть может множества $E_{n,\ n+p}$ средняя плотность которого меньше $\varepsilon$ на любом интервале длины „$e$". Для нее существует предельная функция $f(x)$, обладающая тем свойством, что, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$ и число $e > o$, существует число $N > 0$ такое, что $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для всякого $n > N$ и для любого $x$, исключая множества $E_n$ такого, что средняя плотность его на любом интервале длины „$e$" меньше $\varepsilon$, Другой вид сходимости следующий. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится „$S_\omega$ в среднем" $(\omega \geqslant 1)$, если, как бы мало ни было $\varepsilon > o$ и каково бы ни было число $e > 0$, существует такое число $N > 0$, что

$$\underset{-\infty < a < +\infty}{\text{верхняя граница}} \quad \frac{1}{e} \int_a^{a+e} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|^{\omega} dx < \varepsilon.$$

при всяком $n > N$ и при любом $p$.

Для такой последовательности существует предельная функция $f(x)$, обладающая следующим свойством. Какое бы ни было число $\varepsilon > 0$ и число $e > 0$ существует число $N > 0$ такое, что

$$\underset{-\infty < a < +\infty}{\text{верхняя граница}} \quad \frac{1}{e} \int_a^{a+e} [f(x) - f_n(x)]^{\omega} dx < \varepsilon$$

при всяком $n > N$.

На основе этих определений доказываются следующие две теоремы.

1. Если последовательность функций почти периодических в смысле Степанова (1) сходится „$S$ по мере", то предельная функция также почти периодическая в смысле Степанова (1).

2. Если последовательность функций почти периодических в смысле Степанова $(S_\omega)$ сходится „$S_\omega$ в среднем", то предельная функция также почти периодическая в смысле Степанова $(S_\omega)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# ZUR LOKALEN ZERSCHNEIDUNG DES RAUMES.

K. ZARANKIEWICZ (Warszawa).

Es sei $M$ ein Kontinuum, welches in einem $n$—dimensionalen euklidischen Raume $R_n$ liegt und $x$ ein Punkt von $M$. Der Punkt $x$ heisst ein lokaler Zerschneidungspunkt in Bezug auf $R_n$, wenn für jede genügend kleine Umgebung (in Bezug auf $R_n$) $U_x$ des Punktes $x$ die Menge $U_x - M$ nicht mehr zusammenhängend ist. Wenn für jede genügend kleine Umgebung $U_x$ des Punktes $x$ die Menge $U_x - M$ in mindestens $m$ Komponenten zerfällt und wenn es beliebig kleine Umgebungen des Punktes $x$ gibt, für welche die Menge $U_x - M$ aus genau $m$ Komponenten besteht so heisst der Punkt $x$ ein lokaler Zerschneidungspunkt des Raumes $R_n$ von der Ordnung $m$ oder man sagt, dass das Kontinuum $M$ im Punkte $x$ den Raum lokal in $m$ Gebiete zerschneidet. Die lokale Zerschneidung des $R_n$ im Punkte $x$ heisst von unendlicher Ordnung, wenn für jede genügend kleine Umgebung $U_x$ von $x$ die Menge $U_x - M$ unendlich viele Komponenten besitzt.

Die Klassifikation der Punkte eines im $R_n$ gelegenen Kontinuums $M$, wo eine lokale Zerschneidung des Raumes in unendlich viel Gebiete stattfindet, bietet schon im Falle des $R_2$ einige Schwierigkeiten[1]). Eine ganz spezielle Rolle spielen, wie es scheint, diejenigen lokal den Raum zerschneidenden Punkte, welche von allen, oder mindestens von zwei durch $M$ bestimmten lokalen Gebieten erreichbar sind. Zerschneidet das Kontinuum $M$ in seinem Punkte $x$ den Raum lokal in eine endliche Anzahl von Gebieten, so ist der Punkt $x$ von allen diesen lokalen Gebieten erreichbar.

Vor allem tritt die Untersuchung der Struktur der Menge derjenigen Punkte eines Kontinuums, wo die lokale Zerschneidung des Raumes in eine endliche Anzahl der Gebiete stattfindet. In dieser Hinsicht habe ich im Falle des $R_2$ (Ebene) den Satz bewiesen, dass die Menge der Punkte eines beliebigen ebenen Kontinuums, wo eine lokale Zerschneidung der Ebene in eine endliche ($>2$) Anzahl von Gebieten stattfindet[2])—höchstens abzählbar ist. Schon für $R_3$ ist die Frage nach der Struktur dieser Menge ganz offen. Das Beispiel $A_0$ zeigt, dass in $R_3$ diese Menge eine zweidimensionale abgeschlossene Menge sein kann.

Das Ziel dieser Note ist die Untersuchung der Menge solcher Punkte, welche nicht nur lokale Zerschneidungspunkte eines beliebigen Konti-

[1]) K. Zarankiewicz, *Über die lokale Zerschneidung der Ebene*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Band 39, 1932, S. 371.

[2]) l. c. S. 375.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



nuums sind, sondern auch ausserdem noch gewisse Zerlegungseigenschaften in Bezug auf das Kontinuum selbst aufweisen.

In einem früheren Aufsatze[3]) habe ich folgende Definition aufgestellt.

**Definition.** Der Punkt $x$ eines Kontinuums $M$ heisst ein doppeltzerlegender Punkt in Bezug auf $R_n$, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

(I) jede genügend kleine Umgebung (in Bezug auf $R_n$) $U_x$ des Punktes $x$ hört auf zusammenhängend zu sein nach Tilgung derjenigen Komponente $T$ von $U_x.M$, welche den Punkt $x$ enthält.

(II) die Komponente $T$ von $U_x.M$ (d. h. diejenige, welche $x$ enthält) hört auf zusammenhängend zu sein nach Tilgung des Punktes $x$ für jede genügend kleine Umgebung $U_x$.

Besitzt der Punkt $x$ die Eigenschaften (I), (II) und ausserdem noch:

(III) der Punkt $x$ ist erreichbar von mindestens zwei zusammenhängenden Gebieten der Menge $U_x - T$, für jede genügend kleine $U_x$

— so werden wir ihn als doppeltzerlegenden Punkt im engeren Sinne (in Bezug auf $R_n$) bezeichnen.

**Beispiele.** $A_0$—Es sei $W$ ein 3—dimensionaler Würfel mit dem Basisquadrat $B$; wir legen die zur Basis $B$ parallelen Ebenen $E_n$, von denen $E_n$ die Entfernung $\frac{1}{2^n}$ von $B$ hat. Die Würfelschicht, welche zwischen $E_n$ und $E_{n+1}$ gelegen ist, teilen wir in $2^{2n}$ kongruente Parallelepipeden $P_n$ von der Höhe $\frac{1}{2^{n+1}}$. Es ist klar, dass jedes Parallelepiped $P_n$ einer beliebigen Ordnung $n$ genau mit 4 Parallelepipeden der Ordnung $n+1$ Flächenstücke gemein hat, d. h. mit denjenigen, welche unter ihm liegen. Verbindet man den Schwerpunkt jedes Parallelepipedon $P_n$ mittels geradliniger Strecken mit den 4 Schwerpunkten derjenigen Parallelepipede $P_{n+1}$ welche gerade unter ihm liegen, so entsteht auf diese Weise eine nichtabgeschlossene Kurve $F$, welche jeden Punkt der Basis $B$ approximiert. Fügt man zu jedem Punkte $a$ der Kurve $F$, eine volle Kugel vom Radius $\frac{1}{16}$ der Entfernung $a$ von B, und Mittelpunkte $a$, hinzu, so entsteht ein Gebiet $G$, von welchem aus, offenbar, jeder Punkt der Basis $B$ erreichbar ist, ausserdem ist jeder Punkt von $B$ offenbar gleichfalls erreichbar vom Äussern des Würfels, sowie auch von der Komplementärmenge des abgeschlossenen Gebietes $G$ zum Würfelinnern. Bezeichnet man mit $A_0$ die Differenz der abgeschlossenen Hülle von $G$ und der Menge $G$, so ist diese Menge ein Kontinuum, welches das Basisquadrat $B$ enthält. In jedem Punkte von $B$ ist $R_3$ lokal in genau 3 Gebiete zerschnitten, und zwar ist jeder Punkt von $B$ aus jedem von diesen 3 lokalen Gebieten erreichbar.

$A_1$—Es sei $A_1$ eine geradlinnige Strecke, welche in der Ebene $R_2$ gelegen ist; jeder innere Punkt von $A_1$ ist ein doppeltzerlegender Punkt in Bezug auf $R_2$, kein Punkt der $A_1$ ist aber ein doppeltzerlegender Punkt in Bezug auf $R_3$.

$A_2$ — (Schirm) bedeutet die Menge, welche aus einer Kreisfläche und aus einer zur Kreisebene senkrechten, durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden, Strecke besteht. Der Mittelpunkt des Kreises ist ein doppeltzerlegender Punkt des $A_2$ in Bezug auf $R_3$ und zwar im engeren Sinne.

$A_3$ besteht aus einer nirgendsdichten perfekten Cantorschen Menge, wo jedes „weggelassene" Intervall durch die Kugeloberfläche von gleichem Durchmesser ersetzt

[3]) K. Zarankiewicz, *Über doppeltzerlegende Punkte*, Fundamenta Math., Band 23, 1934, S. 166.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ist. Jeder Punkt der Cantorschen Menge ist für $A_3$ ein doppeltzerlegender Punkt in Bezug auf $R_3$; jedoch nur die Enden der „weggelassenen" Intervalle der Cantorschen Menge sind die doppeltzerlegenden Punkte im engeren Sinne von $A_3$.

$A_4$ — besteht aus der Menge aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}, 0)$ des $n$— dimensionalen Raumes $R_n$ für welche $x_1^2 + x_2^2 + \ldots . + x_{n-1}^2 \leqslant 1$) und der Punkte $(0, 0, \ldots . 0, t)$ wo $0 \leqslant t \leqslant 1$. Der Punkt $(0, 0, \ldots . 0)$ von $A_4$ ist ein doppeltzerlegender Punkt in Bezug auf $R_n$ und zwar im engeren Sinne.

**Satz. Voraussetzungen.** 1) *$M$ ist ein im $R_n$ gelegenes Kontinuum*, 2) $n \geqslant 3$, 3) *$K$ bezeichnet die Menge aller in $M$ gelegenen doppeltzerlegenden Punkte im engeren Sinne in Bezug auf $R_n$.*

**Behauptung.** *Die Menge $K$ ist höchstens abzählbar.*

**Beweis.** Angenommen, dass die Menge $K$ nicht abzählbar ist. Dann existiert eine unabzählbare Menge $K_1 \subset K$ derart, dass für jeden Punkt $x \subset K_1$ eine Kugel $S_x$ vom Mittelpunkte $x$ und Radius $2\varepsilon > 0$ existiert, so dass jede Umgebung $U_x$ des Punktes $x$ (in Bezug aut $R_n$), welche in $S_x$ enthalten ist, durch die Menge $T_x$ (d. h. diejenige Komponente der Menge $U_x . M$, welche $x$ enthält) zerschnitten wird und zwar zwischen zwei Punkten, welche zu zwei verschiedenen lokalen Gebieten der Menge $U_x - T_x$ gehören, und zwar solchen, dass aus jedem von beiden der Punkt $x$ erreichbar ist. Sei $x_0$ ein Kondensationspunkt der Menge $K_1$ und $S_0$ die Kugel mit dem Zentrum in $x_0$ und dem Radius $\varepsilon$. Mit $T_x$ soll diejenige Komponente der Menge $M . S_0$ bezeichnet werden, welche den Punkt $x \subset K_1$ enthält. Hätten zwei Mengen $T_x$ und $T_y$ einen Punkt gemeinsam, so wären sie offenbar identisch. Ich behaupte, dass eine unabzählbare Teilmenge $K_2$ der Menge $K_1$ existiert, so dass, wenn $x \subset K_2$ und $y \subset K_2$, die Mengen $T_x$ und $T_y$ identisch sind. In der Tat, wäre dies nicht der Fall, so müsse eine unabzählbare Familie von zueinander f r e m d e n Mengen $T_x$ existieren; dies ist aber unmöglich, da jede Menge $T_x$ einen doppeltzerlegenden Punkt $x$ enthält und eine solche Familie der Mengen, nach einem Satze[4]) höchstens abzählbar sein kann, Wir haben also bewiesen, dass in $S_0$ eine Menge $T$ existiert (wir lassen den Index weg), welche eine Komponente der Menge $S_0 . M$ ist und welche eine unabzählbare Menge $K_2$ von doppeltzerlegenden Punkten im engeren Sinne von $M$ in sich enthält.

Die Menge $T$ zerschneidet das Kugelinnere $S_0$ höchstens in abzählbar viele Gebiete; nach Voraussetzung ist jeder Punkt $x \subset K_2$ gleichzeitig von mindestens zwei Gebieten der Menge $S_0 - T$ erreichbar. Es muss also eine unabzählbare Teilmenge $K_3$ der Menge $K_2$ und zwei verschiedene Gebiete der Menge $S_0 - T$ existieren – wir werden diese Gebiete mit $C$ und $D$ bezeichnen—so dass jeder Punkt $x \subset K_3$ gleichzeitig sowohl von $C$ als auch von $D$ erreichbar ist.

Da $T$ eine zusammenhängende Menge ist, haben wir nach (II) eine Zerlegung

$$T = A_x + B_x \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

[4]) l. c. S. 166.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



wo $A_x$ und $B_x$ nichteinpunktige zusammenhängende und in $T$ relativ abgeschlossene Mengen sind, welche nur einen einzigen Punkt (nämlich den Punkt $x$) gemeinsam haben, so dass

$$A_x . B_x \equiv x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

besteht[5]).

Ich behaupte:

*für jeden Punkt* $x \subset K_3$ *in der Zerlegung* (1) *tritt die Menge* $K_3$ *nur in einem von den Summanden* $A_x$ *oder* $B_x$ *auf* $\ldots$ (3)

In der Tat, wäre dies nicht der Fall, so müssten zwei Punkte $u$ und $v$ existieren, welche folgende Eigenschaften

$$\left.\begin{array}{ccc} u \subset K_3 & & v \subset K_3 \\ & u \neq x \neq v & \\ u \subset A_x & & v \subset B_x \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

besitzen.

Sei noch $c$ ein beliebiger Punkt des Gebietes $C$, und $d$ ein beliebiger Punkt des Gebietes $D$, ferner sei $P(u)$ ein Kontinuum, welches die Punkte $c$ und $u$ verbindet und vom Punkte $u$ abgesehen ganz im Gebiete $C$ gelegen ist, und weiter $Q(u)$ ein Kontinuum, welches die Punkte $d$ und $u$ verbindet und, vom Punkt $u$ abgesehen, ganz im Gebiete $D$ liegt. Da sowohl $u$ als auch $v$ aus beiden Gebieten $C$ und $D$ erreichdar sind, ist die Existenz von zwei solchen Kontinuen gesichert. Analog sind die Kontinuen $P(v)$ und $Q(v)$ definiert.

Die Menge $A_x$ zerschneidet das Kugelinnere $S_0$ zwischen $c$ und $d$ nicht, da ein Kontinuum nämlich $P(v)+Q(v)$ existiert, welches die Punkte $c$ und $d$ enthält und nach (4) ganz ausserhalb von $A_x$ liegt. Analog zerschneidet die Menge $B_x$ das Kugelinnere zwischen $c$ und $d$ nich, da das Kontinuum $P(u)+Q(u)$ existiert, welches $c$ und $d$ verbindet und nach (4) ganz ausserhalb von $B_x$ liegt. Die relativ in $S_0$ abgeschlossenen Mengen $A_x$ und $B_x$ haben aber nach (2) nur einen einzigen Punkt gemeinsam, nämlich den Punkt $x$. Nach dem von Alexandroff sogenannten Phragmén-Brouwerschen Satze zerschneidet dann die Summe $A_x+B_x$ die Kugel $S_0$ zwischen $c$ und $d$ nicht[6]). Das ist aber unmöglich, weil $A_x+B_x=T$ ist, und die Menge $T$ das Kugelinnere $S_0$ gewiss zwischen $c$ und $d$ zerschneidet, da diese Punkte zu verschiedenen Komponenten der Menge $S_0 - T$ gehören. Also ist (3) bewiesen.

---

[5]) K. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fund. Math. IX, 1927, S. 136.

[6]) Wir haben hier den folgenden Hilfssatz gebraucht:

*Ist S das n—dimensionale Kugelinnere* ($n \geqslant 3$), *c und d zwei Punkte von S, ferner A und B zwei Kontinuen, von denen keines das Gebiet S zwischen c und d zerschneidet, und haben die Kontinuen nur einen einzigen Punkt (oder nur zwei einzige) gemeinsam, so zerschneidet die Summe A + B das Gebiet S zwischen c und d nicht.*

Der Beweis dieses Hilssatzes folgt unmittelbar aus dem Phragmen-Brouwerschen Satze. Siehe P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Mathematische Annalen, Band 106, 1932, S. 186.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Nach dem Satze [7]), welcher besagt, dass, wenn eine Menge $N$ von Zerlegungspunkten einer beliebigen zusammenhängenden Menge $T$ bei jeder Zerlegung von der Gestalt (1) für $x \subset N$, stets nur in einem von den Summanden $A_x$ oder $B_x$ auftritt, die Menge $N$ höchstens abzählbar ist, sehen wir, dass die Menge $K_3$ höchstens abzählbar sein muss. Somit erhalten wir einen Widerspruch mit der am Anfang gemachten Annahme, dass die Menge der doppeltzerlegenden Punkte im engeren Sinne von $M$ unabzählbar ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

---

## К вопросу о местном рассечении пространства.

К. Заранкевич (Варшава).

Автор вводит следующее определение: точка $x$ любого континуума $M$, лежащего в $n$-мерном эвклидовом пространстве $R_n$, называется двояко делящей в узком смысле, если выполняются следующие условия:

1. Всякая достаточно малая окрестность $U_x$ (по отношению к пространству $R_n$) точки $x$ рассекается слагающей множества $U_x.M$, которая содержит точку $x$.

2. Слагающая множества $U_x.M$, содержащая точку $x$, рассекается этой точкой, если $U_x$ достаточно малая окрестность точки $x$.

3. Точку $x$ можно достигнуть по крайней мере из двух дополнительных областей, определенных в $U_x$ посредством той слагающей множества $U_x.M$, которая содержит точку $x$.

Целью работы является доказательство следующей теоремы: множество точек, двояко делящих в узком смысле любой континуум в пространстве $R_n$, для $n \geqslant 3$, имеет мощность не больше счетной.

---

[7]) K. Zarankiewicz, *Sur les points de division*.... Fund. Math. IX, 1927, S. 137.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# ИЗГИБАНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА.

В. А. СОКОЛОВА (Томск).

Возьмем поверхность Scherk'a,*) уравнение которой

$$e^{\frac{x \sin\alpha \cos\alpha}{a}} = \frac{\cos\left(\frac{y\sin\alpha - z\cos\alpha}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{y\sin\alpha + z\cos\alpha}{2a}\right)} \quad \ldots \quad (1)$$

Рассмотрим плоские сечения поверхности, положив

$$\frac{y\sin\alpha - z\cos\alpha}{2a} = \eta, \quad \frac{y\sin\alpha + z\cos\alpha}{2a} = \zeta, \quad \frac{a}{\sin\alpha\cos\alpha} = b,$$

тогда, в силу сделанных обозначений и если отнести $b$ к $x$, $y$, $z$, получим:

$$x = \ln\cos\eta - \ln\cos\zeta, \quad y = (\eta+\zeta)\cos\alpha, \quad z = (-\eta+\zeta)\sin\alpha \quad \ldots (2)$$

Найдем теперь координаты точек поверхности изгибания, взяв формулы:

$X_1 = \int (Ydz - Zdy)$, $Y_1 = \int (Zdx - Xdz)$, $Z_1 = \int (Xdy - Ydx)$, где $X$, $Y$, $Z$ — косинусы углов нормали к поверхности (1) с осями координат определяются так:

$$X = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Y = \frac{(\operatorname{tg}\eta - \operatorname{tg}\zeta)\sin\alpha}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Z = \frac{-(\operatorname{tg}\eta + \operatorname{tg}\zeta)\cos\alpha}{\sqrt{EG - F^2}},$$

а $EG - F^2 = \operatorname{tg}^2\eta + \operatorname{tg}^2\zeta + 2\operatorname{tg}\eta\operatorname{tg}\zeta\cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha$.

Подсчет дает следующее выражение для $X_1$.

$$X_1 = \int \frac{(\operatorname{tg}\eta\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\zeta)\,d\eta + (\operatorname{tg}\eta + \operatorname{tg}\zeta\cos 2\alpha)\,d\zeta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\eta + \operatorname{tg}^2\zeta + 2\operatorname{tg}\eta\operatorname{tg}\zeta\cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha}} =$$

$$= \int \frac{d(\sin\eta\sin\zeta - \cos\eta\cos\zeta\cos 2\alpha)}{\sqrt{1 - (\sin\eta\sin\zeta - \cos\eta\cos\zeta\cos 2\alpha)^2}} =$$

$$= \arcsin(\sin\eta\sin\zeta - \cos\eta\cos\zeta\cos 2\alpha).$$

*) Crelle Journal, XIII Band.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Вычислим далее остальные координаты точки поверхности изгибания:

$$Y_1 = \cos\alpha \int \frac{\sec^2\eta\, d\eta + (\operatorname{tg}\eta \operatorname{tg}\zeta - \cos 2\alpha)(d\eta - d\zeta) - \sec^2\zeta\, d\zeta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\eta + \operatorname{tg}^2\zeta + 2\operatorname{tg}\eta \operatorname{tg}\zeta \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha}}$$

Обозначим:

$$\frac{\sec^2\eta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\eta + \operatorname{tg}^2\zeta + 2\operatorname{tg}\eta \operatorname{tg}\zeta \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha}} = M_1,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\eta \operatorname{tg}\zeta - \cos 2\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\eta + \operatorname{tg}^2\zeta + 2\operatorname{tg}\eta \operatorname{tg}\zeta \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha}} = M_2,$$

$$\frac{\sec^2\zeta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\eta + \operatorname{tg}^2\zeta + 2\operatorname{tg}\eta \operatorname{tg}\zeta \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha}} = N_1,$$

тогда

$$Y_1 = \int M_1\, d\eta + \int M_2\, d\eta + \varphi(\zeta), \text{ причем}$$

$$\int M_1\, d\eta = \int \frac{d\operatorname{tg}\eta}{\sqrt{(\operatorname{tg}\eta + \operatorname{tg}\zeta \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha \sec^2\zeta}} =$$

$$= \int \frac{\cos\zeta\, d\operatorname{tg}\eta}{\sqrt{(\operatorname{tg}\eta \cos\zeta + \sin\zeta \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha}} =$$

$$= \ln\left[\frac{\operatorname{tg}\eta \cos\zeta + \sin\zeta \cos 2\alpha + \sqrt{(\operatorname{tg}\eta \cos\zeta + \sin\zeta \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right]$$

Подставим это значение $\int M_1\, d\eta$ в выражение $Y_1$ и взяв $\frac{\partial Y_1}{\partial \zeta} = -N_1 - M_2$ получим

$$\varphi(\zeta) = -\ln\left[\frac{\operatorname{tg}\zeta \cos\eta + \sin\eta \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\zeta \cos\eta + \sin\eta \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right] - \int M_2\, d\eta,$$

а тогда $Y_1 = \cos\alpha \ln\left[\operatorname{tg}\eta \cos\zeta + \sin\zeta \cos 2\alpha + \right.$

$$\left. + \sqrt{(\operatorname{tg}\eta \cos\zeta + \sin\zeta \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha}\right] -$$

$$- \cos\alpha \ln\left[\operatorname{tg}\zeta \cos\eta + \sin\eta \cos 2\alpha + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(\operatorname{tg}\zeta \cos\eta + \sin\eta \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha}\right].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Производя подсчет подобно тому, как это сделано для $Y_1$, найдем для $Z_1$ следующее значение:

$$Z_1=\sin\alpha \ln\left[\frac{\operatorname{tg}\eta\cos\zeta+\sin\zeta\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\eta\cos\zeta+\sin\zeta\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right]+$$

$$+\sin\alpha\ln\left[\frac{\operatorname{tg}\zeta\cos\eta+\sin\eta\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\zeta\cos\eta+\sin\eta\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right].$$

Итак, имеем следующие выражения для координат поверхности изгибания:

$$\left.\begin{aligned}
X_1&=\operatorname{arc\,sin}(\sin\eta\sin\zeta-\cos\eta\cos\zeta\cos 2\alpha),\\
Y_1&=\cos\alpha\ln\left[\operatorname{tg}\eta\cos\zeta+\sin\zeta\cos 2\alpha+\right.\\
&\left.+\sqrt{(\operatorname{tg}\eta\cos\zeta+\sin\zeta\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha}\right]-\\
&-\cos\alpha\ln\left[\operatorname{tg}\zeta\cos\eta+\sin\eta\cos 2\alpha+\right.\\
&\left.+\sqrt{(\operatorname{tg}\zeta\cos\eta+\sin\eta\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha}\right],\\
Z_1&=\sin\alpha\ln\left[\frac{\operatorname{tg}\eta\cos\zeta+\sin\zeta\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\right.\\
&\left.+\frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\eta\cos\zeta+\sin\zeta\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right]+\\
&+\sin\alpha\ln\left[\frac{\operatorname{tg}\zeta\cos\eta+\sin\eta\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\right.\\
&\left.+\frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\zeta\cos\eta+\sin\eta\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}\right].
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(3)$$

Для дальнейших вычислений удобно обозначить:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\eta\cos\zeta+\sin\zeta\cos\eta\cos 2\alpha&=\cos p\\
\sin\zeta\cos\eta+\sin\eta\cos\zeta\cos 2\alpha&=-\cos q
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Тогда имеем формулы:

$$e^{\frac{Z_1}{2\sin\alpha}+\frac{Y_1}{2\cos\alpha}}=\frac{\cos p+\cos X_1}{\sin 2\alpha\cos\eta};$$

$$e^{-\left(\frac{Z_1}{2\sin\alpha}+\frac{Y_1}{2\cos\alpha}\right)}=\frac{-\cos p+\cos X_1}{\sin 2\alpha\cos\eta}$$

$$e^{\frac{Z_1}{2\sin\alpha}-\frac{Y_1}{2\cos\alpha}}=\frac{-\cos q+\cos X_1}{\sin 2\alpha\cos\zeta};$$

$$e^{-\left(\frac{Z_1}{2\sin\alpha}-\frac{Y_1}{2\cos\alpha}\right)}=\frac{\cos q+\cos X_1}{\sin 2\alpha\cos\zeta},$$

которые дают

$$\left.\begin{aligned}\cos p&=\operatorname{sh}\left(\frac{Z_1}{2\sin\alpha}+\frac{Y_1}{2\cos\alpha}\right).\ \sin 2\alpha\cos\eta=Y'\sin 2\alpha\cos\eta\\ \cos q&=-\operatorname{sh}\left(\frac{Z_1}{2\sin\alpha}-\frac{Y_1}{2\cos\alpha}\right).\ \sin 2\alpha\cos\zeta=Z'\sin 2\alpha\cos\zeta\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

где обозначено

$$\operatorname{sh}\left(\frac{Z_1}{2\sin\alpha}+\frac{Y_1}{2\cos\alpha}\right)=Y'$$

$$-\operatorname{sh}\left(\frac{Z_1}{2\sin\alpha}-\frac{Y_1}{2\cos\alpha}\right)=Z'.$$

Чтобы составить уравнение поверхности изгибания, берем уравнения (4) и напишем их в силу уравнений (5) в виде

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&\sin\eta\cos\zeta+\cos\eta\cos 2\alpha\sin\zeta-Y'\sin 2\alpha\cos\eta=0\\&(\sin\eta\cos 2\alpha+Z'\sin 2\alpha)\cos\zeta+\cos\eta\sin\zeta=0\end{aligned}\right.$$

Умножая второе из уравнений (6) на $\cos 2\alpha$ и вычитая его из первого имеем:

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&(\sin\eta\sin 2\alpha-Z'\cos 2\alpha)\cos\zeta=Y''\cos\eta\text{ и еще уравнение}\\&\sin\eta\sin 2\alpha-Z'\cos 2\alpha)\sin\zeta=-Y'(\sin\eta\cos 2\alpha+Z'\sin 2\alpha),\end{aligned}\right.$$

которое получим, умножив первое из уравнений (6) на $-(\sin\eta\cos 2\alpha+Z'\sin 2\alpha)$, а второе на $\sin\eta$.

Далее берем

$$Y'^2\cos^2\eta+Y'^2(\sin\eta\cos 2\alpha+Z''\sin 2\alpha)^2=$$
$$=(\sin\eta\sin 2\alpha-Z'\cos 2\alpha)^2.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Прибавим к той и другой части этого уравнения величину

$$Y'^2(\sin\eta\sin 2\alpha - Z'\cos 2\alpha)^2, \text{ тогда}$$

$$Y'^2(1+Z'^2) = (\sin\eta\sin 2\alpha - Z'\cos 2\alpha)^2(1+Y'^2),$$

а по извлечении квадратного корня получаем уравнение

$$\operatorname{sh}u\operatorname{ch}v = (\sin\eta\sin 2\alpha - Z'\cos 2\alpha)\operatorname{ch}u \quad (8)$$

где $u = \dfrac{Z_1}{2\sin\alpha} + \dfrac{Y_1}{2\cos\alpha}$, $\quad v = \dfrac{Z_1}{2\sin\alpha} - \dfrac{Y_1}{2\cos\alpha}$

Теперь в формулу

$$\sin X_1 = \sin\eta\sin\zeta - \cos\eta\cos\zeta\cos 2\alpha$$

внесем значения $\sin\zeta$ и $\cos\zeta$, взятые из формул (7) и найдем из нее после указанной подстановки

$$\sin\eta = -\frac{(\operatorname{sh}v\sin X_1 + \operatorname{sh}u)\cos 2\alpha}{(\sin X_1 - \operatorname{sh}u\operatorname{sh}v)\sin 2\alpha}$$

В результате подстановки найденного значения для $\sin\eta$ в (8) придем к уравнению

$$\sin X_1 = \operatorname{sh}u\operatorname{sh}v - \operatorname{ch}u\operatorname{ch}v\cos 2\alpha \quad \ldots\ldots (9)$$

В последнем уравнении положим $u = \tau + \delta$, $v = \tau - \delta$ и преобразуем его к виду

$$\sin X_1 = \sin^2\alpha\operatorname{ch}\tau - \cos^2\alpha\operatorname{ch}\delta, \quad \text{если}$$

сделать параллельный перенос осей $X_1 = \dfrac{\pi}{2} - \rho$, $\quad \delta = \delta$, $\quad \tau = \tau$,

то последнее у-ние примет вид:

$$\cos\rho = \sin^2\alpha\operatorname{ch}\tau - \cos^2\alpha\operatorname{ch}\delta. \quad \ldots\ldots (10)$$

Мы получили под видом уравнения (10) искомую поверхность изгибания, она известна под именем поверхности Enneper'a.

Итак, после сделанного подсчета мы приходим к следующему выводу;

Поверхность Enneper'a

$$\cos\rho = \sin^2\alpha\operatorname{ch}\tau - \cos^2\alpha\operatorname{ch}\delta$$

есть результат изгибания поверхности Scherk'a

$$e^{\frac{x\sin\alpha\cos\alpha}{a}} = \frac{\cos\left(\dfrac{y\sin\alpha - z\cos\alpha}{2a}\right)}{\cos\left(\dfrac{y\sin\alpha + z\cos\alpha}{2a}\right)}.$$

Имея уравнение поверхности, перейдем к изучению ее вида. Пересечем поверхность координатной плоскостью $\delta = 0$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



В сечении получим кривую

$\cos\frac{\rho}{2}=\sin\alpha\,\mathrm{ch}\frac{\tau}{2}$ (11), по которой плоскость $\rho\tau$ пересекает поверхность.

Если считать $\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha>0$, $\tau=0$ дает наименьшее значение $\cos\frac{\rho}{2}$, а следовательно наибольшее значение $\rho$ по абсолютной величине.

С увеличением $\tau$, значение $\cos\frac{\rho}{2}$ увеличивается, а тогда уменьшается, наибольшее значение $\tau$ получается при $\rho=0$ из уравнения $\mathrm{ch}\frac{\tau}{2}=\frac{1}{\sin\alpha}$. Отсюда заключаем, что кривая, пресечения поверхности плоскостью $\rho\tau$ замкнута и имеет вид овальной кривой.

Пересечем поверхность плоскостью $\tau=0$, кривая сечения имеет уравнение:

$$\sin\frac{\rho}{2}=\cos\alpha\,\mathrm{ch}\frac{\delta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Изучим вид кривой: $\delta=0$ дает $\sin\frac{\rho}{2}=\cos\alpha$, где $\cos\alpha>0$, С увеличением $\delta$ значение $\sin\frac{\rho}{2}$ увеличивается, следовательно $\rho$ увеличивается, то есть кривая пойдет вверх вдоль по оси $\rho$.

Так как $\mathrm{ch}\frac{\delta}{2}>0$, $\cos\alpha>0$, то $\sin\frac{\rho}{2}>0$ и $0<\frac{\rho}{2}<\pi$ а $0<\rho<2\pi$, следовательно $\rho$ ограничено в своих значениях, в виду того, что $\mathrm{ch}\frac{\delta}{2}$ не может стать больше $\frac{1}{\cos\alpha}$, значения $\delta$ для кривой сечения также ограничены и мы отсюда заключаем, что кривая замкнута.

Рассматривая совместно кривые сечений поверхности плоскостями $\rho\tau$ и $\rho\delta$ получим, что они имеют на оси $\rho$ общую точку $(\pi-2\alpha,\ 0,\ 0)$, первая кривая расположена ниже ее, вторая же поднимается выше.

Пересечем поверхность плоскостью $\rho=0$, кривая пересечения имеет уравнение

$$\mathrm{ch}\frac{\delta}{2}=\pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{sh}\frac{\tau}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Исследуем вид этой кривой. Если $\tau=0$, то тогда было бы $\mathrm{ch}\frac{\delta}{2}=0$, что невозможно, то есть кривая не пересекает оси $\delta$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Если $\delta = 0$, то $\operatorname{sh}\frac{\tau}{2} = \pm \operatorname{ctg}\alpha$.

Это уравнение дает две точки $\tau_1$ и $\tau_2$, в которых ось $\tau$ пересекает кривую. С возрастанием $\delta$, значения $\tau$ увеличиваются. Кривая состоит из двух ветвей гиперболического вида. Для того, чтобы иметь целый ряд сечений поверхности плоскостями, параллельными плоскости $\delta\tau$, выведем из уравнения поверхности уравнения этих кривых.

Сделаем преобразование

$$\operatorname{sh}\frac{\tau}{2} = u_1, \quad \operatorname{sh}\frac{\delta}{2} = v_1$$

($u_1$ и $v_1$ — величины непрерывно изменяющиеся от нуля до бесконечности)

$$\operatorname{ch}\tau = 1 + 2u_1^2, \quad \operatorname{ch}\delta = 1 + 2v_1^2,$$

$$\cos\rho = 2(\sin^2\alpha \cdot u_1^2 - \cos^2\alpha \cdot v_1^2) - \cos 2\alpha$$

и, наконец, имеем

$$\cos\left(\frac{\rho}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\rho}{2} - \alpha\right) = \sin^2\alpha \cdot u_1^2 - \cos^2\alpha \cdot v_1^2 \quad . \quad (14)$$

Придавая в этом уравнении всевозможные значения $\rho$ (кроме уже рассмотренного $\rho = 0$) получим всевозможные кривые сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости $\delta\tau$. Эти кривые будут того же вида, что и кривая (13) и они различаются только своим расположением.

При тех значениях $\rho$, для которых

$$\cos\left(\frac{\rho}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\rho}{2} - \alpha\right) > 0,$$

кривые простираются вдоль по оси $\tau$, если же

$\cos\left(\frac{\rho}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\rho}{2} - \alpha\right) < 0$ вдоль по оси $\delta$.

Кривые, имеющие первое расположение, отделяются от кривых, имеющих второе положение теми кривыми, которые получаются при

$$\cos\left(\frac{\rho}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\rho}{2} - \alpha\right) = 0.$$

Уравнение этих кривых имеет вид:

$$\operatorname{sh}\frac{\delta}{2} = \pm \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{sh}\frac{\tau}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Эта кривая состоит из двух пересекающихся на оси $\rho$ ветвей, симметричных по отношению к осям $\delta$ и $\tau$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Уравнение поверхности (10) содержит периодическую функцию cos ρ, поэтому ρ может принимать всевозможные значения, а вся поверхность вытянута по оси ρ и состоит из частей, периодически повторяющихся.

На основании всего изложенного, можно составить ясное представление о виде поверхности Enneper'a.

## Déformation d'une surface minima de translation.

V. A. Sokolova (Tomsk).

La surface d'Enneper

$$\cos\rho = \sin^2\alpha \operatorname{ch}\tau - \cos^2\alpha \operatorname{ch}\delta$$

est le résultat de la déformation de la surface de Scherk

$$e^{\frac{x\sin\alpha\cos\alpha}{a}} = \frac{\cos\left(\frac{y\sin\alpha - z\cos\alpha}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{y\sin\alpha + z\cos\alpha}{2a}\right)}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# UBER VOLLSTÄNDIG GEODÄTISCHE ANALYTISCHE MANNIGFALTIGKEITEN EINER VIERDIMENSIONALEN RIEMANNSCHEN GEOMETRIE.

B. FUCHS (Tomsk).

In der vorliegenden Note werden die Frage über die Existenz von vollständig geodätischen analytischen Mannigfaltigkeiten einer vierdimensionalen Riemannschen Geometrie von besonderer Struktur und einige Metoden zu ihrer Auffindung behandelt. Eine Riemannsche Geometrie dieser Art wird von S. Bergmann auf besondere Weise innerhalb jedes vierdimensionalen Bereichs $\mathfrak{B}$ festgelegt und bleibt bei allen pseudokonformen Abbildungen dieses Bereichs auf einen anderen Bereich $\mathfrak{B}^*$ invariant.

Aufgestellt wird diese Geometrie mit Hilfe einer definiten, positiven Hermiteschen Form

$$ds^2 = \sum_{m,n=1}^{2} T_{m\bar{n}}\, dz^m\, d\bar{z}^n;$$

$$z^k = x^k + iy^k; \quad T_{m\bar{n}} = \frac{\partial^2 \lg K}{\partial z^m\, \partial \bar{z}^n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

$K(z^1, z^2, \bar{z}^1, \bar{z}^2)$ ist eine positive und analytische Funktion der reellen Veränderlichen $x^1$, $y^1$, $x^2$, $y^2$; S. Bergmann nimmt bei der Anwendung dieser Geometrie als $K$ $(z^1, z^2, \bar{z}^1, \bar{z}^2)$ die Kernfunktion des Bereichs an, die als Lösung einer speziellen Minimalaufgabe für den Bereich $\mathfrak{B}$ bestimmt wird[1]).

Statt $(x^1, y^1, x^2, y^2)$ werden wir formal mit den Grössen $(z^1, z^2, \bar{z}^1, \bar{z}^2)$ operieren, wie mit Koordinaten im Raume. Um die Lage eines Punktes im Raume anzugeben oder einen Vektor zu bestimmen, genügen natürlich die ersten beiden Koordinaten oder Komponenten und wir werden zu diesem Zweck nur sie aufschreiben. In anderen Fällen jedoch, z. B. wenn Gleichungen von Mannigfaltigkeiten im Raume, Tensorkomponenten u. a. betrachtet werden, ist die Einführung aller vier Grössen $z^1, z^2, \bar{z}^1, \bar{z}^2$ notwendig.

Betrachten wir die Riemannsche Metrik, die durch die Form (1) be-

---

[1]) Siehe S. Bergmann: „Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande" I (Crelles Journal **169**, 1932, S. 1—42), II (Crelles Journal **174**, 1934. S. 89—128). Dort ist auch die übrige Literatur über diese Frage gegeben.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



stimmt ist. Die Komponenten des Fundamentaltensors $g_{ik}$ erweisen sich als entsprechend gleich:

$$g_{1\bar{1}}=g_{1\bar{2}}=g_{2\bar{2}}=g_{\bar{1}\bar{1}}=g_{\bar{1}\bar{2}}=g_{\bar{2}\bar{2}}=0;\ g_{1\bar{1}}=\frac{1}{2}T_{1\bar{1}};\ g_{1\bar{2}}=\frac{1}{2}T_{1\bar{2}};$$

$$g_{\bar{1}2}=\frac{1}{2}T_{\bar{1}2};\ g_{\bar{2}2}=\frac{1}{2}T_{\bar{2}2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Infolge der speziellen Gestalt der Form (1), die durch die Gleichungen $T_{m\bar{n}}=\frac{\partial^2 \lg K}{\partial z^m \partial \bar{z}^n}$ gegeben ist, fällt die Riemannsche Parallelverschiebung mit derjenigen von Hermite zusammen, welche im unitären Raume der Veränderlichen $z^1$, $z^2$ durch die Form (1) erzeugt wird[2]).

Dann lassen sich die Christoffelschen Symbole so ausdrücken:

$$\left\{\begin{matrix} i \\ k\,l \end{matrix}\right\}=\sum_{\alpha=1}^{2} g^{i\bar{\alpha}}\frac{\partial g_{k\bar{\alpha}}}{\partial z^l};\ i,\ k,\ l=1,\ 2. \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Die übrigen Symbole werden entweder konjugiert berechnet oder sind gleich Null. Die hier vorkommenden kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors sind gleich Null ausser

$$g^{1\bar{1}}=\frac{2T_{2\bar{2}}}{D},\ g^{1\bar{2}}=-\frac{2T_{2\bar{1}}}{D};\ g^{2\bar{1}}=-\frac{2T_{1\bar{2}}}{D};\ g^{2\bar{2}}=\frac{2T_{1\bar{1}}}{D}. \quad (4)$$

Hier ist $D=T_{1\bar{1}}\ T_{2\bar{2}}-T_{1\bar{2}}\ T_{2\bar{1}}$.

Unter Benutzung von (4) und (1) erhalten wir nach elementaren Rechnungen:

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\,1 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{K^3 D}\begin{vmatrix} K_{0000} & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{1000} & K_{1010} & K_{1001} \\ K_{2000} & K_{2010} & K_{2001} \end{vmatrix};\quad \left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\,2 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{K^3 D}\begin{vmatrix} K_{0000} & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{1000} & K_{1010} & K_{1001} \\ K_{1100} & K_{1110} & K_{1101} \end{vmatrix}-\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial z^1}$$

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\,2 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{K^3 D}\begin{vmatrix} K_{0000} & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{1000} & K_{1010} & K_{1001} \\ K_{0200} & K_{0210} & K_{0201} \end{vmatrix}-\frac{2}{K}\frac{\partial K}{\partial z^2};\quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\,2 \end{matrix}\right\}=-\frac{1}{K^3 D}\begin{vmatrix} K_{0000} & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{0100} & K_{0110} & K_{0101} \\ K_{0200} & K_{0210} & K_{0201} \end{vmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\,2 \end{matrix}\right\}=-\frac{1}{K^3 D}\begin{vmatrix} K_{0000} & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{0100} & K_{0110} & K_{0101} \\ K_{1100} & K_{1110} & K_{1101} \end{vmatrix}-\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial z^2};$$

[2]) J. A. Schouten und D. van Dantzig: „Über unitäre Geometrie". Math. Annalen **103**, 1930, S. 319—346 (Im folgenden Schouten—van Dantzig zitiert). Siehe S. 329—335. Bezüglich der Christoffelschen Symbole vergleiche ebenfalls diese Arbeit. Sie können natürlich unmittelbar auch aus ihrem gewöhnlichen Ausdruck in der Riemannschen Geometrie gewonnen werden.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{K^2 D}\begin{vmatrix} K_{0000} & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{0100} & K_{0110} & K_{0101} \\ K_{2000} & K_{2010} & K_{2001} \end{vmatrix} - \frac{2}{K}\frac{\partial K}{\partial z^1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Hier ist $K_{mn\,\overline{pq}} = \dfrac{\partial^{m+n+p+q} K}{\partial (z^1)^m \partial (z^2)^n \partial (\overline{z^1})^p \partial (\overline{z^2})^q}$. Die anderen Symbole sind entweder gleich Null oder werden konjugiert berechnet. Wie bekannt, wird eine vollständig geodätische Mannigfaltigkeit durch die Bedingung bestimmt, dass die Komponenten ihres Tensors der erzwungenen Krümmung[3]) $H_{mn}^{\cdot\cdot\,\nu}$ Null werden. Die Bedingungen dafür, dass die Fläche

$$z^2 = f(z^1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

vollständig geodätisch wird, sind somit:

$$H_{1\,1}^{\cdot\cdot\,1} = 0, \quad H_{1\,1}^{\cdot\cdot\,2} = 0; \quad H_{\overline{1}\,\overline{1}}^{\cdot\cdot\,\overline{1}} = 0, \quad H_{\overline{2}\,\overline{2}}^{\cdot\cdot\,\overline{2}} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Die übrigen Komponenten dieses Tensors sind identisch Null. Für die Grössen $H_{1\,1}^{\cdot\cdot\,1}$; $H_{1\,1}^{\cdot\cdot\,2}$ sind leicht folgende Ausdrücke zu erhalten[4]).

$$H_{1\,1}^{\cdot\cdot\,1} = -\frac{(T_{1\overline{2}} + \overline{f'}\,T_{1\overline{2}})\,Q}{(T_{1\overline{1}} + T_{1\overline{2}}\overline{f'} + T_{\overline{1}2} f' + T_{2\overline{2}} f'\overline{f'})^3},$$

$$H_{1\,1}^{\cdot\cdot\,2} = \frac{(T_{2\overline{1}} + \overline{f'}\,T_{2\overline{2}})\,Q}{(T_{1\overline{1}} + T_{1\overline{2}}\overline{f'} + T_{\overline{1}2} f' + T_{2\overline{2}} f'\overline{f'})^3} \quad \ldots\ldots (8)$$

$H_{\overline{1}\,\overline{1}}^{\cdot\cdot\,\overline{1}}$, $H_{\overline{2}\,\overline{2}}^{\cdot\cdot\,\overline{2}}$ sind diesen konjugiert.

Hier ist:

$$Q = f''' + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,1 \end{Bmatrix} + f'\left(2\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\,2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix}\right) + f'^2\left(\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} f'^3 \quad (9)$$

Es ist leicht, die geometrische Bedeutung von $Q$ anzugeben. Es erweist sich, dass

$$\frac{\sqrt{D}\cdot Q}{(T_{1\overline{1}} + T_{1\overline{2}}\overline{f'} + T_{\overline{1}2} f' + T_{2\overline{2}} f'\overline{f'})^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\Theta}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

ist, wo $d\Theta$ der Winkel zwischen zwei benachbarten, die Fläche (6) berührenden analytischen Ebenen bedeutet. Eine dieser Ebenen wird mit Hilfe der Riemannschen Parallelverschiebung, die durch Form (1)

[3]) Über die Definition der vollständig geodätischen Mannigfaltigkeiten und des Tensors $H_{mn}^{\cdot\cdot\,\nu}$ siehe Schouten „Der Ricci-Kalkül", Berlin, 1924; S. 181—183.

[4]) Die Werte der Komponenten $H_{mn}^{\cdot\cdot\,\nu}$ können aus Formel (90) bei Schouten—van Dantzig berechnet werden.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



bestimmt ist, in den Berührungspunkt der anderen Ebene verschoben[5]). Also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (6) eine vollständig geodätische Fläche ist, ist:

$$Q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Ausdrücke $T_{1\bar{1}}+\bar{f}'T_{1\bar{2}}$ und $T_{2\bar{1}}+T_{2\bar{2}}\bar{f}'$ können nicht gleichzeitig Null sein, da $D\neq 0$ ist.

Benutzen wir (5), so erhalten wir nach einigen elementaren Rechnungen aus (8), wenn wir

$$\frac{dF(z^1,z^2,\bar{z}^1,\bar{z}^2)}{dz^1}=\frac{\partial F}{\partial z^1}+f'\frac{\partial F}{\partial z^2}$$

$$\frac{d^2F}{d(z^1)^2}=\frac{\partial F}{\partial z^2}f''+\frac{\partial^2 F}{\partial (z^1)^2}+2f'\frac{\partial^2 F}{\partial z^1\partial z^2}+f'^2\frac{\partial^2 F}{\partial (z^2)^2}$$

bezeichnen, folgenden Ausdruck für $Q$:

$$DQ=\frac{1}{K^3}\begin{vmatrix} K & K_{\bar{z}^1} & K_{\bar{z}^2} \\ \frac{dK}{dz^1} & \frac{dK_{\bar{z}^1}}{dz^1} & \frac{dK_{\bar{z}^2}}{dz^1} \\ \frac{d^2K}{d(z^1)^2} & \frac{d^2K_{\bar{z}^1}}{d(z^1)^2} & \frac{d^2K_{\bar{z}^2}}{d(z^1)^2} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hier ist $K_{\bar{z}^1}=\frac{\partial K}{\partial \bar{z}^1}$; $K_{\bar{z}^2}=\frac{\partial K}{\partial \bar{z}^2}$. $Q=0$ ist die $f(z^1)$ determinierende Differentialgleichung. Sie hat die Form einer Wronskischen Determinante. Deshalb kann ihr Integral durch folgende Relation dargestellt werden:

$$\bar{\alpha}K+\bar{\beta}\frac{\partial K}{\partial \bar{z}^1}+\bar{\gamma}\frac{\partial K}{\partial \bar{z}^2}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Hier sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ willkürliche antianalytische Funktionen. Falls es gelingt, diese Funktionen so zu wählen, dass (13) auf einer analytischen Fläche besteht, so wird diese analytische Fläche vollständig geodätisch sein.

Wir erhalten somit den folgenden

Satz. Jede analytische, vollständig geodätische Fläche der durch die Form (1) bestimmten Riemannschen Geometrie kann folgendermassen gewonnen werden: man wähle antianalytiche Funktionen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ derart, dass (13) in jedem Punkte einer analytischen Fläche besteht. Diese Fläche ist dann vollständig geodätisch.

Besprechen wir einige Beispiele.

---

[5]) Über diese Frage siehe meine Arbeit „Über einige Eigenschaften der pseudokonformen Abbildungen" § 3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



1) Für den Euklidischen Raum ist $\lg K = z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2$. Die Gleichung (13) geht nach einigen Rechnungen in die Form über

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} z^1 + \bar{\gamma} z^2 = 0.$$

Nehmen wir als $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ die Konstanten $A$, $B$, $C$ an, so haben wir

$$A + B z^1 + C z^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Dies ist die Gleichung einer analytischen Ebene.

2) Betrachten wir die invariante Metrik, die von S. Bergmann innerhalb der Kugel $|z^1|^2 + |z^2|^2 \leqslant 1$ aufgestellt ist. Dort ist

$$K = \frac{2}{\pi^2 (1 - z^1 \bar{z}^1 - z^2 \bar{z}^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Die Gleichung (13) nimmt nach einigen Transformationen die folgende Form an

$$\bar{\alpha} [1 - z^1 \bar{z}^1 - z^2 \bar{z}^2] + 3 \bar{\beta} z^1 + 3 \bar{\gamma} z^2 = 0.$$

Wenn wir $\bar{\alpha} = 3$; $\bar{\beta} = \bar{z}^1 + \frac{3B}{A}$; $\bar{\gamma} = \bar{z}^2 + \frac{3B}{A}$ annehmen, so erhalten wir

$$A + B z^1 + C z^2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Wir sehen, dass die analytischen Ebenen in diesem Fall die einzigen vollständig geodätischen Flächen sind. Andere vollständig geodätische analytische Flächen kann es nicht geben, da (16) nur bei A/B=const, C/B=const zu einer analytischdn Fläche führt.

In anderen Fällen (z. B. für die, von S. Bergmann innerhalb eines Bizylinders angegebene invariante Metrik) kann man, von (13) ausgehend, eine Gesamtheit der analytischen, vollständig geodätischen Flächen erhalten, die von einer kleineren Anzahl willkürlicher Konstanten (im Fall des Bizylinders nur von einer reellen Konstanten) abhängt.

Es kann sich erweisen, dass solche Flächen überhaupt nicht existieren. Dabei ist manchmal in Betracht zu ziehen, dass wir aus (13) ausser der Relation $z^2 = f(z^1)$ auch die Relation $\bar{z}^2 = \bar{f}(\bar{z}^1)$ erhalten; dies letztere müssen wir bei der Rechnung beachten.

Betrachten wir nun die Frage über die Möglichkeit der Existenz von analytischen, vollständig geodätischen (dreidimensionalen) Hyperflächen. Die analytische Hyperfläche ist durch die Gleichung

$$z^2 = f(z^1, \lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

gegeben. ($\lambda$ ist hier ein reeller Parameter; bei jedem der betrachteten Werte $\lambda$ innerhalb eines gewissen Intervalls, muss (17) eine analytische Funktion von $z^1$ darstellen). Ferner beweisen wir den

**Satz.** Wenn $z^2 = f(z^1, \lambda)$ eine vollständig geodätische analytische Hyperfläche bestimmt, so bestimmt jede Gleichung $z^2 = f(z^1, \lambda_0)$, wo $\lambda_0$ dem Änderungsintervall

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



von $\lambda$ angehört, eine analytische, zweidimensionale, vollständig geodätische Fläche.

Beweis. Bekanntlich, ist eine vollständig geodätische Hyperfläche dadurch charakterisiert, dass die Komponenten ihres zweiten Fundamentaltensors Null sind. (Dies ist den Glelchungen $H_{mn}^{\cdot\cdot\nu}=0$ äquivalent). Sie können auf folgende Weise definiert werden[6]):

$$\Omega_{ij}=\sum g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}\xi^\beta+[\mu\nu,\beta]_g\frac{\partial z^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial z^\nu}{\partial x^j}\xi^\beta \quad \ldots\ldots\ldots (18).$$

Die $\Sigma$ erstreckt sich auf die Werte $\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \bar{1},\ \bar{2}$.

Hier ist $g_{\alpha\beta}$ der Fundamentaltensor des Raumes, $\xi^\beta$ der Ort der Normale, $x^i$ sind die inneren Koordinaten der Punkte der Hyperfläche ($x^i=z^1,\ \bar{z}^1,\ \lambda$), $[\mu\nu,\beta]_g$ sind die Christoffelschen Symbole erster Art. Die $g_{\alpha\beta}$ werden durch (2) bestimt,

$$[\mu\nu,\beta]_g=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial z_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial z_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z_\beta}\right);\ \mu,\ \nu,\ \beta=1,\ 2,\ \bar{1},\ \bar{2}.$$

Was aber $\xi^1$, $\xi^2$ betrifft ($\xi^{\bar{1}}$, $\xi^{\bar{2}}$ sind mit ihnen konjugiert), so kann man sie leicht durch unmittelbare Ausrechnung überzeugen, dass sie

$$-\frac{T_{2\bar{1}}+T_{2\bar{2}}\bar{f}'_{z^1}}{f'_\lambda};\qquad \frac{T_{1\bar{1}}+T_{2\bar{1}}\bar{f}'_{z^1}}{f'_\lambda}$$

proportional sind.

Zieht man alle diese Tatsachen in Betracht, so überzeugt man sich, (nach einigen notwendigen Rechnungen) dass

$$\Omega_{11}=\mu Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

ist, wo $\mu\neq 0$ irgend einen Koeffizienten bedeutet. Da für eine vollständig geodätische Hyperfläche alle $\Omega_{ij}$ Null sind, so sehen wir, dass $Q=0$ für alle $\lambda$ sein muss. Somit ist unser Satz bewiesen.

Schliesslich beweisen wir den folgenden

Satz. Weun irgend eine geodätiche Linie auf einer zweidimensionalen analytischen Fläche liegt, so ist diese Fläche vollständig geodätisch.

Beweis. Eine geodätische Linie des Raumes wird in unserem Falle durch die Gleichungen

$$\frac{d^2 z^k}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}k\\1\,1\end{matrix}\right\}\left(\frac{dz^1}{ds}\right)^2+2\left\{\begin{matrix}k\\1\,2\end{matrix}\right\}\frac{dz^1}{ds}\frac{dz^2}{ds}+\left\{\begin{matrix}k\\2\,2\end{matrix}\right\}\left(\frac{dz^2}{ds}\right)^2=0,\quad k=1,2 \quad \ldots\ldots (20)$$

und ihre Konjugierten definiert.

[6]) Siehe z. B. L. P. Eisenhart. „Riemannian Geometry" Princeton 1926, s. 146—150 insbesondere die Formel 43,5) und s. 183—184 (insbesondere die Formel 54,1).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Durch jede Linie geht nicht mehr als eine analytische Fläche. Wenn eine solche existiert, so kann ihre Gleichung gefunden werden durch Elimination von $s$ aus den Gleichungen der geodätischen Linie. Wenn die Gleichung dieser Fläche $z^2 = f(z^1)$ ist, so ist offenbar längs der geodätischen Linie (20):

$$f' = \frac{\left(\frac{dz^2}{ds}\right)}{\left(\frac{dz^1}{ds}\right)}; \quad f'' = \frac{\frac{d^2z^2}{ds^2}\frac{dz^1}{ds} - \frac{d^2z^1}{ds^2}\frac{dz^2}{ds}}{\left(\frac{dz^1}{ds}\right)^3}$$

Daraus und aus (20) folgern wir leicht, dass $z^2 = f(z^1)$ die Gleichung (10) befriedigt, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

---

## О вполне геодезических аналитических многообразиях одной четырехмерной Риманновской геометрии.

Б. А. Фукс (Томск).

В настоящей заметке рассматривается вопрос о существовании и методах нахождения аналитических, вполне геодезических многообразий одной четырехмерной Риманновской геометрии. Эта геометрия устанавливается St. Bergmann'ом внутри всякой 4-мерной области $\mathfrak{B}$ и остается инвариантной при псевдоконформных отображениях.

---

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

## СОДЕРЖАНИЕ.
## INHALT.
## TABLE DES MATIÈRES.

Стр.

И. И. Привалов. Современные проблемы теории функций комплексного переменного . . . . . 107

I. I. Priwaloff. Gegenwärtige Probleme der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. . . . . 119

Ф. М. Нетер. О рекуррентных формулах функций Бесселя и Эрмита . . . . . 120

F. Noether. Über die Rekursionformeln der Besselschen und Hermiteschen Funktionen. . . . . 125

И. И. Привалов. Обобщение метода Линделефа . . . . . 126

I. I. Priwaloff. Verallgemeinerung einer Methode von Lindelöf . . . . . 135

P. Erdös und P. Turan. Über die Vereinfachung eines Landauschen Satzes . . 144

П. Эрдеш и П. Туран. Об упрощении одной теоремы Ландау . . . . . 147

A. S. Kovanko. Sur quelques modes de convergence des suite de fonction à une variable réelle sur $(-\infty, +\infty)$ . . . . . 148

А. С. Кованько. О некоторых видах сходимости последовательностей функций одной действительной переменной на $(-\infty, +\infty)$ . . . . . 154

K. Zarankiewicz. Zur lokalen Zerschneidung des Raumes . . . . . 155

К. Заранкевич. К вопросу о местном рассечении пространства . . . . . 159

В. А. Соколова. Изгибание минимальной поверхности переноса . . . . . 160

V. A. Sokolowa. Déformation d'une surface minima de translation . . . . . 167

B. Fuchs. Über vollständig geodätische analytische Mannigfaltigkeiten einer vierdimensionalen Riemannschen Geometrie . . . . . 168

Б. А. Фукс. О вполне-геодезических аналитических многообразиях одной четырехмерной Риманновской геометрии . . . . . 174

Технический редактор—М. Д. Ходор.

Уполкрайлита № 1399 20/XI 34 г.
Сдано в работу 20/X 1934 г.
Подписано к печати 30/III 35 г.
Статф. 155×230/16

Типогр. зн. в печатн. л. 50752
Об'ем 6¾ печатн. л.
Тираж 500 экз.
Заказ № 1556—1934 г.

Типография изд. „Красное Знамя" Томск, Советская ул., № 3

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

222859

**Цена 2 руб.**

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00975721