

Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет

А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева

**КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС
И ТЕПЛООБМЕН**

Учебное пособие

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Томск – 2017

УДК 519.63
П69

Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. **Конвективный тепло-
П69 перенос и теплообмен** : учеб. пособие. – Томск : STT,
2017. – 80 с.

ISBN 978-5-93629-601-7

Представлены классические решения задач конвективного теплообмена при обтекании тел потоком жидкости, основы теплообмена излучением. Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе подготовки магистров по направлениям 16.04.01 – Техническая физика, 24.04.03 – Баллистика и гидроаэродинамика на физико-техническом факультете ТГУ.

УДК 519.63

Рецензенты:

- Миньков Л.Л. – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета;
Борисов Б. В. – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической и промышленной теплотехники Томского политехнического университета.

*Учебное пособие разработано при финансовой поддержке
гранта Президента МК-5959.2016.8.*

ISBN 978-5-93629-601-7

© А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева 2017
© Томский государственный универси-
тет, 2017
© Оформление, дизайн. STT, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Конвективный теплообмен	6
1.1. Основные понятия и определения. Коэффициент теплоотдачи	6
1.2. Дифференциальное уравнение конвективного теплопереноса	8
1.3. Некоторые понятия теории размерности. Критерии подобия в теплофизике	10
1.4. Гидродинамический и тепловой пограничные слои	13
1.4.1. Гидродинамика и теплообмен в ламинарных пограничных слоях	13
1.4.2. Решение уравнений ламинарного гидродинамического пограничного слоя	17
1.4.3. Приближенный метод решения уравнений гидродинамического пограничного слоя	19
1.4.4. Интегральное уравнение теплового пограничного слоя	23
1.4.5. Теплоотдача при ламинарном пограничном слое	24
1.5. Теплообмен при течении жидкости в трубе	29
1.6. Теплообмен при свободной конвекции вблизи вертикальной стенки	37
1.7. Теплоотдача при течении газа с большими скоростями	42
1.8. Теплообмен в разреженных газах	46
Глава 2. Теплообмен при фазовых и химических превращениях	51
2.1. Теплообмен при конденсации	51
2.2. Тепло- и массоотдача в двухкомпонентных смесях Термодиффузия. Бародиффузия. Дифференциальные уравнения тепло- массоотдачи	56
2.3. Процесс испарения. Стефановский поток. Коэффициент массоотдачи при испарении жидкости	58
2.4. Теплообмен при химических превращениях	61

Глава 3. Теплообмен излучением	63
3.1. Основные понятия и законы теплоизлучения	63
3.2. Теплообмен излучением между двумя телами	70
3.3. Уравнение переноса лучистой энергии в поглощающей и излучающей среде	73
3.4. Перенос излучения в диффузионном приближении	75
Заключение	76
Контрольные вопросы	77
Список литературы	78

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии изложены классические решения задач конвективного теплообмена при обтекании тел потоком жидкости. Рассмотрены процессы теплообмена при ламинарном течении жидкости в пограничном слое, при течении жидкости в трубе, при естественно-конвективном течении жидкости вдоль вертикальной стенки. Рассмотрены особенности теплоотдачи при испарении и конденсации компонентов газовой смеси, при наличии химических реакций в газовой смеси, при течении газа с большими скоростями, в разреженных газах.

Основное внимание уделено изложению классических аналитических решений задач теплообмена.

В последнем разделе изложены основы теплообмена излучением.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе подготовки магистров по направлениям 16.04.01 – Техническая физика, 24.04.03 – Баллистика и гидроаэродинамика на физико-техническом факультете ТГУ при изучении дисциплины «Процессы теплопередачи в технических устройствах». Освоение изложенных разделов способствует развитию способностей магистрантов критически анализировать современные проблемы технической физики, выбирать адекватные способы и методы решения экспериментальных и теоретических задач в области теплофизики, интерпретировать, представлять полученные при самостоятельных исследованиях результаты.

1 КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

1.1 Основные понятия и определения.

Коэффициент теплоотдачи

Конвекция – процесс переноса теплоты при перемещении макро-частиц газа или жидкости из области с одной температурой в область другой температурой (рис. 1). Теплообмен между телом и обтекающей его жидкостью или газом конвективным теплообменом. Величина теплового потока в движущейся жидкости определяется суммой:

$$\vec{q} = \vec{q}_t + \vec{q}_k, \quad (1)$$

где $q_t = -\lambda \cdot grad(T)$ – перенос тепла в единицу времени через единицу площади за счет теплопроводности, $q_k = \rho \vec{w} i$ – перенос тепла в единицу времени через единицу площади, ортогональной направлению вектора скорости $\vec{w}$ (конвективный теплоперенос), λ – коэффициент теплопроводности жидкости, T – температура, $i = c_p T$ – энтальпия, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

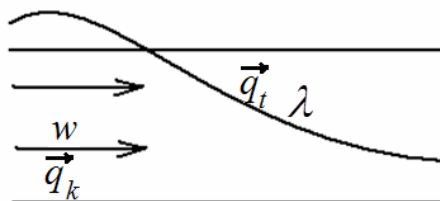


Рис. 1.

Конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью тела называют также конвективной теплоотдачей. При расчете теплоотдачи используется закон Ньютона для теплообмена. Он записывается в виде:

$$dQ = \alpha (T_l - T_s) dF, \quad (2)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, T_l, T_s – температура жидкости и поверхности тела, соответственно, dF – элементарный участок поверхности, dQ – количество тепла, проходящего через элементарный участок dF . Коэффициент теплоотдачи α учитывает условия теплоот-

дачи на поверхности тела и зависит от большого количества фактов: от формы и размера тела, скорости движения, физических свойств, режима движения жидкости вблизи тела. Поэтому коэффициент теплоотдачи записывается в виде функции $\alpha = \alpha(w, c, \rho \dots)$.

Если известно поле температуры жидкости в виде функции $T(x, y, z)$, где x, y, z координаты области, занятой жидкостью, то величину теплового потока на границе тела и жидкости определяется выражением:

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dn} dF, \quad (3)$$

где n – направление нормали к поверхности тела.

Из сравнения (2) и (3) находим выражение для коэффициента теплоотдачи в виде:

$$\alpha = \frac{-\lambda \frac{dT}{dn}}{(T_l - T_s)}. \quad (4)$$

При таком определении коэффициента теплоотдачи возникает вопрос о величине T_l . В каждой теплофизической ситуации конвективного теплообмена T_l определяют по-разному. При обтекании тела «безграничным» потоком жидкости в качестве T_l принимается температура набегающего потока; при течении жидкости в трубе в качестве T_l выбирают среднюю расходную температуру:

$$T_l = \frac{1}{G} \int_S \rho w T dS, \quad G = \int_S \rho w dS,$$

где S площадь проходного сечения трубы.

При записи эмпирических формул для коэффициентов теплоотдачи в справочниках, например [1], всегда определяется величина T_l используемая в формуле (2).

Различают свободную и вынужденную конвекцию. *Свободная* конвекция это движение жидкости под действием массовых сил в поле тяжести, причиной которой является зависимость плотности жидкости от температуры. *Вынужденная* конвекция это движение жидкости, вызванное действие поверхностных сил на границах области.

1.2 Дифференциальное уравнение конвективного теплопереноса

Рассмотрим однородную изотропную жидкость с постоянными физическими параметрами (плотность, теплопроводность, теплоемкость и т.д.). В случае когда работа внешних сил и кинетическая энергия малы по сравнению с энтальпией среды уравнение переноса тепла запишется в виде [1]:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial t} = -\text{div} \vec{q} + q_v. \quad (5)$$

После подстановки (1), с учетом $\text{div} \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$, и проекций плотности теплового потока на координатные оси:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_x i, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w_y i, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \rho w_z i \quad \text{получим:}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial i}{\partial t} = & \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \\ & - \rho i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v. \end{aligned} \quad (6)$$

Для несжимаемой жидкости, $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$, а

величину энтальпии можно определить из интеграла $i = \int_0^T c_p dT$. Урав-

нение (6) в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}, \quad (7)$$

Слагаемое в левой части уравнения (7) представляет собой полную производную от температуры по времени. С учетом этого уравнение (7) может быть записано в виде:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \nabla^2 T + \frac{q_v}{c_p \rho}. \quad (8)$$

Для решения уравнения (8) необходимо знать составляющие ско-

рости w_x, w_y, w_z . Изменение скорости во времени и пространстве описывается дифференциальными уравнениями движения, вывод которых подробно приведен в [2]. В векторной форме уравнение движения имеет вид:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{w}. \quad (9)$$

В (9) $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, p – давление, μ – коэффициент динамической вязкости.

Уравнения (7) и (8) дополняются уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Таким образом, процесс конвективного теплообмена в несжимаемой однородной среде с постоянными физическими параметрами описывается системой дифференциальных уравнений (8) – (10).

Для определения коэффициента теплообмена на границах области используются уравнения: $q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} = \alpha_i (T_l - T_s)$. Из уравнения определяются значения коэффициентов теплоотдачи на границах областей, $\alpha_i = \alpha_i(w, \mu, \rho, \lambda, c, \dots)$.

Величину коэффициента теплоотдачи в справочной и научной литературе записывают в виде зависимости безразмерного числа Нуссельта от безразмерных параметров, характеризующих свойства жидкости и скорость ее движения. Число Нуссельта определяется выражением:

$$Nu = \alpha L_s / \lambda,$$

где L_s – характерный масштаб.

В [3] приведены значения числа Нуссельта для частных задач конвективного теплообмена.

1.3 Некоторые понятия теории размерности. Критерии подобия в теплофизике

Весь изучаемый мир с физической точки зрения характеризуется массой, энергией, временем и расстоянием. Совокупность основных единиц измерения, достаточных для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений, называется системой единиц измерения.

В настоящее время сформировано и используется несколько основных систем единиц измерения:

	СИ	СГС	ТСЕ
Масса	кг	г	кГс
Длина	м	см	см
Время	с	с	с

Классом систем единиц измерения называется совокупность систем единиц измерения, отличающихся между собой только величинами основных единиц измерения. Размерностью физической величины называется функция, определяющая численное значение этой величины относительно меры её измерения внутри класса. Например, в системе СИ длина и объем измеряются в метрах, [м] и кубических метрах, [м³], соответственно.

Из основных единиц измерения могут конструироваться производные единицы измерения. Например, размерность силы в системе СИ определяется следующим образом. Пусть нужно определить размерность силы, действующей на тело, в направлении оси Ox :

$$F_x = m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \text{ Тогда: } [F] = [m][x][t]^{-2}, [F] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Величины физических величин $(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$ имеют независимые размерности, если размерность ни одной из них нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин. Например, величины плотность ρ , скорость v , сила F с соответствующими размерностями $\text{кг}/\text{м}^3$, $\text{м}/\text{с}$, $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ являются независимыми. Величины ρ , v , давление p имеют зависимые друг от друга размерности, так

$$\text{как } [p] = \frac{ML^2}{L^3 T^2} = [\rho] \cdot [v]^2.$$

Физические законы, установленные теоретически или экспериментально, представляют собой функциональную связь между величинами

ми, характеризующими исследуемые явления.

Для уменьшения количества параметров, определяющих физическую величину, можно привести размерные параметры к безразмерным. Согласно π -теореме количество безразмерных параметров, определяющих характеристики физического процесса, меньше общего количества размерных параметров на количество параметров с независимыми размерностями.

Рассмотрим задачу о конвективном теплообмене вязкой теплопроводной жидкости.

Уравнение энергии:

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + w_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + Q(T, x_j, t) \quad (11)$$

Уравнения движения (Навье – Стокса)

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (12)$$

Уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_i}{\partial x_i} = 0. \quad (13)$$

Уравнение состояния:

$$p = p(\rho, T). \quad (14)$$

В системе уравнений (11) – (13) наличие индекса i подразумевает суммирование: $w_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = w_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} =$

$= \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}$, где x_1, x_2, x_3 – координаты в Декартовой системе

координат. Наличие индекса j подразумевает перечисление: так запись (12) подразумевает три уравнения для компонентов скорости w_1, w_2, w_3 . Такая форма записи часто используется в научной литературе.

Введем безразмерные переменные: $\theta = (T - T_0)/T_*$ – температура; $\tau = t/t_*$ – время, $\bar{P} = p/p_*$ – давление, $\bar{w}_i = w_i/V_*$ – скорость, $\xi_i = x_i/L_*$ – координата, $\bar{\rho} = \rho/\rho_*$ – плотность. В качестве масшта-

бов зависимых и независимых переменных в системе уравнений (11) – (13) выбирают величины t_* , L_* , T_* , p_* , V_* , ρ_* . Выбор конкретных величин масштабов определяется индивидуально для каждой поставленной физической задачи. В качестве масштаба скорости выбирают либо скорость звука, либо скорость течения среды. В качестве масштаба давления выбирают либо максимальное давление в рассматриваемом объекте или процессе, либо величину динамического давления, которая связана с масштабами плотности и скорости соотношением $p_* = \rho_* V_*^2$. В качестве масштаба времени задается соотношение: $t_* = L_*/V_*$.

Проведя тождественные преобразования уравнений (11) – (14) получим систему уравнений в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \bar{w}_i \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_i^2} + \bar{Q}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \tau} + \bar{w}_i \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \xi_i} = -\frac{\text{Eu}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_j} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \xi_i^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_i} \bar{w}_i = 0, \quad (17)$$

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{\rho}, \theta), \quad (18)$$

где для возникших безразмерных комплексов введены обозначения: Re , Re , Eu .

$$\text{Re} = \frac{\rho_* L_* V_*}{\eta} - \text{число Рейнольдса, определяющее отношение сил}$$

инерции к силам вязкости. Если $\text{Re} \gg 1$, то силы инерции много больше сил вязкости и можно пренебречь слагаемыми, связанными с силами вязкости.

$$\text{Eu} = \frac{p_*}{\rho_* V_*^2} - \text{число Эйлера, которое характеризует отношение ста-}$$

тического давления к динамическому. (При выборе масштаба давления в виде $p_* = \rho_* V_*^2$ число Эйлера принимает значение равное 1)

$$Pe = \frac{c\rho_*}{\lambda} \frac{L_*^2}{t_*} = \frac{t_{heat}}{t_*} - \text{число Пекле, которое характеризует отноше-}$$

ние характерного времени переноса тепла на расстояние L_* за счет теплопроводности к характерному времени переноса тепла за счет конвекции со скоростью V_* .

Решение системы уравнений (15) – (18) при заданных начальных и граничных условиях дает поле температуры $\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Соотношение для определения величины теплового потока на границе $\xi_1 = 1$ в безразмерных переменных принимает вид:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1=1} = -Nu \left(\theta(1, \xi_2, \xi_3) - \theta_s \right), \quad (19)$$

где $Nu = \frac{\alpha L_*}{\lambda}$ – число Нуссельта.

Число Нуссельта определяется в виде (безразмерная форма выражения (4)):

$$Nu = \frac{-\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1=1}}{\theta(1, \xi_2, \xi_3) - \theta_s}, \quad (20)$$

Варьируя параметры задачи Pe , Re , Eu при численном решении системы уравнений (15) – (18) получим зависимость $Nu = Nu(Re, Pe, Eu, \dots)$. Такие зависимости являются искомыми в большинстве задач конвективного теплообмена.

1.4 Гидродинамический и тепловой пограничные слои

1.4.1 Гидродинамика и теплообмен в ламинарных пограничных слоях

Рассмотрим задачу об обтекании пластинки равномерным потоком жидкости. На полубесконечную пластинку, расположенную в направлении движения жидкости, набегаёт поток жидкости со скоростью w_0

(рис. 2). Температура набегающего потока равна T_0 . Температура стенки постоянна и равна T_s .

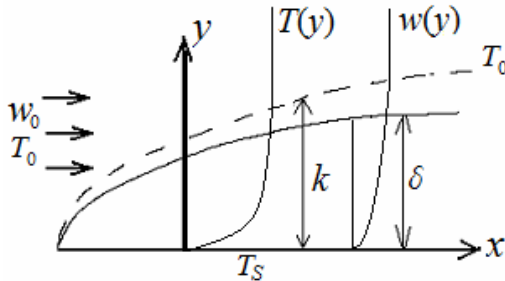


Рис. 2.

При решении задачи примем, что на поверхности пластинки выполняется условие прилипания, согласно которому вязкая жидкость на пластинке имеет скорость, $w = 0$. Согласно гипотезе Прандтля, при соприкосновении частиц с пластинкой жидкость останавливается. Вследствие действия сил вязкости над пластинкой образуется слой заторможенной жидкости, в пределах которой скорость изменяется $[0, w_0]$. Область, где скорость меняется от 0 до $w = w_0(1 - \varepsilon)$, где ε – маленькая величина, называется гидродинамическим пограничным слоем.

Исходя из условия прилипания и характера действия сил вязкого трения, можно утверждать, что только на бесконечном удалении в вертикальном направлении от стенки скорость жидкости становится равной w_0 . Чем больше расстояние от края пластинки, тем толще пограничный слой, так как влияние вязкости по мере движения жидкости вдоль пластинки возрастает. Толщина гидродинамического пограничного слоя определяется координатами точек над поверхностью пластинки в которых $w(y_*) = w_0(1 - \varepsilon)$, где ε – маленькая величина, например 0.01. Значение y_* традиционно обозначают буквой δ . Толщина гидродинамического слоя δ является функцией x , $\delta(x)$.

Внутри пограничного слоя происходит искажение однородного набегающего потока. Поэтому внутри пограничного слоя скорость будет

иметь две компоненты w_x и w_y . Внутри гидродинамического погра-

ничного слоя $\frac{\partial w_x}{\partial y} \neq 0$, вне пограничного слоя $w_x = w_0$ (рис. 2). Запи-

шем уравнения движения (12) – (13) в двумерном плоском приближе-
нии для стационарного течения несжимаемой жидкости:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (21)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (22)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0, \quad (23)$$

где введено обозначение $\nu = \eta/\rho$ – коэффициент кинематической вяз-
кости.

На бесконечности скорость постоянная, поэтому можно полагать, что давление вне пограничного слоя одинаково, и градиента давления во внешнем потоке нет. В пограничном слое любое изменение давления приведет к выравниванию давления со скоростью звука. Следова-
тельно, внутри пограничного слоя градиент давления равен нулю. По-
этому значения производных давления по координатам, содержащиеся

в правой части уравнений (21) и (22) равны 0: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Тогда

в системе уравнений (21) – (23) остается 2 неизвестные, поэтому для
получения решения необходимо два уравнения.

Проведем некоторые приближенные оценки величин слагаемых в
уравнениях (21) и (22) по порядку величины. Для составляющих ско-

рости движения справедливо $w_x \sim w_0$, $w_y \sim \frac{w_0 \delta}{L_*}$. Для пограничного

слоя справедливо неравенство $\delta \ll L_*$. Следовательно,

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_0}{L_*}\right), \quad \text{и из уравнения (23) следует} \quad \frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(\frac{w_0}{L_*}\right).$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(\frac{w_0}{\delta} \frac{\delta}{L_*}\right) = O\left(\frac{w_0}{L_*}\right), \quad w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_0^2}{L_*}\right), \quad w_y \frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_0^2}{L_*}\right),$$

$$w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(w_0 \frac{w_0}{\delta} \frac{\delta}{L_*}\right) = O\left(\frac{w_0^2}{L_*}\right). \quad \text{Так как} \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{w_0}{L_*^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = O\left(\frac{w_0}{\delta^2}\right) \text{ и } \delta \ll L_* \text{ то } \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}. \text{ Следовательно, слагае-}$$

мым $\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$ в уравнении (21) по сравнению с $\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$ можно пренебречь.

Используя проведенные оценки, вместо системы уравнений (21) – (23) запишем упрощенную систему уравнений, описывающую движение жидкости вблизи плоской пластины в виде:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (24)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (25)$$

Система уравнений состоит из уравнения движения вдоль оси x (24) и уравнения неразрывности (25).

Изначально было определено, что температура набегающего потока равна T_0 , температура стенки постоянна и равна T_s . Примем для однозначности, что $T_0 > T_s$. Очевидно, что вблизи поверхности пластинки жидкость будет остывать. И чем дальше жидкость протекает вдоль пластинки, тем больше будет слой жидкости с уменьшенной температурой. Поэтому вводится понятие теплового пограничного слоя. Тепловой пограничный слой – слой жидкости у стенки в пределах которого температура изменяется от значения равного температуре стенки до значения температуры, отличающегося от температуры набегающего потока на малую величину, $T(y_{**}) - T_s = (T_0 - T_s)(1 - \varepsilon)$,

где ε – маленькая величина, например 0.01. Значение y_{**} традиционно обозначают буквой k . Толщина теплового пограничного слоя k является функцией x , $k(x)$. При этом внутри пограничного слоя $\frac{\partial T}{\partial y} \neq 0$,

вне пограничного слоя $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (рис 2).

Соотношение между толщинами теплового пограничного слоя k и гидродинамического пограничного слоя δ может быть любым: $\delta > k$, $\delta = k$, $\delta < k$. Критерием, определяющим соотношение между k и δ , является величина числа Прандтля.

Запишем уравнение переноса тепла (11) в жидкости над пластинкой в двумерном плоском приближении для стационарного течения несжимаемой жидкости.

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (26)$$

Проведем оценки слагаемых: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = O \left(\frac{T_0 - T_s}{L_*^2} \right),$

$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = O \left(\frac{T_0 - T_s}{k^2} \right).$ Так как и $k \ll L_*$, то $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$ Следовательно-

но, слагаемым $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ в уравнении (26) по сравнению с $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ можно пренебречь. Тогда уравнение (26) можно заменить приближенным:

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (27)$$

Уравнение (27) называется уравнением переноса тепла в приближении пограничного слоя.

1.4.2 Решение уравнений ламинарного гидродинамического пограничного слоя

Уравнения гидродинамического пограничного слоя имеют вид (24) – (25). Для получения однозначного решения для системы уравнений (24) – (25) нужно поставить граничные условия.

$$w_x(0, y) = w_0, w_y(0, y) = 0, w_x(x, 0) = 0, w_y(x, 0) = 0, w_x(x, \infty) = w_0. \quad (28)$$

Введем функцию $\psi(x, y)$, для которой выполняются равенства:

$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $w_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Функция, удовлетворяющая этим соотношениям, $\psi(x, y)$, называется функция тока. Функция тока удовлетворяет уравнению неразрывности (25). Подставим функцию тока в уравнение (24) и получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (29)$$

Граничные условия (28) переписанные для функции тока принимают вид:

$$\frac{\partial \psi(x, \infty)}{\partial y} = w_0, \quad \psi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0. \quad (30)$$

Введем безразмерные параметры: $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{y} = \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}}$, $\text{Re} = \frac{\rho w_0 L}{\eta}$,

$\bar{\psi} = \frac{\psi}{w_0 L / \sqrt{\text{Re}}}$. Здесь масштаб длины L является произвольной величиной, некоторым отмеренным расстоянием от начала пластинки. Тогда система (29) – (30) примет вид:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^3}. \quad (31)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}(\bar{x}, \infty)}{\partial \bar{y}} = 1, \quad \bar{\psi}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (32)$$

Решение задачи (31) – (32) представляет собой функцию $\bar{\psi} = \bar{\psi}\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}}\right)$. Выберем в качестве масштаба длины L величину равную произвольной координате вдоль пластинки. Тогда $\bar{\psi} = \bar{\psi}\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}}\right) = \bar{\psi}\left(1, \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}}\right) = f\left(y \sqrt{\frac{w_0 \rho}{\mu x}}\right)$. Введем новую переменную z вида $z = A \frac{y}{\sqrt{x}}$, которая называется автомодельной переменной. Заменяя функцию $\bar{\psi}$ на $f(z)$ в уравнении (31) перепишем его

и граничные условия (30) в виде:

$$f''' + ff'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 2. \quad (33)$$

Решение (33) может быть представлено в виде ряда:

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x}} A\right) = \frac{\alpha z^2}{2} - \frac{\alpha^2 z^5}{5!} + \dots \quad (34)$$

где $z = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{w_0 \rho}{\mu x}}$, $\alpha = \text{const} \approx 1.33$.

Определим величину трения между жидкостью и пластинкой, которое выражается в виде: $\tau_{fr} = -\eta \frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$. Так как $w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, то справедливо $\tau_{fr} = -\eta \frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0} \approx 0.332 \sqrt{\frac{w_0^3 \rho \eta}{x}}$. Сила трения τ_{fr} имеет размерность Н/м² и убывает с удалением от края пластинки пропорционально $\sqrt{1/x}$.

Толщина гидродинамического пограничного слоя также определяется из решения задачи (34):

$$\delta_{99}(x) = 5 \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0}} x, \quad (35)$$

где δ_{99} обозначает координаты y в точке сечения пограничного слоя, где скорость w_x равна $0.99w_0$.

Из зависимости (35) видно, что толщина пограничного слоя возрастает с удалением от края пластинки пропорционально $\sqrt{x}$.

Полное изложение теории гидродинамического пограничного слоя см. в (см. [2], параграф 108 на стр. 509–514).

1.4.3 Приближенный метод решения уравнений гидродинамического пограничного слоя

Для получения приближенного решения уравнений (24) – (25) проведем их тождественные преобразования. Уравнения для случая однородного распределения давления над пластинкой имеют вид:

$$\begin{cases} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Для проведения преобразований будут использоваться метод интегрирования по частям:

$$\int_0^{\delta} U dV = UV - \int_0^{\delta} V dU, \quad (36)$$

и формула дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} f(x) dy = \int_0^{\delta(x)} \frac{d}{dx} f(x) dy + f(\delta(x)) \frac{d\delta(x)}{dx}. \quad (37)$$

Проинтегрируем первое уравнение (36) по dy в пределах слоя δ :

$$\int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = \nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dy. \quad (38)$$

Воспользовавшись (36) перепишем второе слагаемое (38) в виде:

$$\int_0^{\delta} w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = w_x w_y \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_y}{\partial y} dy. \quad (39)$$

Воспользовавшись уравнением (25) проведем замены:

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{\partial w_x}{\partial x}, \quad w_y = -\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \quad \text{перепишем (39) в виде:}$$

$$\int_0^{\delta} w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = w_0 \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy. \quad (40)$$

Подставим полученное выражение (40) в (38):

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + w_0 \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy &= \int_0^{\delta} \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dy, \text{ или} \\ 2 \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + w_0 \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial w_x}{\partial x} dy &= \int_0^{\delta} \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dy. \end{aligned} \quad (41)$$

Первое слагаемое полученного выражения (41), воспользовавшись (37), перепишем в виде:

$$2 \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} w_x^2 dy - w_0^2 \frac{d\delta}{dx}. \quad (42)$$

Проведем интегрирование правой части уравнения (41):

$$\nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dy = \nu \left(\left. \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|_{y=\delta} - \left. \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|_{y=0} \right) = - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\tau_{fr}}{\rho}. \quad (43)$$

Подставляя (42) и (43) в (41) получим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} w_x^2 dy - w_0^2 \frac{d\delta}{dx} - w_0 \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = \frac{\tau_{fr}}{\rho}. \quad (44)$$

Третье слагаемое (44) с использованием (36) и (37) перепишем в виде:

$$-w_0 \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} w_0 w_x dy + \frac{dw_0}{dx} \int_0^{\delta(x)} w_x dy + w_0^2 \frac{d\delta}{dx}, \quad (45)$$

и подставим в (44). При этом учтем, что $\frac{dw_0}{dx} = 0$, а слагаемые $w_0^2 \frac{d\delta}{dx}$ в

(44) и (45) с разными знаками и сокращаются. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} w_x^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} w_0 w_x dy &= \frac{\tau_{fr}}{\rho}, \text{ после группировки слагаемых:} \\ \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} (w_x - w_0) w_x dy &= \frac{\tau_{fr}}{\rho}. \end{aligned} \quad (46)$$

Уравнение (46) получено из (24) – (25) путем тождественных преобразований. Его называют интегральным уравнением ламинарного гидродинамического пограничного слоя.

Для решения (46) необходимо знать зависимость $w_x(y)$ в пределах пограничного слоя $\delta(x)$.

Предположим, что $\frac{w_x}{w_0} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right)$, тогда подставляя в (46)

$w_x = w_0 \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right)$ можно вычислить интеграл, и затем его продифференцировать.

Обозначим $y/\delta = z$ и предположим, что функция $\varphi(z)$ имеет вид:

$$\varphi(z) = az + bz^2.$$

Константы a и b определяются из условий: $\varphi(1) = 1$ (скорость жидкости на границе пограничного слоя равна w_0), $\varphi'(1) = 0$ (производная скорости по вертикальной координате y на границе пограничного слоя равна нулю). Условие прилипания выражением (47) выполняется автоматически. Из двух условий легко находим $a = 2$, $b = -1$.

$$w_x(z) = w_0(2z - z^2) = w_0 \left(2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right). \text{ Профиль скорости прибли-}$$

женный, удовлетворяет граничным условиям для скорости потока в пограничном слое, является монотонно возрастающей функцией. Подставим полученный профиль скорости (зависимость скорости от y) в уравнение (46).

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \left(w_0 \left(2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) - w_0 \right) w_0 \left(2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) dy = \frac{\tau_{fr}}{\rho}. \quad (47)$$

По формуле (43) вычисляем величину правой части:

$$\frac{\tau_{fr}}{\rho} = - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \frac{\eta}{\rho} w_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) \Big|_{y=0} = -2 \frac{\eta}{\rho} \frac{w_0}{\delta}. \quad (48)$$

Значение интеграла, стоящего в левой части (47):

$$\int_0^{\delta(x)} \left(w_0 \left(2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) - w_0 \right) w_0 \left(2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) dy = - \frac{2}{15} w_0^2 \frac{d\delta}{dx}.$$

Подставляем полученные выражения в (47), и получаем:

$$\frac{2}{15} w_0^2 \frac{d\delta}{dx} = 2 \frac{\eta}{\rho} \frac{w_0}{\delta}. \quad (49)$$

Уравнение (49) есть обыкновенное дифференциальное уравнение. Разделяем переменные и интегрируем. Константу интегрирования находим из условия что при $x = 0$ $\delta(0) = 0$.

$$\delta^2 = 30 \frac{\eta}{\rho w_0} x, \quad \delta = \sqrt{30} \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0} x} = 5,48 \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0} x} = 5,48 x \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}. \quad (50)$$

Сравнивая результат (50) с точным решением (35) видим хорошее соответствие результатов. Результат (50) можно записать в виде:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{30} \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0 x}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

где $\text{Re}_x = \frac{\rho w_0 x}{\eta}$ – число Рейнольдса, в котором в качестве масштаба выбрана координата вдоль пластинки, x .

Подставляя (50) в (48) получим выражение для трения между пластинкой и потоком в зависимости от координаты x :

$$\tau_{fr} = \frac{2}{\sqrt{30}} \frac{\eta w_0}{x} \sqrt{\frac{\rho w_0}{\eta} x} = \frac{2}{\sqrt{30}} \frac{\eta w_0}{x} \sqrt{\text{Re}_x} = 0,365 \frac{\eta w_0}{x} \sqrt{\text{Re}_x}.$$

Приближенный результат также хорошо совпадает с точным, приведенным в п. 1.4.2 (в точном решении коэффициент 0.332, в приближенном 0.365).

1.4.4 Интегральное уравнение теплового пограничного слоя

Проинтегрируем уравнение переноса тепла в приближении пограничного слоя (27) в пределах теплового пограничного слоя $k(x)$.

$$\int_0^{k(x)} w_x \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_0^{k(x)} w_y \frac{\partial T}{\partial y} dy = \int_0^{k(x)} \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dy. \quad (51)$$

Преобразуем второе слагаемое левой части уравнения (51) воспользовавшись (36) и (37).

$$\begin{aligned} \int_0^{k(x)} w_y \frac{\partial T}{\partial y} dy &= \int_0^{k(x)} \frac{\partial T}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial w_y}{\partial x} dy \right) dy = \int_0^{k(x)} \left(\int_0^y \frac{\partial w_y}{\partial x} dy \right) dT = \\ &= T \int_0^y \frac{\partial w_y}{\partial x} dy \Big|_0^{k(x)} - \int_0^{k(x)} T \frac{\partial w_y}{\partial x} dy = T_0 \int_0^{k(y)} \frac{\partial w_y}{\partial x} dy - \int_0^{k(x)} T \frac{\partial w_y}{\partial x} dy = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{k(y)} (T_0 - T) \frac{\partial w_y}{\partial x} dy.$$

Используя полученное выражение преобразуем левую часть уравнения (51) к виду:

$$\begin{aligned} \int_0^{k(x)} w_x \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_0^{k(y)} (T_0 - T) \frac{\partial w_y}{\partial x} dy &= \int_0^{k(y)} \frac{\partial}{\partial x} (w_y (T_0 - T)) dy = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^{k(y)} (w_y (T_0 - T)) dy. \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть (51):

$$\int_0^{k(x)} \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dy = \frac{\lambda}{c_p \rho} \int_0^{k(x)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dy = \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0^{k(x)} = -\frac{q_s}{c_p \rho},$$

где введено обозначение $q_s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$ – величина теплового потока

на границе жидкость – пластинка.

Подставим все преобразования в (51) и получим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{k(y)} (w_y (T_0 - T)) dy = -\frac{q_s}{c_p \rho}. \quad (52)$$

Уравнение (52) получено из (27) путем тождественных преобразований. Его называют интегральным уравнением теплового пограничного слоя.

1.4.5 Теплоотдача при ламинарном пограничном слое

Определим величину коэффициента теплоотдачи из решения системы интегральных уравнений гидродинамического и теплового пограничных слоев (46) и (52).

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} (w_x - w_0) w_x dy = \frac{\tau_{fr}}{\rho}. \quad (53)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{k(y)} (w_y (T_0 - T)) dy = -\frac{q_s}{c_p \rho}. \quad (54)$$

Для расчета теплоотдачи необходимо знать распределение скоро-

стей в гидродинамическом пограничном слое и температуры в тепловом пограничном слое. Запишем функцию распределения скоростей в пограничном слое в виде полинома третьей степени:

$$w_x = w_0 \varphi \left(\frac{y}{\delta} \right) = w_0 \left(a \left(\frac{y}{\delta} \right) + b \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + c \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right).$$

Константы a , b и c определяются из условий: $\varphi(1) = 1$ (скорость жидкости на границе пограничного слоя равна w_0), $\varphi'(1) = 0$ (производная скорости по вертикальной координате y на границе пограничного слоя равна нулю), $\varphi''(0) = 0$. Условие $\varphi''(0) = 0$ следует из уравнения (24), так как при $y = 0$ в нем $w_x(0) = w_y(0) = 0$. Условие прилипания принятым выражением выполняется автоматически. Из трех поставленных условий легко находим $a = 1.5$, $b = 0$, $c = -0.5$, $w_x = w_0 \left(1.5 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 0.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right)$. Подставим полученное выражение в (53)

и проинтегрируем, как это было сделано в п. 1.4.3 для профиля скорости выбранного в виде полинома второй степени. Получим:

$$\frac{39}{280} w_0^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\eta}{\rho} \frac{w_0}{\delta}. \quad (55)$$

Интегрируем (55) и получаем:

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\eta}{\rho w_0} x, \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0}} x = 4,64 \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0}} x. \quad (56)$$

Сравнивая результат (56) с точным решением (35) мы видим хорошее соответствие результатов. Результат (56) также запишем в виде:

$$\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0 x}} = \frac{4,64}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

где $\text{Re}_x = \frac{\rho w_0 x}{\eta}$ – число Рейнольдса, в котором в качестве масштаба

выбрана координата вдоль пластинки, x .

Подставляя (56) в (48) получим выражение для трения между пластинкой и потоком в зависимости от координаты x :

$$\tau_{fr} = 0.323 \frac{\eta w_0}{x} \sqrt{\text{Re}_x}.$$

Приближенный результат также хорошо совпадает с точным, приведенным в п. 1.4.2 (в точном решении коэффициент 0.332, в приближенном с использованием профиля скорости в виде полинома третьей степени 0.323).

Проведем решение уравнения теплового пограничного слоя (54). Для удобства введем замену $\theta = T - T_s$, имеющую смысл того, что значение $\theta_s = 0$ (за ноль принята температура стенки). Примем, что распределение температуры в пределах теплового пограничного слоя определяется функцией $\theta(y) = \theta_0 \left(a \left(\frac{y}{k} \right) + b \left(\frac{y}{k} \right)^2 + c \left(\frac{y}{k} \right)^3 \right)$. Констан-

ты a , b и c определяются из условий: $\theta(1) = \theta_0$ (температура жидкости на границе теплового пограничного слоя равна θ_0), $\theta'(1) = 0$ (производная температуры по вертикальной координате y на границе теплового пограничного слоя равна нулю), $\theta''(0) = 0$. Условие $\theta''(0) = 0$ следует из уравнения (27), так как при $y = 0$ в нем $w_x(0) = w_y(0) = 0$. Условие равенства температуры на поверхности пластинки равной T_s выполняется автоматически, так как при $y = 0$ $\theta(0) = 0$. Из трех поставленных условий легко находим $a = 1.5$,

$$b = 0, \quad c = -0.5, \quad \theta(y) = \theta_0 \left(1.5 \left(\frac{y}{k} \right) - 0.5 \left(\frac{y}{k} \right)^3 \right).$$

Вычислим интеграл в (54), интегрируя в пределах теплового пограничного слоя. Примем, что $k \leq \delta$, внутри которых определены функции $w_x(y)$ и $\theta(y)$. (Для случая $k > \delta$ следует учесть, что в пределах теплового слоя имеют место два закона распределения скорости:

$$\text{при } y \leq \delta \quad w_x = w_0 \left(1.5 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 0.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right), \quad \text{при } \delta < y \leq k \quad w_x = w_0.)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{k(y)} \left(w_y (T_0 - T) \right) dy = \\
& = \int_0^{k(y)} \left[w_0 \left(1.5 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 0.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) \right] \left[\theta_0 - \theta_0 \left(a \left(\frac{y}{k} \right) + b \left(\frac{y}{k} \right)^2 + c \left(\frac{y}{k} \right)^3 \right) \right] dy = \\
& = w_0 \theta_0 \delta \left(\frac{3}{20} \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left(\frac{k}{\delta} \right)^4 \right).
\end{aligned}$$

Так как $k \leq \delta$, то $k/\delta \leq 1$, поэтому второе слагаемое в скобках в правой части равенства мало по сравнению с первым, и им можно пренебречь.

$$\text{Тогда } \int_0^{k(y)} \left(w_y (T_0 - T) \right) dy = w_0 \theta_0 \delta \frac{3}{20} \left(\frac{k}{\delta} \right)^2.$$

Правая часть уравнения (54) с учетом принятого распределения температуры над поверхностью пластинки принимает вид:

$$-\frac{q_s}{c_p \rho} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{1}{k} \theta_0.$$

Подставляя полученные выражения для интеграла и правой части в (54) и вводя обозначение $k/\delta = \beta$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{3}{20} w_0 \theta_0 \frac{d}{dx} (\delta \beta^2) = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{1}{\beta \delta} \theta_0, \text{ или}$$

$$\frac{1}{10} w_0 \left(\beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\beta^2 \delta^2 \frac{d\beta}{dx} \right) = \frac{\lambda}{c_p \rho}.$$

Если тепловой и гидродинамический пограничные слои развиваются с самого начала пластинки (это при в случае, когда в начале пластинки нет необогреваемого участка), то $\frac{d\beta}{dx} = 0$. Тогда

$$\frac{1}{10} w_0 \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\lambda}{c_p \rho}.$$

Из уравнения (55) можно выразить

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\eta}{\rho} \frac{140}{13w_0}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение получим:

$$\beta^3 \frac{\eta}{\rho} \frac{140}{130} = \frac{\lambda}{c_p \rho}, \text{ или } \beta = \sqrt[3]{\frac{\lambda \rho}{c_p \rho \eta} \frac{130}{140}} \approx \sqrt[3]{\frac{\lambda \rho}{c_p \rho \eta}} = \sqrt[3]{\frac{\lambda / c_p \rho}{\eta / \rho}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}},$$

где отношение коэффициентов кинематической вязкости и температуропроводности есть число Прандтля.

$$\frac{k}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}, \text{ Pr} = \frac{\eta / \rho}{\lambda / c_p \rho} = \frac{\nu}{\chi}.$$

Таким образом, получили выражение для толщины теплового пограничного слоя:

$$k(x) = \frac{\delta(x)}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}, \quad \delta(x) = 4,64 \sqrt{\frac{\eta}{\rho w_0}} x = x \frac{4,64}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \text{ полученная ранее,}$$

формула (56).

Коэффициент теплоотдачи определяется соотношением (4):

$$\alpha = \frac{-\lambda \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0}}{(T_0 - T_s)} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{k(x)}.$$

Подставляем в нее выражение для толщины теплового пограничного слоя:

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{x 4,64} \sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}} = 0,323 \frac{\lambda}{x} \sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}}.$$

Или:

$$\text{Nu}_x = 0,323 \sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}},$$

где $\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$ – число Нуссельта, $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$ – число Прандтля,

$\text{Re}_x = \frac{\rho w_0 x}{\eta}$ – число Рейнольдса.

Из полученного результата видно, что коэффициент теплоотдачи является функцией скорости, линейного размера, коэффициентов теплопроводности и температуропроводности. Зависимость α от x пред-

ставляется в виде:

$$\alpha(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}, \text{ где } C - \text{константа для заданной жидкости и скорости}$$

потока.

Иногда бывает удобно пользоваться средним значением коэффициента теплоотдачи на заданной длине пластинки. Он определяется формулой:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{C}{\sqrt{x}} dx = \frac{C}{L} 2\sqrt{x} \Big|_0^L = \frac{2C}{\sqrt{L}} = 2\alpha(L)$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи равно удвоенному значению коэффициента теплоотдачи, рассчитанному в координате L .

1.5 Теплообмен при течении жидкости в трубе

При течении жидкости в трубе в силу ограниченности поперечного сечения трубы возникают особенности движения и теплоотдачи жидкости. От входа жидкость начинает испытывать тормозящее действие сил вязкости. Ограниченность поперечного размера трубы приводит к тому, что температура жидкости изменяется не только по сечению, но и по длине канала.

Течение жидкости в трубе может быть турбулентным или ламинарным. Критерием перехода от ламинарного течения к турбулентному является число Рейнольдса, $Re = \rho \bar{u} d / \eta$, где ρ – плотность жидкости, $\bar{u}$ – средняя скорость движения жидкости, d – диаметр трубы, η – коэффициент динамической вязкости жидкости. Согласно [1] при $Re < 2000$ течение жидкости является ламинарным, при $Re > 10000$ в трубе устанавливается развитое турбулентное течение, для $2000 \leq Re \leq 10000$ имеет место переходный режим течения.

Если жидкость поступает в круглую трубу из большого объема, то на входе распределение скоростей равномерное (рис. 3). При движении вдоль трубы в окрестностях стенок образуется гидродинамический пограничный слой, толщина которого нарастает. В итоге, на расстоянии l_n пограничные слои сливаются, в трубе устанавливается постоянное распределение скоростей, характерное для данного режима течения. Расстояние l_n называется длиной гидродинамического начального участка (участок гидродинамической стабилизации). При $Re > 10000$

в трубе возможно существование ламинарного и турбулентного пограничных слоев. При этом на входе в трубу реализуется ламинарный пограничный слой, далее переходящий в турбулентный.

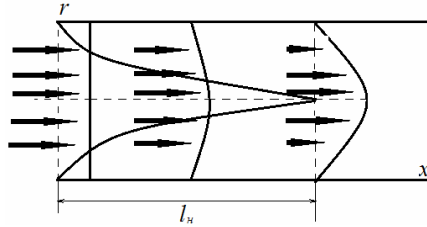


Рис. 3. Стабилизация распределения скоростей при движении жидкости в трубе

Область перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному характеризуется неустойчивостью движения. Длина l_n и протяженность ламинарного и турбулентного пограничных слоев зависят от числа Рейнольдса.

Установление постоянного режима течения приводит к установлению регулярного режима теплообмена. То есть после l_n коэффициент теплообмена α становится постоянным, $\alpha = const$.

Уравнение переноса тепла в случае движения жидкости в ограниченном осесимметричном канале имеет вид:

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right). \quad (57)$$

В уравнении (57) можно пренебречь поперечной скоростью течения, $w_r = 0$. Так как градиент температуры в поперечном направлении много больше градиента температуры в продольном направлении, то

справедливо $\frac{\partial T}{\partial r} \gg \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. Тогда уравнение (57) принимает вид:

$$w_x c_p \rho \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (58)$$

В турбулентном потоке тепло переносится не только теплопроводностью, но и с помощью турбулентных пульсаций, поэтому результирующий коэффициент теплопроводности зависит от продольной координаты и определяется суммой: $\lambda = \lambda_T + \lambda_h$, где $\lambda_T = \rho c_p \varepsilon_q$ – коэф-

фициента турбулентной теплопроводности, λ_h – коэффициент молекулярной теплопроводности. С учетом этого уравнение (58) принимает вид:

$$w_x c_p \rho \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\lambda_T + \lambda_h) r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (59)$$

Положим, что на поверхности трубы $q_C = const$. Воспользуемся этим, как граничным условием для уравнения (59). Решим задачу, определив величину числа Нуссельта при течении жидкости в трубе.

Введем среднюю скорость течения жидкости в трубе:

$$\bar{w}_x = \frac{1}{S} \int_S w_x dS = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} w_x 2\pi r dr. \text{ Введем среднерасходную температу-}$$

$$\text{ру жидкости } \bar{T}_{lq} = \frac{1}{S \bar{w}_x} \int_S w_x T dS = \frac{2}{r_0^2 \bar{w}_x} \int_0^{r_0} w_x T r dr. \text{ Условие } q_C = const$$

означает, что температура жидкости в продольном направлении меняется линейным образом. Следовательно, справедливо выражение

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{2q_C}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = const. \quad (60)$$

Подстановка (60) в (59) дает выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left((\lambda_T + \lambda_h) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= w_x c_p \rho \frac{2q_C}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \left((\lambda_T + \lambda_h) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= 2q_C \frac{w_x}{\bar{w}_x} \frac{r}{r_0}. \end{aligned} \quad (61)$$

Если ввести безразмерные параметры $R = r/r_0$, $W_x = w_x/\bar{w}_x$, то (61) примет вид:

$$\frac{d}{dR} \left((\lambda_T + \lambda_h) R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = 2q_C r_0 W_x. \quad (62)$$

Возьмем первый интеграл для уравнения (62):

$$(\lambda_T + \lambda_h) R \frac{dT}{dR} = 2q_C r_0 \int_0^R R W_x dR.$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dR} = \frac{2q_C r_0}{(\lambda_T + \lambda_h) R} \int_0^R R W_x dR. \quad (63)$$

Среднерасходная температура жидкости при постоянных c_p и ρ может быть найдена из уравнения

$$\bar{T}_{lq} = \frac{2}{r_0^2 \bar{w}_x} \int_0^{r_0} w_x T r dr = 2 \int_0^1 W_x T R dR.$$

Возьмем этот интеграл по частям:

$$2 \int_0^1 W_x T R dR = 2 T_{st} \int_0^1 W_x R dR - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dT.$$

Интеграл $\int_0^1 W_x R dR$ после преобразований равен $\int_0^1 W_x R dR = \frac{1}{2}$, от-

сюда справедливо: $\bar{T}_{lq} = T_{st} - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dT$. Из уравнения (63)

выразим dT и подставим в получившееся выражение для среднерасходной температуры жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{lq} &= T_{st} - \frac{4q_C r_0}{(\lambda_T + \lambda_h) R} \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \cdot \int_0^R W_x R dR \right) dR = \\ &= T_{st} - 4q_C r_0 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{(\lambda_T + \lambda_h) R} dR. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\lambda_h (T_{st} - \bar{T}_{lq})}{2q_C r_0} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_h} + 1 \right) R} dR.$$

И так как величина теплового потока может быть определена выражением $q_c = \alpha (T_{st} - \bar{T}_{lq})$, то справедливо:

$$\frac{\lambda_h}{2\alpha r_0} = \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2 dR}{\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_h} + 1 \right) R}.$$

И тогда число Нуссельта, $Nu_d = \frac{\alpha d}{\lambda_h}$, может быть найдено из уравнения:

$$\frac{1}{Nu_d} = \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2 dR}{\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_h} + 1 \right) R}. \quad (64)$$

Для ламинарного течения $\lambda_r = 0$ в случае, когда зависимость скорости жидкости от радиуса поперечного сечения носит квадратичный характер, $W_x = 2(1 - R^2)$, из уравнения (64) находим, что число Нуссельта равно $Nu_d = \frac{48}{11} = 4.36$. Это значение получено при $q_c = const$.

При постоянной температуре стенок трубы, $T_c = const$, теория дает $Nu_d = 3.66$.

Значения Nu получены для малых температурных напоров или для неизменных параметров жидкости. Следовательно, полученный результат может сильно расходиться с опытными данными. И практические расчеты предпочтительнее вести для эмпирических формул, которые обобщают данные конкретных экспериментов. Далее, приведем несколько эмпирических формул для частных случаев течения жидкости в трубе.

Для вязкостного ламинарного течения жидкости в круглой трубе справедлива формула, полученная в Энергетическом институте им. Г. М. Кржижановского:

$$Nu_{f(x),x} = 0.33 Re_{f(x),x}^{0.5} Pr_{f(x)}^{0.43} \left(Pr_{f(x)} / Pr_{s(x)} \right)^{0.25} (x/d)^{0.1}.$$

Здесь $(x/d)^{0.1}$ учитывает влияние кривизны канала и стеснения потока

стенками трубы; $Pr_{S(x)}$ выбирается по местному значению температуры стенки; определяющим размером является расстояние рассматриваемого сечения от начала трубы, определяющей температурой – средняя в данном сечении температура жидкости.

В случае *вязко-гравитационного режима течения жидкости в гладкой трубе* средний коэффициент теплоотдачи может быть получен из формулы М. А. Михеева:

$$Nu_{fd} = 0.15 Re_{fd}^{0.33} Pr_f^{0.33} (Gr_{fd} Pr_f)^{0.1} (Pr_f/Pr_s)^{0.25} \bar{\varepsilon}_l.$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_l$ учитывает изменение среднего коэффициента теплоотдачи по длине трубы, $Gr = \rho_0^2 g b^3 \Delta T / \eta^2$ – критерий Грасгофа, характеризующий подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей. Значение $\bar{\varepsilon}_l$ для ламинарного течения в зависимости от соотношения длины трубы l и ширины трубы d приведены в таблице:

Значения $\bar{\varepsilon}_l$ для ламинарного течения.

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$\bar{\varepsilon}_l$	1.9	1.7	1.44	1.28	1.18	1.13	1.05	1.02	1

За определяющую температуру здесь взята средняя температура жидкости в трубе. Определяющим размером является внутренний диаметр трубы.

Для *турбулентного течения жидкостей в прямых гладких трубах* средний коэффициент теплоотдачи может быть определен из уравнения:

$$\overline{Nu_{fd}} = 0.021 Re_{fd}^{0.8} Pr_f^{0.43} (Pr_f/Pr_s)^{0.25} \bar{\varepsilon}_l.$$

За определяющую температуру здесь принята средняя температура жидкости в трубе. Определяющим размером является диаметр трубы. Величина $Pr_{S(x)}$ выбирается по средней температуре поверхности стенки. Коэффициент $\bar{\varepsilon}_l$ учитывает изменение среднего коэффициента теплоотдачи по длине трубы и в общем случае существенно зависит от условий входа в трубу. Значения $\bar{\varepsilon}_l$ для турбулентного режима течения в случае, когда турбулентное течение жидкости имеет место с самого начала трубы приведены в таблице:

Значения $\bar{\varepsilon}_l$ для турбулентного режима течения.

Re_{fd}	l/d								
	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1.65	1.50	1.34	1.23	1.17	1.13	1.07	1.03	1
$2 \cdot 10^4$	1.51	1.40	1.27	1.18	1.13	1.10	1.05	1.02	1
$5 \cdot 10^4$	1.34	1.27	1.18	1.13	1.10	1.08	1.04	1.02	1
$1 \cdot 10^5$	1.28	1.22	1.15	1.10	1.08	1.06	1.03	1.02	1
$1 \cdot 10^6$	1.14	1.11	1.08	1.05	1.04	1.03	1.02	1.01	1

Для расчета *местного коэффициента теплоотдачи при турбулентном течении газа в прямой гладкой трубе* может быть использована формула:

$$Nu_{f(x),d} = 0.022 Re_{f(x),d}^{0.8} Pr_f^{0.43} \varepsilon_l.$$

За определяющую температуру здесь принята средняя температура жидкости в данном сечении трубы. Определяющим размером является внутренний диаметр трубы. При $x/d \geq 15$ коэффициент $\bar{\varepsilon}_l = 1$, при $x/d < 15$ и турбулентном режиме течения с самого начала трубы поправочный коэффициент $\varepsilon_l = 1.38 / (x/d)^{0.12}$.

При стабилизированной теплоотдаче коэффициент теплоотдаче для турбулентного течения в прямых круглых трубах может быть рассчитан по формуле:

$$Nu_{fd} = \frac{\xi_f Re_{fd} Pr_f \varepsilon_h}{36 \sqrt{\xi_f} (Pr_f^{2/3} - 1) + 1.07}.$$

Здесь ξ_f – коэффициент гидравлического сопротивления трения, который можно определить, например, по уравнению $\xi_f = 1 / (1.82 \lg Re_{fd} - 1.64)^2$; $\varepsilon_h = (\mu_f / \mu_s)^n$, где $n = 0.11$ при нагревании жидкости и $n = 0.25$ при ее охлаждении. Для учета длины трубы вышеприведенное выражение должно быть домножено на $\bar{\varepsilon}_l$ (для среднего коэффициента теплоотдачи) или ε_l (для местного коэффициента теплоотдачи). Указанное выражение справедливо для жидкостей

при $Pr_f \geq 0.7$.

Для расчета *среднего коэффициента теплоотдачи на внутренней стенке при турбулентном течении газов и капельных жидкостей в каналах кольцевого поперечного сечения* может быть использована формула:

$$\overline{Nu_{fd_{eq}}} = 0.017 Re_{fd_{eq}}^{0.8} Pr_f^{0.4} \left(Pr_f / Pr_c \right)^{0.25} \left(d_2 / d_1 \right)^{0.18}.$$

За определяющую температуру здесь принята средняя температура жидкости в трубе. Определяющим размером является $d_{eq} = d_2 - d_1$ – эквивалентный диаметр, где d_1 – внутренний диаметр кольцевого канала, d_2 – внешний диаметр. Экспериментально определено, что данная формула справедлива для $d_2/d_1 = 1.2 \div 1.4$, $l/d = 50 \div 460$, $Pr_f = 0.7 \div 100$.

Выше приведены формулы для расчета величины теплоотдачи при течении газа или жидкости в трубе или канале. Иной характер имеет процесс теплоотдачи при *омывании трубы поперечным потоком жидкости*. Коэффициент теплоотдачи в этом случае зависит от характера омывания трубы. Для ламинарного потока были получены теоретические формулы вида:

при $Re_{fd} = 5 \div 10^3$:

$$\overline{Nu_{fd}} = 0.5 Re_{fd}^{0.5} Pr_f^{0.38} \left(Pr_f / Pr_c \right)^{0.25},$$

при $Re_{fd} = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$:

$$\overline{Nu_{fd}} = 0.5 Re_{fd}^{0.6} Pr_f^{0.38} \left(Pr_f / Pr_c \right)^{0.25}.$$

В указанных формулах определяется средний по окружности цилиндра коэффициент теплоотдачи. За определяющий линейный размер принят внешний диаметр трубы, скорость отнесена к самому узкому поперечному сечению канала, в котором расположен цилиндр.

В лобовой точке цилиндра при обтекании цилиндра потоком жидкости коэффициент теплоотдачи может быть определен из уравнения:

$$Nu_d = 1.04 Re_d^{0.5} Pr^{0.33}.$$

Более подробно частные случаи расчета коэффициента теплоотдачи изложены в [3]. В частности, в [3] могут быть найдены соотношения для расчета коэффициента теплоотдачи при течении в параллельных

каналах, шероховатых трубах и так далее.

Как использовать перечисленные формулы для определения коэффициента теплоотдачи? По определенному масштабу и характеристикам жидкости вычисляются Re , Pr и затем по соответствующей формуле для числа Нуссельта вычисляется его величина. И тогда коэффициент теплоотдачи определяется по формуле $\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d_{\kappa}}$.

1.6 Теплообмен при свободной конвекции вблизи вертикальной стенки

Свободное движение жидкости возникает за счет массовых сил: силы тяжести, электромагнитных сил, центробежной силы и так далее. В частности, свободное движение возникает под действием гравитационных сил. Так как при теплообмене температура жидкости переменна, то возникает разность плотностей жидкости, а значит, возникает архимедова сила.

Рассмотрим возникновение свободной конвекции в слое шириной $2b$, ограниченном температурами T_1 , T_2 , $T_1 < T_2$ (рис. 4).

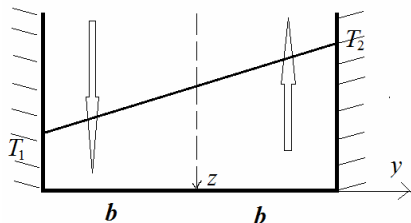


Рис. 4

Запишем уравнение для стационарного поля скоростей:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (65)$$

здесь p – давление; u – скорость движения жидкости; g – ускорение свободного падения; y – поперечная координата, z – продольная, направленная вниз координата. Плотность жидкости зависит от температуры и в первом приближении это можно учесть линейной зависимостью от температуры:

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \beta(T - \bar{T})), \quad (66)$$

Здесь $\rho_0 = \rho(\bar{T}) = \bar{\rho}$, $\bar{T} = (T_1 + T_2)/2$, $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ – коэффициент

объемного расширения газа или жидкости при изменении температуры. Так как в условиях статики выполняется равенство:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \bar{\rho}g = 0, \quad (67)$$

то уравнение (66) с учетом (67) может быть переписано в виде:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial z} + \bar{\rho}g + \bar{\rho}g\beta(T - \bar{T}) = 0 \Rightarrow \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \bar{\rho}g\beta(T - \bar{T}) = 0.$$

Откуда можно выразить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\bar{\rho}g\beta}{\eta}(T - \bar{T}). \quad (68)$$

Зная $T(y)$, мы можем найти $u(y)$ и вычислить величину теплового потока. Если предположить, что движение установилось со временем, то распределение температуры в жидкости между стенками будет линейным: $T(y) = \bar{T} + (T_2 - T_1)y/(2b)$, $\bar{T} = (T_1 + T_2)/2$. Граничные условия для u имеют вид:

$$u(b) = u(-b) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u''(0) = 0. \quad (69)$$

После интегрирования (68) с граничными условиями (69) для линейной функции распределения температуры в слое имеем выражение для распределения скорости:

$$u(y) = \frac{\rho_0 \beta g b^2 \Delta T}{12\eta} \left(\left(\frac{y}{b} \right)^3 - \left(\frac{y}{b} \right) \right). \quad (70)$$

Если ввести для (70) безразмерные переменные $V_* = \frac{\eta}{b\rho_0}$; $\xi = \frac{y}{b}$;

$\frac{u(y)}{V_*} = \bar{u}(\xi)$, то уравнение (70) примет вид:

$$\bar{u}(\xi) = \frac{\text{Gr}}{12}(\xi^3 - \xi). \quad (71)$$

Здесь $\text{Gr} = \rho_0^2 \beta g b^3 \Delta T / \eta^2$ – число Грасгофа, характеризующее отношение сил плавучести к силам вязкости. Этот критерий характеризует

интенсивность естественной конвекции. Чем больше число Грасгофа, тем больше интенсивность.

Определим величину коэффициента теплоотдачи при свободном конвективном движении жидкости вдоль вертикальной пластины. Пусть вертикальная пластина (рис. 5) с неизменной температурой поверхности T_s , находится в жидкости. Вдали от пластины жидкость неподвижна и имеет постоянную температуру T_0 . Для определенности положим, что температура пластины выше, чем температура жидкости, $T_s > T_0$.

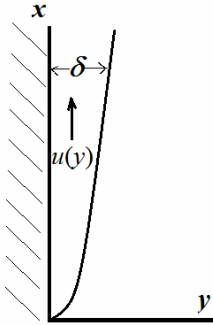


Рис. 5

За счет теплообмена жидкости с поверхностью нагретой пластины вблизи пластины реализуется подъемное движение нагретого слоя жидкости. Вдали от пластины скорость жидкости равна нулю. Вдоль вертикальной стенки реализуется расширяющийся пограничный слой δ (рис. 5). Предположим, что внутри пограничного слоя температура меняется квадратичным образом: $\theta = ay^2 + by + c$. Также положим, что $\theta = (T - T_0)$, $\theta_s = T_s - T_0$.

Условия на границах пограничного слоя имеют вид: $\theta(0) = \theta_s$, $\theta(\delta) = 0$. Константы a, b, c находим из этих условий. Тогда температура в движущемся слое жидкости изменяется по зависимости $\theta = \theta_s \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$ в интервале $0 < y < \delta$. Коэффициент теплоотдачи определяется уравнением

$$\alpha = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_s - T_0} = \frac{-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}}{\theta_s} = \frac{2\lambda}{\delta}. \quad (72)$$

Определив толщину пограничного слоя δ в зависимости от x , найдем коэффициент теплообмена жидкости со стенкой.

Толщина движущегося слоя жидкости переменна по высоте. При принятых условиях движение происходит в основном вдоль оси x . С учетом принятых допущений и упрощений уравнение движения для рассматриваемого случая будет иметь вид:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g(\rho_0 - \rho). \quad (73)$$

Для линейной зависимости плотности от температуры $\rho = \rho_0 - \rho_0 \beta \Delta T$ уравнение (73) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho_0 \beta g \theta_c}{\eta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2.$$

Интегрирование данного уравнения дает соотношение

$$u(y) = \frac{\rho_0 \beta g \theta_c}{\eta \delta^2} \left(-\frac{\delta^2}{2} y^2 + \frac{\delta}{3} y^3 - \frac{1}{12} y^4 \right) + C_1 y + C_2.$$

Примем в качестве граничных условий $u(0) = 0$, $u(\delta) = 0$ и найдем константы C_1 и C_2 :

$$C_2 = 0, \quad C_1 = -\frac{\rho_0 \beta g \theta_c}{\eta \delta^2} \left(-\frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^3}{12} \right) = \frac{\rho_0 \beta g \theta_c}{\eta \delta^2} \frac{\delta^3}{4}.$$

Вычислим среднюю скорость движения жидкости в пограничном слое:

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u(y) dy = \frac{\rho_0 g \beta \theta_s \delta^2}{40\eta},$$

и определим среднюю температуру жидкости по сечению слоя:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \theta(y) dy = \frac{\theta_s}{3}. \quad (74)$$

Расход жидкости через поперечное сечение пограничного слоя δ равен:

$$G(x) = \rho_0 \bar{u} \delta.$$

Тогда изменение этого расхода на малую величину определяется изменением толщины пограничного слоя через дифференциал:

$$dG(x) = d(\rho_0 \bar{u} \delta) = \frac{3\rho_0 g \beta \theta_s}{40\eta} \delta^2 d\delta. \quad (75)$$

Изменение расхода связано с увеличением пограничного слоя δ . Части жидкости, вовлекаемые в пограничный слой и начинающие дви-

гаться, в среднем приобретают скорость $\bar{u} = \frac{\rho_0 g \beta \theta_s \delta^2}{40\eta}$ и температуру

$\bar{\theta} = \frac{\theta_s}{3}$. На нагрев жидкости затрачивается тепло

$$dQ = c_p \bar{\theta} dG. \quad (76)$$

Это тепло dQ поступает в поток жидкости с участка стенки dx за счет теплообмена по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи α :

$$dQ = \alpha \theta_s dx.$$

С учетом (72) полученное выражение запишется в виде:

$$dQ = \frac{2\lambda}{\delta(x)} \theta_s dx. \quad (77)$$

Из сравнения (76) и (77) получим $c_p \bar{\theta} dG = \frac{2\lambda}{\delta(x)} \theta_s dx$, или выражая

dG , с учетом $\bar{\theta} = \frac{\theta_s}{3}$ (74) получим

$$dG = \frac{2\lambda}{\delta(x)} \frac{\theta_s dx}{c_p \bar{\theta}} = \frac{6\lambda}{\delta(x)c_p} dx. \quad (78)$$

Приравняв правые части (75) и (78), получим равенство

$$\frac{3\rho_0 g \beta \theta_s}{40\eta} \delta^2 d\delta = \frac{6\lambda}{\delta(x)c_p} dx, \text{ которое преобразуется к дифференци-}$$

альному уравнению для нахождения $\delta(x)$:

$$\frac{3\rho_0^2 g \beta \theta_s}{40\eta} \delta^3 d\delta = \frac{6\lambda}{c_p} dx. \quad (79)$$

Интегрируя уравнение (79), получаем

$$\frac{3\rho_0^2 g \beta \theta_s}{160\eta} \delta^4 = \frac{6\lambda}{c_p} x + const. \quad (80)$$

Из граничного условия $\delta(0) = 0$ получаем, что в (80) $const = 0$. Из уравнения (80) можно определить толщину пограничного слоя

$\delta(x) = \sqrt[4]{\frac{160\eta\lambda x}{\beta\rho_0^2\theta_sc_p}}$, тогда коэффициент теплообмена будет равен

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\delta(x)} = 0.473 \sqrt[4]{\frac{\beta \rho_0^2 \theta_s g c_p \lambda^3}{\eta x}}. \text{ Соответственно, число Нуссельта бу-}$$

дет определяться, как $Nu_x = 0.473 \sqrt[4]{Gr_x Pr}$, где $Gr = \frac{g \beta \theta_s x^3}{\eta^2 / \rho_0^2}$,

$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$. Из полученных соотношений следует, что коэффициент

теплообмена $\alpha(x) \approx x^{-1/4}$, при этом

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{1}{l} c \int_0^l x^{-1/4} dx = \frac{4}{3} \alpha(l) - \text{средняя величина коэффициен-}$$

та теплообмена. Тогда $\overline{Nu} = \frac{4}{3} Nu_{x=l}$.

1.7 Теплоотдача при течении газа с большими скоростями

Вопросы теплоотдачи для газа, движущегося с высокими скоростями, возникают в таких технических приложениях задач теплообмена, как ракетная техника, авиация, конструирование теплообменных устройств. Теплоотдача газов при больших скоростях имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать. В частности, увеличение скорости течения газа приводит к уменьшению толщины пограничного слоя, увеличению градиента скорости и трения в окрестности стенки. Соответственно, уравнение теплопроводности должно учитывать приход тепла от трения в окрестности стенки. В свою очередь повышение температуры газа приводит к его расширению и изменению плотности и давления газа. Соответственно, уравнения, описывающие гидродинамику и теплообмен, должны учитывать сжимаемость газа.

Уравнение энергии для течения сжимаемой жидкости с большими скоростями имеет вид:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} = \lambda \nabla^2 T + \eta Diss.Fkt(\vec{w}), \quad (81)$$

где $Diss(\vec{w})$ – диссипативная функция, введенная Рэлеем. Она определяется уравнением:

$$Diss(\vec{w}) = 2 \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} (div \vec{w})^2.$$

Диссипативная функция учитывает процесс рассеивания механической энергии из-за трения. Часть механической энергии движущейся жидкости переходит в тепловую. В уравнении (81) $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{dT}{dt}$ представляют собой полные производные давления и температуры по времени. Полная производная давления по времени учитывает работу сжатия.

Уравнения движения для сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho g - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{w} + \frac{1}{3} \eta grad(div \vec{w}). \quad (82)$$

При движении сжимаемой жидкости или газа с большими скоростями большое значение имеют термодинамические процессы, так как теплоотдача при больших скоростях течения газа должна определяться из математических моделей переноса тепла, учитывающих сжимаемость газа и кинетическую энергию потока.

Запишем первый закон термодинамики для движущихся газов:

$$\left(i_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) - \left(i_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) = \frac{Q}{G}. \quad (83)$$

Здесь $\left(i + \frac{w^2}{2} \right)$ – полная энергия потока, i – удельная энтальпия, w – скорость газа, Q – тепловой поток на участке между сечениями 1 и 2, G – расход газа. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к начальному и конечному сечениям потока.

При адиабатическом течении газа, $Q = 0$, кинетическая энергия газа растет только при понижении энтальпии. Энтальпия при полном адиабатическом торможении называется энтальпией покоя (энтальпией адиабатического торможения) и определяется из уравнения:

$$i_T = i + \frac{w^2}{2}. \quad (84)$$

Температура, которую газ принимает при полном адиабатическом торможении, называется температурой торможения. Температуру торможения можно найти из уравнения:

$$T_T = T + \frac{w^2}{2c_p}. \quad (85)$$

При больших скоростях потока уравнение теплового баланса может быть получено из (83) – (84) и имеет вид:

$$Q = G(i_{T1} - i_{T2}).$$

При постоянном значении теплоемкости c_p и $i_T = c_p T_T$ уравнение теплового баланса принимает вид:

$$Q = Gc_p(T_{T1} - T_{T2}).$$

Здесь T_{T1} , T_{T2} – температуры торможения в сечениях 1 и 2 соответственно, Q – тепловой поток на участке между этими сечениями.

Температура торможения является одной из важных характеристик высокоскоростных потоков. Из курса газовой динамики известно, что отношение кинетической энергии потока к его энтальпии равно:

$$\frac{w^2}{2c_p T} = \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{c^2} = \frac{k-1}{2} M^2. \quad (86)$$

Здесь $k = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме, $M = w/c$ – число Маха,

$$c = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT} \text{ – скорость звука.}$$

Уравнение (85) с учетом (86) преобразуется к виду:

$$\frac{T_T}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2.$$

Из полученного равенства, зная скорость потока и значение показателя адиабаты, можно определить адиабатическую температуру торможения потока. Из последнего равенства следует важный вывод: для сверхзвуковых течений температура торможения значительно превышает начальную температуру. Например, для воздуха с показателем адиабаты $k = 1.4$ температура торможения равна $T_T = 2.8T$ при $M = 3$, $T_T = 6T$ при $M = 5$. То есть при течении газа с $M = 5$ темпе-

ратура заторможенного потока газа в 6 раз превышает начальную температуру. В свою очередь повышение температуры приводит к изменению физических характеристик газа. Взаимодействие разогретого газа с обтекаемой поверхностью приводит к разрушению поверхности (плавление, сгорание, испарение и так далее).

Более подробно о проблемах, возникающих при течении газа с высокими скоростями, можно прочитать в научной литературе. Мы же остановимся еще на одном вопросе. Известно, что у поверхности неподвижного тела происходит торможение потока, и скорость потока становится равной нулю. При этом механическая энергия переходит в тепловую. Частицы газа, прилегающие к поверхности неподвижного тела, будут иметь температуру, превышающую температуру газа вдали от тела, но не равную температуре торможения. Эта температура называется адиабатической, собственной или равновесной. Собственная температура определяется из уравнения:

$$T_c = T + r \frac{w^2}{2c_p} = T \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \right),$$

где r – коэффициент восстановления, $r = \frac{T_c - T}{T_T - T}$. Коэффициент вос-

становления зависит от геометрии омываемой поверхности, режима течения, физических свойств жидкости или газа. Для продольно обтекаемой пластины при ламинарном течении потока справедливо $r = \sqrt{Pr}$, для турбулентного пограничного слоя $r = \sqrt[3]{Pr}$, для дозвукового и сверхзвукового турбулентного течения воздуха в трубе $r = \sqrt[3]{Pr} - \Delta r_x$, где Δr_x – экспериментально определяемая поправка [1].

Теплоотдача при больших скоростях не может быть корректно описана с помощью уравнения Ньютона–Рихмана ($q = \alpha(T_s - T)$). В [1] предлагается рассчитывать теплоотдачу с помощью формулы М.Ф. Широкова:

$$q = \alpha \left(T + r \frac{w^2}{2c_p} - T_s \right) = \alpha (T_c - T_s). \quad (87)$$

Эта формула переходит в формулу Ньютона–Рихмана при малых скоростях течения газа, $r \frac{w^2}{2c_p} \ll T$.

Коэффициенты теплообмена в зависимости от режима течения и геометрии обтекаемого тела могут быть найдены из справочников, например, из [3].

1.8 Теплообмен в разреженных газах

При малых абсолютных давлениях (либо при малых размерах тел, участвующих в процессе теплообмена) процесс теплопередачи может быть объяснен с точки зрения молекулярного строения вещества. В этом случае газ не может быть представлен в виде континуума. В разреженном газе на границе раздела газ-поверхность омываемого тела имеет место «скольжение» газа и скачок температуры. Газ и поверхность тела на границе раздела не имеют одинаковую температуру и скорость. Вблизи поверхности молекулы движутся хаотично, в том числе к поверхности и от поверхности после соударения с ней. До соударения со стенкой молекулы имеют среднюю кинетическую энергию соответствующую температуре среды. После соударения со стенкой молекулы имеют среднюю кинетическую энергию соответствующую температуре стенки. Соответственно в слое над поверхностью тела толщиной, равной длине свободного пробега молекул, одновременно присутствуют молекулы до столкновения со стенкой и после столкновения со стенкой. В связи с этим вблизи поверхности тела имеется скачок температуры.

Из молекулярно-кинетической теории известно, что газ представляет собой множество молекул, движущихся прямолинейно во всех направлениях. Средняя длина свободного пробега молекулы определяется из уравнения:

$$\bar{l} = \frac{\bar{w}_M}{\chi} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}},$$

где $\bar{w}_M$ – средняя скорость молекул газа, χ – число столкновений за 1 секунду, n – число молекул в единице объема, $\sigma = \pi d^2$ – эффективное сечение молекулы, $d = r_1 + r_2$ – расстояние между центрами молекул. Эффективное сечение определяется расстоянием, при котором силы взаимодействия между молекулами вызывают заметное изменение направления их движения.

Из формулы для длины свободного пробега следует, что чем меньше давление газа (а значит меньше молекул на единицу объема), тем больше величина средней длины свободного пробега молекулы. Это значит, что вероятность столкновения молекул мала. Зависимость $\bar{l}(\sigma)$ дает зависимость средней длины свободного пробега от скорости движения молекул. Чем больше скорость молекул, тем меньше величина эффективного сечения столкновения молекул. С увеличением температуры величина эффективного сечения столкновения молекул уменьшается. Средняя длина свободного пробега молекул увеличивается при повышении температуры газа и понижении давления.

Молекула в ходе своего движения может столкнуться с поверхностью тела. При этом может быть как зеркальное отражение молекулы от поверхности тела, так и задержка молекулы на поверхности. Явление задержки называется адсорбцией. Теплоотдача между молекулой и газом происходит следующим образом. Молекула при попадании на поверхность тела отдает поверхности некоторую энергию. Если время пребывания молекулы газа на поверхности тела много больше периода колебания молекул тела, то имеет место полный теплообмен. Степень «полноты» теплообмена характеризуется коэффициентом аккомодации:

$$\gamma = \frac{E_{\Pi} - E_0}{E_{\Pi} - E_s} \approx \frac{T_{\Pi} - T_0}{T_{\Pi} - T_s},$$

где E_{Π} – средняя энергия молекулы, падающей на поверхность тела, E_0 – средняя энергия той же молекулы после взаимодействия с телом, E_s – средняя энергия молекулы, соответствующая температуре поверхности тела, соответственно T_{Π} , T_0 , T_s – «температура молекулы» до взаимодействия, после взаимодействия и температура поверхности. Переход в определении коэффициента аккомодации от энергий к температурам оправдан для одноатомных газов, в прочих случаях этот переход является приближением. Величина коэффициента аккомодации находится в диапазоне от 0 до 1. Коэффициент аккомодации зависит от свойств газа и поверхности. Также коэффициент аккомодации зависит от скорости потока газа относительно стенки, наличия на этой стенке адсорбированного газа и давления в потоке газа.

Кроме теплообмена при ударе молекул о стенку имеет место обмен количеством движения между молекулами и стенкой. Коэффициент обмена количеством движения вычисляется из уравнения:

$$f = \frac{mw_{x\Pi} - mw_{x0}}{mw_{x\Pi}},$$

где $w_{x\Pi}$ – составляющая скорости падающей молекулы, направленная вдоль стенки; w_{x0} – та же составляющая после отражения молекулы; m – масса молекулы. Коэффициент обмена количеством движения принимает значения от 0 до 1 и зависит от природы газа и стенки, скорости газового потока.

Взаимодействие между молекулами газа и стенки описывается скачком температуры и скорости в окрестностях поверхности стенки. Скачок скорости представляет собой скольжение газа вдоль стенок. Этот скачок объясняется большой длиной свободного пробега по сравнению с размерами тела.

Степень разрежения газа определяется величиной критерия Кнудсена, $Kn = \frac{\bar{l}}{l_0}$, где $\bar{l}$ – средняя длина свободного пробега молекулы,

l_0 – характерный размер омываемой поверхности. Если $Kn < 0.001$, то газ можно рассматривать, как сплошную среду. При $Kn > 10$ газ рассматривается как свободный молекулярный поток, для расчета течения и теплообмена газа используется молекулярно-кинетическая теория. В случае $10^{-3} < Kn < 1$ реализуется течение со скольжением. При $1 < Kn < 10$ реализуется переходный режим. Указанные границы являются условными, так как переход от течения сплошной среды к свободному молекулярному течению – постепенный процесс.

Теплоотдача в свободном молекулярном потоке может быть рассчитана на основе кинетической теории газа. Предположим, что молекулы газа, отраженные от поверхности тела не имеют соударений с падающими молекулами. В этом случае имеет место максвелловское распределение скоростей теплового движения молекул газа. На это распределение накладывается макроскопическая скорость газового потока. Количество переданной молекулами стенке энергии определяется через коэффициент аккомодации. Энергия молекул определяется с учетом макроскопической скорости потока газа и скорости теплового движения молекул.

Плотность теплового потока при течении разреженного газа вычисляется по обобщенной формуле Ньютона–Рихмана (87):

$$q = \alpha \left(T + r \frac{w^2}{2c_p} - T_s \right) = \alpha (T_c - T_s).$$

Коэффициент восстановления вычисляется из уравнения:

$$r = \frac{k}{k+1} F \left(M \sqrt{\frac{k}{2}} \right).$$

При течении со скольжением плотность теплового потока разреженного газа определяется из уравнения:

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \alpha (T_0 - T_s). \quad (88)$$

Здесь $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$ – температурный градиент в слое газа, прилегающем к поверхности обтекаемого тела. Плотность теплового потока на стенке при не разреженном газе может быть определена из уравнения:

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \alpha^0 (T_0 - T_s^0). \quad (89)$$

Здесь верхний нулевой символ обозначает состояние непрерывности.

Из уравнений (88) – (89) следует:

$$\frac{\alpha^0}{\alpha} = \frac{T_0 - T_s}{T_0 - T_s^0} = 1 - \frac{\Delta T_{CK}}{T_0 - T_s^0}. \quad (90)$$

Здесь $\Delta T_{CK} = c_2 \bar{l} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$ – скачок температуры в окрестности по-

верхности стенки, c_2 отражает условия взаимодействия газа со стенкой. Например, можно рассчитать c_2 из выражения

$c_2 = \frac{2-\gamma}{\gamma} \frac{2k}{k+1} \frac{1}{Pr}$, где γ – коэффициент аккомодации. После подста-

новки уравнения для ΔT_{CK} в (90) и с учетом $T_0 - T_s^0 = -\frac{\lambda}{\alpha^0} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$

получаем:

$$\frac{\alpha^0}{\alpha} = 1 + \frac{c_2 \bar{l} \alpha^0}{\lambda}.$$

Или после преобразований: $\alpha = \frac{1}{R^0 + R^{CK}}$, где $R^0 = \frac{1}{\alpha^0}$ – термическое сопротивление теплоотдачи плотного газа, $R^{CK} = \frac{\delta_{CK}}{\lambda}$ – условное термическое сопротивления, обусловленное температурным скачком, $\delta_{CK} = c_2 \bar{l}$. В безразмерном виде уравнение примет вид:

$$Nu = \frac{Nu^0}{1 + Nu^0 \text{Kn} c_2}.$$

2 ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

2.1 Теплообмен при конденсации

Конденсация – процесс перехода пара в жидкое или твердое состояние (фазовый переход первого рода). При конденсации пара выделяется тепло фазового перехода. Наиболее частой задачей в энергетике является конденсация паров в жидкое состояние на охлаждаемых поверхностях теплообмена.

Для конденсации необходимо, чтобы температура поверхности была меньше температуры газа или испаряемого пара. В этом случае избыточное тепло с поверхности отводится через стенку.

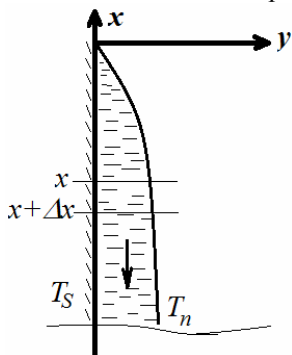


Рис. 6

Решим задачу о теплообмене при конденсации чистого пара на холодную стенку. На вертикальной стенке, имеющей температуру T_s , конденсируется сухой насыщенный пар (рис. 6). Температура пластинки чуть ниже температуры фазового перехода жидкости. Жидкость ровно покрывает поверхность стенки. При стекании жидкости по вертикальной стенке предполагается, что течение ламинарное.

Трение на границах фаз не учитывается. Температура на внешней границе слоя жидкости равна температуре насыщенных паров. Теплопроводность учитывается только в поперечном направлении слоя, в

продольном направлении $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. Движения жидкости в проекциях

на оси y и z не происходит. Размер стенки в направлении оси z бесконечен. Так как плотность пара мала по сравнению с плотностью конденсата, высота стенок невелика, то градиентом давления вдоль оси x

пренебрегаем, $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. С учетом заданных допущений математическая

постановка задачи состоит из уравнения движения пленки жидкости и уравнения переноса тепла:

$$\eta_f \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\rho_f g, \quad (91)$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0. \quad (92)$$

Граничные условия для (91) – (92) имеют вид:

$$\begin{aligned} y = 0 : T = T_s, w_x = 0, \\ y = \delta : T = T_n, \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (93)$$

В уравнениях (91) – (93) δ – толщина пленки, T_n – температура насыщенных паров, индексом f отмечены параметры жидкости. Первый интеграл (92) для граничных условий (93) имеет вид:

$$\frac{dT}{dy} = \frac{T_n - T_s}{\delta}.$$

Коэффициент теплоотдачи определится, как

$$\alpha = \frac{|q|}{T_n - T_s} = \frac{\lambda_f \frac{dT}{dy}}{T_n - T_s} = \frac{\lambda_f}{\delta(x)}. \quad (94)$$

Если бы мы знали закон распределения толщины пленки вдоль стенки, $\delta(x)$, то могли бы рассчитать теплоотдачу по уравнению (94).

Для того чтобы определить толщину пленки конденсата, воспользуемся уравнением (91) с граничными условиями (93). Проинтегрируем уравнение (91):

$$w_x(y) = -\frac{\rho_f g}{2\eta_f} y^2 + C_1 y + C_2.$$

Из (93) находим константы интегрирования: $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{\rho_f g}{\eta_f} \delta$.

Распределение скоростей имеет вид:

$$w_x(y) = \frac{\rho_f g}{\eta_f} \left(-\frac{y^2}{2} + \delta y \right).$$

Средняя скорость течения $\bar{w}$ в сечении x будет равна:

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta w_x(y) dy = \frac{\rho_f g}{3\eta_f} \delta^2.$$

Толщина пленки конденсата зависит от расхода конденсата в интересующем нас сечении. Расход жидкости через сечение на уровне x :

$$G = \rho_f \bar{w}_x \delta, \text{ тогда } dG = d(\rho_f \bar{w}_x \delta).$$

С другой стороны, если полагать, что тепло, отданное стенке равно теплоте фазового перехода (пренебрегаем теплотой переохлаждения конденсата): $dG = \frac{q_{ST}}{r} dx$, где r – теплота фазового перехода. Если

определить q_{ST} выражением: $q_{ST} = \frac{\lambda_f}{\delta} (T_n - T_s)$, то справедливо ра-

венство: $dG = \frac{\lambda_f}{r \delta} (T_n - T_s) dx$. Отсюда:

$$d(\rho_f \bar{w}_x \delta) = \frac{\lambda_f}{r \delta} (T_n - T_s) dx.$$

Подставим выражение для средней скорости течения $\bar{w}$ в сечении x :

$$d\left(\frac{\rho_f^2 g}{3\eta_f} \delta^3\right) = \frac{\lambda_f}{r \delta} (T_n - T_s) dx$$

и проинтегрируем полученное выражение, получим:

$$\frac{r \rho_f^2 g}{4\lambda \eta_f} \delta^4 = (T_n - T_s) x + C.$$

Из условия, что при $x = 0$ $\delta = 0$ следует $C = 0$. Тогда толщина пограничного слоя определится в виде:

$$\delta(x) = \sqrt[4]{\frac{4\lambda \eta_f (T_n - T_s) x}{r \rho_f^2 g}}. \quad (95)$$

Тогда коэффициент теплообмена при конденсации можно рассчитать по формуле (94) в виде:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{r \rho_f^2 g \lambda^3}{4\eta_f (T_n - T_s) x}} \sim \sqrt[4]{\frac{1}{x}}. \quad (96)$$

Если обезразмерить уравнение (96), то $Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} \sim \sqrt[4]{x^3}$.

2.2 Тепло- и массоотдача в двухкомпонентных смесях. Термодиффузия. Бародиффузия. Дифференциальные уравнения тепло- массоотдачи

Процессы теплопереноса во многих случаях связаны с процессами переноса массы одного компонента в другом. Например, при испарении жидкости в парогазовый поток происходит диффузия испарившейся жидкости в парогазовом потоке. Это приводит к изменению интенсивности теплоотдачи и изменению процесса диффузии.

Диффузией называется самопроизвольный процесс установления равномерного распределения концентраций в смеси. Диффузия или массообмен происходит за счет хаотического теплового движения молекул. Диффузия характеризуется плотностью потока массы вещества, проходящим в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению потока массы. Введем обозначение потока массы – j , плотность потока массы измеряется в $[кг/(м^2 \cdot с)]$. Для однородной по температуре и давлению макроскопически неподвижной смеси плотность потока массы одного из компонентов за счет молекулярной диффузии определяется законом Фика:

$$j_i = -D \frac{d\rho_i}{dn}, \quad кг/(м^2 \cdot с). \quad (97)$$

В уравнении (97) D – коэффициент молекулярной диффузии одного компонента относительно другого, D измеряется в $м^2/с$; ρ_i – парциальная плотность вещества, равная отношению массы компонента к объему смеси; n – направление нормали к поверхности одинаковой

концентрации данного вещества; градиент $\frac{d\rho_i}{dn} = grad(\rho_i)$ направлен в сторону возрастания концентрации.

Коэффициент диффузии D зависит от температуры и давления, с ростом температуры D возрастает, с ростом давления уменьшается. В случае заданной бинарной смеси коэффициент диффузии полагается одинаковым для первого и второго компонентов.

Если воспользоваться уравнением состояния идеального газа Менделеева–лапейрона, то можно переписать уравнение (97) через парциальные давления компонента газа в смеси:

$$j_i = -D_{p,i} \frac{dp_i}{dn}, \quad \kappa z / (m^2 \cdot c),$$

где p_i – парциальное давление компонента смеси, $[H/m^2]$; $D_{p,i} = \frac{D}{R_i T}$ – коэффициент молекулярной диффузии, отнесенный к парциальному давлению рассматриваемого компонента, $D_{p,i}$ измеряется в $[c]$; R_i – газовая постоянная компонента смеси. Для коэффициентов молекулярной диффузии компонентов смеси справедливо соотношение: $\frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{M_1}{M_2}$, где M_1, M_2 – молекулярный вес 1-го и 2-го компонентов соответственно.

При переменной температуре смеси возможно возникновение эффекта термической диффузии. Этот эффект носит название эффекта Соре. Заключается эффект в том, что для двухкомпонентной смеси с различной массой молекул компонентов при повышении температуры более тяжелые молекулы стремятся перейти в холодные области. В случае двухкомпонентной смеси с практически равными массами молекул компонентов в холодные области стараются перейти более крупные молекулы.

Термодиффузия приводит к образованию градиента концентрации. В противовес термодиффузии выступает процесс концентрационной диффузии. В результате, система стремится прийти к стационарному состоянию, в котором термодиффузия уравнивается концентрационной диффузией. Поток массы при неизотермической диффузии определяется выражением:

$$j_i = -D \left(\text{grad}(\rho_i) + \rho \frac{k_T}{T} \text{grad}(T) \right). \quad (98)$$

В уравнении (98) ρ_i – плотность компонента смеси; ρ – плотность смеси; T – температура смеси; k_T – термодиффузионное отношение, $k_T = D_T / D$; D_T – коэффициент термодиффузии, измеряющийся в m^2/c . Первое слагаемое (98) учитывает концентрационную диффузию, второе – термодиффузию.

Эффект термодиффузии заметен при больших градиентах температуры, и имеет значение для газовых смесей. Для жидкостей эффект термодиффузии практически не играет роли.

Обратное термодиффузии явление называется эффектом Дюфо (диффузионный термоэффект) и представляет собой возникновение разности температур в результате диффузионного перемешивания двух газов, находящихся изначально при одной температуре. При смешении двух газов разность температур может быть порядка нескольких градусов. При смешении жидкостей диффузионный термоэффект слабее диффузионного термоэффекта в газах примерно в 1000 раз и практически не заметен.

Еще один вид диффузии возникает за счет неоднородности давления. Этот вид диффузии называется бародиффузией, и он заключается в том, что тяжелые молекулы стремятся перейти в область повышенного давления, легкие – в область пониженного. Бародиффузия сопровождается переносом массы. Плотность потока массы за счет бародиффузии определяется из уравнения:

$$j_{bd1} = -D \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \frac{M_2 - M_1}{M} \frac{1}{p} \text{grad}(p). \quad (99)$$

В уравнении (99) p – сумма парциальных давлений компонент смеси; M_1, M_2 – молекулярный вес 1-го и 2-го компонентов соответственно;

$M = M_1 \frac{p_1}{p} + M_2 \frac{p_2}{p}$ – молекулярная масса смеси.

Явление бародиффузии встречается только при существенных перепадах давления и только в случае $M_1 \neq M_2$.

В движущейся среде вещество переносится не только диффузией, но и конвекцией. И тогда плотность потока тепла с учетом переноса массы определяется из уравнения:

$$q = -\lambda \text{grad}(T) + \rho w i - \sum j_k i_k. \quad (100)$$

Здесь i – энтальпия; j – поток массы при молекулярной диффузии компонента смеси; w – скорость движения, λ – теплопроводность, T – температура, ρ – плотность смеси.

Запишем дифференциальные уравнения, описывающие перенос тепла и массы бинарной смеси. При этом будем полагать, что в постановке задачи не учитывается трение, термодиффузия и бародиффузия; работа расширения равна нулю; плотность, теплоемкость и теплопроводность компонентов смеси постоянны. С учетом допущений уравнение энергии бинарной смеси переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \Delta T + \\ + D \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_p} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial m_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial m_1}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (101)$$

Здесь $m_1 = \frac{\rho_1}{\rho}$ – локальное массосодержание первого компонента; w_x , w_y , w_z – компоненты вектора скорости; c_{p1} , c_{p2} – теплоемкости компонент смеси; c_p – теплоемкость смеси.

Уравнение диффузии для компонент смеси с учетом сделанных допущений имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial m_i}{\partial \tau} = \rho D \left[\frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} \right] - \\ - \rho \left(w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} \right) - \rho m_i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (102)$$

Для несжимаемых жидкостей последнее слагаемое равно нулю, поэтому уравнение (102) принимает вид:

$$\frac{\partial m_i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial m_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial m_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial m_i}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 m_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_i}{\partial z^2} \right]. \quad (103)$$

Здесь i соответствует номеру компонента. Уравнения (101) и (103) по виду аналогичны, и имеет место подобие $D \sim \frac{\lambda}{c_p \rho}$. Для газа в обыч-

ном случае полагается, что $D = \frac{\lambda}{c_p \rho}$.

Компоненты вектора скорости w_x , w_y , w_z могут быть найдены из решения уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 w_x, \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 w_y, \end{aligned} \quad (104)$$

$$\rho \frac{dw_z}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 w_z.$$

Система уравнений (101), (103) – (104) дополняется уравнением неразрывности:

$$\operatorname{div}(w) = 0. \quad (105)$$

Наконец, вся система замыкается краевыми условиями и недостающими уравнениями, описывающими физические процессы.

2.3 Процесс испарения. Стефановский поток. Коэффициент массоотдачи при испарении жидкости

При испарении жидкости поверхность жидкой фазы играет роль, аналогичную роли твердой стенки в процессах теплоотдачи без диффузии. Образующийся при испарении пар переносится путем диффузии в окружающую парогазовую смесь, одновременно имеет место теплоотдача между парогазовой смесью и поверхностью жидкости.

Конвективный массообмен между твердой поверхностью и окружающей средой называется массоотдачей. Теплоотдача и массоотдача в физических процессах испарения, сублимации, конденсации идут одновременно. При этом расчет массоотдачи проводится по уравнению:

$$j = \beta (\rho_s - \rho_0), \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}. \quad (106)$$

В уравнении (106) j – плотность потока массы; β – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций диффундирующего вещества; ρ_s – концентрация диффундирующего вещества на поверхности раздела фаз; ρ_0 – концентрация диффундирующего вещества вдали от поверхности раздела фаз.

Для газа можно использовать уравнение состояния идеальных газов, тогда уравнение (106) переписывается в виде:

$$j = \beta_p (p_s - p_0), \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}. \quad (107)$$

Здесь β_p – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности парциальных давлений; p_s – парциальное давление диффундирующего вещества на поверхности раздела фаз; p_0 – парциальное давление диф-

фундирующего вещества вдали от поверхности раздела фаз.

Коэффициенты массоотдачи из (106) и (107) связаны соотношением:

$$\beta_p = \frac{\beta}{RT}. \quad (108)$$

Рассмотрим процесс испарения жидкости в парогазовую среду в предположении, что полное давление по всему объему парогазовой среды постоянно, разность температур пренебрежимо мала (эти предположения позволяют не учитывать термо- и бародиффузию). Рассматриваемый процесс испарения соответствует условию полунепроницаемой поверхности, когда поверхность испарения проницаема для пара и непроницаема для жидкости.

Парциальное давление газа p_g и парциальное давление пара p_p на границе поверхности раздела связаны соотношением:

$$\frac{\partial p_g}{\partial y} = -\frac{\partial p_p}{\partial y}. \quad (109)$$

Газ диффундирует в направлении, обратном направлению диффузии пара. Пар диффундирует в парогазовую среду. Для газа поверхность раздела является аналогом непроницаемой стенки. Для стационарного режима распределение парциальных давлений пара и газа должно оставаться постоянным. Следовательно, перемещение газа к поверхности испарения компенсируется конвективным потоком парогазовой смеси от жидкости в парогазовую среду. Этот поток называется стефановым потоком. Скорость стефанового потока будем обозначать w_{sp} .

Суммарный поток пара равен сумме молекулярного и конвективного потоков:

$$j_{ps} = -D_{pp} \left(\frac{\partial p_p}{\partial y} \right)_s + \rho_p w_{sp}. \quad (110)$$

Суммарный поток газа у поверхности раздела равен нулю:

$$j_{gs} = -D_{pg} \left(\frac{\partial p_g}{\partial y} \right)_s + \rho_g w_{sp} = 0. \quad (111)$$

Отсюда скорость стефанового потока, с учетом соотношения (109), может быть определена из выражения:

$$w_{sp} = -\frac{D_{pp}}{\rho_g} \frac{R_p}{R_g} \left(\frac{\partial p_p}{\partial y} \right)_s. \quad (112)$$

Здесь R_p , R_g – газовые постоянные пара и газа соответственно.

Зная скорость стефанового потока, можем найти суммарный поток пара:

$$\dot{j}_{ps} = -D_{pp} \left(\frac{\partial p_p}{\partial y} \right)_s - \rho_p \frac{D_{pp}}{\rho_g} \frac{R_p}{R_g} \left(\frac{\partial p_p}{\partial y} \right)_s = -D_{pp} \left(\frac{p}{p_g} \right) \left(\frac{\partial p_p}{\partial y} \right)_s. \quad (113)$$

Здесь $p = p_g + p_p$. Множитель p/p_g учитывает стефановский поток, вызванный непроницаемостью поверхности испарения для газа. Стефановский поток может появиться даже при отсутствии вынужденной или свободной конвекции.

Коэффициент массоотдачи для процесса испарения определяется выражением:

$$\beta_p = -D_{pp} \left(\frac{p/p_g}{p_{ps} - p_{p0}} \right) \left(\frac{\partial p_p}{\partial y} \right)_s. \quad (114)$$

Уравнение (114) является дифференциальным уравнением массоотдачи при испарении.

Количество тепла q , отдаваемого или воспринимаемого жидкостью и парогазовой смесью, определяется суммой тепла, переданного конвективным теплообменом, и тепла, переносимого диффундирующей массой:

$$q = -\lambda \left(\text{grad}(T) \right)_s + \dot{j}_p \dot{i}_{ps}. \quad (115)$$

Здесь $\dot{i}_{ps}$ – энтальпия потока.

Коэффициент теплоотдачи определяется выражением:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_s - T_f} (\nabla T)_s. \quad (116)$$

Наличие потока массы приводит к отличию величины коэффициента теплообмена от коэффициента теплообмена процесса, не сопровождающегося массоотдачей. Коэффициент массоотдачи зависит от направления и величины потока массы.

2.4 Теплообмен при химических превращениях

Химические превращения представляют собой процесс перехода одного вещества в другое при химической реакции. Различают необратимые химические реакции, когда вещество A превращается в B ($A \rightarrow B$), и обратимые реакции, когда A может превращаться в B , а B превращается в A ($A \rightleftharpoons B$).

В результате химической реакции может выделяться или поглощаться тепло. Различают экзотермические (с выделением тепла) и эндотермические (с поглощением тепла) химические реакции. Теплота химической реакции – это разность энтальпий исходного и образовавшегося вещества, $Q_{cr} = H_A - H_B$.

Рассмотрим реакцию $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots \rightarrow b_1 B_1 + b_2 B_2 + \dots B_n$. Скоростью прямой химической реакции называется скорость превращения исходных веществ A в вещества B . Из наблюдений скорость химической реакции определяется, как $\vec{\omega}_{cr} = \vec{k} \rho_{A_1}^{a_1} \rho_{A_2}^{a_2} \dots \rho_{A_m}^{a_m}$, здесь $A_1, A_2, \dots, A_m$ – исходные вещества, $a_1, a_2, \dots, a_m$ – стехиометрические коэффициенты реакции. Скорость обратной реакции, когда вещества B превращаются в вещества A , определяется выражением $\vec{\omega}_{cr} = \vec{k} \rho_{B_1}^{b_1} \rho_{B_2}^{b_2} \dots \rho_{B_m}^{b_m}$. Общая скорость химической реакции вычисляется из выражения $\omega = \vec{\omega} - \vec{\omega}$.

Тепловой поток для среды с химическим реагированием вычисляется из выражения:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_x h + \sum_{i=1}^N j_i h_i, \quad (117)$$

где $\sum_{i=1}^N j_i h_i$ – перенос тепла за счет переноса массы, $h = c_p T + Q_{cr}$, c_p –

удельная теплоемкость при постоянном давлении, Q_{cr} – тепло, выделившееся или поглощенное в ходе химической реакции.

Уравнение теплопроводности в бинарной среде (содержащей два компонента) с химическими реакциями имеет вид:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \lambda \Delta T - \text{div}((h_1 - h_2)j_1) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + Q_{cr}. \quad (118)$$

В уравнении (118) h – теплосодержания компонентов смеси, j_1 – плотность потока вещества, по которому рассчитывается реакция.

В случае экзотермической химической реакции источником тепла является тепловыделение от химической реакции. В предположении, что скорость химической реакции зависит от температуры по закону Аррениуса, можно записать выражение для определения плотности источников тепла:

$$Q_{cr} = Qz \exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \quad (119)$$

Здесь Q – тепловой эффект реакции, рассчитанный по горючему, z – парциальная плотность недостающего компонента реакции, E – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная.

Для решения задачи теплопереноса при химических превращениях уравнение (118) дополняется уравнениями движения:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}, \quad (120)$$

уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_i}{\partial x_i} = 0, \quad (121)$$

уравнениями сохранения массы компонентов смеси:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k w_i}{\partial x_i} = \text{div} \left(D \text{grad} \rho_k \right) - \frac{Q_{cr}}{Q}, \quad (122)$$

система замыкается уравнением состояния:

$$p = p(\rho, T). \quad (123)$$

Для задачи теплообмена при наличии химических реакций существуют предельные случаи, которые позволяют упростить постановку задачи:

- Если реакции очень медленные, а скорости массообмена велики, то при постановке задачи можно не учитывать химические реакции.
- Если реакции, наоборот, протекают мгновенно, то можно брать значения параметров для продуктов реакции.
- Уравнения (118) и (122) можно объединить для случая подобия полей концентрации и температуры ($Le = 1$).

3 ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

3.1 Основные понятия и законы теплоизлучения

Одним из видов переноса тепла является тепловое излучение, степень влияния которого на общий процесс теплопереноса зависит от величины температуры. Чем выше температура системы, тем интенсивнее лучистый теплообмен. Особенностью теплового излучения является перенос тепла от тела к телу даже в случае, когда тела не граничат между собой.

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения внутренней энергии излучающего тела путем электромагнитных волн. Электромагнитные волны распространяются со скоростью света, равной $3 \cdot 10^8$ м/с в вакууме. При поглощении электромагнитных волн какими-либо телами они превращаются в тепловую энергию. Электромагнитные волны возникают благодаря движущимся заряженным частицам (ионам и электронам). Характеристикой теплового излучения является длина волны λ . Энергия теплового излучения определяется энергией Планка, которая вычисляется из выражения $\varepsilon = \hbar \nu$, где $\nu = \lambda/c$. Передача тепла излучением может происходить в видимой,

$\lambda = 0.4 \div 0.6$ мк, и в инфракрасной, $\lambda = 0.76 \div 10^3$ мк, областях спектра. Инфракрасное излучение возникает от движения свободных электронов в металле. Излучение в видимой области спектра имеет существенное значение только при высоких температурах.

Энергия испускания поверхностью в единицу времени по всем направлениям полупространства в узком интервале длин волн $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ называется потоком монохроматического спектрального однородного излучения. Суммарное излучение по всей поверхности и по всем динам волн называется интегральным (полным) потоком излучения. Интегральный поток испускаемый с единицы поверхности называется поверхностной плотностью потока интегрального излучения (E). $E = \frac{dQ}{dF}$, Q – излучение с поверхности в единицу времени.

Общий лучистый поток может быть определен, как $Q = \int_p E dF$. Отношение плотности лучистого потока испускаемого в бесконечно малом

интервале длин волн к величине этого интервала, называется спектральной плотностью потока излучения. $E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}$; $E = \int_0^\lambda E_\lambda d\lambda$.

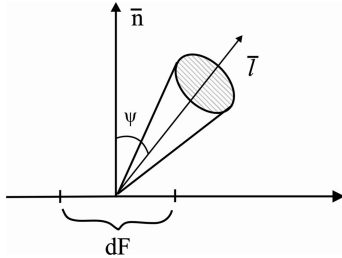


Рис. 7

Плотность потока может изменяться по определенным направлениям излучения. Количество энергии, испускаемое в определенном направлении l единицей площади тела в единицу времени в пределах элементарного телесного угла $d\omega$ называется угловой плотностью излучения (рис. 7).

Угловая плотность интегрального излучения может быть найдена из выражения $I_\psi = \frac{dE_\psi}{d\omega} = \frac{d^2 Q_\psi}{dF d\omega}$.

Яркостью или интенсивностью излучения называется количество лучистой энергии испускаемой в направлении угла ψ в единицу времени элементарной площадкой в пределах единичного телесного угла, отнесенное к проекции этой площадки на плоскость ортогональную к направлению излучения.

Попадая на какие-либо тела, тепловое излучение может поглощаться, отражаться и пропускаться этими телами. Коэффициентом поглощения называется отношение поглощенной телом лучистой энергии E_{pg} к падающей энергии E_{pd} , $a = E_{pg} / E_{pd}$. Если $a = 1$, то тело абсолютно черное; если $a < 1$, то тело серое. Коэффициентом отражения называется отношение отраженной телом лучистой энергии E_{ot} к падающей энергии E_{pd} , $r = E_{ot} / E_{pd}$. Если $r = 1$, то отражение будет абсолютным. Коэффициентом пропускания называется отношение прошедшей через тело лучистой энергии E_{pr} к падающей энергии E_{pd} , $d = E_{pr} / E_{pd}$. Если $d = 1$, то тело абсолютно прозрачное; $0 < d < 1$ – полупрозрачное тело; $d = 0$ – непрозрачное тело. В общем случае справедливо: $a + r + d = 1$. Для непрозрачных тел: $d = 0, a + r = 1$. Для аб-

солютно черного тела $d = r = 0$, $a = 1$. Для абсолютно белого тела $d = a = 0$, $r = 1$.

Степенью черноты тела называется отношение энергии излучения данного тела к энергии излучения абсолютно черного тела при такой же температуре. При расчетах лучистого теплообмена используется величина коэффициента ослабления луча, характеризующая относительное изменение интенсивности на единицу длины пути луча в поглощающей и рассеивающей среде.

Рассмотрим механизм лучистого теплообмена между двумя телами, разделенными прозрачной средой (рис. 8). Для определения

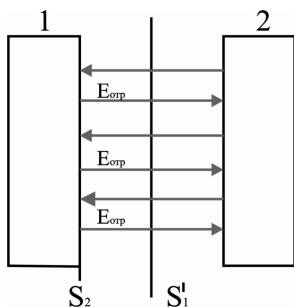


Рис. 8

результатирующего потока энергии при теплообмене поставим контрольную поверхность S'_1 . Результирующая энергия вычисляется как $E_{rez} = E_{21} - E_{12}$. В случае если контрольную поверхность выбрать на поверхности тела, S'_2 , результирующая энергия взаимодействия определится как $E_{rez} = -E_{12} + AE_{21}$. В том и в другом случае E_{rez} равны.

Любой газ, нагретый до высокой температуры, диссоциирует и способен к объемному излучению (рис. 9). Объемное излучение харак-

теризуется плотностью, вычисляемой из выражения: $\eta = \frac{dQ}{dV}$, где η –

фиксируется в рамках телесного угла 4π , $Q = \int_V \eta dV$ – общее излуче-

ние. Как правило, объемная светящаяся среда является полупрозрачной.

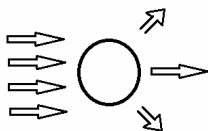


Рис. 9

Плотность поглощения η_{pg} и рассеивания η_r объемного излучения вычисляются соответственно из выражений $\eta_{pg} = \alpha \eta_{pd}$, $\eta_r = \beta \eta_{pd}$, где α – коэффициент объемного поглощения, β – коэффициент объемного рассеивания, $\alpha + \beta = 1$.

В процессе излучения направление $grad(T)$ совпадает с направлением q . Вектор излучения определяет направление наиболее интенсивного излучения энергии.

Теперь рассмотрим основные законы теплового излучения.

Закон Планка

Тепловое излучение любого твердого тела характеризуется непрерывным спектром распределения энергии излучения по длинам волн. Интенсивность излучения в спектре излучения является неравномерным и различается у разных тел. Не существует единой аналитической зависимости распределения спектрального излучения. И в основу всех законов теплового излучения положены законы излучения абсолютно черного тела.

Планком М. был получен закон распределения энергии по всем длинам волн во всей области спектра теплового излучения. Закон Планка устанавливает зависимость интенсивности излучения от температуры и длины волны:

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}. \quad (124)$$

В уравнении (124) $c_1 = 0.374 \cdot 10^{-15} \text{ вт} \cdot \text{м}^2$ – первая постоянная Планка, $c_2 = 1.4388 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$ – вторая постоянная Планка, λ – длина волны, T – абсолютная температура, K .

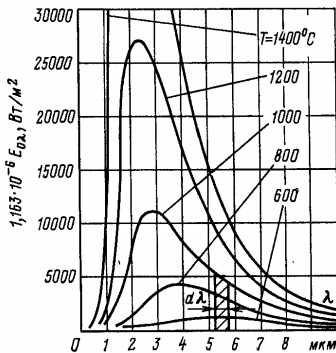


Рис. 10. Графическое представление закона Планка [1]

Согласно (124) каждой длине волны λ соответствует своя интенсивность излучения $E_{0\lambda}$. На рис. 10 представлено распределение спектральной интенсивности излучения по длинам волн при различных значениях температуры. Согласно рис. 10 с повышением температуры наблюдается смещение максимума $E_{0\lambda}$ в сторону уменьшения длины волны λ . При длинах волн $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ интенсивность излучения обращается в нуль.

Закон Релея–Джинса

Рассмотрим предельный случай поведения уравнения (124), когда $\lambda T \gg c_2$. Разложим экспоненциальную функцию из уравнения (124) в

ряд Тейлора по степеням $\frac{c_2}{\lambda T}$ и ограничимся двумя слагаемыми разложения:

$$e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 - \frac{1}{1!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right)^2 + \dots \quad (125)$$

Тогда уравнение (124) переходит в выражение:

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1 T}{c_2 \lambda^4}. \quad (126)$$

Выражение (126) называется законом Релея–Джинса.

Закон Вина

Рассмотрим второй предельный случай поведения уравнения (124): $\lambda T \ll 1$. Тогда выражение (124) перепишется в виде:

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}. \quad (127)$$

Зависимость (127) называется законом излучения Вина.

Найдем экстремумы для уравнения (124). Для этого продифференцируем (124) по длине волны λ :

$$E'_{0\lambda} = \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda_{\max} T}\right) + \frac{c_2}{5\lambda_{\max} T} - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения дает:

$$\lambda_{\max} T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (128)$$

Выражение (128) представляет собой закон смещения Вина. Согласно этому закону с повышением температуры максимальная величина спектральной интенсивности излучения сдвигается в сторону более коротких волн.

Максимальная интенсивность излучения черного тела может быть найдена из уравнений (124), (128):

$$E_{0\lambda} = c_3 T^5 \text{ Вт/м}^3. \quad (129)$$

В уравнении (129) $c_3 = 1.307 \text{ Вт/м}^3 \cdot \text{К}^5$.

Закон Стефана–Больцмана

Закон Стефана–Больцмана устанавливает зависимость плотности потока интегрального полусферического излучения от температуры и имеет вид:

$$I_0 = \left(\int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda \right) = \sigma T^4, \text{ вт/м}^2. \quad (130)$$

В уравнении (130) $\sigma = 5.6687 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$ – постоянная Стефана–Больцмана. Согласно закону Стефана–Больцмана плотность излучения полусферического черного излучения пропорциональна температуре в четвертой степени.

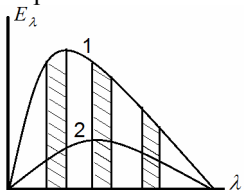


Рис. 11. Интенсивность черного (кривая 1) и серого (кривая 2) излучения в зависимости от длины волны.

Закон Стефана–Больцмана может быть использован и для серых тел. В этом случае полагается, что у серых тел, как и у абсолютно черных, собственное излучение пропорционально температуре в четвертой степени, но излучательная способность ниже, чем излучательная способность абсолютно черного тела при этой же температуре (рис. 11). Закон излучения для серых тел имеет вид:

$$I = \sigma \epsilon T^4 \text{ вт/м}^2. \quad (131)$$

В уравнении (131) $\epsilon = I/I_0$ – степень черноты серого тела.

Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа устанавливает количественную связь между энергиями излучения и поглощения серых и черных тел. Он получается из рассмотрения теплового баланса в системе тел находящихся в термодинамическом равновесии внутри замкнутой системы. Пусть перенос тепла за счет теплопроводности и конвекции отсутствует. При температурном равновесии каждое из двух тел излучает энергию, равную $I_1 F_1$ и $I_2 F_2$. Обозначим плотность падающего излучения окружающих стенок, как I_C , коэффициенты поглощения: a_1 и a_2 . Тогда количество поглощенной телами энергии: $I_C a_1 F_1$ и $I_C a_2 F_2$. Уравнения теплового баланса имеют вид:

$$I_1 = I_C a_1, \quad I_2 = I_C a_2.$$

Отсюда:

$$\frac{I_1}{a_1} = \frac{I_2}{a_2} = I_c. \quad (132)$$

Уравнение (132) представляет собой закон Кирхгофа.

При равновесном излучении коэффициенты поглощения a_1 и a_2 численно равны степеням черноты тел, $a_1 = \varepsilon_1$ и $a_2 = \varepsilon_2$. Отношение энергии излучения и энергии поглощения, есть характеристика конкретного тела.

Закон косинусов Ламберта

Закон косинусов Ламберта позволяет определить энергию излучения по направлениям. Согласно данному закону поток излучения абсолютно черного тела в заданном направлении пропорционален потоку излучения в направлении нормали к поверхности и косинусу угла между этими направлениями.

Введем для рассмотрения понятие яркости интегрального излучения: $I_\psi = I_n \cos(\psi)$, где $I = \frac{d^2 Q}{dF d\omega \cos(\psi)} = \frac{I_\psi}{\cos(\psi)} = I_n$. Установим связь между яркостью и плотностью потока полусферического излучения. Для начала запишем закон косинусов:

$$dE_\psi = I d\omega \cos(\psi). \quad (133)$$

Телесный угол $d\omega$ представляет собой угол, под которым из какой-либо точки элементарной площадки одного тела видна элементарная площадка другого тела. По определению,

$$d\omega = \frac{dF}{r^2} = \frac{d4\pi r^2}{r^2} \Rightarrow \omega = 4\pi - \text{для сферы.}$$

Рассмотрим плоскость (x, y) и нарисуем полусферу. Тогда

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{r \cdot \sin(\psi) d\psi r d\theta}{r^2} = \sin(\psi) d\psi d\theta.$$

Отсюда для абсолютно черного тела

$$E_\psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I \cos(\psi) \sin(\psi) d\psi d\theta = I(\psi, \theta) = I \cdot \pi.$$

Отсюда яркость и плотность интегрального излучения связаны соотношением:

$$I = \frac{E}{\pi}. \quad (134)$$

3.2 Теплообмен излучением между двумя телами

Рассмотрим частные задачи излучения. Найдем тепловой поток для случая излучения между двумя телами.

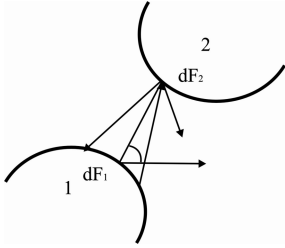


Рис. 12

Рассмотрим два черных тела, которые произвольно расположены в пространстве и имеют температуры T_1 и T_2 (рис. 12). Предполагается, что теплообмена с другими телами нет. Тела выпуклые и яркость излучения не зависит от направления.

Выделим элементарные площадки dF_1 и dF_2 . Тогда поток, падающий на dF_1 с dF_2 :

$$d^2 Q_{p1} = I_{\psi 2} d\omega_2 dF_2 = I_2 \cos \psi_2 d\omega_2 dF_2.$$

Мы полагаем при этом, что вся площадка dF_2 излучает, и с площадки dF_2 площадка dF_1 видна под телесным углом $d\omega_2$. Аналогично запишем выражение для потока, падающий на dF_2 с dF_1 :

$$d^2 Q_{p2} = I_{\psi 1} d\omega_1 dF_1 = I_1 \cos \psi_1 d\omega_1 dF_1.$$

Запишем выражение для вычисления углов через величины площадок:

$$d\omega_1 = \frac{dF_2 \cos(\psi_2)}{r^2},$$

$$d\omega_2 = \frac{dF_1 \cos(\psi_1)}{r^2}.$$

Отсюда:

$$d^2 Q_{p1} = I_2 \frac{\cos \psi_2 \cos \psi_1 dF_1 dF_2}{r^2}, \quad d^2 Q_{p2} = I_1 \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 dF_2 dF_1}{r^2}. \quad (135)$$

Величины в уравнении (135) определяются только геометрическим взаиморасположением тел. Теперь для того, чтобы посчитать суммар-

ный поток с одного тела на другое нужно дважды проинтегрировать уравнение (135) по площади:

$$Q_{p1} = \int_{F_1} \int_{F_2} d^2 Q_{p1}, \quad Q_{p2} = \int_{F_2} \int_{F_1} d^2 Q_{p2}. \quad (136)$$

Итоговый тепловой поток определится уравнением:

$$Q_r = Q_{p1} - Q_{p2}.$$

Решим задачу о теплообмене излучением в системе тел с плоско-параллельными поверхностями (рис. 13). Пусть система состоит из двух тел, имеющих размеры, во много раз превышающие расстояние между ними. Пусть температура, излучательная и поглощательная энергия поверхностей этих тел соответственно равны T_1 , T_2 , A_1 , A_2 , E_1 , E_2 . Для решения задачи применим метод многократных отражений. Распишем движение лучистой энергии, испускаемой первым телом (рис.13):

- a. тело 1 излучает E_1 ;
- b. тело 2 поглощает $E_1 A_2$;
- c. тело 2 отражает обратно $E_1(1-A_2)$;
- d. тело 1 поглощает из отраженного 2 $E_1(1-A_2)A_1$;
- e. тело 1 отражает из отраженного 2 $E_1(1-A_2)(1-A_1)$;
- f. тело 2 поглощает из отраженного 1 $E_1(1-A_2)(1-A_1)A_2$;
- g. тело 2 отражает из отраженного 1 $E_1(1-A_2)(1-A_1)(1-A_2)$;
- h. тело 1 снова поглощает из отраженного 2 $E_1(1-A_2)(1-A_1)(1-A_2)A_1$;
- i. и так далее.

Для движения лучистой энергии, испускаемой вторым телом, соотношения аналогичны, только меняются местами индексы 1 и 2:

- a'. тело 2 излучает E_2 ;
- b'. тело 1 поглощает $E_2 A_1$;
- c'. тело 1 отражает обратно $E_2(1-A_1)$;
- d'. и так далее.

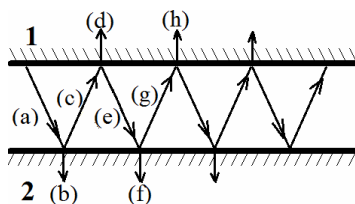


Рис. 13

Результирующий лучистый тепловой поток может быть представлен как разность собственного излучения тела 1 и поглощенного от собственного излучения, отраженного телом 2 и собственного излучения тела 2.

Количество энергии, поглощенное телом 1 из собственного излучения, определяется суммой энергий (d), (h), ...:

$$E_{\text{пс}} = E_1 (1 + k + k^2 + \dots) (1 - A_2) A_1 = E_1 \left(\frac{1}{1 - k} \right) (1 - A_2) A_1. \quad (137)$$

Здесь $k = (1 - A_2)(1 - A_1)$. При получении выражения (137) применена формула суммирования бесконечного степенного ряда по k .

Количество энергии, поглощенное телом 1 из излучения тела 2, определяется из (b'), ...:

$$E_{\text{пл}} = E_2 (1 + k + k^2 + \dots) A_1 = \frac{E_2 A_1}{1 - k}. \quad (137)$$

Из уравнений (136) – (137) результирующий лучистый тепловой поток, который получает тело 1, определяется выражением:

$$q_{\text{рез}} = E_1 - E_1 \left(\frac{1}{1 - k} \right) (1 - A_2) A_1 - \frac{E_2 A_1}{1 - k}.$$

Или, после преобразований, получаем выражение:

$$q_{\text{рез}} = \frac{E_1 A_2 - E_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}, \text{ вт/м}^2. \quad (138)$$

Если излучение является равновесным, то можно положить $\varepsilon_{1,2} = A_{1,2}$. Представим излучательную способность тел по закону Стефана-Больцмана:

$$E_1 = c_0 \varepsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 = c_0 A_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4, E_2 = c_0 \varepsilon_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 = c_0 A_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4. \quad (139)$$

Тогда уравнение (138) можно переписать в виде:

$$q_{\text{рез}} = c_0 A_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \text{ вт/м}^2. \quad (140)$$

Здесь $A_{\text{пр}} = 1 / \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 \right)$ – приведенный коэффициент поглощения

системы, $c_{pr} = 1 / \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right)$, $вт/м^2 K^4$ – приведенный коэффициент

излучения.

Рассмотрим второй метод получения величины результирующего лучистого теплового потока – метод сальдо.

Результирующий лучистый тепловой поток для первого тела равен:

$$q_{1,2} = E_{eff1} - E_{eff2}, \text{ вт/м}^2. \quad (141)$$

При этом полагается, что для второго тела справедливо $E_{\Pi 2} = E_{eff2}$, то есть падающий поток равен эффективному потоку.

Эффективное излучение тел можно записать в виде:

$$E_{eff1} = q_{1,2} \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{E_1}{A_1}; \quad E_{eff2} = q_{2,1} \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{E_2}{A_2}. \text{ вт/м}^2. \quad (142)$$

Для установившегося режима справедливо равенство тепловых потоков: $q_{1,2} = -q_{2,1}$. Тогда уравнение (141) с учетом (142) запишется в виде:

$$q_{1,2} = \frac{E_1/A_1 - E_2/A_2}{1/A_1 + 1/A_2 - 1}, \text{ вт/м}^2. \quad (143)$$

После подстановки значений собственного излучения E_1, E_2 (139) получим величину полного результирующего потока:

$$Q_{1,2} = q_{1,2} F_1 = c_{pr} F_1 \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right), \text{ вт}. \quad (144)$$

3.3 Уравнение переноса лучистой энергии в поглощающей и излучающей среде

При прохождении лучистой энергии через полупрозрачную среду энергия поглощается и рассеивается. Кроме того, среда может иметь собственное излучение и, следовательно, интенсивность излучения в заданном направлении – переменная величина. Запишем уравнение переноса лучистой энергии в предположении, что среда не излучает. На границе среды задаем интенсивность излучения. При выводе уравнения предполагается, что интенсивность излучения при прохождении через слой толщиной dl уменьшается пропорционально интенсивности и пройденному пути:

$$dI_{\lambda} = -\alpha_{\lambda} I_{\lambda} dl. \quad (145)$$

В уравнении (145) α_{λ} – спектральный коэффициент поглощения.

Дополним уравнение (145) условием на границе:

$$I_{\lambda}(0) = I_{0\lambda}. \quad (146)$$

Проинтегрируем уравнение (145) и учтем граничное условие (146):

$$I_{\lambda} = I_{0\lambda} e^{-\int_0^l \alpha_{\lambda} dl} = I_{0\lambda} e^{-L_{\lambda}}. \quad (147)$$

Уравнение (147) представляет собой закон Бугера, который позволяет найти спектральную яркость в любой точке по лучу. Если спектральный коэффициент поглощения постоянен, $\alpha_{\lambda} = const$, то оптическая

длина луча определяется выражением $L_{\lambda} = \int_0^l \alpha_{\lambda} dl = \alpha_{\lambda} l$. Если $L_{\lambda} \ll 1$,

то среда является оптически тонкой и изменение интенсивности излучения в этой среде небольшое. Соответственно, если $L_{\lambda} \gg 1$, то среда оптически толстая.

При прохождении тепловых лучей в поглощающей и излучающей среде энергия переходит в теплоту и снова излучается. Следовательно, уравнение переноса принимает вид:

$$dI_{\lambda} = (I_{0\lambda} - I_{\lambda})\alpha_{\lambda} dl. \quad (148)$$

Получим уравнение переноса из уравнения теплового баланса. Лучистая энергия, поглощенная средой, определяется величиной $I_{\lambda}\alpha_{\lambda}dl$. Интенсивность собственного излучения тела определяется выражением $I_{0\lambda}\alpha_{\lambda}dl$. Тогда изменение интенсивности излучения:

$$-dI_{\lambda} = \alpha_{\lambda} I_{\lambda} dl - \alpha_{\lambda} I_{0\lambda} dl.$$

Это выражение дает уравнение (148). Здесь I_{λ} – интенсивность излучения в направлении l , $I_{0\lambda}$ – интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре газа. После интегрирования уравнение (148) принимает вид:

$$I_{\lambda} = I_{0\lambda} e^{-\int_0^l \alpha_{\lambda} dl} + \int_0^l \alpha_{\lambda} I_{0\lambda} e^{-\int_{l'}^l \alpha_{\lambda} dl'} dl'. \quad (149)$$

Первое слагаемое уравнения (149) определяет долю падающего излучения, которое прошло на расстояние l , второе слагаемое – это интенсивность собственного излучения, возникающего на протяжении dl и переданного в точку l из l' .

3.4 Перенос излучения в диффузионном приближении

Для оптически толстых сред предположим, что длина свободных пробегов фотонов маленькая и в каждой точке пространства интенсивность излучения соответствует ее температуре, поток тепла может быть найден из уравнения:

$$q = -\lambda_{iz} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Необходимо найти величину λ_{iz} . Если положить, что поток тепла в направлении x определяется, как $q \approx -\frac{\partial F}{\partial x}$, то для $F = \sigma \varepsilon T^4$ имеем:

$$q \approx -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma \varepsilon T^4}{\partial x} = -4\sigma \varepsilon T^3 \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (150)$$

В уравнении (150) σ – постоянная Стефана-Больцмана, ε – степень черноты. Тогда из уравнения (150) λ_{iz} может быть определен выражением:

$$\lambda_{iz} = -4\sigma \varepsilon T^3. \quad (151)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии представлены классические решения задач конвективного теплообмена при обтекании тел потоком жидкости, основы теплообмена излучением. Изложение вопросов приведено с различной степенью подробности, в зависимости от сложности приведенных решений соответствующих задач. Если читателю потребуется более подробное изложение материалов, или он столкнулся с вопросами, не вошедшими в настоящее учебное пособие, то он может воспользоваться учебной и научной литературой, список которой представлен в разделе *Список литературы*.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Основные характеристики сплошной среды (температура, давление, плотность и др.), их связь с микрофизическими параметрами.
2. Вывод уравнения переноса тепла в сплошной среде.
3. Конвективный теплоперенос. Понятия гидродинамического и теплового пограничных слоев.
4. Теплообмен при обтекании пластинки потоком жидкости. Интегральное соотношение теории пограничного слоя.
5. Теплообмен при течении жидкости в трубе.
6. Свободная конвекция. Теплообмен при свободной конвекции.
7. Теплообмен при фазовых и химических превращениях
8. Теплообмен при конденсации
9. Тепло- и массоотдача в двухкомпонентных смесях.
10. Термодиффузия. Бародиффузия. Дифференциальные уравнения тепло- массоотдачи.
11. Процесс испарения. Стефановский поток. Коэффициент массоотдачи при испарении жидкости
12. Теплообмен в разреженных газах.
13. Теплоотдача при течении газа с большой скоростью.
14. Тепло- и массообмен при химических превращениях.
15. Теплоперенос излучением: основные понятия, законы излучения.
16. Теплообмен излучением между двумя телами, произвольно расположенными в пространстве.
17. Диффузионное приближение лучистого теплопереноса в оптически толстых средах.
18. Уравнение переноса лучистой энергии в поглощающей среде. Закон Бугера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М. : Энергия, 1975. 488 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1987. 840 с.
3. Справочник по теплообменникам : в 2 т. Т.1 / пер. с англ. ; под ред. Б.С. Петухова, В.К. Шикова. М. : Энергоатомиздат. 1987.
4. Кутателадзе С.С. Анализ подобия в теплофизике. Новосибирск : Наука. 1982. 280 с.

Дополнительная литература

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М. : Наука, 1966. 692 с.
2. Лыков А.В. Тепломассообмен (справочник). М. : Энергия, 1978. 480 с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т.1, 2. М. : Наука, 1987.
4. Кутателадзе С.С., Накоряков Е.Н. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск : Наука, 1984. 302 с.
5. Блох А.Г. Основы теплообмена излучением. Л. : Госэнергоиздат, 1962. 332 с.
6. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А. Тепломассообмен : учебное пособие для вузов. 2005.
7. Арутюнов В.А., Капитанов В.А., Левицкий И.А., Шибалов С.Н. Теплофизика, теплотехника, теплообмен. Тепломассоперенос. Топливо и огнеупоры. Тепловая работа печей : лабораторный практикум – М.: МИСиС, 2007. 136 с.
8. Ерофеев В.Л., Семенов П.Д., Пряхин А.С. Теплотехника : учебник для вузов. Академкнига, 2008. 488 с.
9. Луканин В.Н., Шатров М.Г. и др. Теплотехника : учебник. М. : Высшая школа, 2009. 671 с.
10. Ляшков В.И. Теоретические основы теплотехники : учебное пособие. М. : Машиностроение, 2005. 260 с.
11. Крайнов А.Ю. Основы теплопередачи. Теплопередача через слой вещества : учебное пособие. Томск : СТТ, 2016.
12. Князева А.Г. Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий. Томск : Изд-во ТПУ, 2009. 357 с.

Учебное издание

**Алексей Юрьевич Крайнов
Ксения Михайловна Моисеева**

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС И ТЕПЛООБМЕН

Учебное пособие

Опубликовано в авторской редакции

Издательство "STT"
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15^Б-1
Тел.: (3822) 421-455
E-mail: stt@sttonline.com



Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 2,4.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Подписано к печати 30.09.2017. Формат 60х84/16
Тираж 50 экз. Заказ № 601.