Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Российский университет дружбы народов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2016)

Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

12–16 сентября 2016 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2016

Литература

1. Artalejo J. R. A Classified Bibliography of Research on Retrial Queues. Progress in 1990-1999. – 1999. –№ 7(2). – P. 187– 211.

2. Falin G. I. A Survey of Retrial Queues // Queuing Systems. – 1990. – № 7. – P. 127–167.

3. Choi B. D., Chang Y. Single Server Retrial Queues with Priority Calls // Mathematical and Computer Modeling. – 1999. – № 30(3–4). – P. 7–32.

4. Bocharov, P. P., Pavlova O. I. and. Puzikova, D. A. M| G| 1 |r retrial queueing systems with priority of primary customers // Mathematical and computer Modelling . – 1999. – № 30(3–4). – P. 89–98.

5. Rengnanathan N., Kalayanaraman R., Srinivasan B. A finite capacity single server retrial queue with two types of calls // International Journal of Information and Management Sciences. – 2002. – № 13(3). – P. 47–56.

6. Krishna Reedy G. V., Nadarajan R. A Non-preemptive Priority Multi-server Queueing System with General Bulk Service and Hertergeneous Arrivals // Computer Operations Research . – 1993. – № 4. – P. 447–453.

7. Lee Y. Discrete-time GeoX/G/1 queue with preemptive resume priority // Mathematical and Computer Modelling. – 2001. – № 34 (3–4). – P. 243–250.

DOI: 10.17223/9785751124335/20

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ С ПРОГУЛКАМИ ПРИБОРА

А. А. Назаров, С. В. Пауль

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Современные телекоммуникационные системы, математическими моделями которых могут являться однолинейные системы массового обслуживания с «прогулками» обслуживающего прибора, достаточно часто встречаются на практике. В реальных системах под «прогулкой» понимается временное прекращение обслуживания для выполнения либо других работ прибором, либо его поломкой, либо его ремонтом.

Данная работа посвящена изучению потока обслуженных заявок в такой системе. Исследованию выходящих потоков [1] в настоящее время уделяется недостаточно внимания, так как не существует общих подходов к их исследованию, хотя информация об их характеристиках представляет большой практический интерес. Поэтому достаточно актуальной является проблема разработки новых и модификация имеющихся методов исследования выходящих потоков.

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором и очередью с неограниченным числом мест для ожидания [2]. В систему поступает простейший поток заявок [3] с интенсивностью λ. Режим работы прибора состоит из последовательности интервалов. В течение первого интервала заявки потока обслуживаются на приборе случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. Если заявок в очереди нет к моменту начала этого интервала или прибор обслужил все заявки, которые на этом интервале находились в очереди, то прибор остается в этом режиме, ожидая прихода заявок. От момента окончания этого интервала прибор уходит на «прогулку». Во время прогулки (второго интервала) пришедшие в систему, заявки накапливаются в очереди и ждут, когда прибор вернется на обслуживание.

Продолжительности этих интервалов распределены по экспоненциальному закону с параметрами α_1 и α_2 соответственно. Будем рассматривать системы с дообслуживанием заявок. Целью исследования является выходящий поток заявок, обслуженных в системе за время t.

Обозначим:

$m(t)$ – число заявок, обслуженных в системе за время t;

$i(t)$ – число заявок, находящихся в системе в момент времени t;

$k(t)$ – состояние прибора: 1 – прибор в рабочем состоянии, 2 – прибор на «прогулке».

Рассмотрим марковский процесс $\{m(t), i(t), k(t)\}$ и для распределения вероятностей

$$P_k(m, i, t) = P\{m(t) = m, i(t) = i, k(t) = k\}$$

составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_1(m,i,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu+\alpha_1)P_1(m,i,t) + \\ +P_1(m,i-1,t)\lambda + P_1(m-1,i+1,t)\mu + P_2(m,i,t)\alpha_2, \\ \dfrac{\partial P_1(m,0,t)}{\partial t} = -(\lambda+\alpha_1)P_1(m,0,t) + P_1(m-1,1,t)\mu + P_2(m,0,t)\alpha_2, \\ \dfrac{\partial P_2(m,i,t)}{\partial t} = -(\lambda+\alpha_2)P_2(m,i,t) + P_2(m,i-1,t)\lambda + P_1(m,i,t)\alpha_1, \\ \dfrac{\partial P_2(m,0,t)}{\partial t} = -(\lambda+\alpha_2)P_2(m,0,t) + P_1(m,0,t)\alpha_1. \end{cases} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции [4] $H_k(u,i,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P_k(m,i,t)$, для которых систему дифференциальных уравнений Колмогорова перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial t} = -\left(\lambda+\alpha_1\right)H_1(u,0,t) + \mu e^{ju}H_1(u,1,t) + \alpha_2 H_2(u,0,t), \\ \dfrac{\partial H_1(u,i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda+\mu+\alpha_1\right)H_1(u,i,t) + \\ +\lambda H_1(u,i-1,t) + \mu e^{ju}H_1(u,i+1,t) + \alpha_2 H_2(u,i,t), \\ \dfrac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial t} = -\left(\lambda+\alpha_2\right)H_2(u,0,t) + \alpha_1 H_1(u,0,t), \\ \dfrac{\partial H_2(u,i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda+\alpha_2\right)H_2(u,i,t) + \lambda H_2(u,i-1,t) + \alpha_1 H_1(u,i,t). \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) сделаем замены исходя из того, что среднее число заявок, обслуженных системой за время t, равно λt:

$$H_k(u, i, t) = \exp\{ju\lambda t\} H_k^{(2)}(u, i, t),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_1^{(2)}(u,0,t)}{\partial t} = \\ = -\left(\lambda+\alpha_1+ju\lambda\right)H_1^{(2)}(u,0,t) + \mu e^{ju}H_1^{(2)}(u,1,t) + \alpha_2 H_1^{(2)}(u,0,t), \\ \dfrac{\partial H_1^{(2)}(u,i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda+\mu+\alpha_1+ju\lambda\right)H_1^{(2)}(u,i,t) + \\ +\lambda H_1^{(2)}(u,i-1,t) + \mu e^{ju}H_1^{(2)}(u,i+1,t) + \alpha_2 H_2^{(2)}(u,i,t), \\ \dfrac{\partial H_2^{(2)}(u,0,t)}{\partial t} = -\left(\lambda+\alpha_2+ju\lambda\right)H_2^{(2)}(u,0,t) + \alpha_1 H_1^{(2)}(u,0,t). \\ \dfrac{\partial H_2^{(2)}(u,i,t)}{\partial t} = \\ = -\left(\lambda+\alpha_2+ju\lambda\right)H_2^{(2)}(u,i,t) + \lambda H_2^{(2)}(u,i-1,t) + \alpha_1 H_1^{(2)}(u,i,t). \end{cases} \quad (3)$$

Систему (3) будем решать методом асимптотического анализа в условиях растущего времени наблюдения за входящим потоком [5]. Введем параметр $N \to \infty$, обозначим

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N},\ \tau = \varepsilon^2 t,\ u = \varepsilon w,\ H_k^{(2)}(u, t) = F_k(w, \tau, \varepsilon), \quad (4)$$

получим систему

$$
\begin{cases}
\varepsilon^2 \dfrac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \\
= -\left(\lambda + \alpha_1 + j\varepsilon w\lambda\right) F_1(w,0,\tau,\varepsilon) + \mu e^{j\varepsilon w} F_1(w,1,\tau,\varepsilon) + \alpha_2 F_2(w,0,\tau,\varepsilon), \\
\varepsilon^2 \dfrac{\partial F_1(w,i,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = -\left(\lambda + \mu + \alpha_1 + j\varepsilon w\lambda\right) F_1(w,i,\tau,\varepsilon) + \\
+\lambda F_1(w,i-1,\tau,\varepsilon) + \mu e^{j\varepsilon w} F_1(w,i+1,\tau,\varepsilon) + \alpha_2 F_2(w,i,\tau,\varepsilon), \\
\dfrac{\partial F_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = -\left(\lambda + \alpha_2 + j\varepsilon w\lambda\right) F_2(w,0,\tau,\varepsilon) + \alpha_1 F_1(w,0,\tau,\varepsilon), \\
\dfrac{\partial F_2(w,i,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \\
= -\left(\lambda + \alpha_2 + j\varepsilon w\lambda\right) F_2(w,i,\tau,\varepsilon) + \lambda F_2(w,i-1,\tau,\varepsilon) + \alpha_1 F_1(w,i,\tau,\varepsilon).
\end{cases} \tag{5}
$$

Решение данной системы будем искать в виде

$$F_k(w,i,\tau,\varepsilon) = \Phi(w,\tau) R_k(i) + O(\varepsilon).$$

Устремим $\varepsilon \to 0$:

$$
\begin{cases}
-(\lambda + \alpha_1) R_1(0) + \mu R_1(1) + \alpha_2 R_2(0) = 0, \\
-(\lambda + \mu + \alpha_1) R_1(i) + \lambda R_1(i-1) + \mu R_1(i+1) + \alpha_2 R_2(i) = 0, \\
-(\lambda + \alpha_2) R_2(0) + \alpha_1 R_1(0) = 0, \\
-(\lambda + \alpha_2) R_2(i) + \lambda R_2(i-1) + \alpha_1 R_1(i) = 0.
\end{cases}
$$

Введем производящие функции

$$F_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i R_1(i), \quad F_2(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i R_2(i).$$

Получим

$$
\begin{cases}
-(\lambda + \mu + \alpha_1) z F_1(z) + \mu z R_1(0) + \lambda z^2 F_1(z) + \\
+ \alpha_2 z F_2(z) + \mu\left[F_1(z) - R_1(0)\right] = 0, \\
-(\lambda + \alpha_2) z F_2(z) + \lambda z^2 F_2(z) + \alpha_1 z F_1(z) = 0.
\end{cases} \tag{6}
$$

Решение данной системы имеет вид

$$
\begin{cases}
F_1(z) = \dfrac{(\alpha_2 - \lambda(z-1))}{\lambda(\lambda z - \mu)(z-1) - (\lambda z - \mu)\alpha_2 - \alpha_1 \lambda z} \cdot \dfrac{\mu\alpha_2 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_2 + \alpha_1)}, \\
F_2(z) = \dfrac{\alpha_1}{\lambda(\lambda z - \mu)(z-1) - (\lambda z - \mu)\alpha_2 - \alpha_1 \lambda z} \cdot \dfrac{\mu\alpha_2 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_2 + \alpha_1)}, \\
R_1(0) = \dfrac{\mu\alpha_2 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)}{\mu(\alpha_2 + \alpha_1)}.
\end{cases}
$$

С другой стороны, просуммируем уравнения системы (6), получим равенство

$$F_1(z)[\lambda z-\mu]+F_2(z)\lambda z+\mu R_1(0)=0\,. \qquad (7)$$

В систему (5) подставим следующее разложение

$$F_k(w,i,\tau,\varepsilon)=\Phi(w,\tau)\bigl(R_k(i)+j\varepsilon wf_k(i)\bigr)+O(\varepsilon^2)\,, \qquad (8)$$

имеем

$$\begin{cases}O(\varepsilon^2)=-(\lambda+\alpha_1+j\varepsilon w\lambda)R_1(0)-(\lambda+\alpha_1)j\varepsilon wf_1(0)+\mu(1+j\varepsilon w)R_1(1)+\\+\mu j\varepsilon wf_1(1)+\alpha_2\bigl(R_2(0)+j\varepsilon wf_2(0)\bigr),\\O(\varepsilon^2)=-(\lambda+\mu+\alpha_1+j\varepsilon w\lambda)R_1(i)-(\lambda+\mu+\alpha_1)j\varepsilon wf_1(i)+\mu(1+j\varepsilon w)R_1(i+1)+\\+\mu j\varepsilon wf_1(i+1)+\alpha_2\bigl(R_2(i)+j\varepsilon wf_2(i)\bigr)+\lambda\bigl(R_1(i-1)+j\varepsilon wf_1(i-1)\bigr),\\O(\varepsilon^2)=-(\lambda+\alpha_2+j\varepsilon w\lambda)R_2(0)-(\lambda+\alpha_1)j\varepsilon wf_2(0)+\alpha_1\bigl(R_1(0)+j\varepsilon wf_1(0)\bigr),\\O(\varepsilon^2)=-(\lambda+\alpha_2+j\varepsilon w\lambda)R_2(i)-(\lambda+\alpha_1)j\varepsilon wf_2(i)+\\+\alpha_1\bigl(R_1(i)+j\varepsilon wf_1(i)\bigr)+\lambda\bigl(R_2(i-1)+j\varepsilon wf_2(i-1)\bigr).\end{cases}$$

Устремим $\varepsilon\to 0$:

$$\begin{cases}-\lambda R_1(0)+\mu R_1(1)-(\lambda+\alpha_1)f_1(0)+\mu f_1(1)+\alpha_2 f_2(0)=0,\\-\lambda R_1(i)+\mu R_1(i+1)+\lambda f_1(i-1)-(\lambda+\mu+\alpha_1)f_1(i)+\\+\mu f_1(i+1)+\alpha_2 f_2(i)=0,\\-\lambda R_2(0)-(\lambda+\alpha_2)f_2(0)+\alpha_1 f_1(0)=0,\\-\lambda R_2(i)+\lambda f_2(i-1)-(\lambda+\alpha_2)f_2(i)+\alpha_1 f_1(i)=0.\end{cases} \qquad (9)$$

Просуммируем уравнения системы, полученное уравнение просуммируем по i:

$$\mu\bigl(R_1-R_1(0)\bigr)=\lambda\,. \qquad (10)$$

В системе (9) обозначим

$$F_k(z)=\sum_{i=0}^{\infty}z^iR_k(i),\qquad G_k(z)=\sum_{i=0}^{\infty}z^if_k(i),$$

$$\begin{cases}-\lambda zF_1(z)+\mu[F_1(z)-R_1(0)]+\\+\lambda z^2G_1(z)-(\lambda+\mu+\alpha_1)zG_1(z)+\mu zf_1(0)+\mu\bigl(G_1(z)-f_1(0)\bigr)+\alpha_2 zG_2(z)=0,\\-\lambda zF_2(z)+\lambda z^2G_2(z)-(\lambda+\alpha_2)zG_2(z)+\alpha_1 zG_1(z)=0,\end{cases}$$

Просуммируем уравнения последней системы, учитывая (7), получим

$$[\lambda z-\mu]G_1(z)+\lambda zG_2(z)+\mu f_1(0)=0\,.$$

Учитывая, что $G_k(1)=1, k=1,2$, имеем

$$[\lambda-\mu]f_1+\lambda f_2+\mu f_1(0)=\mu\bigl(f_1(0)-f_1\bigr)+\lambda\bigl(f_2+f_1\bigr)=0$$

или

$$\mu\bigl(f_1-f_1(0)\bigr)-\lambda\bigl(f_2+f_1\bigr)=0\,. \qquad (11)$$

В систему (5) подставим разложение (8), экспоненту разложим в ряд, сложим уравнения системы, полученное равенство просуммируем по i, разделим на ε^2 и устремим $\varepsilon \to 0$, учитывая равенство (11), имеем:

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = \Phi(w,\tau)\frac{(jw)^2}{2}\left[\mu\left(R_1 - R_1(0)\right) + 2\mu\left(f_1 - f_1(0)\right) - 2\lambda\left(f_1 + f_2\right)\right],$$

$$\Phi(w,\tau) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\left[\mu\left(R_1 - R_1(0)\right) + 2\mu\left(f_1 - f_1(0)\right) - 2\lambda\left(f_1 + f_2\right)\right]\tau\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\left[\mu\left(R_1 - R_1(0)\right)\right]\tau\right\} = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\lambda\tau\right\}.$$

Сделаем обратные замены:

$$h(u) = H(u,t) = F(w,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon) = \exp\left\{ju\lambda t + \frac{(jw)^2}{2}\lambda\tau\right\} + O(\varepsilon) \approx$$

$$\approx \exp\left\{ju\lambda t + \frac{(ju)^2}{2}\lambda t\right\}.$$

Получили, что распределение числа заявок, наступивших в выходящем потоке за время t в системе с «прогулками» прибора является асимптотически нормальным [6]. Математическое ожидание и дисперсия полученного распределения совпадают и равны λt. Такие потоки будем называть квазипуассоновскими потоками.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 1.511.2014/К.

Литература

1. Лапатин И. Л. Исследование математических моделей выходящих потоков систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов: дис. …канд. физ.-мат. наук. – Томск: ТГУ, 2012.
2. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
3. Жидкова Л. А., Моисеева С. П. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – №4. – С. 49–54.
4. Моисеев А. Н. Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP|GI|∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3(32). – С. 56–65.
5. Лапатин И. Л. Исследование математических моделей выходящих потоков систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов: автореф. дис. … канд. физ.-мат.наук. – Томск: ТГУ, 2012.
6. Назаров А. А., Лапатин И. Л. Асимптотические пуассоновские MAP-потоки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №4. – С. 72–78.