МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–29 апреля 2016 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

Применение системы Mathematica в математическом анализе

Пчёлкина Д. Е., Зюзьков В. М.

ТГУ, Томск
e-mail: pchyolkina1993@mail.ru

Аннотация

Mathematica — система компьютерной алгебры, широко используемая в научных, инженерных, математических и компьютерных областях. Изначально система была разработана Стивеном Вольфрамом, впоследствии — компанией Wolfram Research.

Ключевые слова: система Mathematica, интегральное исчисление, дифференциальное исчисление, математический анализ.

Цель работы – показать, как с помощью системы Mathematica [1] можно решать типичные задачи математического анализа. К таким задачам можно отнести [2]:

- нахождение пределов и предельных множеств;
- полные и частные производные различных порядков, в общем случае, от функций нескольких переменных;
- вычисление первообразных;
- численное и символьное интегрирование, в том числе нахождение кратных интегралов и вычисление с их помощью площадей и объемов;
- изучение сумм Римана;
- нахождение критических точек и локальных экстремумов для функции нескольких переменных.

Рассмотрим примеры применения системы Mathematica для этих задач.

Mathematica имеет встроеную процедуру для вычисления предела функции.

Например, мы хотим вычислить $\lim\left(\frac{x^5-32}{x^3-8}\right)$, $x \to 2$. Поскольку как числитель, так и знаменатель стремятся к нулю при x, стремящемся к двум, предел не является очевидным. Но система Mathematica вычисляет этот предел достаточно просто.

$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-8} = \frac{20}{3}$

Если нам необходимо вычислить производную функции, то для этого существует несколько возможностей:

Если $f[x]$ представляет собой функцию, то $f'[x]$- ее производная.

$f(\text{x\_}) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1;$

$f'(x)$

$5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$D[f[x], x]$ возвращает производную f по x.

$D\left[x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x\right]$

$5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Так же систему Mathematica можно использовать, чтобы иллюстрировать некоторые основные теоремы с графической точки зрения.

Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на открытом интервале (a, b). Тогда существует число , между a и b, что $f(b)\breve{\ } f(a) = f'(c)(b\breve{\ } a)$ [2].

Если мы запишем заключение теоремы в виде $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c)$, то мы увидим, что теорема о среднем значении гарантирует существование числа между и b, такого, что касательная в точке $(c, f(c))$ параллельна сегменту линии, соединяющей конечные точки кривой.

Пример

Найдите значение c, гарантированное теоремой о среднем, для функции $f(x) = \sqrt{x} + \sin 2\pi x$ на интервале $[0, 2]$.

Решение:

$f[\text{x\_}] := \sqrt{x} + \text{Sin}[2\pi x]; a := 0; b := 2; m := \frac{f[b] - f[a]}{(b-a)};$

$\text{Plot}[f'[x] - m, \{x, 0, 2\}, \text{PlotRange} \to \{-8, 8\}]$

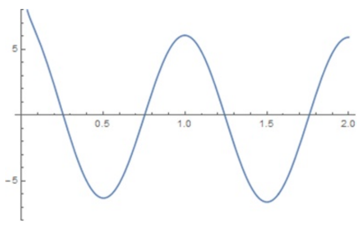

Рис. 1. График функции $f(x) = \sqrt{x} + \sin 2\pi x$

$\text{FindRoot}[f'[c] == m, \{c, \{.3,\ .7,\ 1.3,\ 1.7\}\}]$

$\{c \to \{0.83,\ 0.83,\ 0.839736273,\ 3.9080409569874823\}\}$

$\text{c1} := .257071; \text{c2} := .753319; \text{c3} := 1.24344; \text{c4} := 1.75836;$

$l1[x\_] := f[c1]+f'[c1](x-c1)/;c1-.25 \leqslant x \leqslant c1+.25$
$l2[x\_] := f[c2]+f'[c2](x-c2)/;c2-.25 \leqslant x \leqslant c2+.25$
$l3[x\_] := f[c3]+f'[c3](x-c3)/;c3-.25 \leqslant x \leqslant c3+.25$
$l4[x\_] := f[c4]+f'[c4](x-c4)/;c4-.25 \leqslant x \leqslant c4+.25$
$l[x\_] := f(a)+m(x-a)$
$\mathrm{Plot}[\{f[x], l[x], l1[x], l2[x], l3[x], l4[x]\}, \{x, a, b\}]$

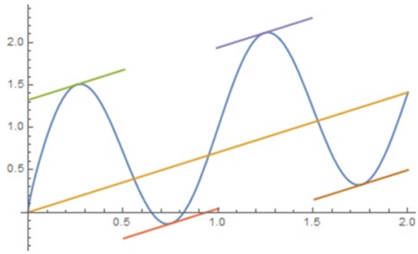

Рис. 2. Касательные линии параллельны секущей, соединяющей конечные точки кривой

Функция F называется первообразной для f, если $F'(x) = f(x)$. В Mathematica это можно представить в следующем виде: $Integrate[f[x], x]$ или с помощью символа $\int$ dx, , который можно найти в палитре.

Например
$\int x^2 \exp(x) \sin(x)\, dx$
$\frac{1}{2} e^x \left(\left(x^2-1\right)\sin(x) - (x-1)^2\cos(x)\right)$
Определенный интеграл можно вычислять двумя способами:
$\mathrm{Integrate}[f[x], x, a, b]$ вычисляет точное значение интеграла.

$\mathrm{NIntegrate}[f[x], x, a, b]$ вычисляет приближенное значение интеграла.

Пример

С помощью интегрального исчисления мы можем вычислить площадь, ограниченную кривыми. Рассмотрим две кривые $f(x) = 1 - x^2, g(x) = x^4 - 3x^2$.

Решение
$f(\mathrm{x}\_){:=}1 - x^2;$
$g(\mathrm{x}\_){:=}x^4 - 3x^2;$
$\mathrm{Plot}[\{f(x), g(x)\}, \{x, -2, 2\}]$
Во-первых, мы должны найти точки пересечения двух кривых.
$\mathrm{intersectionpoints} = \mathrm{Solve}[f(x) = g(x)]$
$\left\{x \to -i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right\}, \left\{x \to i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right\},$

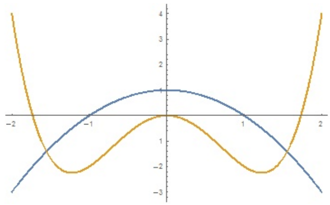

Рис. 3. Область, площадь которой необходимо найти

$\left\{x \to -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}, \left\{x \to \sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}\}$
$\{a, b, c, d\} = x/.\,\text{intersectionpoints}$
$\left\{-i\sqrt{\sqrt{2}-1}, i\sqrt{\sqrt{2}-1}, -\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$
$\text{Simplify}\left[\int_c^d (f(x) - g(x))\,dx\right]$
$\frac{8}{15}\sqrt{1+\sqrt{2}}\,(4+\sqrt{2})$
$N[\%]$
4.48665

Рассмотрим еще один пример применения интегрального исчисления.

Кривая показанная на рисунке - парабола, $y = 9 - x^2$. Найти h так, что заштрихованная площадь составляет две-трети общей площади, ограниченной кривой и осью x.

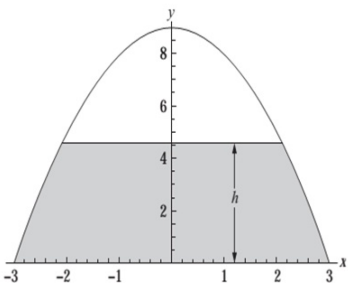

Рис. 4. Парабола $y = 9 - x^2$

Решение:
$\text{Solve}\left[y = 9 - x^2, x\right]$
$\left\{\left\{x \to -\sqrt{9-y}\right\}, \left\{x \to \sqrt{9-y}\right\}\right\}$
$x(\text{y\_}) := \sqrt{9-y};$

$A(\mathrm{h\_}){:=}2\int_0^h x(y)\,dy;$
$\mathrm{totalarea} = A(9)$
36
$\mathrm{Plot}[A(h), \{h, 0, 9\}, \mathrm{AxesLabel} \to \{\mathrm{h}, \mathrm{A(h)}\}]$

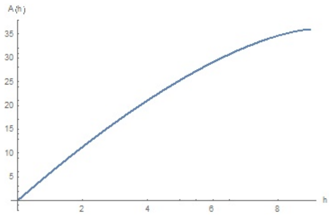

Рис. 5. График измениния значения h

$\mathrm{FindRoot}\left[A(h) = \frac{2\mathrm{totalarea}}{3}, \{h, 5\}\right]$
$\{h \to 4.67325\}$

Рассмотрим пример применения частных производных в Mathematica.

Касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $(x0, y0, z0)$ определяется по формуле:

$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$

Пример

Определить уравнение плоскости к поверхности $z = 10-x^2-2y^2$ в точке $x = 1, y = 2$.

Решение:

$f(\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}){:=} - x^2 - 2y^2 + 10;$
$z = \mathrm{Expand}\left[(x-1)f^{(1,0)}(1,2) + (y-2)f^{(0,1)}(1,2) + f(1,2)\right]$
$-2x - 8y + 19$
$\mathrm{g1}{:=}\mathrm{Plot3D}[f(x,y), \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}];$
$\mathrm{g2}{:=}\mathrm{Plot3D}[z, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}]$
$\mathrm{Show}[\mathrm{g1}, \mathrm{g2}, \mathrm{PlotRange} \to \mathrm{All}, \mathrm{ViewPoint} \to \{2.33, -2.223, 1.04\}]$

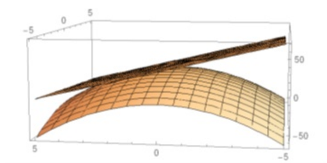

Рис. 6. Касательная плоскость к поверхности

Система Mathematica имеет возможность находить максимальное и минимальное значение функции.

Пример

Найти все относительные экстремумы функции $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Решение:

$f(\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}) := x^2 - y^2;$

$\mathrm{Solve}\left[\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right\}, \{x, y\}\right]$

$\{\{x \to 0, y \to 0\}\}$

$d(\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y}\right)^2;$

$d(0,0)$

-4

$\mathrm{Plot3D}[f(x,y), \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}, \mathrm{BoxRatios} \to \{1,1,1\}]$

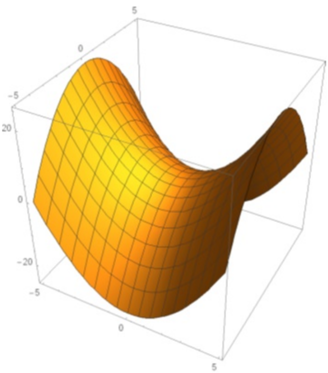

Рис. 7. Седловая точка

Система Mathematica [3] позволяет типичные задачи решать достаточно легко, давая возможность пользователю больше внимания уделить творчеству. С системой Mathematica работать просто, но наличие математического образования не помешает.

Подготовлено учебно-методическое пособие, которое описывает наиболее эффективные способы решения выше перечисленных задач. Это пособие полезно для студентов, изучающих математический анализ.

Литература

1. Wolfram Mathematica [Электронный ресурс]. – URL: http://www.wolfram.com/mathematica (дата обращения 23.03.2016).

2. Eugene Don. Shaum's Outline of Mathematica, 2ed. McGram Hill Professional, 2009. 384 p.

3. Зюзьков В.М. Начала компьютерной алгебры. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2015. 127 с.