Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Российский университет дружбы народов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2016)

Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

12–16 сентября 2016 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2016

величины, при этом объем заказа является переменной величиной и время его выполнения зависит от текущего уровня запасов системы. Показано, что известная политика двух уровней является частным случаем предложенной политики. Разработаны точный и приближенный методы для определения совместного распределения уровня запасов системы и длины очереди расходующих заявок. Получены также явные формулы для приближенного расчета характеристик системы.

Литература

1. Рыжиков Ю. И. Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.

2. Рубальский Г. Б. Вероятностные и вычислительные методы оптимального управления запасами. – М.: Знание, 1987. – 115 с.

3. Schwarz M., Daduna H. Queuing systems with inventory management with random lead times and with backordering // Mathematical Methods of Operations Research. – 2006. – Vol. 64, is. 3. – P. 383–414.

4. Меликов А. З., Пономаренко Л. А., Багирова С. А. Анализ систем обслуживания-запасания с нетерпеливыми расходующими заявками // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 1. – С. 96–110.

5. Stewart W. J. Introduction to the numerical solution of Markov chains. – Princeton: University Press, 1994. – 568 p.

6. Ponomarenko L., Kim C. S., Melikov A. Performance analysis and optimization of multi-traffic on communication networks. – Springer, 2010.

DOI: 10.17223/9785751124335/8

ЗНАКОВАЯ ПРОЦЕДУРА КУМУЛЯТИВНЫХ СУММ ОБНАРУЖЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ЦЕПИ ММРР-ПРОЦЕССА

Ю. Буркатовская, Т. Кабанова, О. Токарева

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Национальный исследовательский Томский государственный университет

1. Введение

MMPP (Markov modulated Poisson process) является потоком с переменной интенсивностью, которая меняется в случайные моменты времени в зависимости от состояния управляющей цепи. В качестве такового он используется во многих практических приложениях, таких как веб-серверы, мультмедиа-потоки, колл-центры, активность звонков сотовой связи, спрос на продукцию и т.д. Существует большое количество сложных моделей потоков, основанных на MMPP. Анализу этих процессов посвящен целый ряд работ. Оценка параметров процесса требуется для разработки оптимальной дисциплины обслуживания.

В [1] мы разработали подход к оценке параметров MMPP-процесса, использующий методы последовательного анализа. Сначала моменты изменения состояния управляющей цепи обнаруживались с помощью алгоритма кумулятивных сумм (CUSUM). Далее параметры интенсивности оценивались в предположении, что интенсивность постоянна между обнаруженными точками изменения. Качество предлагаемых алгоритмов изучалось с помощью моделирования. В данной работе предлагается модификация алгоритма, использующая специальные знаковые статистики. Это позволяет теоретически исследовать свойства алгоритма и сформулировать рекомендации по выбору параметров.

2. Постановка задачи

Рассматривается MMPP-процесс, то есть поток событий, управляемый цепью Маркова с непрерывным временем. Цепь имеет два состояния. Время пребывания цепи в i-м состоянии распределено экспоненциально с параметрами α_i, $i=1,2$.

Поток событий является экспоненциальным с интенсивностями λ_1 или λ_2 соответственно состояниям цепи. Предполагается, что интенсивность переключений между состояниями цепи существенно меньше, чем интенсивность входящего потока, то есть $\alpha_i << \lambda_i$. В этом случае до момента изменения состояния цепи в потоке, как правило, наступает несколько событий. Параметры процесса λ_1, λ_2 и моменты переклюения состояний цепи неизвестны. Наблюдается последовательность моментов наступления событий. Задача заключается в обнаружении моментов изменения состояний цепи и оценке параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2.

3. Знаковый алгоритм кумулятивных сумм

Рассмотрим процесс $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$, где $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ – длина i-го интервала между моментами наступления событий в наблюдаемом процессе. Если управляющая цепь находится в i-м состоянии, то средняя длина интервала между наступлениями событий равна $1/\lambda_i$. Таким образом, на первой стадии нашей процедуры мы пытаемся обнаружить моменты изменения среднего значения процесса $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$, используя знаковый алгоритм кумулятивных сумм.

Пусть параметры λ_1, λ_2 удовлетворяют условиям

$$0 < \lambda_2 < \lambda_1; \quad \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} > \Delta, \tag{1}$$

где Δ – некоторый неизвестный параметр. Выберем целочисленный параметр k, описывающий глубину памяти. Если на интервале $[t_{i-k-1}, t_i]$ нет изменения состояния управляющей цепи, тогда величины τ_i и τ_{i-k} имеют одинаковое экспоненциальное распредедение со средним $1/\lambda_1$ или $1/\lambda_2$. Если состояние цепи изменяется на интервале $[t_{i-k-1}, t_i]$, тогда математические ожидания величин τ_i и τ_{i-k} различны.

Поскольку начальное состояние цепи неизвестно, мы будем рассматривать две процедуры кумулятивных сумм одновременно. Первая направлена на обнаружение увеличения среднего, то есть на уменьшение интенсивности входящего потока, а вторая – на уменьешние среднего, то есть на увеличение интенсивности. Для первой процедуры предлагается последовательность статистик

$$z_i^{(1)} = n\left(sign\left(\tau_i - \tau_{i-k}\right) - \delta\right), \quad i \ge k. \qquad (2)$$

Для второй процедуры

$$z_i^{(2)} = n\left(sign\left(\tau_{i-k} - \tau_i\right) - \delta\right), \quad i \ge k. \qquad (3)$$

Статистики вычисляются в момент времени t_i, параметр $\delta = m/n$.

Рассмотрим гипотезы о состоянии управляющей цепи:

– $H_l(t_{i-k-1}, t_i)$ – интенсивность входящего потока на интервале $[t_{i-k-1}, t_i]$ постоянна и равна λ_l, $l = 1,2$;

– $H_{l,m}(t_{i-k-1}, t_i)$ – интенсивность входящего потка на интервале $[t_{i-k}, t_{i-1}]$ изменяется с λ_l на λ_m, $l = 1,2$, $m = 1,2$, $l \ne m$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} p &= P\left\{\tau_i \ge \tau_{i-k} \mid H_{1,2}\left(t_{i-k}, t_{i-1}\right)\right\} = P\left\{\tau_{i-k} \ge \tau_i \mid H_{2,1}\left(t_{i-k}, t_{i-1}\right)\right\}; \\ q &= P\left\{\tau_i < \tau_{i-k} \mid H_{1,2}\left(t_{i-k}, t_{i-1}\right)\right\} = P\left\{\tau_{i-k} < \tau_i \mid H_{2,1}\left(t_{i-k}, t_{i-1}\right)\right\}. \end{aligned} \qquad (4)$$

В соответствии с моделью процесса $p = \lambda_1 / \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$, $q = \lambda_2 / \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$. Процедура основана на следующем свойстве решающих стстистик: если параметр δ удовлетворяет условию $\delta < 2p - 1$, то статистики $z_i^{(j)}$ меняют среднее значение с отрицательного на положительное после соответствующей разладки. Определим положительные пороги процедур h_1 и h_2 и построим кумулятивные суммы $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$, вычисляемые в моменты t_i.

$$S_0^{(l)} = m + n; \quad l = 1,2$$
$$S_i^{(l)} = \max\{m + n, S_{i-1}^{(l)} + z_i^{(l)}\}, \quad i > k;$$
$$S_i^{(l)} = m + n, \quad if \quad S_i^{(l)} \ge h_l.$$

Решение о наличии разладки принимается, когда сумма достигает соответствующего ей порога, после чего процедура повторяется.

4. Характеристики процедуры

В последовательной процедуре обнаружения разладки рассматривается два вида ошибок: ложные тревоги и запаздывание в обнаружении. Ложная тревога возникает, когда одна из кумулятивных сумм достигает порога в случае постоянной интенсивности входящего потока. Запаздывание в обнаружении возникает, когда изменение параметра произошло, кумулятивная сумма еще не достигла порога.

В случае последовательности моментов изменения решение о разладке должно быть принято до момента следующего изменения. Следовательно, наиболее важными характеристиками в процедуре обнаружения множественных разладок являются те, которые связаны с запаздыванием в обнаружении.

Не нарушая общности, предположим, что рассматривается первая процедура, и параметр изменяется в момент θ_1 с λ_1 на λ_2, а затем в момент θ_2 с λ_2 на λ_1. Введем обозначения (выберем параметры так, что $M>1$, $h_l = c_l M + N$ c_l – целое)

$$n+m=N\,,\ n-m=M\ .$$

Для среднего времени запазывания была составлена и решена система разностных уравнений, аналогичная [2]. Решение имеет вид

$$T_{delay}^{(1)} = T^{(1)}(N),$$

$$T^{(1)}(j) = \frac{j}{qN - pM} + A_1\mu_1^j + \ldots + A_{N+M}\mu_{N+M}^j,$$

где $\mu_1,\ldots,\mu_{N+M}$ – корни характеристического полинома

$$P_1(\mu) = p\mu^{N+M} - \mu^N + q\,.$$

В табл.1 представлены значения среднего времени запаздывания, соответствующие параметрам λ_1, λ_2 и $h^{(1)}$. Здесь $\delta = 1/5$, $M=4$, $N=6$.

Таблица 1. Среднее время запаздывания

λ_1	λ_2	p	q	$h^{(1)}$	$T^{(1)}$	$h^{(1)}$	$T^{(1)}$	$h^{(1)}$	$T^{(1)}$	$h^{(1)}$	$T^{(1)}$
2	0,4	0,83	0,17	42	12,12	62	19,01	77	24,12	97	30,90
2	0,6	0,77	0,23	37	13,27	52	20,24	72	29,23	87	35,94
2	0,8	0,71	0,29	32	15,85	47	26,04	67	39,34	82	49,23
2	1	0,67	0,33	32	19,07	47	33,04	62	47,23	77	61,57

В работе также была получена и решена система разностных уравнений для нахождения среднего времени между ложными тревогами.

$$T_{alarm}^{(1)} = R^{(1)}(N),$$

$$R^{(1)}(j) = \frac{2j}{N-M} + C_1\mu_1^j + \ldots + C_{N+M}\mu_{N+M}^j,$$

где $\mu_1,\ldots,\mu_{N+M}$ – корни характеристического полинома

$$P_1(\mu) = \mu^{N+M} - 2\mu^N + 1\,.$$

В табл. 2 представлено среднее время между ложными тревогами.

Таблица 2. Среднее время между ложными тревогами

$h^{(1)}$	$R^{(1)}$	$h^{(1)}$	$R^{(1)}$
20	12,31	50	195,17
30	37,99	60	385,13
40	91,86	70	727,26

Далее рассмотрим проблему выбора глубины памяти. Введем событие

$$B_j^{(1)} = \left\{ \sum_{a=1}^{j} \tau_{i+a} + \left(t_i - \theta_1\right) < \theta_2 - \theta_1 \right\},$$

которое означает, что следующее изменение состояния управляющей цепи произойдет после момента t_{i+j}. Оценка вероятности этого события имеет вид

$$P\left(B_j^{(1)}\right) = \frac{\lambda_2^{j+1}}{\left(\lambda_2 + \alpha_2\right)^{j+1}},\ P\left(B_j^{(2)}\right) = \frac{\lambda_1^{j+1}}{\left(\lambda_1 + \alpha_1\right)^{j+1}}.$$

С одной стороны, разладка должна быть обнаружена не более чем за k шагов. С другой стороны, следующий момент изменения должен наступить позже, чем предыдущий будет обнаружен. Таким образом, вероятность события B_k должна превосходить заданную вероятность Q, близкую к единице. Это определяет верхнюю границу для значения параметра k

$$\frac{\lambda_l^{k+1}}{\left(\lambda_l + \alpha_l\right)^{k+1}} \geq Q,\ l = 1,2. \qquad (5)$$

Предположим, что $\lambda_l \geq r\alpha_l$, где $r >> 1$. В табл. 3 представлены максимальные значения параметра k, удовлетворяющие условию (5).

Таблица 3. Максимальные значения параметра k

$Q \setminus r$	40	60	80	100	120	160	200
0,7	13	22	27	34	41	56	70
0,75	11	16	22	27	33	45	56
0,8		12	16	21	24	34	43
0,85			12	15	18	25	31
0,9					11	16	20

Далее введем события A_j, означающее, что разладка не будет обнаружена за j шагов, и C_j, означающее, что за j шагов не произойдет ни одной ложной тревоги. Оценки вероятностей этих событий имеют вид

$$P\left(A_j\right) \leq \sum_{a=0}^{c-1} C_j^a p^a q^{j-a}, \quad P\left(C_j\right) = \frac{1}{2^j} \sum_{a=0}^{c-1} C_j^a, \qquad (6)$$

где $c = \left(h_l - N\right)/M$.

Таблица 4 дает некоторые результаты расчетов. Здесь $m = 1, n = 6$, вероятности $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_0$ вычисляются по формулам (6).

Вероятность ошибки зависит от вероятности p: увеличение вероятности p приводит к уменьшению вероятности пропуска момента изменения.

Таблица 4. Вероятности ошибок

λ_1	λ_2	p	q	j	c	h	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_0$	j	c	h	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_0$
2	0,4	0,83	0,17	10	7	42	0,07	0,172	15	11	62	0,090	0,059
2	0,6	0,77	0,23	10	6	37	0,058	0,377	15	9	52	0,038	0,304
2	0,8	0,71	0,29	10	5	32	0,038	0,623	15	8	47	0,038	0,5
2	1	0,67	0,33	10	5	32	0,077	0,623	15	8	47	0,038	0,5
2	0,4	0,83	0,17	20	14	77	0,037	0,058	25	18	97	0,044	0,022
2	0,6	0,77	0,23	20	13	72	0,069	0,132	25	16	87	0,044	0,115
2	0,8	0,71	0,29	20	12	67	0,087	0,252	25	15	82	0,072	0,212
2	1	0,67	0,33	20	11	62	0,092	0,412	25	14	77	0,092	0,345

Литература

1. Burkatovskaya Yu., Kabanova T., Vorobeychikov S. CUSUM Algorithms for Parameter Estimation in Queueing Systems with Jump Intensity of the Arrival Process. // Communications in Computer and Information Science (CCIS) “Queueing Theory and Applications”. – 2015. – Vol. 564. – P. 275–288.

2. Воробейчиков С., Кабанова Т. Обнаружение момента изменения в последовательности независимых случайных величин // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47, № 10. – Р. 1198–1203.

DOI: 10.17223/9785751124335/9

ОТКРЫТАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ

В. М. Вишневский, А. А. Ларионов

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Введение

Создание опорных беспроводных сетей – актуальная задача в рамках интеллектуальных транспортных систем, систем безопасности на автодорогах, создания телекоммуникационной инфраструктуры вдоль железных дорог и путепроводов, подключения малых пико- и фемто-станций сотовых сетей. Для оценки производительности и оптимального проектирования сетей этого класса необходимы математические модели, адекватно описывающие функционирование беспроводных сетей. В настоящей работе в качестве такой модели рассматривается модель открытой однородной сети массового обслуживания с коррелированными входными потоками (MAP-потоками), PH-распределением времени обслуживания потоков в узлах сети и матрицей маршрутизации $\|t_{ij}\|$, где t_{ij} – вероятность поступления пакета в j-й узел (станцию) после окончания обслуживания в i-м узле.

Описывается пространство состояний и интенсивности переходов