МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

V Международной молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 19–20 мая 2017 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПОСТУПЛЕНИЯ РЕСУРСОВ И ПОСТОЯННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ МОМЕНТОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Н.М. Ревенко
Томский государственный университет
rammixtsu@gmail.com

Введение

Управление запасами отвечает на простой вопрос: "Что, когда и сколько надо закупить, чтобы хватило и не осталось лишнего?" Вообще, управление запасами предприятия и их оптимизация – очень интересная тема, так как позволяет заниматься ей как узкоспециально – не входя в противоречие с другими бизнес-процессами и оптимизируя только запасы, так и очень широко – смотря через призму управления товарными запасами на предприятии на работу всего предприятия [1–4]. Ввиду бурного развития логистики в последнее время, многие специалисты говорят о проблеме эффективного управления запасами, где она рассматривается с точки зрения минимизации совокупных издержек. Таким образом, оптимизация товарных запасов рассматривается в первую очередь, как снижение затрат на их создание и обслуживание. Это, действительно, очень важный момент мероприятий по оптимизации запасов на предприятии, но очевидно, что управление товарно-материальными запасами, кроме логистического, имеют, как минимум, ещё финансовый и маркетинговый аспект. Соответственно, эффективность управления запасами не может оцениваться только издержками на их создание и обслуживание, а стратегия управления запасами не может строиться только на снижении этих издержек, и оптимальное управление запасами подразумевает такую политику управления запасами, которая гармонизирует все аспекты, связанные с этой задачей, а не только оптимизацию запасов на складе. Это также применимо для товаров типа газов, воды в хранилищах, например, для поддержания необходимого запаса объема товара, и в случае его избытка – соответствующее изменение политики накопления запасов для возврата уровня к нормальному значению.

1. Постановка задачи

В качестве математической модели рассмотрим работу инкубатора (рис. 1), на вход которого непрерывно поступают некоторые ресурсы с кусочно-постоянной скоростью $\nu(s)$, а моменты прихода покупателей образуют пуассоновский поток с постоянной интенсивностью λ. Обозначим через $s(t)$ объем накопленных ресурсов в системе к моменту времени t. Будем считать, что потребление ресурса осуществляется в случайные моменты времени партиями случайного объема с функцией распределения $B(x)$, S – некоторое пороговое значение уровня запасов $s(t)$:

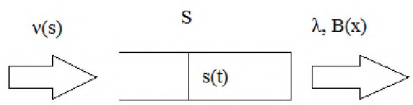

Рис. 1. Система управления запасами

$$\nu(s) = \begin{cases} \nu_1, \ s < S, \\ \nu_2, \ s > S. \end{cases}$$

Заметим, что процесс $s(t)$ может принимать отрицательные значения $s(t)<0$, и система продолжает функционировать, откладывая исполнение заявки на потребление ресурсов до момента накопления необходимого количества.

Из описания математической модели следует, что случайный процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством значений $-\infty < s < +\infty$.

Условие существования стационарного режима в рассматриваемой системе имеет вид $\nu_1 > \lambda b > \nu_2$, где b – математическое ожидания функции распределения $B(x)$. Таким образом, если $\nu_1 > \nu_2$ и $s(t) < S$, то объем ресурса в системе будет увеличиваться (в среднем), а при достижении уровня S и его превышении, т.е. $s(t) > S$, в связи с уменьшением скорости поступления объем ресурса будет уменьшаться.

2. Уравнение Колмогорова

Обозначим плотность распределения $P(s) = \dfrac{\partial P\{s(t) < s\}}{\partial s}$ и запишем равенство: $P(s+\Delta t) = P(s)(1-\lambda\Delta t) + \lambda\Delta t\int_0^\infty P(s+x,t)dB(x) + o(\Delta t)$, из которого получим уравнение $\nu(s)P'(s) + \lambda P(s) = \lambda\int_0^\infty P(s+x)dB(x)$. Обозначим

$$P_1(s) = \begin{cases} P_1(s), & s < S, \\ P_2(s), & s \geq S. \end{cases}$$

В предположении, что плотность распределения имеет разрыв при объеме, равном S, будем считать, что $P_2(s)$ непрерывна справа. Рассмотрим случай, когда

$$B(x) = b_1\left(1 - e^{-\mu_1 x}\right) + b_2\left(1 - e^{-\mu_2 x}\right). \tag{1}$$

Тогда $b = \dfrac{b_1}{\mu_1} + \dfrac{b_2}{\mu_2}$. Получим два интегро-дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} &\nu_2 P_2'(s) + \lambda P_2(s) = \lambda\int_0^\infty P_2(s+x)dB(x), \ s \geq S, \\ &\nu_1 P_1'(s) + \lambda P_1(s) = \lambda\int_0^{S-s} P_1(s+x)dB(x) + \lambda\int_{S-s}^\infty P_2(s+x)dB(x), \ s < S. \end{aligned} \tag{2}$$

Подставим в уравнения (2) выражение (1):

$$\begin{aligned} &\nu_2 P_2'(s) + \lambda P_2(s) = \lambda\sum_{i=1}^{2}\left(b_i\mu_i\int_0^\infty P_2(s+x)e^{-\mu_i x}dx\right), \ s \geq S, \\ &\nu_1 P_1'(s) + \lambda P_1(s) = \lambda\sum_{i=1}^{2}\left(b_i\mu_i\int_0^{S-s} P_1(s+x)e^{-\mu_i x}dx + b_i\mu_i\int_{S-s}^\infty P_2(s+x)e^{-\mu_i x}dx\right), \ s < S. \end{aligned} \tag{3}$$

В первом уравнении сделаем замену переменной $x + s = y$. Разделив обе части поочередно на $e^{\mu_1 s}$ и $e^{\mu_2 s}$ и продифференцировав по переменной s два раза, выполняя несложные преобразования, получим дифференциальное уравнение 3-го порядка

$$\nu_2 P_2'''(s) + \left(\lambda - \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_2\right)P_2'' + \left(-\lambda\mu_1 b_2 + \mu_1\mu_2\nu_2 - \lambda b_1\mu_2\right)P_2' = 0, \tag{4}$$

решив которое, находим $P_2(s)$: $P_2(s)=C_3e^{z_3s}+C_4e^{z_4s}+C_6$. Здесь $z_3<0$, $z_4>0$, $z_6=0$, z_3, z_4 и z_6 – корни уравнения (4). Из условия $P_2(+\infty)=0$ получаем

$$P_2(s)=C_3e^{z_3s}. \tag{5}$$

Подставив $P_2(s)$ из (5) во второе уравнение из (3) и проделав аналогичные действия, найдем $P_1(s)$:

$$\nu_1P_1'''(s)+\left(\lambda-\mu_1\nu_1-\mu_2\nu_1\right)P_1''+\left(-\lambda\mu_1b_2+\mu_1\mu_2\nu_1-\lambda b_1\mu_2\right)P_1'=0, \tag{6}$$

решив которое, находим $P_1(s)$: $P_1(s)=C_1e^{z_1s}+C_2e^{z_2s}+C_5$. Здесь $z_1>0$, $z_2>0$, $z_5=0$, z_1, z_2 и z_5 – корни уравнения (6). Из условия $P_1(-\infty)=0$ получаем

$$P_1(s)=C_1e^{z_1s}+C_2e^{z_2s}. \tag{7}$$

3. Интегральное условие

Мы имеем 3 неизвестные константы и только 2 уравнения, что не позволяет нам однозначно выразить C_1, C_2, C_3, однако после подстановки (5) и (7) во второе уравнение (2) уравнение распадется на 2 независимых уравнения, что позволит нам однозначно выразить C_1, C_2, C_3. Выполнив несложные преобразования, получим

$$C_3=\left(\frac{C_1e^{z_1S}}{z_1-\mu_1}+\frac{C_2e^{z_2S}}{z_2-\mu_1}\right)\left(z_3-\mu_1\right)e^{-z_3S},\ C_2=\frac{\left(z_3-z_1\right)\left(z_2-\mu_2\right)\left(z_2-\mu_1\right)}{\left(z_2-z_3\right)\left(z_1-\mu_1\right)\left(z_1-\mu_2\right)}C_1e^{(z_1-z_2)S}.$$

Найдем C_1, используя условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{S}P_1(x)dx+\int\limits_{S}^{\infty}P_2(x)dx=1$. Решая это уравнение, найдем C_1:

$$C_1=e^{-z_1S}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{z_1}+\frac{\left(z_3-z_1\right)\left(z_2-\mu_2\right)\left(z_2-\mu_1\right)}{\left(z_2-z_3\right)\left(z_1-\mu_1\right)\left(z_1-\mu_2\right)z_2}+\frac{\left(\left(z_2-z_3\right)\left(z_1-\mu_2\right)+\left(z_3-z_1\right)\left(z_2-\mu_2\right)\right)\left(z_3-\mu_1\right)}{\left(z_2-z_3\right)\left(z_1-\mu_1\right)\left(z_1-\mu_2\right)z_3}\right)^{-1}.$$

В итоге имеем:

$$P(s)=\begin{cases}C_1e^{z_1s}+C_2e^{z_2s}, & s<S,\\ C_3e^{z_3s}, & s\geq S.\end{cases}$$

Заключение

В данной работе построена математическая модель системы управления запасами. Получено аналитическое выражение для стационарной плотности распределения значений объема запасов при гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления объемом запасов. Предложенный подход может быть применен к аналогичным задачам при различных распределениях объемов расходования ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Вестник Томского государственного университета. – 2016. – № 1. – С. 43–48.

2. Управление запасами предприятия и их оптимизация [Электронный ресурс] // URL: http://upravlenie-zapasami.ru (дата обращения: 16.09.2017).

3. Вальц О.В. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы / О.В. Вальц, О.А. Змеев // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 37–41.

4. Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. – С. 130–135.