ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 60, № 2 ФИЗИКА 2017

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УДК 517.9

Е.А. ЛЕВЧЕНКО[2], *А.Ю. ТРИФОНОВ*[2], *А.В. ШАПОВАЛОВ*[1,2]

СИММЕТРИИ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА – КОЛМОГОРОВА С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ*

Одномерное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова с квадратичной нелокальной нелинейностью специального вида представлено в виде объединенной системы дифференциальных уравнений, включающей динамическую систему, описывающую эволюцию моментов искомой функции. Для объединенной системы найдены лиевские симметрии методами классического группового анализа. Рассмотрен пример инвариантно-группового решения, полученного с учетом дополнительного интегрального ограничения.

Ключевые слова: *нелокальное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова, объединенная система, лиевские симметрии, инвариантно-групповое решение.*

Введение

Динамическое поведение сложных нелинейных систем со случайными параметрами моделируется на основе различных обобщений уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), описывающего эволюцию плотности распределения случайных физических величин (см., например, [1, 2]). Примером может служить система броуновских частиц с дальнодействием. Кинетику такой системы в приближении среднего поля без учета корреляций трех частиц можно описывать в терминах обобщенного уравнения ФПК с нелокальной квадратичной нелинейностью [3, 4].

В работе [5] для многомерного нелокального (интегродифференциального) уравнения ФПК специального вида с квадратичной нелокальной нелинейностью были построены операторы симметрии при помощи найденного точного оператора эволюции. Однако построенные операторы симметрии не образуют группу Ли и, таким образом, не позволяют построить ее генераторы, т.е., в терминах группового анализа [6–8], симметрии нелокального уравнения ФПК.

Нахождение симметрий для нелокальных уравнений [9] представляет самостоятельную задачу в теории группового и симметрийного анализа уравнений математической физики. В работе [10] развит подход, позволяющий исследовать симметрии нелокального уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова (Фишера – КПП) в квазиклассическом приближении. В данном подходе нелокальное уравнение Фишера – КПП редуцируется к уравнению, близкому к линейному в смысле работы [10]. В редуцированное уравнение нелокальная нелинейность входит в виде моментов искомой функции, эволюция которых описывается динамической системой. Система уравнений, включающая редуцированное уравнение и динамическую систему, в [10] рассматривается как объединенная система (ОС) для исследования симметрий нелокального уравнения Фишера – КПП. В [10] получены определяющие уравнения для симметрий данной ОС и рассмотрены лиевские симметрии [6–8]. Исследование свойств операторов симметрий нелокального уравнения Фишера – КПП с квадратичным оператором было проведено в [8].

В данной работе подход, предложенный в [10], применен для вычисления симметрий одномерного нелокального уравнения ФПК [5]. В п.1 рассмотрены уравнения, определяющие симметрии ОС, связанной с нелокальным уравнением ФПК. В п. 2 исследованы лиевские симметрии и рассмотрен пример инвариантно-группового решения уравнения ФПК.

1. Объединенная система для одномерного уравнения ФПК

Одномерное уравнение ФПК с квадратичной нелинейностью, следуя обозначениям работы [5], запишем в виде

* Работа частично поддержана Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров; программой «Наука», контракт № 1.676.2014/К.

$$u_t = \varepsilon u_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}\left[u(k_1 x + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(k_2 x + k_3 y)u(y,t)dy)\right], \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $x, y \in \mathbb{R}^1$ – независимые переменные; функция $u(x,t)$ предполагается гладкой и убывающей на бесконечности в каждый момент времени t, для которой существуют нулевой и первый моменты, т.е. интегралы

$$m_u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx, \quad x_u(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xu(x,t)dx. \tag{2}$$

Здесь k_1, k_2, k_3, ε – вещественные параметры.

Для уравнения (1) справедливо

$$m_u(t) = \text{const}. \tag{3}$$

Положим

$$m_u(t) = 1. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение (1) относится к классу уравнений, близких к линейным [10], так как его оператор линеен по $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ с коэффициентами, зависящими от x, t и момента $x_u(t)$ вида (2).

Уравнение (1) с учетом (2) и (3), (4) запишем в виде

$$-u_t(x,t) + \hat{H}[u](x,t) = 0; \tag{5}$$

$$\hat{H}[u](x,t) = \varepsilon u_{xx}(x,t) + (k_1 + k_2)xu_x(x,t) + (k_1 + k_2)u(x,t) + k_3 x_u(t)u_x(x,t). \tag{6}$$

Эволюция первого начального момента $x_u(t)$ с учетом (6) описывается уравнением

$$\dot{x}_u = \Gamma(x_u, t), \quad \Gamma(x_u, t) = -(k_1 + k_2 + k_3)x_u, \tag{7}$$

решение которого имеет вид

$$x_u(t) = x_0 e^{-(k_1+k_2+k_3)t}, \quad x_u(t)|_{t=0} = x_0. \tag{8}$$

Система уравнений (5) – (7) является ОС для уравнения (1), ее симметрии могут быть исследованы с помощью стандартного классического группового анализа [6–8].

Обозначим через $z_r = (x, t, u, u_1, u_2, \dots, u_r)$ набор вещественных независимых переменных. Отметим, что при переходе от переменной u к функции $u(x,t)$ переменные u_1, u_2, … отвечают производным $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, … соответственно. Правая часть соотношения (6) определяется гладкой по своим аргументам функцией $H(t, z_r, x_u, \varepsilon)$

$$H(x, t, u, u_1, u_2; x_u) = \varepsilon u_2 + (k_1 + k_2)xu_1 + (k_1 + k_2)u + k_3 x_u u_1 \tag{9}$$

и является символом оператора $\hat{H}$ вида (6).

Лиевские симметрии $\chi = (\sigma, \vartheta)$ объединенной системы (5) – (7) [6–8] задаются выражениями

$$\sigma = \sigma(x, t, u, u_1, u_2; x_u), \quad \vartheta = \vartheta(t; x_u) \tag{10}$$

и находятся из определяющих уравнений [10]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \hat{Y}_H(\sigma) - \hat{Y}_\sigma(H) + \frac{\partial \sigma}{\partial x_u}\Gamma - \frac{\partial H}{\partial x_u}\vartheta = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_u}\Gamma - \frac{\partial \Gamma}{\partial x_u}\vartheta = 0; \tag{12}$$

$$\hat{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots, \tag{13}$$

где $\hat{D}_x$ – оператор полной производной по x, действующий на функции, зависящие от переменных $x, t, u, u_1, u_2; x_u$ [6–8], и оператор $\hat{Y}$ имеет вид

$$\hat{Y}_\zeta = \sum_{i=0} (\hat{D}_x)^i (\zeta) \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{14}$$

Отметим, что $u_1 = \hat{D}_x u, \ldots,\ u_k = \hat{D}_x u_{k-1}$.

Функции $\sigma(x, t, u, u_1, u_2; x_u)$, $\vartheta(t; x_u)$ определяют операторы

$$\hat{\sigma}[u](x,t) = \sigma(x, t, u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t); x_u(t)), \quad \hat{\vartheta}(t) = \vartheta(t; x_u(t)). \tag{15}$$

Из (2) и (15) получим дополнительное интегральное ограничение

$$\hat{\vartheta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\hat{\sigma}[u](x,t)dx. \tag{16}$$

Для функций σ и ϑ вида (10) из соотношений [6–8]

$$\sigma = \eta^1 - \xi^1 u_t - \xi^2 u_x, \quad \vartheta = \eta^2 - \xi^1 \dot{x}_u \tag{17}$$

получим генератор

$$\hat{X} = \xi^1 \partial_t + \xi^2 \partial_x + \eta^1 \partial_u + \eta^2 \partial_{x_u} \tag{18}$$

точечной группы симметрии ОС (5) – (7).

2. Лиевские симметрии

Определяющие уравнения (11), (12) для σ и ϑ вида (10) можно записать как

$$\sigma_t - (k_1 + k_2 + k_3) x_u \sigma_{x_u} + (k_1 + k_2) u \sigma_u + 2(k_1 + k_2) u_1 \sigma_{u_1} + 3(k_1 + k_2) u_2 \sigma_{u_2} -$$

$$-(k_1 + k_2)\sigma - (k_1 + k_2) x \sigma_x - k_3 x_u \sigma_x - \varepsilon(\sigma_{xx} + 2u_1 \sigma_{xu} + 2u_2 \sigma_{xu_1} +$$

$$+2u_3 \sigma_{xu_2} + 2u_1 u_2 \sigma_{uu_1} + 2u_1 u_3 \sigma_{uu_2} + 2u_2 u_3 \sigma_{u_1 u_2} + u_1^2 \sigma_{uu} + u_2^2 \sigma_{u_1 u_1} + u_3^2 \sigma_{u_2 u_2}) - k_3 u_1 \vartheta = 0; \tag{19}$$

$$\vartheta_t - (k_1 + k_2 + k_3) x_u \vartheta_{x_u} = -(k_1 + k_2 + k_3)\vartheta. \tag{20}$$

Замена переменных

$$\tau = t + \frac{1}{k_1 + k_2 + k_3} \ln x_u, \quad z = -\frac{1}{k_1 + k_2 + k_3} \ln x_u \tag{21}$$

приводит систему уравнений (19), (20) к виду

$$\sigma_z + (k_1 + k_2) u \sigma_u + 2(k_1 + k_2) u_1 \sigma_{u_1} + 3(k_1 + k_2) u_2 \sigma_{u_2} - (k_1 + k_2)\sigma -$$

$$-(k_1 + k_2) x \sigma_x - k_3 x_u \sigma_x - \varepsilon(\sigma_{xx} + 2u_1 \sigma_{xu} + 2u_2 \sigma_{xu_1} + 2u_3 \sigma_{xu_2} +$$

$$+2u_1 u_2 \sigma_{uu_1} + 2u_1 u_3 \sigma_{uu_2} + 2u_2 u_3 \sigma_{u_1 u_2} + u_1^2 \sigma_{uu} + u_2^2 \sigma_{u_1 u_1} + u_3^2 \sigma_{u_2 u_2}) - b_2 u_1 \vartheta = 0; \tag{22}$$

$$\vartheta_z = -(k_1 + k_2 + k_3)\vartheta. \tag{23}$$

Решив систему уравнений (22), (23) стандартным способом [6–8] и учтя, что при вычислении симметрий уравнения (5) мы не рассматриваем моменты выше $x_u(t)$, которые возникают при наложении на вычисляемую симметрию σ интегрального соотношения (16), получим

$$\sigma=\left(\frac{A_1(\tau)}{2(k_1+k_2)}+A_2(\tau)e^{-2(k_1+k_2)z}\right)u_2+\left(\frac{A_1(\tau)}{2\varepsilon}x-\frac{A_1(\tau)}{2\varepsilon}e^{-(k_1+k_2+k_3)z}-\right.$$

$$\left.-S(\tau)e^{-(k_1+k_2+k_3)z}+A_4(\tau)e^{-(k_1+k_2)z}\right)u_1+A_3(\tau)u+R(x,\tau,z)\,; \tag{24}$$

$$\vartheta(z)=S(\tau)e^{-(k_1+k_2+k_3)z}, \tag{25}$$

где $A_i(\tau)$, $i=1,\ldots,4$, $S(\tau)$ – произвольные функции переменной τ, а функция $R(x,\tau,z)$ является решением уравнения

$$R_z=\varepsilon R_{xx}+[(k_1+k_2)x+k_3x_u]R_x+(k_1+k_2)R. \tag{26}$$

С учетом интегрального соотношения (16) и решений (24), (25) имеем

$$A_3(\tau)=\frac{1}{2\varepsilon}A_1(\tau),\quad A_4(\tau)=x_Re^{(k_1+k_2)z},\quad x_R=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xR(x,\tau,z)dx, \tag{27}$$

где x_R удовлетворяет уравнению

$$(x_R)_z=-(k_1+k_2)x_R \tag{28}$$

при условии

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x,\tau,z)dx=0. \tag{29}$$

Дополнительное условие (29) получено из условий тождественного выполнения уравнения (22) на функцию σ и независимости от z в функции $A_4(\tau)$.

Таким образом, в терминах переменных (t,x_u), связанных с (τ,z) соотношениями (21), имеем

$$\sigma=A_1(\tau)\sigma_1+A_2(\tau)\sigma_2+S(\tau)\sigma_3+\sigma_4\,; \tag{30}$$

$$\vartheta=-S(\tau)x_u\,. \tag{31}$$

Здесь

$$\sigma_1=\frac{1}{2(k_1+k_2)}u_2+\frac{1}{2\varepsilon}xu_1-\frac{1}{2\varepsilon}x_uu_1+\frac{1}{2\varepsilon}u,\quad \sigma_2=x_u^{\frac{2(k_1+k_2)}{k_1+k_2+k_3}}u_2,$$
$$\sigma_3=x_uu_1,\quad \sigma_4=R+x_Ru_1. \tag{32}$$

Отметим, что для решений (8) уравнения (7) справедливо равенство

$$t+\frac{1}{k_1+k_2+k_3}\ln x_u=\mathrm{const}, \tag{33}$$

или, другими словами, $\tau(t,x_u(t))=\mathrm{const}$.

Объединенная система (5) – (7) с учетом (31) и (32) обладает следующими симметриями $\chi_i=(\sigma_i,\vartheta_i)$, $i=1,\ldots,4$:

$$\chi_1=(\sigma_1,0)\quad \chi_2=(\sigma_2,0),\quad \chi_3=(\sigma_3,-x_u),\quad \chi_4=(\sigma_4,0). \tag{34}$$

Согласно (17), (18), функции σ и ϑ, заданные соотношениями (31) и (32), приводят к следующим генераторам группы симметрии Ли точечных преобразований для уравнения (5), (6) [10]:

$$\hat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\hat{X}_2 = -x_u^m \frac{\partial}{\partial t} + [(k_1+k_2)x + k_3 x_u] x_u^m \frac{\partial}{\partial x} - (k_1+k_2) u x_u^m \frac{\partial}{\partial u} +$$

$$+(k_1+k_2+k_3) x_u^{m+1} \frac{\partial}{\partial x_u}, \quad m = \frac{2(k_1+k_2)}{k_1+k_2+k_3},$$

$$\hat{X}_3 = x_u \frac{\partial}{\partial x} + x_u \frac{\partial}{\partial x_u},$$

$$\hat{X}_4 = -x_R \frac{\partial}{\partial x} + R \frac{\partial}{\partial u}. \tag{35}$$

Таким образом, алгебра группы Ли, соответствующей нелокальному уравнению Фоккера – Планка, порождена тремя векторными полями $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$, $\hat{X}_3$ с коммутационными соотношениями

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 0, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = 0, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = -\frac{2(k_1+k_2)}{k_1+k_2+k_3} \hat{X}_2 \tag{36}$$

и бесконечномерной подалгеброй $\hat{X}_4$.

Найдем решение уравнения (5) с дополнительным условием

$$\hat{\sigma}_1[u](x,t) = 0, \tag{37}$$

где функция σ_1, символ оператора $\hat{\sigma}_1[u](x,t)$, имеет вид (32). Из (32) и (37) следует

$$u_{xx}(x,t) + \alpha x u_x(x,t) - \alpha x_u(t) u_x(x,t) + \alpha u(x,t) = 0, \quad \alpha = \frac{k_1+k_2}{\varepsilon}. \tag{38}$$

Уравнение (38) имеет два линейно независимых решения:

$$u_1(x,t) = C_1(t) \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{-\gamma^2} \int_0^\gamma e^{y^2} dy, \quad \gamma(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha(x - x_u(t))}{2}}; \tag{39}$$

$$u_2(x,t) = C_2(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha x [x - 2x_u(t)]\right\}, \tag{40}$$

где α определяется соотношением (38).

Рассмотрим решение $u_2(x,t)$ вида (40). Для выполнения интегрального соотношения (2) необходимо положить

$$C_2(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha x_u^2(t)\right]. \tag{41}$$

Тогда функция $u_2(x,t)$ вида (40) запишется как

$$u_2(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha [x - x_u(t)]^2\right\}. \tag{42}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что выражение (42) является инвариантно-групповым решением исходного нелокального уравнения ФПК (1).

Решение (42) также можно найти с помощью линейной комбинации операторов $-\hat{X}_1 + (k_1+k_2+k_3)\hat{X}_3$ [6–8]. Однако условие (37) может быть использовано и в случае нелиевских (высших) симметрий.

Отметим, что для решения (39) интеграл (2) расходится. Симметрия σ_2 вида (32) не приводит к инвариантно-групповому решению исходного уравнения, так как для нее интеграл (2) также расходится. Из симметрии σ_3 получим тривиальное инвариантно-групповое решение.

Заключение

В работе рассмотрены лиевские симметрии нелокального уравнения ФПК специального вида с квадратичным оператором. Показано, что алгебра генераторов группы Ли объединенной системы, соответствующая данному уравнению ФПК, порождается тремя векторными полями и одной бесконечномерной подалгеброй. Инвариантно-групповое решение нелокального уравнения ФПК получается при наложении дополнительного интегрального ограничения.

Отметим, что уравнение (1) описывает главный член асимптотических решений, построенных в [13] в рамках формализма квазиклассических асимптотик [14, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dauxois T., Ruffo S., Arimondo E., and Wilkens M. Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions, Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 2002. – 492 p.
2. Frank T.D. Nonlinear Fokker – Planck Equations. – Berlin: Springer, 2004. – 408 p.
3. Chavanis P.H. // Physica A. – 2011. – V. 390. – P. 1546–1574.
4. Chavanis P.H. // J. Stat. Mech.: Theor. Exp. – 2010. – V. 2010. – P. 05019.
5. Shapovalov A.V., Rezaev R.O., and Trifonov A.Yu. // SIGMA. – 2007. – V. 3. – 16 p.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
7. Ibragimov N.H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Mathematics and its Applications (Soviet Series). – Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1985. – 394 p.
8. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. – N. Y.: Springer, 1986. – 544 p.
9. Grigoriev Y.N. et al. Symmetries of Integro-Differential Equations: With Applications in Mechanics and Plasma Physics, Lect. Notes Phys. – Dordrecht: Springer, 2010. – 806 p.
10. Levchenko E.A., Shapovalov A.V., and Trifonov A.Yu. // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – V. 395. – P. 716–726.
11. Левченко Е.А., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 12. – С. 86–95.
12. Ibragimov N.H., Kovalev V.F., and Pustovalov V.V. // Nonlinear Dynam. – 2002. – V. 28. – P. 135–165.
13. Bellucci S. and Trifonov A.Yu. // J. Phys. A. – 2005. – V. 38. – P. L103–L114.
14. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 584 с.
15. Белов В.В., Доброхотов С.Ю. // ТМФ. – 1992. – Т. 92. – № 2. – С. 215–254.

[1] Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
[2] Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 12.07.16.

Левченко Евгений Анатольевич, ст. преподаватель каф. высшей математики и математической физики, e-mail: levchenkoea@tpu.ru,

Трифонов Андрей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. высшей математики и математической физики, e-mail: atrifonov@tpu.ru,

Шаповалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. теоретической физики НИ ТГУ, профессор каф. ВММФ ФТИ НИ ТПУ, e-mail: shpv@phys.tsu.ru.