

На правах рукописи



**Калиниченко Игорь Степанович**

**ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ  
БОЛЬШОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА  
В ФОНОВЫХ ПОЛЯХ**

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2017

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

**Научные руководители:**

доктор физико-математических наук, доцент  
**Казинский Петр Олегович;**  
доктор физико-математических наук, профессор  
**Ляхович Семен Леонидович**

**Официальные оппоненты:**

**Халилов Владислав Рустемович**, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», кафедра теоретической физики, профессор

**Крыхтин Владимир Александрович**, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет», кафедра теоретической физики, профессор

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

Защита состоится 22 марта 2018 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория 211).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» [www.tsu.ru](http://www.tsu.ru).

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/KalinichenkoIS22032018.html>

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» января 2018 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Киреева Ирина Васильевна

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Нерелятивистская теория поля при конечной температуре и плотности была разработана в конце 50-х годов прошлого века для теоретического описания твердого тела и конденсированного состояния вещества в лабораторных условиях. Несмотря на то, что эта теория базировалась только на уравнении Шредингера и статистической механике, она представляла удобный формализм для работы с большим числом частиц. Часто ее называют «задачей многих тел».

Релятивистская теория поля при конечной температуре впервые была рассмотрена Фрадкиным в 1965 г. и переоткрыта десять лет спустя. Основной мотивацией в то время было описание фазового перехода в ранней Вселенной, который происходил в электрослабом секторе стандартной модели при температуре порядка 200 ГэВ. Название «релятивистская теория» говорит о том, что основой для нее являются Лоренц-инвариантные волновые уравнения: Клейна-Гордона, Дирака и пр., а также, что средние энергии достаточны для рождения пар частица-античастица ( $T \gg m$ ), т.е. реализуется так называемый высокотемпературный предел. Позднее, в начале 80-х, теорией на решетке было предсказано существование кварк-глюонной плазмы (деконфайнмент) при температуре, оцениваемой сейчас в 150 МэВ. Возможность наблюдения нового состояния материи в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ионов подстегнуло дальнейшее развитие формализма. Предсказания релятивистской теории поля при конечной температуре довольно тяжело проверить в лаборатории, где обычно нет условий для реализации таких высоких температур и плотностей, поэтому непосредственное ее применение лежит в области астрофизики и космологии.

При исследовании релятивистских систем на передний план выходит задача о получении высокотемпературных разложений большого термодинамического потенциала ( $\Omega$ -потенциала). Асимптотические формулы для таких разложений в отсутствие фоновых полей были получены в 70-80-х годах. Однако, большинство интересных систем обычно находятся в области воздействия классических гравитационных и электромагнитных полей. Именно этим и мотивировано изучение высокотемпературных разложений термодинамических потенциалов в фоновых полях различных конфигураций. В диссертации сначала выводится общая формула для полного высокотемпе-

ратурного разложения  $\Omega$ -потенциала. Затем полученные формулы применяются для анализа двух частных случаев: систем, находящихся в постоянном однородном магнитном поле и в стационарном медленно меняющемся в пространстве гравитационном поле общего вида.

### Степень разработанности темы

Изучение термодинамического поведения газа заряженных частиц в сильном однородном магнитном поле является классической задачей. В случае скалярных частиц в литературе имеется много расхождений относительно свойств такого газа при высоких температурах и плотностях. В работе Шафрота<sup>1</sup> с использованием наивного однопетлевого приближения было показано, что газ заряженных скалярных частиц переходит в сверхпроводящее состояние при достаточно высокой плотности. Позднее этот результат был подтвержден во многих статьях как в релятивистском, так и в нерелятивистском режиме. Однако, род такого фазового перехода оставался неизвестным. В некоторых работах предполагалось, что реализуется «диффузный» тип фазового перехода без критической температуры. В других статьях утверждалось, что в трехмерном пространстве газ заряженных скалярных частиц не конденсируется (в смысле существования фазового перехода) ни при какой температуре и плотности при условии, что магнитное поле не равно нулю, не важно насколько оно мало. В статье Элмфорса и соавторов<sup>2</sup> было показано, что (используя терминологию этой статьи) в любом «локальном» магнитном поле,  $\mathbf{B} \neq 0$ , бозе-эйнштейновская конденсация релятивистского газа бозонов не происходит, однако такой Бозе-газ может сконденсироваться в ненулевом «внешнем» магнитном поле,  $\mathbf{H} \neq 0$ . Тем не менее, ни критическая температура, ни род этого фазового перехода не были найдены. Существует также группа статей, авторы которых высказывают идею о том, что такой газ может конденсироваться, если выйти за пределы наивного однопетлевого приближения и учесть вклад так называемых кольцевых диаграмм.

Получение высокотемпературных разложений для статистических сумм также является классической проблемой квантовой теории поля на кривом фоне. Имеется немалое количество работ, в которых применялись различные подходы к вычислению однопетлевых вкладов в свободную энергию кванто-

---

<sup>1</sup>Shafroth M. R. Superconductivity of a charged ideal Bose gas // Phys. Rev. 1955. Vol.100. P.463.

<sup>2</sup>P. Elmfors et. al. Condensation and magnetization of the relativistic Bose gas // Phys. Lett. B. 1995. Vol.348. P.462.

вых полей. Однако, несмотря на то, что первые попытки найти высокотемпературные разложения были предприняты еще тридцать лет назад<sup>3</sup>, проблема в общем положении для произвольного стационарного (не статического) гравитационного фона не была полностью решена. Отметим также, что высокотемпературное разложение свободной энергии для фермионов может быть использовано для анализа разложения по производным однопетлевого вклада в эффективное действие при нулевой температуре, регуляризованного обрезанием по энергии. В соответствии с общим предписанием теории перенормировок структуры, появляющиеся как расходимости в эффективном действии, должны быть включены в исходное действие для сокращения этих расходимостей. Обычно эти расходимости и конечная часть нетривиально зависят от вектора Киллинга  $\xi^\mu$ , определяющего стационарность фона и вакуумное состояние квантовых полей. Таким образом, анализ высокотемпературного разложения может пролить свет на квантовую динамику векторного поля  $\xi^\mu$ .

Кроме того, в литературе неоднократно упоминался тот факт, что эффективное действие, а значит и термодинамический потенциал должны обладать непертурбативными поправками. Однако, ни явная форма таких слагаемых для достаточно широкого класса фоновых метрик лоренцевой сигнатуры, ни даже их выражение в виде интегралов не приводилось.

### Цели и задачи работы

1. Вывести полную асимптотическую формулу для высокотемпературного разложения однопетлевого термодинамического потенциала для фоновых полей произвольной природы с учетом непертурбативных (по константе связи) поправок.
2. Получить высокотемпературное разложение  $\Omega$ -потенциала для заряженных скалярных и дираковских частиц в постоянном однородном магнитном поле. Изучить термодинамические свойства такого газа. Найти поправку к однопетлевому результату с помощью суммирования кольцевых диаграмм, а также изучить влияние таких поправок на термодинамические свойства системы.
3. Получить высокотемпературное разложение свободной энергии для скалярных частиц в произвольном стационарном гравитационном поле.

---

<sup>3</sup>Dowker J. S., Kennedy G. Finite temperature and boundary effects in static space-times // J. Phys. A. 1978. Vol.11. P.895.

Изучить зависимость расходящейся и конечной части разложения от вектора Киллинга. Вывести явные выражения для непертурбативных поправок к свободной энергии в случае стационарных медленно меняющихся в пространстве полей.

### **Научная новизна**

1. Впервые получена полная асимптотическая формула для высокотемпературного разложения однопетлевого  $\Omega$ -потенциала, содержащая непертурбативные по фоновым полям вклады, для частиц и античастиц по отдельности.
2. Впервые построено тепловое ядро для Фурье-преобразованного по времени уравнения Клейна-Гордона в постоянном однородном электромагнитном поле и проанализированы его особенности. Впервые приведены аналитические выражения для непертурбативных поправок к термодинамическому потенциалу в случае постоянного магнитного поля. Для системы заряженных бозонов в однопетлевом приближении впервые найдена зависимость напряженности магнитного поля  $H$  от индукции  $B$  и доказано наличие фазового перехода первого рода.
3. Предложен явно общековариантный метод вычисления высокотемпературного разложения свободной энергии на стационарном гравитационном фоне. Впервые установлена зависимость конечной части высокотемпературного разложения свободной энергии от вектора Киллинга. Впервые приведено приближенное выражение для диагонали теплового ядра при некоторых предположениях относительно фоновой метрики. С его помощью вычислены аналитические выражения для непертурбативных поправок к термодинамическому потенциалу и показана их зависимость от вектора Киллинга.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Высокотемпературные разложения в сильных магнитных полях могут играть большую роль в астрофизике и космологии. Например, белые карлики, сверхновые и нейтронные звезды являются теми представителями звездных объектов, в которых могут реализовываться рассмотренные условия. Кроме

того, поля большой интенсивности реализовывались во время электрослабого фазового перехода в ранней Вселенной, когда температуры достигали 200 ГэВ. Сильные электромагнитные поля и высокие температуры присутствуют также во время формирования кварк-глюонной плазмы при столкновении тяжелых ионов.

Наличие нетривиальной зависимости эффективного действия от вектора Киллинга, определяющего стационарность фона и вакуумное состояние квантовых полей, приводит к появлению динамики этого поля и дает одно из возможных объяснений темной материи. Такого типа члены в эффективном действии дают ведущий вклад в гравитационный сдвиг масс частиц.

Развитые в диссертации методы получения высокотемпературных разложений и непертурбативных поправок могут быть применены к другим задачам: полевым конфигурациям, отличным от рассмотренных, фоновым полям другой природы, частицам с более высоким спином. Кроме того, модифицируя коэффициенты теплового ядра, можно рассматривать задачи с нетривиальными граничными условиями, например, модель адрона как мешка кварков, которая описывает нуклон как три свободных кварка (асимптотическая свобода), заключенных в некоторую полость (конфайнмент).

## **Методология и методы исследования**

При выводе формулы высокотемпературного разложения использовались методы комплексного анализа: аналитическое продолжение, преобразование Меллина, метод Ватсона. Было введено и исследовано понятие спектральной  $\zeta$ -функции для операторов типа Клейна-Гордона. Повсеместно используется разложение теплового ядра, его пересуммирование, формулы спуска.

При анализе непертурбативных эффектов во внешних полях существенно используются метод фонового поля и нестационарная теория возмущений.

Термодинамические свойства частиц в магнитном поле изучаются с помощью формализма КТП при конечной температуре.

При вычислении непертурбативных поправок и изучении термодинамических свойств была использована система компьютерной алгебры Mathematica.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Полное высокотемпературное разложение однопетлевого  $\Omega$ -потенциала в пренебрежении экспоненциально подавленными (при  $\beta \rightarrow 0$ ) членами.

2. Внедиагональные элементы теплового ядра для уравнения Клейна-Гордона в постоянном однородном электромагнитном поле. Высокотемпературные разложения однопетлевых поправок к термодинамическому потенциалу от заряженных скалярных и дираковских частиц в постоянном магнитном поле для частиц и античастиц по отдельности. Явные формулы для непертурбативных поправок в эффективное действие при конечной температуре в этом случае. Доказательство наличия у системы заряженных бозонов фазового перехода первого рода из диамагнитного в сверхпроводящее состояние в однопетлевом приближении, а также приближенные формулы для основных термодинамических величин, характеризующих переход. Доказательство перехода системы в ферромагнитное состояние при учете кольцевых диаграмм и его основные характеристики.
3. Полное высокотемпературное разложение однопетлевой поправки в свободную энергию скалярного поля на стационарном гравитационном фоне. Явные выражения для расходящейся и конечной части высокотемпературного разложения. Явные формулы для непертурбативных поправок в эффективное действие при конечной температуре. Доказательство явной зависимости непертурбативного вклада от вектора Киллинга и невозможности его выражения в терминах метрики, кривизны и ее ковариантных производных конечного порядка.

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность результатов объясняется их внутренней самосогласованностью, а также совпадением в частных случаях с уже известными результатами.

Основные результаты диссертации докладывались на Всероссийской конференции «Молодые ученые России» (г. Москва, 2013 г.), Международной конференции «20th International Conference on General Relativity and Gravitation» (г. Варшава, Польша, 2013 г.), Международной конференции «Quantum Field Theory and Gravity» (г. Томск, 2014 г.), Международной конференции «Fourteenth Marcel Grossmann Meeting» (г. Рим, Италия, 2015 г.), Международном семинаре «Strong Field Problems in Quantum Theory» (г. Томск, 2016 г.), а также на научных семинарах кафедр квантовой теории поля и теоретической физики Томского государственного университета.



Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах, из них 4 – в журналах, входящих в перечень ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

## Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы. Объем диссертации составляет 127 страниц. Список литературы включает 123 наименования.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы и установлена связь результатов, представленных в диссертации, с результатами, полученными ранее другими авторами. Дано описание структуры диссертационной работы и сформулированы основные задачи.

**В первой главе** вводится понятие  $\zeta$ -функции, ассоциированной с Фурье-образом по времени оператора типа Клейна-Гордона  $H(\omega)$  :

$$\zeta_+(\nu, \omega) = e^{-i\pi\nu} \Gamma(1 - \nu) \int_C \frac{d\tau \tau^{\nu-1}}{2\pi i} \text{Tr} e^{-\tau H(\omega)}, \quad (1)$$

где контур  $C$  идет снизу вверх немного левее и параллельно мнимой оси. Тогда однопетлевой  $\Omega$ -потенциал принимает вид

$$\Omega = - \int_0^\infty d\omega \left[ \frac{\zeta_+(0, \omega)}{e^{\beta(\omega-\mu)} \pm 1} + \frac{\zeta_+(0, -\omega)}{e^{\beta(\omega+\mu)} \pm 1} \right], \quad (2)$$

где  $\beta$  есть обратная температура,  $\mu$ -химический потенциал, знак плюс соответствует фермионам, а минус – бозонам. Первое слагаемое в данном выражении представляет собой вклад частиц, а второе соответствует античастицам.

Методами комплексного анализа доказывается следующая асимптотическая формула в случае высокотемпературного предела (экспоненциально подавленные при  $\beta \rightarrow +0$  отброшены)

$$- \Omega_b(\mu) \simeq \sum_{k,n=0}^{\infty} \Gamma(D - 2\nu - k) \zeta(D - 2\nu - k - n) \frac{\zeta_k^+(\nu) (\beta\mu)^n}{n! \beta^{D-2\nu-k}} + \sum_{l=-1}^{\infty} \frac{(-1)^l \zeta(-l)}{\Gamma(l+1)} \sigma_\nu^l(\mu) \beta^l, \quad \nu \rightarrow 0. \quad (3)$$

Формула записана для вклада бозонов. Вклад античастиц получается заменой  $\mu \rightarrow -\mu$ . Вклад фермионов соответствует замене всех дзета-функций Римана  $\zeta(z)$  на эта-функции Дирихле  $\eta(z)$ , а также отбрасыванию слагаемого с  $l = -1$ .

В формуле (3) коэффициенты  $\zeta_k^+(\nu)$  соответствуют следующему асимптотическому разложению при  $\omega \rightarrow +\infty$ :

$$\zeta_+(\nu, \omega) = \sum_{k=0}^N \zeta_k^+(\nu) \omega^{d-2\nu-k} + O(\omega^{d-2\nu-N-1}). \quad (4)$$

Коэффициенты  $\zeta_k^+(\nu)$  выражаются через коэффициенты разложения теплового ядра и считаются известными.

Возникающие в последней сумме в (3) функции  $\sigma_\nu^l(\mu)$  определены следующим образом:

$$\sigma_\nu^l(\mu) = \int_0^\infty d\omega (\omega - \mu)^l \zeta_+(\nu, \omega). \quad (5)$$

Такие функции содержат непертурбативные по фоновым полям вклады и их вычисление в общем случае является нетривиальным.

В конце главы показывается связь высокотемпературного разложения для фермионов и эффективного действия при нулевой температуре (вакуумной энергии). Данный факт основывается на следующем наблюдении

$$E_{vac}(\beta_0) = \partial_{\beta_0}(\beta_0 \Omega_f(\mu, \beta_0)) \Big|_{\mu=0} = \sum_n \frac{E_n}{e^{\beta_0 E_n} + 1} \xrightarrow{\beta_0 \rightarrow 0} \sum_n \frac{E_n}{2}, \quad (6)$$

где  $E_n$  есть энергия моды с номером  $n$ , а  $\beta_0$  – параметр регуляризации, никак не связанный с температурой.

**Вторая глава** посвящена изучению системы частиц в постоянном магнитном поле.

**В разделе 2.1** выводится точное выражение для теплового ядра, входящего в определение дзета-функции (1), в случае массивного заряженного скалярного поля на постоянном однородном электромагнитном фоне.

$$G(\omega, s; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | e^{-is(-H(\omega))} | \mathbf{y} \rangle, \quad (7)$$

где

$$H(\omega) = -(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2 - m^2 + (\omega - A_0)^2. \quad (8)$$

Показано, что все особенности выражения (7) в комплексной плоскости  $s$  лежат только на вещественной и мнимой осях.

В разделе 2.2 рассматривается случай постоянного магнитного поля:

$$G(\omega, i\tau; \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{e^{3\pi i/2}}{(4\pi)^{3/2}\tau^{1/2}} \frac{B}{\sinh \tau B} e^{-\tau(\omega^2 - m^2)}. \quad (9)$$

Явно построены структуры, возникающие в (3). Коэффициенты  $\zeta_k^+(\nu)$ :

$$\zeta_{2k+2s}^+(\nu) = V e^{i\pi\nu} \frac{(-1)^{k+s}}{(4\pi)^{3/2}} \frac{(2^k - 2)\zeta(1-k)B^k m^{2s}}{s!\Gamma(k)\Gamma(5/2 - \nu - k - s)}, \quad (10)$$

а также общее выражение для функции  $\sigma_\nu^l$ :

$$\frac{\sigma_\nu^l}{V} = \frac{e^{i\pi\nu}}{8\pi^{5/2}} \cos \frac{\pi l}{2} \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{l}{2} - 1\right) \left[ (2B)^{2-\nu+\frac{l}{2}} \zeta\left(\nu - \frac{l}{2} - 1, 1 + \frac{\bar{m}}{2}\right) + m^{2-2\nu+l} B \right], \quad (11)$$

где справа стоит дзета-функция Гурвица, а  $\bar{m} := m^2/B$ .

В пределе слабых полей ( $\bar{m} > 1$ ) получено асимптотическое разложение (11) по большой массе, а также непертурбативная поправка

$$\frac{\sigma_{\text{np } \nu}^l}{V} = \frac{(-1)^{[(\pi\bar{m}+l/2)/2]}}{8\pi^{5/2}} \left(\frac{B}{\pi}\right)^{2+l/2} \cos \frac{\pi l}{2} \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \frac{e^{-\pi\bar{m}}}{\sqrt{2\bar{m}}}. \quad (12)$$

В разделе 2.2 аналогичные величины построены для дираковских фермионов, которым отвечает тепловое ядро

$$G(\omega, i\tau; \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{e^{3\pi i/2}}{(4\pi)^{3/2}\tau^{1/2}} 2B \coth(\tau B) e^{-\tau(\omega^2 - m^2)}. \quad (13)$$

Раздел 2.4 посвящен явному вычислению высокотемпературных разложений  $\Omega$ -потенциала в случае скалярных и дираковских частиц, а также вакуумной энергии (6).

В разделе 2.5 с помощью полученных высокотемпературных разложений анализируются основные термодинамические свойства газа скалярных заряженных бозонов в постоянном однородном магнитном поле при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале.

Изучается зависимость магнитной индукции в газе  $B$  от напряженности магнитного поля  $H$ . Такая зависимость задается уравнением:

$$H = B - e^2 \frac{\partial P}{\partial B}(\mu, T, B), \quad (14)$$

где  $P = -\frac{\Omega}{V}$  есть давление в системе, а химический потенциал находится из условия сохранения плотности заряда  $\rho = \frac{\partial P}{\partial \mu}$ .

График  $H(B)$  приведен на Рисунке 1 для различных температур. Из этого графика видно, что при достаточно низкой температуре (но все еще в высокотемпературном режиме) система испытывает обычный фазовый переход первого рода в сверхпроводящее состояние. Найдены основные характери-

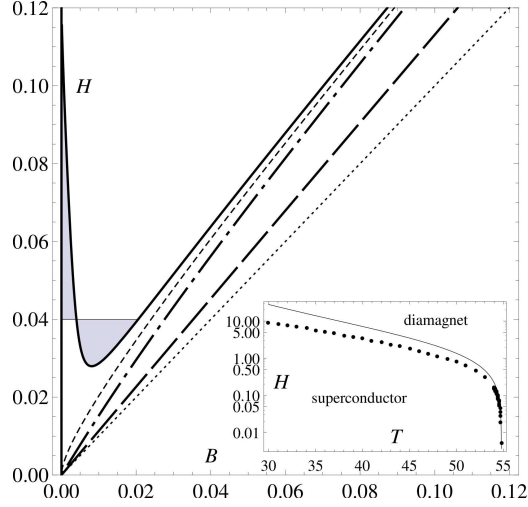


Рис. 1: Зависимость  $H(B)$  для различных температур при плотности заряда  $\rho = 1000$ ,  $m = 1$ . Сплошная толстая линия изображает  $H(B)$  при температуре немного ниже критической  $T_c := \sqrt{3\rho/m}$ . Прочие линии соответствуют более высоким температурам. Закрашенная область соответствует конструкции Максвелла. Вставка: кривая равновесия диамагнитной и сверхпроводящей фаз.

стики такого перехода.

В разделе 2.6 рассматривается система заряженных скалярных частиц с самодействием  $\lambda\phi^4$  на фоне постоянного однородного магнитного поля:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi^*(\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi - m^2|\Phi|^2 - \lambda|\Phi|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \lambda > 0. \quad (15)$$

При высоких температурах эффективные массы частиц существенно меняются благодаря инфракрасным вкладам так называемых кольцевых диаграмм. Температурные поправки к массе скалярного поля  $m_\chi$  и массе фотона  $m_\gamma$  ищутся самосогласованно как вторые производные по полям от квантовых поправок в эффективное действие (давление системы  $P$ ). В результате получаются следующие уравнения на массы:

$$\begin{aligned} m_\gamma^2 &= e^2 \frac{T^2}{3} + 2e^2 T B^{1/2} \left[ \Phi'(x) + \frac{2\mu^2}{B} \Phi''(x) \right], \\ m_\chi^2 &= (8\lambda + 5e^2) \frac{T^2}{24} + (8\lambda + e^2) \frac{T B^{1/2}}{2} \Phi'(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$ ,  $x = \frac{\mu^2 - m^2 - m_\chi^2}{B}$ . При этом полное давление в

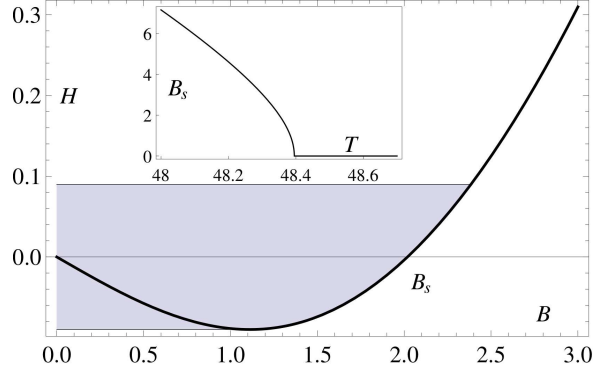


Рис. 2: Зависимость  $H(B)$  при  $\lambda = 1/10$ ,  $\rho = 8000$ ,  $m = 1$ ,  $T = 48.35$  и температуре Кюри  $T_c = 48.4$ . Закрашенная часть – метастабильная область (петля гистерезиса), где могут образовываться ферромагнитные домены. Вставка: зависимость спонтанной намагниченности от температуры.

системе записывается в виде

$$P = \frac{2\pi^2}{45}T^4 + \frac{T^2}{12} \left( 2\mu^2 - m^2 - m_\chi^2 - \frac{m_\gamma^2}{2} \right) + TB^{3/2}\Phi(x). \quad (17)$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично предыдущему разделу. График  $H(B)$  приведен на Рисунке 2.

Также выводится приближенная формула для температуры Кюри.

**В третьей главе** рассматриваются скалярные частицы на стационарном гравитационном фоне общего вида, обладающем времениподобным вектором Киллинга  $\xi^\mu$ :

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad g_\mu = \xi_\mu / \xi^2, \quad f_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} g_{\nu]} \neq 0. \quad (18)$$

Описывается математический трюк, позволяющий свести исходную трехмерную задачу к четырехмерной с сохранением явной общей ковариантности.

$$\text{Tr}_3 e^{-\tau H(\omega)} = \frac{1}{T} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 2\sqrt{\pi\lambda} \text{Tr}_4 e^{-\tau H_G} \tau^{1/2}, \quad (19)$$

где  $H(\omega)$ –оператор Клейна-Гордона на кривом фоне, в котором все производные по времени заменены на  $-i\omega$ . Четырехмерный оператор  $H_G$  при этом имеет вид

$$H_G = -G^{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\mu - i\omega g_\mu) (\tilde{\nabla}_\nu - i\omega g_\nu) - X, \quad (20)$$

где

$$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \xi^2 (1 - \lambda \xi^2) g^\mu g^\nu, \quad (21)$$

$$X = \frac{1}{4} h_\mu h^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_\mu - \frac{\omega^2}{\xi^2} + m^2, \quad h_\mu = \partial_\mu \ln \sqrt{\xi^2},$$

а ковариантные производные построены по «большой» метрике. Получены бозонные и фермионные высокотемпературные разложения для свободной энергии. В частности, для бозонов

$$\begin{aligned}
-F_b = \int d\mathbf{x} \sqrt{|g|} \left\{ \frac{\pi^2 \beta_T^{-4}}{90} - \frac{\beta_T^{-2}}{24} (\tilde{m}^2 - \frac{1}{2} \tilde{a}_2^{(2)} - \frac{1}{4} \tilde{a}_3^{(4)}) + \frac{\beta_T^{-1}}{12\pi} (\tilde{m}^3 + \frac{3}{4\tilde{m}} \tilde{a}_2^{(0)} + \dots) + \right. \\
\left. + \frac{1}{64\pi^2} \ln \frac{\tilde{m}^2 \beta_T^2 e^{2\gamma}}{16\pi^2} [\tilde{m}^4 + \tilde{m}^2 (\tilde{a}_2^{(2)} + \frac{3}{2} \tilde{a}_3^{(4)}) + 2\tilde{a}_2^{(0)} + \tilde{a}_3^{(2)} + \frac{3}{2} \tilde{a}_4^{(4)} + \frac{15}{4} \tilde{a}_5^{(6)} + \frac{105}{8} \tilde{a}_6^{(8)}] \right. \\
\left. - \frac{3}{128\pi^2} [\tilde{m}^4 - \tilde{m}^2 (\frac{2}{3} \tilde{a}_2^{(2)} + \frac{5}{3} \tilde{a}_3^{(4)}) - \frac{4}{3} (\tilde{a}_3^{(2)} + 2\tilde{a}_4^{(4)} + \frac{23}{4} \tilde{a}_5^{(6)} + 22\tilde{a}_6^{(8)})] + \dots \right\}, \quad (22)
\end{aligned}$$

где  $\beta_T = \sqrt{\xi^2} \beta$  – толмановская обратная температура,  $\tilde{m}^2$  – эффективная масса, а функции  $\tilde{a}_k^{(j)}$  суть коэффициенты теплового ядра, построенного по оператору  $H_G$ :

$$\tilde{a}_k(\omega, x) = \sum_{j=0}^{2k} \tilde{a}_k^{(j)}(x) (g^2 \omega^2)^{j/2}. \quad (23)$$

Коэффициенты при различных степенях  $\beta_T$  анализируются по отдельности. Явным вычислением показано отсутствие зависимости от вектора Киллинга коэффициента при логарифме

$$\begin{aligned}
\tilde{m}^4 + \tilde{m}^2 (\tilde{a}_2^{(2)} + \frac{3}{2} \tilde{a}_3^{(4)}) + 2\tilde{a}_2^{(0)} + \tilde{a}_3^{(2)} + \frac{3}{2} \tilde{a}_4^{(4)} + \frac{15}{4} \tilde{a}_5^{(6)} + \frac{105}{8} \tilde{a}_6^{(8)} = \\
= m^4 + \frac{1}{3} m^2 R + \frac{1}{90} (R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 6\nabla^2 R) + \frac{1}{36} R^2. \quad (24)
\end{aligned}$$

Вклад в конечную часть зависит от поля Киллинга:

$$\tilde{m}^4 - \tilde{m}^2 (\frac{2}{3} \tilde{a}_2^{(2)} + \frac{5}{3} \tilde{a}_3^{(4)}) + \dots = m^4 + \frac{m^2}{3} (R + \frac{5}{3} \xi^2 R_{\mu\nu} g^\mu g^\nu + \frac{11}{6} h^2) + \dots \quad (25)$$

Член при  $m^2$  дает вклад в гравитационный эффект сдвига масс.

**В разделе 3.4** выводятся различные формулы спуска, связывающие коэффициенты разложения теплового ядра в  $d$  и  $(d+1)$ -мерном пространстве. С их помощью на чисто алгебраическом уровне доказывается формула (24).

**Раздел 3.5** посвящен вычислению непертурбативных по полям поправок в свободную энергию. Для этого необходимо приближенное (не в виде асимптотического ряда по  $\tau$ ) выражение для теплового ядра  $\exp(-\tau H(\omega))$  на диагонали. С этой целью используется стандартная теория возмущений из квантовой механики в предположении, что коэффициенты  $H(\omega)$  практически постоянны. В качестве базы теории возмущений выбирается следующий свободный гамильтониан:

$$H_0 = (p_i + \frac{1}{2} x^j \omega f_{ji})^2 - \omega^2 (\xi^{-2} + b_i x^i + \frac{1}{2} E_{ij} x^i x^j) + m^2, \quad (26)$$

где

$$b_i := \partial_i \xi^{-2} \Big|_{x=0} = -2\xi^{-2} h_i, \quad E_{ij} := \partial_{ij} \xi^{-2} \Big|_{x=0} = \xi^{-2} (4h_i h_j - 2\bar{\nabla}_i h_j). \quad (27)$$

При совпадающих аргументах гауссов вклад в диагональ теплового ядра запишется как

$$G_0(\omega, \tau; \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{e^{3\pi i/2} \omega^{3/2} \sqrt{H^2 - 2\lambda_1}}{(4\pi)^{3/2} \text{sh}(\tau\omega\sqrt{H^2 - 2\lambda_1})} \left( \frac{\sin(\tau\omega\sqrt{2\lambda_2})}{\sqrt{2\lambda_2}} \right)^{-1/2} e^{S_0 + \tau m^2}, \quad (28)$$

где

$$S_0 = \omega \left[ \frac{b_{\perp}^2}{2\lambda_1^2} \sqrt{H^2 - 2\lambda_1} \left( \text{cth}(\tau\omega\sqrt{H^2 - 2\lambda_1}) - \frac{\text{ch}(\tau\omega H)}{\text{sh}(\tau\omega\sqrt{H^2 - 2\lambda_1})} \right) - \frac{b_{\parallel}^2}{2\lambda_2^2} \sqrt{2\lambda_2} \text{tg}\left(\frac{\tau\omega}{2} \sqrt{2\lambda_2}\right) - \tau\omega \left( \frac{1}{\xi^2} - \frac{b_{\perp}^2}{2\lambda_1} - \frac{b_{\parallel}^2}{2\lambda_2} \right) \right]. \quad (29)$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, H, b_{\perp}, b_{\parallel}$  – константы, связанные с собственными значениями и собственными векторами матриц  $f_{ij}$  и  $E_{ij}$ .

Полученное тепловое ядро используется для нахождения непертурбативных поправок в высокотемпературное разложение свободной энергии. Поправки имеют следующий вид

$$\sigma_{\nu}^l \sim e^{-cm/m_g}, \quad (30)$$

где  $m_g$  есть некоторая ковариантная комбинация метрики и вектора Киллинга. Такие поправки не могут быть сокращены контрчленами и описывают реальные физические явления.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы.

**В приложения** вынесены некоторые данные вспомогательного характера и громоздкие формулы.

## СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:*

1. Kalinichenko I. S. High-temperature expansion of the one-loop free energy of a scalar field on a curved background / I. S. Kalinichenko, P. O. Kazinski // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 87. – P.084036. – DOI : 10.1103/PhysRevD.87.084036. – 2,4/1,2 п.л.

2. Kalinichenko I. S. Non-perturbative corrections to the one-loop free energy induced by a massive scalar field on a stationary slowly varying in space gravitational background / I. S. Kalinichenko, P. O. Kazinski // JHEP. – 2014. – Vol. 111. – P.01408. – DOI : 10.1007/JHEP08(2014)111. – 5,8/2,9 п.л.
3. Kalinichenko I. S. One-loop thermodynamic potential of charged massive particles in a constant homogeneous magnetic field at high temperatures / I. S. Kalinichenko, P. O. Kazinski // Phys. Rev. D. – 2016. – Vol. 94. – P.125012. – DOI : 10.1103/PhysRevD.94.125012. – 3,4/1,7 п.л.
4. Калиниченко И. С. Недиагональные значения теплового ядра для скаляров в постоянном электромагнитном поле / И. С. Калиниченко, П. О. Казинский // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 11. – С. 182-186. – 0,7/0,3 п.л.

*переводная версия:*

Kalinichenko I. S. Nondiagonal values of the heat kernel for scalars in a constant electromagnetic field / I. S. Kalinichenko, P. O. Kazinski // Russian Physics Journal. – 2017. – Vol. 59, is. 11. – P.1942-1947. – DOI : 10.1007/s11182-017-0999-5.









Тираж 100 экз. Заказ 569.  
Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники.  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.  
Тел. (3822) 533018.