На правах рукописи

Гончаровский Михаил Михайлович

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2017

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Широков Игорь Викторович

Официальные оппоненты:

Брежнев Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра квантовой теории поля, профессор

Пальвелев Роман Витальевич, кандидат физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», кафедра теории функций и функционального анализа, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

Защита состоится 22 февраля 2018 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория 211).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/GoncharovskiiMM22022018.html

Автореферат разослан «_____» декабря 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Киреева Ирина Васильевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Ключевым моментом и отправной точкой в исследовании конкретной физической системы является решение описывающих её эволюцию уравнений движения. В зависимости от специфики и сложности задачи эта цель может быть достигнута различными способами: путём точного, приближённого или численного интегрирования. При этом особый статус всегда имеют точные аналитические решения, дающие наиболее полную информацию о динамике системы и позволяющие в принципе рассчитать все её характеристики, вычисление которых возможно в рамках используемой теории. Помимо чисто прикладного, точные решения представляют также и известный фундаментальный интерес. Так, в квантовой теории поля они выступают существенным элементом процедуры квантования; в окрестности точных решений классических полевых уравнений строятся ряды теории возмущений; в тех случаях, когда теория возмущений неприменима, идеализированные интегрируемые модели помогают понять характерные особенности поведения более реалистичных систем. Настоящая диссертация посвящена развитию некоторых подходов к проблеме нахождения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в различных областях теоретической физики, в частности в КТП.

В первой части работы рассматривается класс интегрируемых моделей для скалярного поля с нелокальным самодействием. Соответствующие интегро-дифференциальные уравнения, будучи нелинейными, демонстрируют многие характерные свойства нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, в частности, допускают гамильтоново представление, обладают солитонными решениями и бесконечным набором интегралов движения. Вместе с тем свойство интегрируемости может сохраняться при переходе от плоского пространства — времени к искривлённому при условии, что последнее обладает достаточно широкой группой движений.

Во второй части диссертации рассматривается проблема интегрирования линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) в частных производных с переменными коэффициентами. Спектр описываемых ими явлений чрезвычайно широк: от процессов переноса и упругих деформаций в неоднородных средах до динамики электронного газа в графенах и квантовых эффектов в интенсивных гравитационных полях. Центральное место среди методов нахождения точных решений линейных уравнений математической физики занимает метод разделения переменных, однако существуют весьма жёсткие ограничения на его применимость. В частности, необходимым является наличие достаточного числа коммутирующих операторов симметрии. Если это условие не выполнено, найти общее решение уравнения методом разделения переменных нельзя. В диссертации предлагается метод построения широких классов точных решений ЛДУ, использующий некоммутативные симметрии, который может оказаться полезным при исследовании некоторых неинтегрируемых уравнений.

Ещё одним мощным инструментом построения точных решений дифференциальных уравнений, применимым уже не только к линейным уравнениям, является групповой анализ. Классическим объектом исследования в групповом анализе являются дифференциальные инварианты групп преобразований. Знание дифференциальных инвариантов, во-первых, позволяет построить все уравнения, инвариантные относительно заданной группы, и, во-вторых, даёт возможность находить дополнительные классы точных решений, называемых *дифференциально инвариантными*. Важнейшими с точки зрения физических приложений примерами такого рода решений являются хорошо известные решения уравнений гидродинамики, описывающие потенциальное течение или течение несжимаемой жидкости, и решения уравнений Максвелла в Лоренцевой и Кулоновой калибровках. Заключительная часть диссертации посвящена проблеме построения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования, переводящих дифференциальные инварианты в новые инварианты более высокого порядка.

Степень разработанности темы исследования

На конец 60-х — начало 70-х гг. 20 века пришёлся взрывной рост интереса к нелинейным уравнениям математической физики, обусловленный открытием метода обратной задачи рассеяния. В короткое время различные вариации этого метода позволили проинтегрировать большое количество конкретных уравнений и выявить ряд их глубоких общих свойств, таких как гамильтонова структура, наличие солитонных решений и бесконечного числа обобщённых симметрий. С другой стороны, успехи в распространении этих результатов на уравнения с более чем двумя независимыми переменными до сих пор остаются весьма ограниченными. Отсутствуют и сколько-нибудь общие результаты по аналитическим решениям интегро-дифференциальных нелинейных уравнений. В диссертации проведено исследование некоторых модельных примеров интегрируемых нелинейных нелокальных уравнений, часть из которых допускает гамильтоново представление и обладает в то же время многомерными солитонными решениями.

Теория разделения переменных в скалярных линейных уравнениях второго порядка, имеющая длительную историю, была фактически завершена в работах В. Н. Шаповалова [1*], сформулировавшего необходимые и достаточные условия разделения переменных. В последние два десятилетия получила развитие теория некоммутативного интегрирования ЛДУ [2*], которую можно рассматривать как «квантовый» аналог метода А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [3*] интегрирования гамильтоновых систем. В основу данной теории легло использование некоммутативных алгебр симметрии, что позволило значительно расширить множество интегрируемых уравнений, в частности, получить точные решения уравнений Шрёдингера, Клейна — Гордона и Дирака на фоне ряда нештеккелевых пространств. Указанные два метода фактически исчерпывают список конструктивных способов получения общих решений ЛДУ. Однако даже в тех случаях, когда они не приводят к успеху, можно тем не менее рассчитывать на получение семейств частных решений, зависящих от некоторого числа произвольных функций или параметров. Один из возможных подходов к данной задаче, являющийся модификацией некоммутативного метода, подробно рассматривается в диссертационной работе.

Последовательная теория дифференциальных инвариантов была развита А. Трессе [4*] и получила широкую известность в 70-х гг. 20 века благодаря работам Овсянникова. В последние годы в теории инвариантов достигнут значительный прогресс благодаря развитому П. Ольвером [5*] алгебраическому методу вычисления инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. Тем не менее, во многих случаях (в особенности при больших размерностях пространств переменных) нахождение инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования по-прежнему сопряжено с большими вычислительными трудностями и может оказаться практически неосуществимым, вследствие чего представляет интерес развитие альтернативных подходов к отысканию инвариантов. В диссертационной работе предложен новый конструктивный метод построения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования для наиболее распространённого в приложениях случая проецируемых действий групп преобразований, обладающий определёнными преимуществами как перед классическим методом Трессе, так и перед алгебраическим методом Ольвера.

Цели и задачи работы

1. Изучить свойства нелинейного нелокального вполне интегрируемого обобщения уравнения Шрёдингера и его точных решений.

2. Исследовать класс интегрируемых дифференциальных уравнений с нелокальной нелинейностью на группах Ли и однородных пространствах.

3. Разработать метод нахождения частных решений линейных уравнений в частных производных, не интегрируемых методом разделения переменных и некоммутативным методом.

4. Исследовать связь инвариантных операторов на однородном пространстве группы Ли с операторами инвариантного дифференцирования той же группы, рассматриваемой как группа симметрий системы дифференциальных уравнений.

5. Разработать метод нахождения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования проецируемых действий групп преобразований.

Научная новизна

Основные результаты, изложенные в диссертации, впервые получены в работах автора и ранее известны не были. Впервые метод орбит коприсоединённого представления применён для нахождения частных решений уравнений КТП, предложена классификация таких решений. На основе идеи проекции с группы Ли на однородное пространство разработан новый общий метод построения дифференциальных инвариантов групп преобразований.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для построения интегрируемых моделей физических процессов и нахождения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, возникающих в различных областях теоретической физики, прежде всего в квантовой теории поля в искривлённом пространстве — времени.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе применяются методы дифференциальной геометрии, теории алгебр и групп Ли и их представлений, общей теории относительности, теории дифференциальных уравнений в частных производных, группового анализа дифференциальных уравнений.

Положения диссертации, выносимые на защиту

1. Предложено и исследовано интегрируемое обобщение уравнения Шрёдингера, содержащее нелокальную нелинейность, получено его общее решение. Показано, что уравнение допускает гамильтоново представление, выделены многомерные солитонные решения.

2. Предъявлен алгоритм получения частных решений интегро-дифференциальных уравнений с нелокальной нелинейностью специального вида на группах Ли и однородных пространствах.

3. Изучены свойства специального класса решений (называемых *вырожденными*) линейных дифференциальных уравнений, обладающих ал-

геброй операторов симметрии. Среди алгебр Ли до шестого порядка включительно, для которых известна классификация, найдены все алгебры, допускающие существование неинвариантных вырожденных решений.

4. Доказано, что каждый инвариантный дифференциальный оператор порядка s на однородном пространстве группы Ли порождает набор s операторов инвариантного дифференцирования проецируемого действия этой группы. Разработан общий метод нахождения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования проецируемых действий групп Ли.

Степень достоверности результатов

Все представленные в диссертационной работе результаты строго обоснованы и подкреплены многочисленными конкретными примерами. Правильность полученных в работе решений дифференциальных уравнений может быть легко проверена непосредственно дифференцированием.

Личный вклад автора

В работах, выполненных в соавторстве, соискатель принимал активное участие на всех этапах выполнения. Методы интегрирования квантовополевых уравнений и построения дифференциальных инвариантов, лежащие в основе диссертационной работы, получили развитие в совместных работах соискателя с И. В. Широковым. Наиболее важные результаты диссертации, перечисленные ниже, получены лично автором.

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на XLVI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2008), XXXII региональной научно-практической студенческой конференции «Молодёжь третьего тысячелетия» (Омск, 2008), Международной (43-й Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2012), Третьей международной конференции «Математическая физика и её приложения»

(Самара, 2012), XVI Международной конференции «Методы симметрии в физике» (Дубна, 2014).

Структура и объём диссертации

Диссертация объёмом 113 печатных страниц состоит из введения, четырёх глав, двенадцати параграфов, заключения и списка литературы из 110 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы и дано краткое изложение её содержания.

Глава 1 содержит минимум теоретических сведений, необходимый для дальнейшего последовательного изложения результатов работы. В **первом параграфе** дан обзор известных результатов по теории орбит коприсоединённого представления (K-орбит) групп Ли и инвариантных операторов на однородных пространствах. Приводится классификация K-орбит, обсуждается образуемая ими структура симплектического слоения, вводится важное для приложений понятие λ-*представления* — операторно неприводимое представление алгебры Ли $\mathcal{G} \simeq T_e G$ в пространстве функций на лагранжевом подмногообразии к K-орбите группы G:

$$[\ell_X, \ell_Y] = \ell_{[X, Y]}, \quad X, Y \in \mathcal{G}, \quad K(\ell) = \kappa(j)\,\mathrm{Id}.$$

Здесь ℓ — операторы, реализующие λ-представление, K — операторы Казимира алгебры $\mathcal{G}$, j — спектральный параметр. Далее излагатся теория инвариантных операторов на однородных G-пространствах и алгоритм их нахождения. Важность последних обусловлена тем, что с их помощью могут быть записаны в инвариантном виде уравнения, допускающие алгебру симметрии, а также их связью с операторами инвариантного дифференцирования.

Во **втором параграфе** на основе теории K-орбит строится гармонический анализ на группах Ли и однородных пространствах, занимающий центральное место в некоммутативном интегрировании дифференциальных уравнений. При этом ключевую роль играет специальное представление T группы Ли G, являющееся поднятием на группу λ-представления:

$$\left.\frac{\partial T_{\exp(tX)}\varphi_j(q)}{\partial t}\right|_{t=0} = \ell_X \varphi_j(q), \quad T_g \varphi_j(q) = \int D^j_{qq'}(g)\varphi_j(q')\,\mathrm{d}\mu(q'). \qquad (1)$$

Матричные элементы $D^j_{qq'}(g)$ этого представления удовлетворяют переопределённой системе ЛДУ и образуют полную ортогональную систему функций на группе, что позволяет ввести с их помощью обобщённое преобразование Фурье. Обсуждаются свойства определённого таким образом преобразования, важные с точки зрения дальнейших применений. В частности, соотношения (1) дают возможность преобразовывать инвариантные векторные поля в операторы λ-представления, зависящие от меньшего числа переменных.

Третий параграф содержит сжатое изложение классической теории дифференциальных инвариантов, являющейся основой группового анализа дифференциальных уравнений. Излагается стандартный метод нахождения базисов дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования, обсуждаются его недостатки, мотивирующие поиск альтернативных подходов.

Главы 2, 3 и 4 составляют оригинальную часть диссертации.

Глава 2 посвящена исследованию класса интегро-дифференциальных уравнений, содержащих линейную дифференциальную часть и нелокальную нелинейность специального вида. Такие уравнения могут быть интересны как модельные примеры динамики полей с нелокальным самодействием. В **первом параграфе** подробно рассмотрено одно обобщение уравнения Шрёдингера с нелокальной нелинейностью типа свёртки

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \psi(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \Delta\,\psi(t,\mathbf{x}) = \int \psi(t,\mathbf{x}_1)\psi(t,\mathbf{x}_2)\overline{\psi(t,\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2-\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_1\mathrm{d}\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}\in R^n,$$

обладающее свойством полной интегрируемости. Получено его общее решение и решения в виде произвольного числа невзаимодействующих солитонов. Показано, что, так же как и все известные нелинейные дифференциальные уравнения, обладающие солитонными решениями, данное уравнение может рассматриваться как бесконечномерная вполне интегрируемая гамильтонова система; описана соответствующая гамильтонова структура, в явном виде произведён переход к переменным действие

— угол, выписан общий вид интегралов движения. Замечательной особенностью рассматриваемого уравнения является возможность непосредственного обобщения на случай произвольного числа пространственных переменных, что позволяет получать многомерные солитонные решения.

Во **втором параграфе** идея построения интегрируемых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений распространяется на случай, когда неизвестная функция задана на многообразии некоторой группы Ли G. Наличие групповой операции позволяет обобщить понятие свёртки на пространство функций, определённых на группе, и рассмотреть класс уравнений вида

$$H(\partial_t, \eta)\psi(t,g) = \int \psi(t,g_1)\psi(t,g_2)\overline{\psi(t,g_1 g_2 g^{-1})}\,\mathrm{d}\mu(g_1)\mathrm{d}\mu(g_2), \quad g \in G,$$

где H — некоторый линейный оператор, построенный по правоинвариантным полям η, μ — инвариантная мера на группе G. Для редукции уравнений этого типа к уравненям с меньшим числом независимых переменных используется гармонический анализ, изложенный во втором параграфе главы I. В качестве примера рассматривается уравнение с линейной частью типа Клейна — Гордона на группе SO(3).

Третий параграф завершает развитую в предыдущих двух параграфах концепцию рассмотрением уравнений на однородных G-пространствах $M = G/H$. В нём показано, что с помощью канонической проекции $\pi : G \to M$ при некоторых дополнительных условиях можно получать интегрируемые нелинейные нелокальные уравнения на однородных пространствах. Реализация механизма иллюстрируется примером уравнения на евклидовой плоскости, на которой транзитивно действует группа E(2).

В **главе 3** рассматривается один из возможных подходов к задаче построения частных решений линейных уравнений в частных производных, инвариантных относительно некоторой алгебры симметрии, но не допускащих разделения переменных и не интегрируемых в некоммутативном смысле. В **первом параграфе** излагается идея разработанного метода, заключающаяся в ограничении исходного уравнения на инвариантные относительно действия группы симметрии подпространства функций L_s, такие что $L_{s+1} \subset L_s$. Это достигается путём наложения на решение дополнительных дифференциальных условий, совместных с исходным уравнением и позволяющих (ценой потери части информации о решении) уменьшить число независимых переменных в нём. Решения, принадлежащие таким инвариантным подпространствам, мы называем *вырожденными.* Вводится понятие *ранга вырождения* решения — величины, характеризующей степень понижения общности решения. Предлагается классификация всех решений ЛДУ по рангу вырождения. Формулируется и доказывается теорема, определяющая условия, при которых применение указанной процедуры сводит задачу к обыкновенному дифференциальному или алгебраическому уравнению.

Теорема 1 *Пусть линейное дифференциальное уравнение с N независимыми переменными допускает n-мерную алгебру симметрии дифференциальных операторов первого порядка X_i. Тогда при ограничении на инвариантное подпространство L_s оно редуцируется к ЛДУ с*

$$\tilde{N} = N - \dim M + \max\{0, \dim M + i_M - \frac{n+r}{2} - s\}$$

независимыми переменными, где M — интегральная поверхность векторных полей X_i.

Здесь r — индекс алгебры симметрии, равный числу независимых функций Казимира, i_M — индекс однородного пространства M, т. е. число функциональных связей между генераторами X_i. Среди алгебр Ли до шестого порядка включительно, для которых известна классификация, найдены все алгебры, допускающие существование неинвариантных вырожденных решений. Инвариантные решения хорошо известны в групповом анализе дифференциальных уравнений, поэтому представляют второстепенный интерес с точки зрения рассматриваемого метода. Так же как и в предыдущей главе, ключевую роль во всех построениях играет теория K-орбит и λ-представление алгебры симметрии.

Во **втором параграфе** приводится пример построения вырожденных решений неинтегрируемого уравнения Клейна — Гордона на римановом многообразии с шестимерной неразрешимой группой движений. Для метрики общего вида задача сведена к ОДУ, в частном случае метрики, зависящей от трёх произвольных постоянных, получено явное решение. Следует отметить, что, хотя в качестве иллюстративного примера мы используем уравнение Клейна — Гордона, полученные результаты носят общий характер и могут быть распространены фактически на любые (не обязательно скалярные) линейные уравнения. В **третьем параграфе** рассматривается пример произвольного скалярного уравнения, инвариантного относительно просто-транзитивного действия группы $\mathrm{St}(1, \mathrm{R})$. Этот пример интересен тем, что демонстрирует редкий случай, когда λ-представление не может быть осуществлено операторами первого порядка, что, однако, не препятствует реализации схемы построения решения.

В **главе 4** предлагается общий метод построения дифференциальных инвариантов проецируемых действий групп Ли, в основе которого лежит подход, альтернативный подходам Трессе и Ольвера. Проецируемым называется действие группы G на декартовом произведении $M \times U$, допускающее корректное ограничение на первый сомножитель:

$$gx = x'(x, g), \quad gu = u'(x, u, g), \quad x \in M,\ u \in U,\ g \in G.$$

Применительно к анализу систем дифференциальных уравнений это значит, что независимые переменные x преобразуются одинаково при всех значениях зависимых переменных u. Без ограничения общности множество независимых переменных можно считать однородным пространством группы G: $M = H \backslash G$, где H — замкнутая подгруппа в G. Симметрии большинства физически интересных задач могут быть описаны в терминах проецируемых действий. В **первом параграфе** приводятся некоторые замечания технического характера и обсуждаются пределы применимости подхода. Идея его состоит в том, чтобы вместо действия группы на однородных пространствах, на которые расслаивается пространство независимых переменных исходного уравнения, рассматривать действие группы на самой себе правыми сдвигами. Базис инвариантов этого действия оказывается состоящим из инвариантов нулевого порядка, а базис операторов инвариантного дифференцирования — из правоинвариантных полей, которые всегда могут быть найдены алгебраическим путём. Инварианты исходного действия могут затем быть получены из этого базиса как проекции с группы на однородное пространство.

Главным результатом **второго параграфа** является следующая

Теорема 2 *Пусть* $\chi = a^I(x)\partial/\partial x^I$ *— инвариантный дифференциальный оператор порядка* s*, а* $\{J_1,\ ..., J_{s-1}\}$ *— произвольный набор дифференци-*

альных инвариантов. Тогда $\delta^{(s)} = a^I(x)D_I$ *и* $\delta^{(k)} = [\delta^{(k+1)}, J_k]$ *— операторы инвариантного дифференцирования порядка* s *и* $k = 1, \ ..., s-1$ *соответственно.*

Здесь I обозначает мультииндекс, а D — оператор полной производной:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial x^a} + u^\alpha_a \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u^\alpha_{ab}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_b} + ..., \qquad u^\alpha_a = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^a} \quad \text{и т. д.}$$

Данная теорема, устанавливающая соответствие между инвариантными операторами и операторами инвариантного дифференцирования, даёт возможность во многих случаях находить последние алгебраическим путём.

В **третьем параграфе** доказывается, что задача построения базиса дифференциальных инвариантов проецируемых действий сводится к нахождению инвариантов действия группы G на множестве $G \times U$. Когда базис v^α этих инвариантов найден, инвариант любого порядка k может быть выражен в виде $\underset{(k)}{v} = \{(\eta_{a_1}...\eta_{a_k})v^\alpha\}$, где скобками обозначено симметризованное произведение правоинвариантных векторных полей. Следующая теорема показывает, что инварианты исходного действия группы на $M \times U$ могут быть сконструированы из инвариантов $\underset{(k)}{v}$.

Теорема 3 *Произвольный дифференциальный инвариант* J *порядка* s *проецируемого действия группы* G *на множестве* $M \times U$*,* $M = H\backslash G$*, удовлетворяет уравнению*

$$\eta_X J\big(v, \underset{(1)}{v}, ..., \underset{(s)}{v}\big) = 0, \quad X \in \mathrm{Lie}\, H.$$

Каждый оператор инвариантного дифференцирования первого порядка имеет вид $\delta = \Delta^a(v, \underset{(1)}{v}, \dots)\, \eta_a$*, где функции* Δ^a *удовлетворяют уравнению*

$$\eta_X \Delta + \mathrm{ad}_X\big|_{\mathcal{P}}\Delta = 0, \quad X \in \mathrm{Lie}\, H, \quad \mathcal{P} \oplus \mathrm{Lie}\, H = \mathrm{Lie}\, G.$$

Данная теорема даёт решение общей задачи построения дифференциальных инвариантов проецируемого действия. Существенно, что разработанный в диссертации подход является бескоординатным: возникающие при его реализации уравнения полностью определяются структурными константами алгебры симметрии и не зависят от конкретного вида действия группы. Применение метода иллюстрируется на примере группы симметрий уравнения Дирака для частицы во внешнем гравитационном поле.

Список публикаций автора

Статьи в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук:

1. **Гончаровский М. М.** Интегрируемый класс дифференциальных уравнений с нелокальной нелинейностью на группах Ли / М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 161, № 3. – С. 332 – 345. – DOI: 10.4213/tmf6445. – 0.9 / 0.45 п. л.

в переводной версии журнала:

Goncharovskii M. M. An integrable class of differential equations with nonlocal nonlinearity on Lie groups / M. M. Goncharovskii, I. V. Shirokov // Theoretical and Mathematical Physics. – 2009. – Vol. 161, is. 3. – P. 1604 – 1615. – DOI: 10.1007/s11232-009-0149-5.

2. **Гончаровский М. М.** Классификация вырожденных решений линейных дифференциальных уравнений / М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2011. – Т. 54, № 5. – С. 20 – 26. – 0.4 / 0.2 п. л.

в переводной версии журнала:

Goncharovskii M. M. Classification of degenerate solutions of linear differential equations / M. M. Goncharovskii, I. V. Shirokov // Russian Physics Journal. – 2011. – Vol. 54, is. 5. – P. 527 – 535. – DOI: 10.1007/s11182-011-9649-5.

3. Бреев А. И. Уравнение Клейна — Гордона с нелокальной нелинейностью специального вида на коммутативных однородных пространствах с инвариантной метрикой / А. И. Бреев, **М. М. Гончаровский**, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56, № 7. – С. 8 – 14. – 0.4 / 0.15 п. л.

в переводной версии журнала:

Breev A. I. Klein – Gordon equation with a special type of nonlocal nonlinearity in commutative homogeneous spaces with invariant metric / A. I. Breev,

M. M. Goncharovskii, I. V. Shirokov // Russian Physics Journal. – 2013. – Vol. 56, is. 7. – P. 731 – 739. – DOI: 10.1007/s11182-013-0092-7.

4. **Гончаровский М. М.** Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования проецируемого действия групп Ли / М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. – 2015. – Т. 183, № 2. – С. 202 – 221. – DOI: 10.4213/tmf8792. – 1.2 / 0.6 п. л.

в переводной версии журнала:

Goncharovskii M. M. Differential invariants and operators of invariant differentiation of the projectable action of Lie groups / M. M. Goncharovskii, I. V. Shirokov // Theoretical and Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 183, is 2. – P. 619 – 636. – DOI: 10.1007/s11232-015-0285-z.

Публикации в прочих научных изданиях:

5. **Гончаровский М. М.** Применение обобщённого гармонического анализа для редукции нелинейных интегродифференциальных уравнений на многообразиях групп Ли / М. М. Гончаровский // Молодёжь третьего тысячелетия : тезисы докладов XXXII региональной научно-практической студенческой конференции. Омск, апрель 2008 г. – Омск, 2008. – С. 257 – 258. – 0.1 п. л.

6. **Гончаровский М. М.** Применение обобщённого гармонического анализа для редукции нелинейных интегродифференциальных уравнений на многообразиях групп Ли / М. М. Гончаровский // Студент и научно-технический прогресс: математика: материалы XLVI международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 27 – 30 апреля 2008 г. – Новосибирск, 2008. – С. 61. – 0.1 п. л.

7. **Гончаровский М. М.** Уравнение Шрёдингера с нелокальной нелинейностью как интегрируемая гамильтонова система / М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Сборник научных трудов Омского института водного транспорта (филиала) ФГОУ ВПО «Новосибирская государственная академия водного транспорта». – Омск, 2009. – Вып. 7. – С. 112 – 115. – 0.2 / 0.1 п. л.

8. **Гончаровский М. М.** Интегрируемый класс нелинейных интегродифференциальных уравнений на однородных пространствах / М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Сборник научных трудов Омского инсти-

тута водного транспорта (филиала) ФГОУ ВПО «Новосибирская государственная академия водного транспорта». – Омск, 2011. – Вып. 9. – С. 159 – 163. – 0.3 / 0.15 п. л.

9. **Гончаровский М. М.** Вырожденные решения линейных дифференциальных уравнений, допускающих некоммутативную алгебру симметрии / М. М. Гончаровский // Современные проблемы математики: тезисы международной (43-й всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург, 29 января – 05 февраля 2012 г. – Екатеринбург, 2012. – С. 325 – 326. – 0.1 п. л.

10. **Гончаровский М. М.** Вырожденные решения линейных дифференциальных уравнений, допускающих некоммутативную алгебру симметрии / М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Математическая физика и её приложения: материалы третьей международной конференции. – Самара, 27 августа – 01 сентября 2012 г. – Самара, 2012. – С. 99 – 100. – 0.1 / 0.05 п. л.

Список литературы

[1*] Шаповалов В. Н. Пространства Штеккеля / В. Н. Шаповалов // Сибирский математический журнал. – 1979. – Т. 20, № 5. – С. 1117 – 1130.

[2*] Шаповалов А. В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. – 1995. – Т. 104, № 2. – С. 195 – 213.

[3*] Мищенко А. С. Обобщённый метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко // Функциональный анализ и его приложения. – 1978. – Т. 12, № 2. – С. 46 – 56.

[4*] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations / A. Tresse // Acta Math. – 1894. – Vol. 18. – P. 1 – 88.

[5*] Olver P. J. Differential invariant algebras / P. J. Olver // Comtemp. Math. – 2011. – Vol. 549. – P. 95 – 121.

Тираж 100 экз. Заказ 496.
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.