

МАТЕМАТИКА

УДК: 519.711.3, 514.181.22
DOI 10.17223/19988621/48/1

М.С. Бухтяк

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПСЕВДОМИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследован геометрический подход к моделированию формы тонкого упругого ортотропного материала, натянутого на замкнутый контур. Для моделирования используется класс поверхностей, для которых отношение главных кривизн постоянно. Этот класс (псевдоминимальных поверхностей) введен автором в 2016 г. Для построения поверхности, близкой к псевдоминимальной, применен метод конечных элементов. Построен алгоритм, позволяющий для заданных четырех узлов сетки (не обязательно ортогональной и равномерной) рассчитать положение переменного пятого узла, занимающего положение внутри ячейки. Данный алгоритм является модификацией известного алгоритма, который эффективен для конечно-элементного моделирования минимальных поверхностей. Модификация алгоритма заключается в учете ортотропных свойств материала. Координаты пятого узла вычисляется по координатам четырех узлов с использованием весовых коэффициентов, отражающих соотношение главных кривизн. Алгоритм модифицирован в более удобный алгоритм аналогично тому, как он модифицировался (Е.В. Попов, 1990-е годы) для моделирования минимальных поверхностей. Для апробации алгоритма применена псевдоминимальная поверхность вращения четвертого порядка. Автор имеет основание считать алгоритм пригодным для моделирования.

Ключевые слова: ортотропия, псевдоминимальная поверхность, метод конечных элементов, алгоритм, метод натянутых сеток.

1. Постановка задачи

Автор продолжает исследование о моделировании деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора [1–7]. Если главные кривизны поверхности

$$\Sigma : \bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^2$$

упорядочены номерами (k_1 и k_2), то псевдосредней кривизной веса a называется величина

$$H_a = k_1 + ak_2, \quad a = \text{const}, \quad a \neq 0,$$

а поверхность, для которой

$$H_a = 0, \tag{1.1}$$

называется псевдоминимальной поверхностью веса a . В [7] приведено дифференциальное уравнение в частных производных, определяющее (локально) класс (1.1).

При $a = 1$ получаем минимальную поверхность. Для приближенного задания минимальных поверхностей в [8] приведен исключительно удачный метод конечно-элементного моделирования. Существенная часть метода – метод натянутых сеток – позволяет свести задачу о минимизации суммы площадей элементарных ячеек конечно-элементной модели к задаче о минимизации суммы квадратов длин ребер.

Естественной представляется задача о построении конечно-элементной модели для поверхности класса (1.1).

2. Ячейка со свободным центральным узлом. Параболическое приближение

Основным элементом конечно-элементной модели будем полагать четырехвершинник $ABCP$, «не слишком удаленный» от моделируемой поверхности и «не слишком отличающийся» от прямоугольника. При этом точки A, B составляют пару противоположных вершин, а C, P – еще одну пару противоположных. Обозначим π плоскость, равноудаленную от отрезков $[AB]$ и $[CP]$. Оси Ox, Oy помещаем в плоскость π таким образом, что точки – вершины – получают координаты $A(-x_0, 0, h), B(x_0, 0, h), C(x_1, y_1, -h), P(x_2, y_2, -h)$. О взаимном расположении поверхности, плоскости и точек дает представление рис. 1.

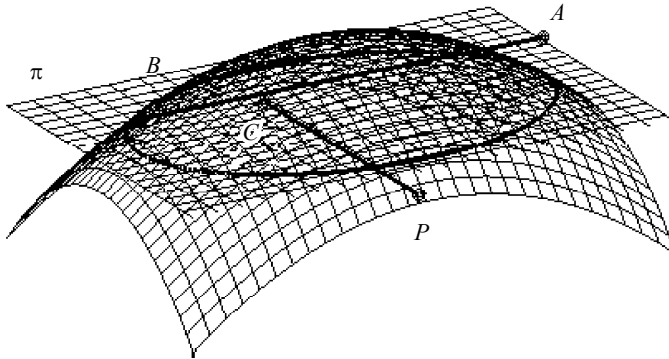


Рис. 1. Взаимное расположение поверхности, плоскости и вершин
Fig. 1. Mutual arrangement of the surface, plane, and vertices

Существенную роль играет аффинный центр четырехугольника

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{4}, 0\right). \quad (2.1)$$

Соприкасающийся параболоид поверхности

$$\Sigma: \bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^2$$

в декартовой системе координат $(OXYZ)$, присоединенный к точке поверхности O так, что оси OX и OY касаются линий кривизны, описывается уравнением

$$Z = \frac{1}{2}(k_1 X^2 + k_2 Y^2). \quad (2.2)$$

Если нормальная плоскость α образует с осью OX угол φ , то кривизна соответствующего нормального сечения

$$k(\alpha) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Нормальное сечение параболоида (2.2) плоскостью α – парабола, кривизна которой в вершине равна $k(\alpha)$. Плоскость π – приближение касательной плоскости, Прямая n , проведенная через срединные точки отрезков $[AB]$, $[CP]$ – приближение нормали поверхности. Плоскости L_{AB} , L_{CP} , проведенные через (AB) и (CP) параллельно n – приближения нормальных плоскостей.

Будем полагать, что в точке M_0 поверхности, окрестность которой моделируется параболоидом (2.2), первое главное направление задано вектором \mathbf{w} , не обязательно параллельным плоскости π . Его нормированная проекция на плоскость π в системе координат $(OXYZ)$ пусть имеет вид

$$\mathbf{v} = \{\cos t, \sin t, 0\}. \quad (2.3)$$

Плоскости L_{AB} , L_{CP} пересекают параболоид (2.2) по параболом G_{AB} , G_{CP} . Их кривизны в вершине, в отличие от кривизн нормальных сечений, считаем неориентированными, а значит, неотрицательными. Их значения равны соответственно

$$k_{AB} = |k_1| \cos^2 c + |k_2| \sin^2 c,$$

$$k_{CP} = \frac{|k_1|((x_1 - x_2) \cos t + \sin t (y_1 - y_2))^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} +$$

$$+ |k_2| \left(1 - \frac{((x_1 - x_2) \cos t + \sin t (y_1 - y_2))^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right).$$

Мы строим конечно-элементную модель псевдоминимальной поверхности, следовательно [1], полагаем, что

$$|k_1| = a |k_2|, \quad a > 0, \quad a = \text{const}.$$

Пусть E – срединная точка для $[AB]$, а D – для $[CP]$. Парабола G_{AB} в плоскости L_{AB} имеет вершину на прямой (ED) (проходящей через аффинный центр (2.1)), а отрезок $[AB]$ служит для неё хордой. Аналогично, парабола G_{CP} в плоскости L_{CP} также имеет вершину в той же точке на той же прямой, а отрезок $[CP]$ – её хорда. При этом кривизны парабол в их общей вершине W суть k_{AB} и k_{CP} . Точка W – вершина параболоида, моделирующего «истинный» параболоид (2.2).

Точка W делит отрезок $[ED]$ в отношении $k_{AB} : k_{CP}$. Записав параметрическое уравнение прямой (ED) в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{D} - \mathbf{E}),$$

убеждаемся в том, что

$$\mathbf{W} = \mathbf{M} + \lambda_0(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \quad (2.4)$$

при

$$\lambda_0 = \frac{(y_1 - y_2)(-1 + a)((y_1 - y_2)(1 - 2\cos^2 t) + 2(x_1 - x_2)\sin t \cos t)}{\left[8(x_1 - x_2)(-1 + a)\cos t((x_1 - x_2)\cos t + \sin t(y_1 - y_2)) + 4(y_1 - y_2)^2 a + 4(y_1 - y_2)^2 + 8(x_1 - x_2)^2 \right]}.$$

Тем самым положение точки W определено.

3. Модификация метода натянутых сеток

В работе [8] и в ряде других публикаций Е.В. Попов, решая задачу о конечно-элементном моделировании минимальных поверхностей, разработал алгоритм – метод натянутых сеток (МНС), заменяющий минимизацию суммы площадей элементарных треугольников сетки минимизацией суммы квадратов длин ребер сети. В нашем случае отыскание точки (2.4) также можно заменить аналогичной процедурой, приводящей к тому же самому результату, однако минимизируется не сумма квадратов длин отрезков, а сумма их с весовыми коэффициентами. Именно, пусть T – искомая точка. Она находится из условия достижения минимума выражения

$$|AT|^2 K_{CP} + |BT|^2 K_{CP} + |CT|^2 K_{AB} + |PT|^2 K_{AB}.$$

Прямым вычислением устанавливается, что

$$T = W.$$

Отметим, что система координат, в которой совершались построения и вычисления, внутренним образом присоединена к четырехугольнику $ACBP$, и потому результат носит инвариантный характер. Результат применения указанного метода для фиксированных точек A, B, C, P и различных значений a показан на рис. 2 и 3. На них же нанесены параболы, лежащие в основе данного метода.

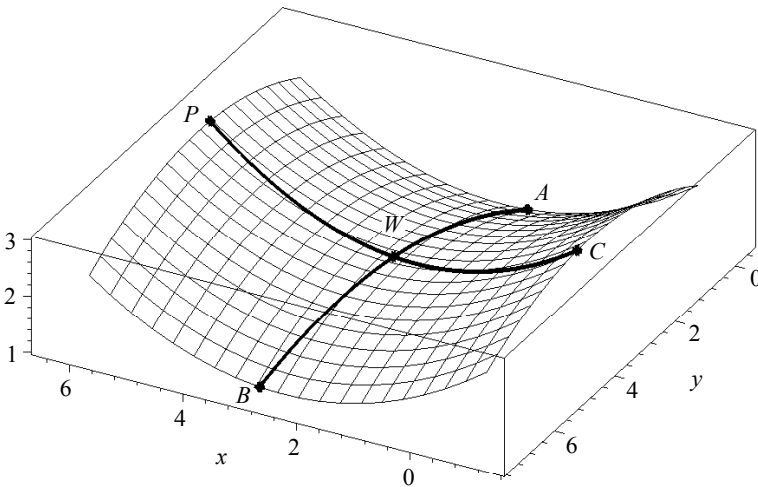


Рис. 2. Кусок поверхности при $a = 1/2$

Fig. 2. Piece of the surface for $a = 1/2$

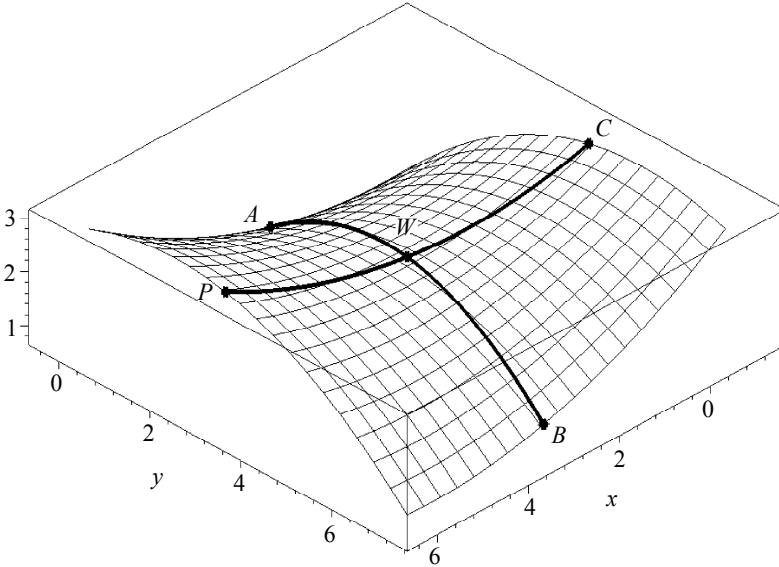


Рис. 3. Поверхность при $a = 2$
 Fig. 3. Surface for $a = 2$

4. Прямоугольная сетка

Пусть точки A, B, C, P таковы, что их проекции на некоторую плоскость суть узлы ортогональной сети. Система координат пусть выбрана так, что координаты указанных точек таковы:

$$A(x_0 - h_x, y_0, z_A), B(x_0 + h_x, y_0, z_B), C(x_0, y_0 - h_y, z_C), P(x_0, y_0 + h_y, z_P).$$

Первое главное направление пусть задано вектором (2.3).

Переменный узел – точка M . Найдем положение этой точки, применив модифицированную процедуру метода натянутых сеток, описанную выше. Задача сводится к минимизации функции

$$f(z) = a(|AM|^2 + |BM|^2) + |CM|^2 + |PM|^2.$$

В результате получаем точку

$$M \left(x_0, y_0, \frac{a(z_A + z_B) + z_C + z_P + (z_C + z_P - z_A - z_B)(a-1)\cos^2 t}{2(a+1)} \right).$$

Третью координату точки M представим в виде

$$Z = \frac{a(z_P + z_C) + z_A + z_B}{2(a+1)} + \frac{(-z_C - z_P + z_A + z_B)(a-1)t^2}{2(a+1)} + O(t^4).$$

Для значений t , «не слишком уклоняющимся» от нуля, естественно считать слабое

$$Z_0 = \frac{a(z_P + z_C) + z_A + z_B}{2(a+1)} \tag{4.1}$$

главной частью третьей координаты, а слагаемое

$$\Delta Z = \frac{(-z_c - z_p + z_a + z_b)(a-1)t^2}{2(a+1)} \quad (4.2)$$

оценкой погрешности, приносимой за счет отклонения t от нуля.

Третьей координата есть приближение псевдоминимальной поверхности $Z = F(x, y)$. Полагаем

$$Z_0 = F(x_0, y_0).$$

Удерживая слагаемые до второго порядка малости включительно, принимаем следующие приближения:

$$\begin{aligned} z_A(x_0, y_0) &\approx F(x_0, y_0) - F_x(x_0, y_0)h_x + \frac{1}{2}F_{xx}(x_0, y_0)h_x^2, & z_B(x_0, y_0) &\approx \\ &\approx F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)h_x + \frac{1}{2}F_{xx}(x_0, y_0)h_x^2, \\ z_C(x_0, y_0) &\approx F(x_0, y_0) - F_y(x_0, y_0)h_y + \frac{1}{2}F_{yy}(x_0, y_0)h_y^2, & z_P(x_0, y_0) &\approx \\ &\approx F_0(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)h_y + \frac{1}{2}F_{yy}(x_0, y_0)h_y^2. \end{aligned}$$

В итоге приводим оценку (4.2) к виду

$$\Delta Z \approx \frac{(F_{xx}(x_0, y_0)h_x^2 - F_{yy}(x_0, y_0)h_y^2)(a-1)t^2}{2(a+1)}. \quad (4.3)$$

Отметим, что это – оценка абсолютной погрешности. Относительная же погрешность в виде

$$\frac{\Delta Z}{Z_0} \quad (4.4)$$

имеет смысл лишь в том случае, когда в уравнении псевдоминимальной поверхности

$$z = F(x, y) + C, \quad C = \text{const} \quad (4.5)$$

допустимо (из тех или иных соображений) лишь значение $C = 0$, поскольку отношение (4.4) зависит от выбора C .

Относительная (но не безразмерная) оценка, инвариантная относительно сдвигов (4.5), возможна в виде

$$\frac{\Delta Z}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \frac{(F_{xx}(x_0, y_0)h_x^2 - F_{yy}(x_0, y_0)h_y^2)(a-1)t^2}{2(a+1)\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}.$$

Перепишем оценку (4.3), применив её в произвольной точке области определения исследуемой функции. Тогда приходим к выражению

$$G(x, y) = \frac{\left(-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y) \right) h_y^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y) \right) h_x^2 \right) (a-1)t(x, y)^2}{2(a+1)}. \quad (4.6)$$

Интегральным средним квадратичным значением погрешности, вносимой отклонением первого главного направления от оси абсцисс, служит величина

$$\Delta = \sqrt{\frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (G(x, y))^2 dx dy}{(x_{\max} - x_{\min})(y_{\max} - y_{\min})}}. \quad (4.7)$$

Формула (4.1) положена в основу алгоритма моделирования псевдоминимальной поверхности по массиву точек на границе и заданному числу a – в предположении, что первое главное направление «не слишком отличается» от направления локальной оси Oz .

5. Частный класс

Класс псевдоминимальных поверхностей вращения содержит исключительно просто устроенное 1-семейство алгебраических поверхностей четвертого порядка, а именно тех, для которых $a = \frac{1}{2}$. Вокруг оси Ox вращается линия

$$y = 0, \quad z = \frac{x^2}{4C} + C \quad (4.8)$$

(C – параметр семейства). Представление о семействе линий дает рис. 4.

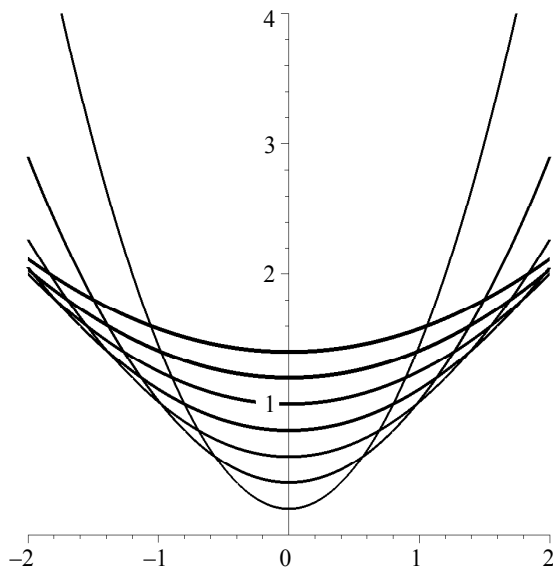


Рис. 4. Линии (4.8) при $C \in \{0.2, 0.4, \dots, 1.4\}$.

Наиболее тонкая линия при $C = 0.2$, наиболее толстая – при $C = 1.4$

Fig. 4. Lines (4.1) for $C \in \{0.2, 0.4, \dots, 1.4\}$.

The line is thinnest for $C = 0.2$, the thickest, for $C = 1.4$

При $C = 1$ некоторый кусок поверхности есть график функции

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \sqrt{x^4 + 8x^2 + 16 - 16y^2}. \quad (4.9)$$

Изображение куска поверхности – на рис. 5.

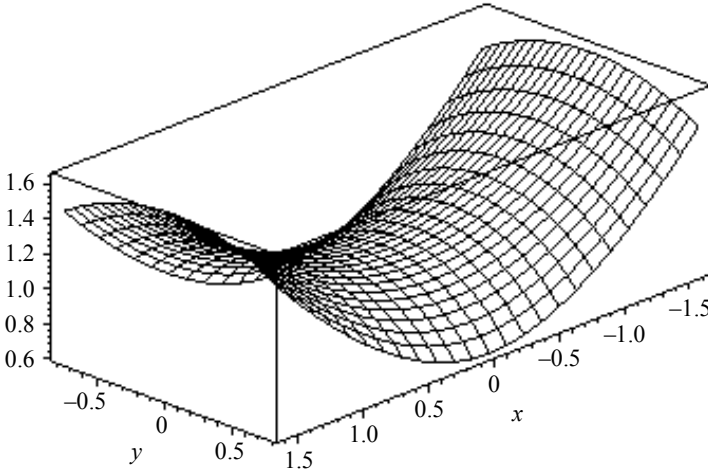


Рис. 5. Изображение куска поверхности
Fig. 5. Image of a surface piece

Следует отметить обстоятельство, благоприятное для конечно-элементного моделирования: проекции линий кривизны первого семейства на координатную плоскость xOy (рис. 6) имеют направления, «не слишком отличающиеся» от направления оси Ox .

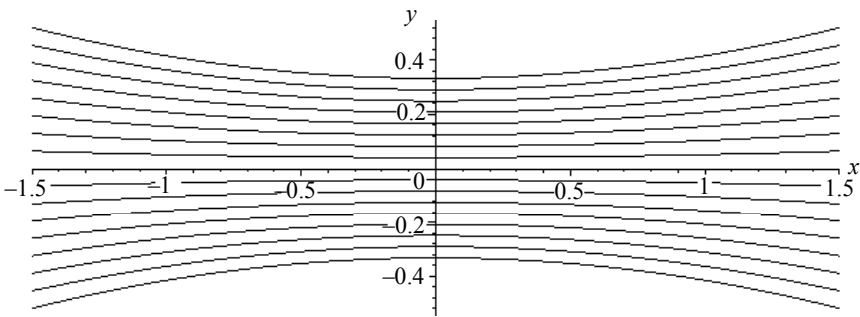


Рис. 6. Проекция линий кривизны первого семейства на координатную плоскость xOy
Fig. 6. Projections of curvature lines of the first family onto the coordinate plane xOy

Применен алгоритм, описанный в пункте 4. Построена прямоугольная сетка в плоскости xOy с делениями 40×40 . граничные условия – точки на границе прямоугольной области (рис. 7).

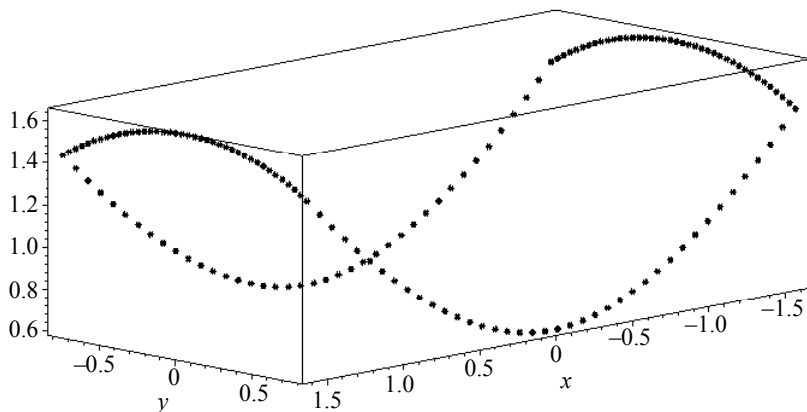


Рис. 7. Массив точек на границе куска поверхности
Fig. 7. Point array on the boundary of the surface piece

На выходе – массив точек, приближающий истинную поверхность (рис. 8). Изображение получено с использованием графического пакета Surfer,

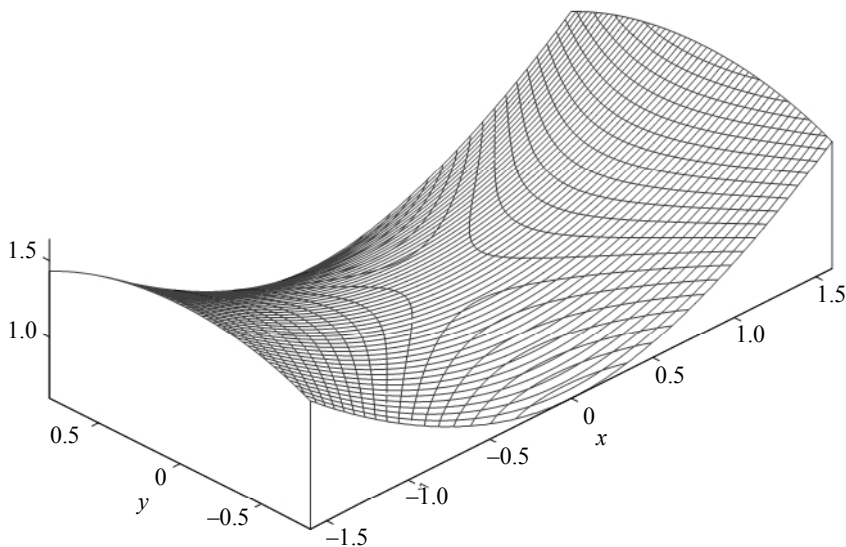


Рис. 8. Изображение массива точек, приближающего исследуемую поверхность
Fig. 8. Image of point array approximating the studied surface

Относительное среднеквадратичное отклонение точечного массива (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, \dots, N$) от поверхности вычислено по формуле

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f(x_i, y_i) - z_i)^2}{N(x_n - x_1)(y_m - y_1)}} \approx 0.00545.$$

Для подсчета погрешности по формулам (4.6), (4.7) заметим, что в данном случае

$$t(x, y) = \arccos \left(\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 16 + 4x^2y^2}} \right).$$

Вычисления приводят к результату

$$\Delta \approx 0.00001182.$$

Вклад, вносимый отклонением первого главного направления от направления оси Ox , оказался невелик.

Заключение

Автор полагает, что предложенная работа (наряду с предшествующими) служит прояснению свойств псевдоминимальной поверхности и предлагает инструмент для моделирования поверхностей данного типа. Полученные при этом результаты предполагается применять для конечно-элементного моделирования тех поверхностей, форму которых стремится принять гибкий ортотропный материал (в частности, металлическое сетеполотно). Если иметь в виду цикл работ автора, посвященных геометрическому моделированию формы сетеполотна, входящего в конструкцию орбитальных рефлекторов, то данную статью следует считать (в отнесенном, конечно, смысле) завершающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
2. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 5–17.
3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте пары поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24.
4. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
5. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(29). С. 5–14.
6. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 1(45). С. 5–24.
7. Бухтяк М.С. Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 2(46). С. 5–24.
8. Попов Е.В. Метод натянутых сеток в задачах геометрического моделирования: дис. ... д.т.н. – Нижний Новгород, 2001. – 248 с.

Статья поступила 01.05.2017 г.

Bukhtyak M.S. (2017). FINITE ELEMENT MODEL OF A PSEUDOMINIMAL SURFACE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 5–16

DOI 10.17223/19988621/48/1

The author of the current paper continues his study of the geometrical approach to modelling the shape of a fine elastic orthotropic material spanned on a closed contour. This regards, in particular, a reflecting surface of the reflector antenna, made of metallic mesh. The modelling is based on the class of surfaces with a constant ratio of principal curvatures. This class was introduced by the author in publications of 2016 and is called the class of pseudominimal surfaces (the class of minimal surfaces is its subclass). Pseudominimal surfaces are specified by a partial differential equation, which is very difficult to analyze. A sufficiently appropriate tool to build surfaces close to pseudominimal ones is the finite element method, applied in this article. An essential role is played by the existence theorem according to which the width of pseudominimal surfaces class is two functions of a scalar argument. An algorithm allowing one to calculate the position of a variable fifth node inside the cell for the given four nodes of the grid (the grid is not necessarily orthogonal and uniform) has been developed. This algorithm is a modification of the well-known algorithm which is effective for the finite-element modelling of minimal surfaces. The algorithm modification involves consideration of inequity of the two principal directions at the point of surface due to orthotropy. The coordinates of the fifth node are calculated from the coordinates of the four nodes using the weighting factors reflecting the ratio of the principal curvatures. The algorithm implementing the finite element method is modified to a more convenient algorithm of the stretched grids method (SGM) analogous to the modification (E.V. Popov, 1990s) for minimal surfaces modelling. The class of pseudominimal surfaces of revolution contains a family of algebraic surfaces of the fourth order. This kind of surface has been used for the algorithm testing. The author has good ground to believe that this algorithm is suitable for modelling.

Keywords: orthotropy, pseudo minimal surface, finite elements method, algorithm, stretched grids method.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

REFERENCES

1. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical modeling of a metallic mesh deformation of the parabolic reflector. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461. DOI: 10.1134/S2070048216040050.
2. Bukhtyak M.S. (2016) Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepestka setepolotna [Defect of mapping for deformed segment of a metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/40/1.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axisymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
5. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modelling of metallic mesh tailoring

- for axisymmetric reflector. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
6. Bukhtyak M.S. (2017) Obobshchenie minimal'nykh poverkhnostey i modelirovanie formy konstruksii iz ortotropnogo materiala [Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotropic material construction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24. DOI: 10.17223/19988621/45/1.
 7. Bukhtyak M.S. (2017) Sostavnaja poverhnost', blizkaja k psevdominimal'noj [A composite surface close to pseudo-minimal]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 5–13. DOI: 10.17223/19988621/46/1.
 8. Popov E.V. (2001) Metod natyanutykh setok v zadachakh geometricheskogo modelirovaniya [Stretched Grid Method in Problems of Geometric Modeling]. Techn. Doct. Diss. Nizhny Novgorod.