МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.В. Бордовицына, В.А. Авдюшев

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Аналитические и численные методы

Учебное пособие

2-е издание, исправленное и дополненное

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

УДК 521.1
ББК 22.62
Б82

Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.
Б82 Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы : учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 254 с.

ISBN 978-5-94621-607-4

В учебном пособии излагаются применяемые в задачах динамики искусственных спутников Земли (ИСЗ) уравнения движения, аналитические и численные методы их решения, а также различные способы представления действующих на ИСЗ сил при различных способах решения уравнений движения. Три последних раздела книги посвящены описанию существующих аналитических и численных моделей движения ИСЗ и возможностей их практического использования.

Данное пособие представляет собой детальное описание одного из важных разделов курса «Небесная механика», являющегося федеральной компонентой государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 011501 «Астрономия» и вариативной компонентой основной образовательной программы по направлению 030302 «Физика и астрономия».

Для студентов и аспирантов, обучающихся в рамках специализаций, связанных с динамикой искусственных спутников Земли, а также созданием и использованием космических аппаратов.

УДК 521.1
ББК 22.62

***Рецензенты*:**

В.А. Шефер, д-р физ.-мат. наук
Т.С. Бороненко, канд. физ.-мат. наук

ISBN 978-5-94621-607-4

© Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А., 2016
© Томский государственный университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 7
1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ 10
2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ 14
2.1. Притяжение объемного тела 14
2.2. Основные сведения о полиномах Лежандра 16
2.3. Присоединенные функции Лежандра. Общее выражение для сферических функций 18
2.4. Нормированные и полностью нормированные функции Лежандра 19
2.5. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям 21
2.6. Различные формы записи потенциала притяжения Земли 25
2.7. Структура разложения потенциала Земли 26
2.8. Определение постоянных гравитационного поля Земли. Стандартные Земли 29
2.9. Вековые изменения коэффициентов гармоник 30
2.10. Представление потенциала Земли системой точечных масс 31
3. КЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ 32
3.1. Уравнения движения в прямоугольных координатах 32
3.2. Уравнения движения в оскулирующих кеплеровых элементах 33
3.3. Вывод уравнений в возмущениях канонических переменных методом Гамильтона–Якоби 38
4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ИСЗ 41
4.1. Возмущения от несферичности геопотенциала 41
4.2. Возмущения от приливных деформаций центрального тела 41
4.3. Лунно-солнечные возмущения 43
4.4. Негравитационные возмущения, связанные с Солнцем 43
4.5. Возмущения от сопротивления атмосферы 46
4.6. Классификация орбит ИСЗ 50
5. ГЛАВНАЯ ПРОБЛЕМА В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ 53
5.1. Вводные замечания 53
5.2. Возмущающая функция 53
5.3. Вековые возмущения 55
5.4. Короткопериодические возмущения 56
5.5. Задача Акснеса 56
5.6. Задачи Винти и Кислика 58
5.7. Задача двух неподвижных центров 60

6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ 64
6.1. Вывод уравнений в возмущениях промежуточного движения обобщенным методом Лагранжа 64
6.2. Уравнения движения в эйлеровых элементах 68
6.3. Метод Цейпеля 73
6.4. Метод рядов и преобразований Ли (метод Хери–Депри) 76
7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ВИДЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ 82
7.1. Вводные замечания 82
7.2. Формы представления потенциала Земли в виде функции элементов орбит 82
7.3. Особенности вычисления лунно-солнечных возмущений 86
8. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ 92
8.1. Особенности численного интегрирования уравнений движения ИСЗ 92
8.2. Рекуррентные алгоритмы для вычисления шаровых функций V_{nm} и их производных 93
8.3. Вычисление возмущений от приливных деформаций центрального тела 102
8.4. Особенности представления других возмущений в численном моделировании движения ИСЗ 109
9. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 111
9.1. Вводные замечания 111
9.2. Явные одношаговые алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга 112
9.3. Неявный одношаговый алгоритм Эверхарта 115
9.3.1. Основные формулы 115
9.3.2. Интегрирование на шаге 117
9.3.3. Выбор шага 119
9.4. Экстраполяционные алгоритмы 115
9.4.1. Экстраполяционные схемы Невилла и Штера 120
9.4.2. Метод Булирша и Штера 122
9.4.3. Выбор шага интегрирования 123
9.5. Многошаговые методы 125
9.5.1. Принципы построения 125
9.5.2. Алгоритм Адамса–Мультона–Коуэлла 129
9.6. Сравнительная характеристика методов 133
10. МЕТОДЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ 134
10.1. Стабилизация уравнений орбитального движения 135
10.1.1. Неустойчивость кеплеровского движения 136
10.1.2. Метод Баумгарта 138
10.1.3. Возмущенная задача двух тел 140

10.2. Регуляризация уравнений движения.
Преобразование Кустаанхеймо–Штифеля 144
10.3. Метод Энке 151
10.3.1. Классический метод Энке 151
10.3.2. Обобщение метода Энке 154
10.3.3. Уравнения Энке в переменных Кустаанхеймо–Штифеля 156
10.3.4. Метод Энке как метод приведения систем к стандартному виду ... 158
10.3.5. Уравнения Энке в задачах спутниковой динамики 160
10.4. Метод вариации постоянных 166
10.5. Исследование эффективности методов теории специальных возмущений в задачах динамики ИСЗ 167
10.5.1. Численный эксперимент 167
10.5.2. Характеристики эффективности численного интегрирования 169
10.5.3. Численные результаты 169
11. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ 172
11.1. Вводные замечания 172
11.2. Высокоточные аналитические модели движения ИСЗ 172
11.3. Решение главной проблемы движения ИСЗ методом преобразований Ли ... 174
11.4. Построение численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ 182
11.4.1. Алгоритм преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства 182
11.4.2. Построение полуаналитической методики расчета движения резонансных ИСЗ типа «Навстар» в эйлеровых элементах 186
12. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ 191
12.1. Вводные замечания 191
12.2. Высокоточные численные модели движения ИСЗ 192
12.3. Методика численного исследования структуры возмущений и ее применение .. 193
12.4. Исследование влияния возмущений от гармоник геопотенциала на движение ИСЗ различных классов орбит 194
12.5. Оценки влияния приливных деформаций 198
12.6. Влияние от сопротивления атмосферы 201
12.7. Исследование орбитальных возмущений резонансных ИСЗ 203
13. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ И ЭВОЛЮЦИИ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА 212
13.1. Проблема космического мусора 212
13.2. Математические модели распада космического аппарата на орбите 213
13.3. Вычисления пространственной плотности фрагментов 216
13.4. Численное моделирование распределения и эволюции орбит групп фрагментов распада. 216

13.5. Тестирование модели взрыва по данным наблюдений 217
13.6. Примеры численного моделирования распределения и эволюции фрагментов распада космических аппаратов на орбитах 220
13.6.1. Моделирование взрыва на геостационарной орбите 220
13.6.2. Анализ динамической эволюции распределения фрагментов распада 221
13.6.3. Исследование динамической эволюции и распределения фрагментов распада космических аппаратов, движущихся по вытянутым орбитам 222
14. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОКОЛОЗЕМНОГО ОРБИТАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА 224
14.1. Вводные замечания 224
14.2. Метод ляпуновских характеристик 225
14.3. Численно-аналитическая методика выявления вековых резонансов 229
14.4. Численно-аналитический эксперимент 232
14.5. Резонанс Лидова–Козаи и его влияние на орбитальную эволюцию 233
ЛИТЕРАТУРА 244

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие представляет собой второе издание одноименного пособия, вышедшего в 2007 г. Популярность первого издания, замеченные в тексте опечатки и новые интересные результататы побудили нас подготовить второе издание.

Настоящее учебное пособие представляет собой детальное описание одного из важных разделов курса «Небесная механика», являющегося федеральной компонентой государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 011501 «Астрономия» и вариативной компонентой основной образовательной программы по направлению 030302 «Физика и астрономия».

Книга может использоваться также для чтения специальных курсов по динамике искусственных спутников Земли (ИСЗ), космической геодезии, технологии глобального позиционирования и спутниковым методам в геодинамике при осуществлении различных специализаций, связанных с созданием, эксплуатацией и использованием искусственных спутников Земли. Она охватывает большинство методов и подходов, используемых для построения аналитических и численных моделей движения ИСЗ.

За 50 лет существования раздела науки, именуемого динамикой ИСЗ, создано много новых методов и алгоритмов, предназначенных как для приближенного, так и для высокоточного моделирования движения, написаны монографии (Каула, 1970; Аксенов, 1977; Дубошин, 1983) и аналитические обзоры (Емельянов, 1980; Уральская, Журавлев, 1980), но практически нет учебников. Вышедшая в 1965 г. и переизданная в 2011 г. книга П.Е. Эльясберга «Введение в теорию полета искусственных спутников Земли» хороша для первоначального ознакомления с проблемой, а по современным результатам до последнего времени не было даже сколько-нибудь подробных обзоров.

Справедливости ради следует сказать, что практически все вышедшие в последнее десятилетие учебники по спутниковой геодезии содержат те или иные сведения из теории движения

ИСЗ. Однако выбор приводимых форм уравнений движения, методов их интегрирования и моделей сил очень часто произволен и не дает полного представления об этом разделе небесной механики. Среди изданий по динамике ИСЗ, опубликованных в последнее время за рубежом, выделяется книга О. Монтенбрука и Е. Гилла «Спутниковые орбиты. Модели, методы и приложения» (Montenbruck, Gill, 2000). Будучи переведенной на русский язык эта книга вполне могла бы стать хорошим учебным пособием по прикладным вопросам динамики ИСЗ. В настоящем пособии (и в первом, и в настоящем его издании) мы излагаем теорию движения ИСЗ как раздел небесной механики и стремимся охватить все методы и подходы, применяемые в этой области науки.

Как аналитический, так и численный подходы к решению уравнений небесной механики основаны на приближении решений отрезками каких-либо рядов, однако в построении этих решений есть принципиальная разница.

Аналитический подход позволяет строить ряды, аппроксимирующие решение на значительных интервалах времени от одного до нескольких тысяч оборотов объекта. Кроме того, очень существенно, что аналитическая аппроксимация, хотя и может зависеть от типа орбиты, никогда напрямую не связана с начальными условиями уравнений движения. В связи с этим аналитическую аппроксимацию можно считать общим решением. Поэтому аналитические методы иногда называют методами общих возмущений.

Главная трудность при аналитическом подходе состоит в представлении правых частей уравнений движения в виде явных функций времени и элементов орбит. Это достигается путем разложения возмущающей функции в ряд пуассоновского типа.

При численном подходе к решению уравнений движения аппроксимация ищется в виде различных модификаций отрезка ряда Тейлора на интервале времени, существенно меньшем одного оборота. Коэффициенты разложения вычисляются исходя из начальных условий уравнений движения, и полученное решение является

частным. Поэтому численные методы называют иногда методами специальных, или частных, возмущений.

В настоящем пособии мы рассмотрим оба подхода в применении к задаче моделирования движения ИСЗ, обсудим специфические особенности каждого подхода и приведем простые примеры. Кроме того, мы дадим обзор современных высокоточных аналитических и численных моделей движения ИСЗ и обсудим возможности их практического применения.

1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ

В задачах динамики ИСЗ применяют две основные системы прямоугольных декартовых координат: опорную небесную (инерциальную) и земную опорную. Приближенной реализацией инерциальной системы координат является невращающаяся система небесных координат. Для ее задания используют среднюю экваториальную систему координат стандартной эпохи, которая материализуется в виде фундаментального каталога положений и собственных движений звезд. С 1996 г. (IERS Conventions, 1996) в качестве опорных используются также положения квазизвездных радиоисточников (квазаров), которые в силу своей удаленности от Земли практически не имеют собственных движений. В настоящее время в качестве стандартного рекомендован каталог FK-5, который содержит обе фундаментальные системы. В качестве основной координатной плоскости используется плоскость, связанная с экватором J2000.0, ось абсцисс направлена в равноденствие J2000.0. Опорную небесную систему координат, связанную с барицентром Солнечной системы, вычисленным на эпоху J2000.0, называют BCRC (Barycentric Celestial Reference System), а опорную небесную систему координат, связанную с центром Земли на эпоху J2000.0, – GCRS (Geocentric Celestial Reference System). В задачах динамики ИСЗ используются только системы координат, связанные с центром Земли, поэтому в обозначениях можно опустить упоминание о геоцентре и опорную систему координат обозначать как CRS.

Земная опорная система координат реализуется в виде списка средних прямоугольных координат станций, отнесенных к определенной эпохе. Начало координат помещается в центре масс всей Земли, включая океаны и атмосферу, ось аппликат направлена к среднему северному полюсу Земли (Международное условное начало – CIO). CIO и плоскость нулевого меридиана определены

соглашением BIH 1984 Международного бюро времени. Эту систему будем обозначать как TRS (Terrestrial Reference System).

Связь между системами координат CRS и TRS определяется формулами

$$\begin{aligned} TRS &= [ABCD]CRS, \\ CRS &= [ABCD]^T TRS. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Матрица прецессии D задается формулой

$$D = r(-z)q(\theta)r(\xi_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\xi_0 & \sin\xi_0 & 0 \\ -\sin\xi_0 & \cos\xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

а прецессионные параметры ξ_0, z, θ находятся из соотношений

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (2306'',2181 + 1'',39656T - 0'',000139T^2)\tau + \\ &+ (0'',30188 - 0'',000345T)\tau^2 + 0'',017998\tau^3, \\ z &= \xi_0 + (0'',79280 + 0'',000400T)\tau^2 + 0'',018203\tau^3, \\ \theta &= (2004'',3109 - 0'',85330T - 0'',000217T^2)\tau + \\ &+ (0'',42665 - 0'',000217T)\tau^2 - 0'',041833\tau^3, \end{aligned}$$

где T отсчитывается в юлианских столетиях от эпохи J2000.0 до выбранной произвольно эпохи, а τ – от выбранной эпохи до даты наблюдения также в юлианских столетиях.

Матрица нутации C задается формулой

$$C = p(-\varepsilon)r(-\Delta\psi)p(\bar{\varepsilon}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi & 0 \\ \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где

$$\bar{\varepsilon} = 23°26'21'',448 - 46'',8510t - 0'',00059t^2 + 0'',001813t^3,$$
$$t = T + \tau, \qquad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon.$$

Для вычисления $\Delta\varepsilon, \Delta\psi$ используются ряды в соответствии с принятой Международным астрономическим союзом в 1980 г. теорией нутации (IERS Conventions, 1996):

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{n} (A_i + A_i' t) \sin(ARGUMENT),$$

$$\Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (B_i + B_i' t) \cos(ARGUMENT),$$

где

$$ARGUMENT = \sum N_i F_i \ .$$

Коэффициенты A_i, A_i', B_i, B_i' и целочисленные множители N_i фундаментальных аргументов F_i приведены в (IERS Conventions, 1996). Фундаментальные аргументы вычисляются по формулам

$$F_1 = l = 134^0,96340251 + 1717915923'',2178t + 31'',8792t^2 + \\ +0'',051635t^3 - 0,''00024470t^4,$$

$$F_2 = l' = 357^0,52910918 + 129596581''.0481t - 0'',5532t^2 + \\ +0'',000136t^3 - 0'',00001149t^4,$$

$$F_3 = F = 93^0,27209062 + 1739527262''.8478t - 12'',7512t^2 - \\ -0'',001037t^3 + 0'',00000417t^4,$$

$$F_4 = D = 297^0,85019547 + 1602961601'',2090t - 6'',3706t^2 + \\ +0'',006593t^3 - 0'',00003169t^4,$$

$$F_5 = \Omega = 125^0,04455501 - 6962890'',2665t + 7'',4722t^2 + \\ +0'',007702t^3 - 0'',00005939t^4,$$

где t измеряется в юлианских столетиях от эпохи J2000.0 (каждое столетие по 36525 дней, каждый день по 86400 секунд динамического времени); l – средняя аномалия Луны; l' – средняя аномалия Солнца; $F = L - \Omega$; D – средняя элонгация Луны от Солнца; Ω – средняя долгота восходящего узла Луны; L – средняя долгота Луны.

В IERS стандарт 1996 и 2003 (IERS Conventions, 1996, 2003) введена также объединенная теория прецессии-нутации, в которой используются смешанные ряды прецессии-нутации с вековыми членами, определяемыми прецессией.

Матрица B осуществляет преобразование инерциальной CRS-системы истинной даты в систему TRS истинной даты:

$$B = r(h) = \begin{pmatrix} \cos h & \sin h & 0 \\ -\sin h & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Истинное гринвичское звездное время h определяется формулой

$$h = H_0 + \omega_+ (t_0 - \Delta H), \qquad (1.5)$$

где

$$H_0 = 24110^s,54841 + 8640184^s,812866T_* + \\ +0^s,093104T_*^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6} T_*^3 \qquad (1.6)$$

гринвичское среднее время в 0^h на дату наблюдения; $\Delta H = \Delta\psi \cos\varepsilon$; t_0 – временной интервал от 0^h UTI на дату наблюдения до момента наблюдения; $UT1 = UTC + (UT1 - UTC)$, причем поправку $UT1 - UTC$ (если она не определяется из наблюдений) следует брать в IERS, $\omega_+ = 7,292115 \cdot 10^{-5}$ [рад/с] – скорость среднего звездного вращения Земли, $T_* = d_* / 36525$, причем d_* есть число дней во всемирном времени от эпохи J2000.0.

Движение полюса задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_P \\ 0 & 1 & -y_P \\ -x_P & y_P & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.7)$$

где x_P есть положительное южное перемещение вдоль гринвичского меридиана, заданного BIH; y_P – положительное южное перемещение по направлению, перпендикулярному гринвичскому меридиану. Величины x_P, y_P – координаты мгновенного полюса относительно полюса BIH 1984, публикуются в циркулярах BIH, кроме того, их можно найти по электронному адресу http://maia.usno.navy.mil.

2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

2.1. Притяжение объемного тела

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки P единичной массы телом K. Следуя далее в изложении монографии (Аксенов 1977), будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а плотность распределения масс является кусочно-непрерывной функцией координат. Выберем прямоугольную, жестко связанную с телом систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс тела.

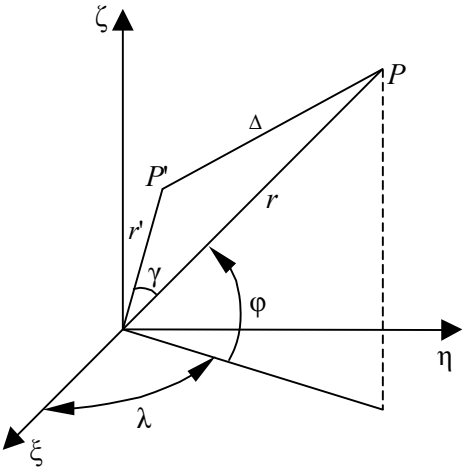


Рис. 2.1. Система координат

Пусть элемент объема $\mathrm{d}\tau$ тела K находится в точке $P'(\xi', \eta', \zeta')$, плотность распределения масс обозначим через $\tilde{\theta}$. Тогда потенциал притяжения или силовая функция тела K в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ определяется формулой

$$U = f \iiint_T \frac{\tilde{\theta}\,\mathrm{d}\tau}{\Delta}, \qquad (2.1)$$

где f – постоянная тяготения; $\Delta = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}$ – расстояние точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ от текущей точки $P'(\xi', \eta', \zeta')$; T – объем, занятый телом K.

Если обозначить через r и r′ радиус-векторы точек P и P′, через γ – угол между ними, то Δ и γ можно записать в виде $\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}$, где $\cos\gamma = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')/rr'$.

Потенциал U обладает, как известно (Дубошин, 1968), следующими свойствами.

1. Потенциал U есть функция, непрерывная во всем пространстве, обращающаяся в нуль в бесконечности, причем $\lim_{r\to\infty}(rU) = fM$, где M – масса тела K.

2. Частные производные первого порядка от потенциала U по координатам являются непрерывными функциями во всем пространстве и обращаются в нуль в бесконечности.

3. Если через X, Y, Z обозначить проекции силы притяжения точки P телом K на координатные оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, то во всем пространстве

$$X = \frac{\partial U}{\partial \xi}, Y = \frac{\partial U}{\partial \eta}, Z = \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

4. Во внешнем относительно тела K пространстве потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0.$$

5. Внутри тела M потенциал U удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f \kappa.$$

Для доказательства первых четырех свойств достаточно, чтобы функция $\tilde{\theta}$ была кусочно-непрерывной. А для доказательства условия 5 требуется выполнение условия Гольдера, которое состоит в том, что для точки P, лежащей внутри тела K, всегда найдется объем $d\tau$, содержащий точку P, что для любых двух точек (ξ_1,η_1,ζ_1) и (ξ_2,η_2,ζ_2) этого объема имеет место неравенство

$$\left|\kappa(\xi_1,\eta_1,\zeta_1) - \kappa(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)\right| < A\rho^{\alpha},$$

где $\rho = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}$ – расстояние между точками, A и α – постоянные величины, причем $0<\alpha<1$. Это условие будет выполнено, если плотность имеет непрерывные частные производные первого порядка.

Перечисленные свойства полностью определяют потенциал притяжения тела K и могут быть использованы для его практического определения. Возможен, конечно, и другой подход, который заключается в непосредственном вычислении интеграла (2.1). Однако в конечном виде этот интеграл берется только в некоторых частных случаях: однородный шар, шар с концентрическим распределением плотности, однородный двухосный или трехосный эллипсоид. Как известно, для концентрического шара потенциал дается формулой

$$U = \frac{fM}{r}.$$

В общем случае, рассмотренном в начале этого раздела, интеграл (2.1) можно вычислить только при помощи ряда. Наибольшее распространение получило в настоящее время разложение потенциала в ряд по сферическим функциям.

2.2. Основные сведения о полиномах Лежандра

Остановимся на основных свойствах полиномов Лежандра. Полином Лежандра $P_n(z)$ порядка n можно определить формулой Родрига

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n \left(z^2 - 1\right)^n}{\mathrm{d}z^n} \tag{2.2}$$

Выпишем несколько первых $P_n(z)$:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \tag{2.3}$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(-1 + 3z^2), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(-3z + 5z^3), \quad \ldots,$$

Формулу (2.2) можно преобразовать к виду

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{h} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r} \text{ ,} \qquad (2.4)$$

где $h = n/2$, или $h = (n-1)/2$, в зависимости от того, какое из этих чисел целое.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 \text{ .} \qquad (2.5)$$

Кроме того, справедливы формулы

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}P_n(z)}{\mathrm{d}z} = nP_{n-1}(z) - nzP_n(z), \qquad (2.6)$$

$$\frac{\mathrm{d}P_{n+1}(z)}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}P_{n-1}(z)}{\mathrm{d}z} = (2n+1)P_n(z) \text{ .} \qquad (2.7)$$

Отметим некоторые важные свойства полиномов Лежандра[1]:

1. Полином Лежандра является четной или нечетной функцией в зависимости от того, четна или нечетна его степень, так что

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z) .$$

2. На границах интервала [–1,1] полином Лежандра принимает следующие значения:

$$P_n(1) = 1 , P_n(-1) = (-1)^n .$$

3. Для любого z из промежутка (–1,1), при $n > 0$:

$$\left|P_n(z)\right| < 1 .$$

4. При больших n справедлива оценка

$$\left|P_n(z)\right| < \sqrt{\frac{\pi}{2n\left(1-z^2\right)}} .$$

5. Справедлива формула Лапласа

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n \,\mathrm{d}\varphi .$$

[1] Более подробное изложение теории полиномов Лежандра можно найти в монографиях (Гобсон,1952; Аксенов 198) и учебном пособии (Холшевников, 2004).

6. Производящей функцией для $P_n(z)$ является функция $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-1/2}$, так что

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(z)\ . \qquad (2.8)$$

7. Полином Лежандра удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2P_n(z)}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}P_n(z)}{\mathrm{d}z}+n(n+1)P_n(z)=0\,,$$

которое называется уравнением Лежандра.

2.3. Присоединенные функции Лежандра. Общее выражение для сферических функций

Присоединенную функцию Лежандра $P_{n,m}(z)$ порядка n и степени m можно определить формулой

$$P_{n,m}(z)=(1-z^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_n(z)}{\mathrm{d}z^m}\,, \qquad (2.9)$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра.

Используя формулы (2.3), запишем несколько первых $P_{n,m}(z)$:

$$P_{01}=0,$$
$$P_{11}=(1-z^2)^{1/2},$$
$$P_{22}=3(1-z^2),$$
$$P_{31}=\frac{3}{2}(-1+5z^2)(1-z^2)^{1/2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Для вычисления $P_{n,m}(z)$ можно использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$(n+2-m)P_{n+2,m}(z)-(2n+3)zP_{n+1,m}(z)+(n+m+1)P_{n,m}(z)=0\,, \qquad (2.10)$$

$$P_{n,m+2}(z)-\frac{2(m+1)z}{\sqrt{1-z^2}}P_{n,m+1}(z)+(n-m)(n+m+1)P_{n,m}(z)=0\,. \qquad (2.11)$$

При этом достаточно пользоваться первой формулой, принимая во внимание, что $P_{m-1,m}=0$, $P_{m,m}=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2m-1)(1-z^2)^{m/2}$.

Присоединенные функции Лежандра являются составными элементами сферических функций. Функции двух аргументов $P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\psi$, $P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\psi$ называются элементарными сферическими функциями.

Сферическая функция порядка n определяется формулой

$$Y_n(\theta,\psi)=\sum_{m=0}^{n}P_{n,m}(\cos\theta)[A_{n,m}\cos m\psi+B_{n,m}\sin m\psi],$$

где $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ – призвольные постоянные.

Функция Y_n удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\psi^2}+n(n+1)Y_n=0,$$

а присоединенная функция Лежандра $P_{n,m}$ является одним из решений уравнения

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}z}+[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}]Y=0,$$

которое при $m = 0$ переходит в уравнение Лежандра.

Приведем формулу, которая носит название теоремы сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\omega)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{n,m}(\cos\theta)P_{n,m}(\cos\theta')\cos m\omega. \qquad (2.12)$$

Отметим одно важное свойство сферических функций: интеграл по поверхности сферы единичного радиуса от произведения элементарных сферических функций различных порядков и степеней, равных нулю. В то же время

$$\int_0^n\int_0^{2\pi}\left[P_{nm}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\psi\\ \sin m\psi\end{matrix}\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi=2\pi(2n+1)(n+m)! \qquad (2.13)$$

2.4. Нормированные и полностью нормированные функции Лежандра

В динамике ИСЗ используются как присоединенные функции, так и нормированные и полностью нормированные функции Лежандра. Пусть $P_{n,m}$ дается равенствами (2.9) и (2.4):

$$P_{n,m}(z) = (1-z)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_n(z)}{\mathrm{d}z^m}, \text{ а } P_n(z) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r}. \tag{2.14}$$

Тогда нормированная присоединенная функция Лежандра P'_{nm} задается формулой

$$P'_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(z), \tag{2.15}$$

а полностью нормированная функция – формулой

$$\overline{P}_{n,m}(z) = \sqrt{2n+1} P'_{n,m}(z) = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}},$$

таким образом, учитывая (1.14):

$$P'_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} (1-z^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_n(z)}{\mathrm{d}z^m},$$

$$\overline{P}_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n+1)(n-m)!}{(n+k)}} (1-z^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_n(z)}{\mathrm{d}z^m},$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра.

Используемое здесь нормирование имеет следующий смысл: Для P_{nm}, согласно (2.13), имеем

$$\int_S \left[P_{n,m}(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{matrix} \right]^2 \mathrm{d}S = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2\pi}{2n+1},$$

а для $P'_{n,m}$ и $\overline{P}_{n,m}$ будем иметь

$$\int_S \left[P'_{n,m}(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{matrix} \right]^2 \mathrm{d}S = \frac{4\pi}{2n+1},$$

$$\int_S \left[\overline{P}_{n,m}(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{matrix} \right]^2 \mathrm{d}S = 4\pi,$$

где S – поверхность сферы единичного радиуса.

2.5. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям

Как и ранее, будем предполагать, что притягивающее тело имеет произвольную форму, а плотность является кусочно-непрерывной функцией координат. Тогда в системе координат $O\xi\eta\zeta$, жестко связанной с телом, потенциал U в точке $P(\xi,\eta,\zeta)$ задается формулой (1.1).

Предположим, что точка P лежит вне притягивающего тела. Разложим в ряд $1/\Delta$. Для этого представим $1/\Delta$ в виде

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2(r'/r)\cos\gamma+(r'/r)^2}}. \qquad (2.16)$$

Это дает возможность применить формулу (1.8), полагая $\alpha=r'/r$. Получаем

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma), \qquad (2.17)$$

И, подставляя эту формулу в (2.16) будем иметь

$$U=f\iiint_T\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)\tilde{\theta}\,\mathrm{d}\tau. \qquad (2.18)$$

Перейдем к полярным (или сферическим) координатам

$$\xi=r\cos\varphi\cos\lambda,\ \eta=r\cos\varphi\sin\lambda,\ \zeta=r\sin\varphi,$$
$$\xi'=r'\cos\varphi'\cos\lambda',\ \eta'=r'\cos\varphi'\sin\lambda',\ \zeta'=r'\sin\varphi'.$$

Тогда $\cos\gamma$ можно записать в виде

$$\cos\gamma=\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda-\lambda').$$

Для того чтобы представить правую часть (2.18) в полярных координатах, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра (2.12). Это дает

$$P_n(\cos\gamma)=P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi')+ \\ +2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n-m)!}P_{n,m}(\sin\varphi)P_{n,m}(\sin\varphi')\cos m(\lambda-\lambda'). \qquad (2.19)$$

Далее, поскольку

$$\cos m(\lambda-\lambda')=\cos m\lambda\cos m\lambda'+\sin m\lambda\sin m\lambda',$$

равенство (2.19) примет вид

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi') + \\ +2\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{n,m}(\sin\varphi)\cos m\lambda[P_{n,m}(\sin\varphi')\cos m\lambda']\right\} + \\ +2\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{n,m}(\sin\varphi)\sin m\lambda[P_{n,m}(\sin\varphi')\sin m\lambda']\right\}.$$

Если теперь подставить эту формулу в (2.18) и ввести обозначения

$$Mr_0^n J_n = -\iiint_T r'^n P_n(\sin\varphi')\tilde{\theta}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$Mr_0^n C_{n,m} = \iiint_T \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} r'^n P_{n,m}(\sin\varphi')\cos m\lambda'\tilde{\theta}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad (2.20)$$

$$Mr_0^n S_{n,m} \iiint_T \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} r'^n P_{n,m}(\sin\varphi')\sin m\lambda'\tilde{\theta}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

где M – масса тела; r_0 – некоторая линейная величина для земного экваториального радиуса. Величины J_n, $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ являются безразмерными. С учетом сказанного, мы получаем хорошо известные разложения потенциала U:

$$U = -\frac{fM}{r}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \\ +\frac{fM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi)\left[C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right]. \qquad (2.21)$$

Коэффициенты J_n, $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ зависят от формы тела и распределения массы внутри него. Рассмотрим первые из них. Пусть в (2.20) $n = 0$. Так как

$$P_0(\sin\varphi') = 1\,,\ \text{а}\ \iiint_T \tilde{\theta}\,\mathrm{d}\tau = M\,,$$

то

$$J_0 = -1. \qquad (2.22)$$

Далее положим в (2.20) $n = 1$, $m = 1$:

$$P_1(\sin\varphi') = \sin\varphi'\,,\ P_{11}(\sin\varphi') = \cos\varphi'$$

и

$$mr_0 J_1 = -\iiint\limits_T \tilde{\theta} r' \sin\varphi' \mathrm{d}\tau = -\iiint\limits_T J' \mathrm{d}M = -M\zeta_0$$

и аналогично

$$mr_0 C_{11} = M\xi_0\,,\ mr_0 S_{11} = M\eta_0\,,$$

ξ_0, η_0, ζ_0 – координаты центра масс тела. Поскольку система $O\xi\eta\zeta$ находится в центре масс:

$$J_1 = 0\,,\ C_{11} = 0\,,\ S_{11} = 0\,. \tag{2.23}$$

Для $n = 2$, $m = 1$, $m = 2$ можно получить

$$C_{21} = \frac{E}{Mr_0^2}\,,\ S_{21} = \frac{D}{Mr_0^2}\,,\ J_2 = \frac{2C - (A+B)}{2Mr_0^2}\,,$$

$$C_{22} = \frac{B-A}{4mr_0^2}\,,\ S_{22} = \frac{F}{2mr_0^2}\,, \tag{2.24}$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции, D, E, F – произведения инерции, т.е.

$$A = \iiint\limits_T (\eta'^2 + \zeta'^2)\tilde{\theta}\mathrm{d}\tau\,,$$

$$B = \iiint\limits_T (\xi'^2 + \zeta'^2)\tilde{\theta}\mathrm{d}\tau,$$

$$C = \iiint\limits_T (\xi'^2 + \eta'^2)\tilde{\theta}\mathrm{d}\tau,$$

$$D = \iiint\limits_T \eta'\zeta'\tilde{\theta}\mathrm{d}\tau,$$

$$E = \iiint\limits_T \xi'\zeta'\tilde{\theta}\mathrm{d}\tau,$$

$$F = \iiint\limits_T \xi'\eta'\tilde{\theta}\mathrm{d}\tau.$$

Учитывая перечисленные свойства, U можно переписать в виде

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi)\left[C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right]\right\}. \tag{2.25}$$

Замечания:

1. Разложение потенциала U сходится абсолютно и равномерно при $r > \overline{r}$, где $\overline{r}$ – расстояние для наиболее удаленной поверхности тела от его центра.

2. Если одна из осей, скажем $O\zeta$, совпадает с главной центральной осью инерции, тогда $D = 0, E = 0,$ следовательно, $C_{21} = 0$, $S_{21} = 0$. Если все три координаты совпадают с главными центральными осями инерции, тогда и коэффициент $S_{22} = 0$.

3. Если плотность $\tilde{\theta}$ является функцией времени, то и коэффициенты J_n, $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ являются функциями времени, а если $\tilde{\theta}$ постоянна, коэффициенты также постоянны.

2.6. Различные формы записи потенциала притяжения Земли

1. Стандартная, утвержденная комиссией №7 МАС:

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi)\left[C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right]\right\}.$$

2. Формула, применяемая в теоретических расчетах:

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} J_{nm}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi)\cos m(\lambda - \lambda_{n,m})\right\},$$

где связь с коэффициентами $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ задается соотношениями

$$C_{n,m} = J_{n,m}\cos m\lambda_{n,m},\ S_{n,m} = J_{n,m}\sin m\lambda_{n,m},\ J_{n,m} = \sqrt{C_{n,m}^2 + S_{n,m}^2},$$

$$\mathrm{tg}\, m\lambda_{n,m} = \frac{S_{n,m}}{C_{n,m}}.$$

3. Нормированная формула $P_{n,m} \to P'_{n,m}$:

$$P'_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)}} P_{n,m}(z),$$

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} J_{nm}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi)\cos m(\lambda - \lambda_{n,m})\right\}.$$

4. Полностью нормированная формула

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi)\left[\overline{C}_{n,m}\cos m\lambda + \overline{S}_{n,m}\sin m\lambda\right]\right\},$$

$$\overline{C}_{n,m} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}}\frac{C_{n,m}}{\sqrt{2n+1}},\ \overline{S}_{n,m} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}}\frac{S_{n,m}}{\sqrt{2n+1}}.$$

5. Наиболее общая форма записи, используемая при численном моделировании:

$$U = \frac{fM}{r_0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_{n,m}(\sin\varphi)\left[\overline{C}_{n,m}\cos m\lambda + \overline{S}_{n,m}\sin m\lambda\right]\right\},$$

$$P_{n,0} = P_n,\ \overline{C}_{n,0} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}}\frac{J_n}{\sqrt{2n+1}},\ \overline{S}_{n,0} = 0.$$

Следует отметить, что в современных стандартных представлениях геопотенциала коэффициенты J_n не выделяются.

2.7. Структура разложения потенциала Земли

Рассмотрим представление потенциала Земли в виде

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right) P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right) P_{n,m}(\sin\varphi)[C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda]\right\}. \qquad (2.26)$$

Все члены этого разложения можно разделить на три группы.

1. Зональные гармоники. Пусть m=0, тогда имеем члены вида

$$-\frac{fM}{r} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n \sin\varphi\,. \qquad (2.27)$$

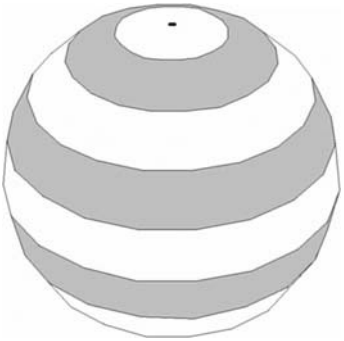


Рис. 2.2. Положительные и отрицательные значения зональной гармоники для $n = 4$

Рис. 2.3. Положительные и отрицательные значения секториальной гармоники для $n = 10$

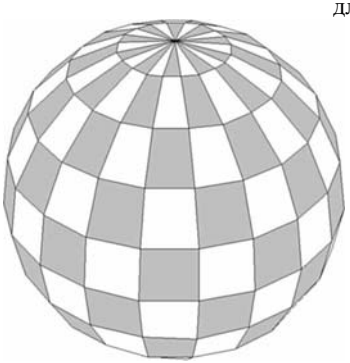


Рис. 2.4. Положительные и отрицательные значения тессеральной гармоники для $n = 10$ и $k = 4$

Поскольку полином Лежандра P_n имеет n действительных различных корней по абсолютной величине меньших единицы, функция $P_n(\sin\varphi)$ на сфере будет менять знак на n параллелях, таким образом сфера разделится на n+1 широтную зону, в которой (2.27) будет принимать попеременно положительные и отрицательные значения. Этот член называется зональной гармоникой потенциала порядка n. На рис. 2.2 показано распределение положительных и отрицательных зон (показано для n=4).

2. Тессеральные гармоники. Пусть $0<m<n$, тогда имеем члены

$$\frac{fM}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n C_{n,m}P_{n,m}(\sin\varphi)\cos m\lambda,$$

$$\frac{fM}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)S_{n,m}P_{n,m}(\sin\varphi)\sin m\lambda, \qquad (2.28)$$

которые обращаются в нуль на $n–m$ параллелях, определяемых уравнением

$$\frac{\mathrm{d}^m P_n(\sin\varphi)}{\mathrm{d}(\sin\varphi)^m}=0\,,$$

и $2m$ меридианах $\cos m\lambda=0$, $\sin m\lambda=0$.

3. Секторальные гармоники. Пусть, наконец, $m=n$, имеем члены

$$\frac{fM}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n C_{n,n}P_{n,n}(\sin\varphi)\cos n\lambda\,,$$

$$\frac{fM}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n S_{n,n}P_{n,n}(\sin\varphi)\sin n\lambda\,, \qquad (2.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}^n P_n(\sin\varphi)}{\mathrm{d}(\sin\varphi)^n}=\mathrm{const}.$$

В этом случае, поскольку порядок дифференцирования и порядок полинома совпадают, формулы (2.29) обращаются в нуль только на меридианах, когда $\cos n\lambda=0$ или $\sin n\lambda=0$.

Рассмотрим механический смысл различных слагаемых в (2.26). Самый первый член U представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, а все остальные члены характеризуют отличие Земли от тела сферической формы.

Вторая зональная гармоника характеризует полярное сжатие Земли и является основной характеристикой. Остальные дают более мелкие детали. Тессеральные и секторальные гармоники характеризуют отклонение Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения. Зональные гармоники, для которых n нечетно, и тессеральные гармоники, для которых $(n – m)$ нечетно, определяют асимметрию Земли относительно экватора.

2.8. Определение постоянных гравитационного поля Земли. Стандартные Земли

Числовые коэффициенты $C_{n,m}$ и $S_{n,m}$ разложения (2.26) потенциала Земли определяются как путем геодезических и гравиметрических измерений, так и с помощью наблюдений искусственных спутников Земли. Создание и уточнение гравитационных моделей Земли является одной из основных задач, которая решается с помощью наблюдений ИСЗ с одновременным привлечением геодезических и гравиметрических данных. Первые модели гравитационного поля Земли, так называемые Стандартные Земли, были построены в Смитсонианской астрофизической обсерватории в 1970-х гг. Модель Стандартная Земля I получена на основе фотографических наблюдений спутников камерами Бейкера–Нанна. Стандартная Земля II включает в себя все коэффициенты разложения земного потенциала до шестнадцатого порядка включительно и некоторые гармоники более высокого порядка. Одновременно определялись координаты наблюдательной станции, причем точность определения координат многих станций 10 м и лучше. Стандартная Земля III содержит зональные гармоники до 36-го порядка, все тессеральные гармоники до 18-го порядка и степени и некоторые гармоники более высоких порядков.

Годдардовский центр космических полетов в 1980-е гг., используя спутниковые и гравиметрические данные, получил более точные модели Земли – GEM (Goddard Earth Model). Модель GEM9 основана на обработке оптических, лазерных и радиотехнических наблюдений почти 30 спутников. Всего было использовано 840 000 спутниковых измерений, из них почти 200 000 лазерных наблюдений. МодельGEM10 объединяет спутниковые данные GEM9 с гравиметрическими измерениями. Использовались данные 1 654 средних гравитационных аномалий на пятиградусных площадках, из них 1 507 основываются на одноградусных аномалиях, в то время как остальные 147 были получены интерполяцией на пятиградусные площадки. При построении моделей GEM9 и GEM10, в отличие от более ранних моделей, определялись допол-

нительно три фундаментальных геодезических параметра; средний радиус Земли r_0, гравитационная константа fM и среднее ускорение силы тяжести на экваторе g_e.

Современные модели гравитационного поля развиты до более высоких порядков и степеней. Так, например, доступная через Интернет модель (JGM3) имеет порядок и степень, равные 360 (http://www.aiub.unibe.ch/download/ BSWUSER50/GEN/JGM3.)

2.9. Вековые изменения коэффициентов гармоник

В задачах высокоточного прогнозирования движения ИСЗ следует учитывать, что первые зональные коэффициенты имеют вековые изменения (IERS, 2010), определяемые формулой

$$\bar{C}_{n0}(t) = \bar{C}_{n0}(t_0) + \frac{\mathrm{d}\bar{C}_{n0}}{\mathrm{d}t}(t - t_0), \qquad (2.30)$$

где $\bar{C}_{n0}(t_0)$ – значение коэффициента на момент t_0 = J2000.0; $\mathrm{d}\bar{C}_{n0}/\mathrm{d}t$ – значения вековых изменений зональных коэффициентов (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Значения вековых изменений зональных коэффициентов

Порядок зональной гармоники, n	Значение коэффициентов на t_0 = J2000,0	Значение векового изменения, $год^{-1}$
2	$-0{,}48416948\times10^{-3}$	$11{,}6\times10^{-12}$
3	$0{,}9571612\times10^{-6}$	$4{,}9\times10^{-12}$
4	$0{,}5399659\times10^{-6}$	$4{,}7\times10^{-12}$

2.10. Представление потенциала Земли системой точечных масс

Другой способ представления потенциала Земли основан на использовании системы точечных масс. В этом случае потенциал U задается, как правило, формулой

$$U = U_0 + \sum U_n \,. \tag{2.31}$$

Здесь U_0 – потенциал задачи двух неподвижных центров (см. гл. 5), а U_n представляет собой потенциал точечной массы m_n,

$$U_n = \frac{fm_n}{\Delta_n},$$

где $\Delta_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2}$ – расстояние до точечной массы с координатами x_n, y_n, z_n.

Некоторые способы оптимального выбора параметров системы точечных масс можно найти в учебном пособии (Холшевников и др., 2005).

3. КЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

3.1. Уравнения движения в прямоугольных координатах

Будем представлять движение искусственного спутника Земли как движение материальной частицы бесконечно малой массы в поле тяготения центрального тела с массой M под действием сил, определенных потенциальной функцией U и совокупности сил P, не имеющих потенциала. Тогда дифференциальные уравнения движения частицы в инерциальной прямоугольной системе координат, связанной с центральным телом M, можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \tag{3.2}$$

где

$$U = -\frac{\mu}{r} - R.$$

Причем первое слагаемое в U – потенциал, обусловленный притяжением сферической Земли, рассматриваемой как материальная точка, а второе слагаемое представляет собой потенциал возмущающих сил; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор положения спутника; t – физическое время; r – модуль вектора положения; $\mu = k^2 M$; k^2 – универсальная гравитационная постоянная; $U = U(t, \mathbf{x}),$; $\partial / \partial \mathbf{x}$ – градиент. В качестве силы, имеющей потенциал в задачах динамики ИСЗ, рассматривается, как правило, влияние несферической составляющей гравитационного поля Земли (см. гл. 1). Все же остальные силы, включая влияние Луны и Солнца, положение которых задается либо таблично, либо в виде рядов, полученных

вне задачи о движении ИСЗ, относятся к силам, не имеющим потенциала.

При введении в уравнения (3.1) силы, обусловленной влиянием несферичности Земли, следует помнить, что уравнения движения записаны в инерциальной системе координат, а потенциал гравитационного поля Земли отнесен к вращающейся системе координат, жестко связанной с Землей. Преобразования, связывающие эти системы координат, описаны в гл. 1.

3.2. Уравнения движения в оскулирующих кеплеровых элементах

Применение метода вариации произвольных постоянных к уравнениям (3.1) позволяет записать уравнения движения ИСЗ в оскулирующих элементах. Такие уравнения используются при построении как численных, так и аналитических алгоритмов прогнозирования движения.

При численном прогнозировании использование уравнений в оскулирующих элементах обладает тем преимуществом, что невозмущенная часть этих уравнений интегрируется без методических ошибок любым численным методом. Кроме того, скорость изменения функции правых частей этих уравнений существенно меньше, чем при использовании прямоугольных или параметрических переменных.

Решение уравнений (3.1) в случае невозмущенного движения имеет вид (Дубошин, 1968):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\alpha, \quad \dot{x}_1 = \sqrt{\frac{fm_0}{p}}\left[\alpha e \sin\upsilon + p\alpha' r^{-1}\right], \\
x_2 &= r\beta, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{\frac{fm_0}{p}}\left[\beta e \sin\upsilon + p\beta' r^{-1}\right], \\
x_3 &= r\gamma, \quad \dot{x}_3 = \sqrt{\frac{fm_0}{p}}\left[\gamma e \sin\upsilon + p\gamma' r^{-1}\right],
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon},$$

$$\alpha = \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i, \quad \alpha' = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u},$$

$$\beta = \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i, \quad \beta' = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}, \tag{3.4}$$

$$\gamma = \sin u\sin i, \qquad \gamma' = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u},$$

Величины Ω, i, ω, p, e, τ – традиционно используемые элементы кеплеровой орбиты: долгота восходящего узла, наклонение орбиты к основной координатной плоскости, долгота перицентра от узла, параметр орбиты, ее эксцентриситет и момент прохождения через перицентр. Параметры α, β, γ представляют собой направляющие косинусы орбитальной системы координат относительно инерциальной системы, используемой в уравнениях (3.1).

Аргумент широты u определяется формулой

$$u = \upsilon + \omega,$$

истинная аномалия υ связана с независимой переменной соотношением

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{fm_0}} \int_0^{\upsilon} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}\ . \tag{3.5}$$

Элементы кеплеровой орбиты являются в формулах (3.3), (3.5) произвольными постоянными и полностью определены начальными условиями системы уравнений (3.1).

Применение к уравнениям возмущенного движения (3.1) метода вариации произвольных постоянных в предположении, что решение уравнений (3.1) сохраняет форму (3.3), но величины $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ являются функциями времени, позволяет получить уравнения движения в оскулирующих элементах $\Omega(t)$, $i(t)$, $\omega(t)$, $p(t)$, $e(t)$, $\tau(t)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} iW,\\
&\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{p}\cos uW,\\
&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\cos\upsilon}{e}S + \frac{\sin\upsilon}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)T - \frac{r}{p}\sin u \operatorname{ctg} iW,\\
&\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 2rT,\\
&\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \sin\upsilon S + \left[\cos\upsilon + (\cos\upsilon + e)\frac{r}{p}\right]T,\\
&\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{p^{3/2}}{eK}\left[(eN\sin\upsilon - \cos\upsilon)S + \frac{p}{r}NT\right]\frac{r^2}{p^2}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Здесь S, T, W – компоненты возмущающего ускорения в орбитальной системе координат. S направлена вдоль вектора положения спутника $\mathbf{x}$, T – по направлению перпендикулярному $\mathbf{x}$, которое лежит в плоскости, проходящей через $\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{x}}$, и составляет с направлением движения угол, меньший 90^0; W – по нормали к плоскости $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$. Связь между S, T, W и возмущающими ускорениями системы (3.1):

$$
\begin{aligned}
F_{x_1} &= \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x_1} + P_1,\\
F_{x_2} &= \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x_2} + P_2,\\
F_{x_3} &= \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x_3} + P_3
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

задается формулами

$$
\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p}{fm_0}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \end{pmatrix}
\tag{3.8}
$$

Величины $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ вычисляются по формулам (2.11), величины $\alpha'', \beta'', \gamma''$ – по следующим формулам:

$$\alpha'' = \sin\Omega \sin i,$$
$$\beta'' = -\cos\Omega \sin i,$$
$$\gamma'' = \cos i.$$

В уравнениях (3.6) величина N определяется формулой

$$N = \frac{2p^2}{r^2} \int_0^{\upsilon} \frac{\cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}{(1 + e\cos\varphi)},$$

а связь между истинной аномалией υ и независимой переменной t осуществляется с помощью соотношения (3.5).

Уравнения (3.6) носят название уравнений Ньютона. Начальные условия системы (3.6) $\Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0$ определяются из начальных условий системы (3.1) по формулам невозмущенного движения.

В качестве независимой переменной в уравнениях (3.6) можно использовать не только физическое время t, но и угловые переменные, связанные с орбитальным движением: истинную аномалию υ (Таратынова, 1957), аргумент широты (Охоцимский, Энеев, Таратынова, 1957) и др.

Наличие эксцентриситета в знаменателе ряда членов в уравнениях (3.6) может приводить к потере точности при исследовании почти круговых спутниковых орбит. В этом случае удобна, например, система уравнений, полученная в (Бордовицына и др., 1991).

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} = 2r^3\tilde{T}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u} = \frac{r^3}{p}\tilde{W}\cos u, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}u} = \frac{r^3}{p}\tilde{W}\frac{\sin u}{\sin i}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{r^2}{\sqrt{fm_0 p}}\tilde{\Theta}, \\
&\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = r^2\left[-\tilde{S}\cos u + \tilde{T}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin u + \frac{r}{p}\left(\tilde{T}g - \tilde{W}h\,\mathrm{ctg}i\sin u\right)\right], \\
&\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}u} = r^2\left[\tilde{S}\sin u + \tilde{T}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos u + \frac{r}{p}\left(\tilde{T}h + \tilde{W}h\,\mathrm{ctg}i\sin u\right)\right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где в качестве независимой переменной выбран аргумент широты, а элементы g и h имеют вид

$$g = e\sin\omega; \quad h = e\cos\omega.$$

Компоненты возмущающего ускорения $\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{W}$ определяются формулами

$$\tilde{S} = \frac{S}{\Theta}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\Theta}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{\sqrt{fm_0 p}}{\Theta}, \tag{3.10}$$

где $\Theta = \sqrt{fm_0 p} - \frac{r^3}{p} W \operatorname{ctg} i \sin u.$ (3.11)

Последнее уравнение в (3.9) дает связь оскулирующего и драконического периодов обращения спутника.

При построении аналитических и численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ используются также уравнения Лагранжа для оскулирующих кеплеровых элементов, которые связывают изменения элементов с частными производными от возмущающей функции по элементам. Например, для системы элементов Ω, i, π, a, e, ε, где $\pi = \Omega + \omega$ – долгота перицентра, a – большая полуось орбиты спутника; $\varepsilon = \pi + M_0$ – средняя долгота в эпоху t_0; M_0 – средняя аномалия в эпоху, имеем следующую систему уравнений Лагранжа (Дубошин, 1968):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{I}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right), \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{I}{2}}{\mathrm{na}^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e}, \\
\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{I}{2}}{\mathrm{na}^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial e},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

причем $n = Ka^{-3/2}$ – среднее движение спутника.

Связь между частными производными от возмущающей функции R и возмущающими ускорениями задается формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= -\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\left\{2\sin^2\frac{1}{2}T + \sin l\cos uW\right\},\\
\frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\sin uW,\\
\frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{nr}{\sqrt{1-e^2}}S,\\
\frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[-\cos\upsilon S + \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)T\right],\\
\frac{\partial R}{\partial \pi} &= -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\sin\upsilon S - \frac{na^3}{r}T + \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}T,\\
\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{na^2 e\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}}S + \frac{na^3}{r}T.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Уравнения Ньютона используются, как правило, в задачах численного прогнозирования движения ИСЗ, а также при построении аналитических и полуаналитических теорий движения для учета возмущений от сил, не имеющих потенциала. Для учета возмущений от потенциальных сил в аналитических методах используются уравнения Лагранжа.

При построении аналитических и численно-аналитических теорий с учетом всех видов возмущений могут использоваться канонические переменные.

3.3. Вывод уравнений в возмущениях канонических переменных методом Гамильтона–Якоби

Запишем уравнения (3.1) в канонической форме, полагая $x_i = q_i, \dot{x}_i = p_i$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{3.14}$$

При этом гамильтониан H будет определяться формулой

$$H = H(p_i, q_i, t) = \sum_{i-1}^{3} \frac{1}{2} p_i^{\,2} + U.$$

Перейдем от переменных q и p к $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= f(P,Q,t) \\ \dot{P}_i &= g(P,Q,t) \end{aligned}. \tag{3.15}$$

Если существует функция $K(P,Q,t)$ такая, что

$$f_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad g_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \text{ и } \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \tag{3.16}$$

то преобразование $q, p \to Q, P$ называется каноническим.

Производящей функцией $S(P,q,t)$ преобразования называется такая функция, что

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}. \tag{3.17}$$

Эти уравнения можно разрешить относительно

$$q_i = q(P,Q,t), \quad p_i = p(P,Q,t). \tag{3.18}$$

Функция K связана с H следующим образом:

$$K(P,Q,t) = H[p(P,Q,t), q(P,Q,t), t] + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{3.19}$$

Если удается найти такое $K \equiv 0$, то векторы P и Q будут постоянными, и мы получим для определенной функции S уравнение Гамильтона–Якоби

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_N}, q_1, q_2, ..., q_N, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{3.20}$$

Если удается найти полное решение уравнения (3.20), то решение системы является соотношения (3.18). Как правило, в общем виде это сделать не удается. Однако если $H = H_0 + \tilde{H}$ ($\tilde{H} = \tilde{H}(\varepsilon)$ – мало по сравнению с H_0) и существует полный интеграл S_0 для уравнения

$$H_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\frac{\partial S_0}{\partial q_2},...,\frac{\partial S_0}{\partial q_N},q_1,q_2,...,q_N,t\right)+\frac{\partial S_0}{\partial t}=0, \qquad (3.21)$$

тогда с помощью метода вариации произвольных постоянных можно получить уравнения в возмущениях канонических переменных

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i},\ \dot{P}_i=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}. \qquad (3.22)$$

О методах решения уравнений типа (3.22) речь пойдет в гл. 6.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ИСЗ

4.1. Возмущения от несферичности геопотенциала

Из всего сказанного в гл. 2 с очевидностью следует, что проекции силы, создаваемой несферичностью земного потенциала на оси прямоугольной, жестко связанной с Землей системы координат, задаются формулой

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

где

$$U = \frac{fM}{r_0}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_{n,m}(\sin\varphi)\left[\bar{C}_{n,m}\cos m\lambda + \bar{S}_{n,m}\sin m\lambda\right]\right\}.$$

Однако способ представления этих производных в правых частях уравнений движения будет зависеть от метода интегрирования уравнений. При применении аналитических методов производные от потенциала Земли должны быть представлены в виде явных функций от элементов орбиты спутника, а при применении численных методов удобно использовать прямоугольные координаты. Последнее замечание в равной степени относится и к представлению в уравнениях движения других сил, действующих на ИСЗ. В дальнейшем каждый из этих подходов мы рассмотрим отдельно.

4.2. Возмущения от приливных деформаций центрального тела

Заметный вклад в возмущения искусственных спутников Земли вносит влияние приливных деформаций, возникающих в теле планеты под действием притяжения внешнего тела. В результате притяжения внешнего тела на каждый элемент массы Земли действует

сила, потенциал которой на поверхности Земли определяется формулой

$$\hat{R} = \frac{fm_l}{r_l} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r_l} \right)^n P_n(\cos\psi), \tag{4.1}$$

где m_l, r_l – масса и геоцентрический радиус-вектор внешнего тела; r_0 – средний радиус Земли; ψ – угол между направлением на внешнее тело и рассматриваемый элемент массы Земли. Эта сила вызывает приливную деформацию в теле Земли, в результате чего притяжение Земли изменяется и возникают дополнительные силы, характеризующиеся потенциалом $\tilde{R}$. С помощью модели Лява этот потенциал на поверхности Земли представляется формулой

$$\tilde{R} = \frac{fm_l}{r_l} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{r_0}{r_l} \right)^n P_n(\cos\psi),$$

где k_n – постоянные, называемые числами Лява и характеризующие упругие свойства Земли. Во внешнем пространстве $\tilde{R}$ определяется формулой

$$\tilde{R} = \frac{fm_l}{r_l} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{r_0}{r_l} \right)^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi), \tag{4.2}$$

где r – радиус-вектор внешней точки.

Модель Лява является основной моделью представления потенциала действующих на ИСЗ сил, обусловленных приливными деформациями в теле Земли. В настоящее время разработаны более полные приливные модели, точнее учитывающие упругие свойства Земли, например модель Вара. Кроме того, современные модели учитывают влияние приливных деформаций, возникающих в океане и атмосфере Земли. Более подробно мы рассмотрим эти вопросы в гл. 8, когда будем говорить об алгоритмах вычисления этих возмущений при численном моделировании движения.

4.3. Лунно-солнечные возмущения

При наличии в движении ИСЗ возмущений от третьего тела в уравнениях движения появляется сила, определяемая формулой

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \mu' \left(\frac{\tilde{x}_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{\tilde{x}_i}{r'^3} \right), \tag{4.3}$$

где $\Delta = \sqrt{\left(\tilde{x}_1 - x_1\right)^2 + \left(\tilde{x}_2 - x_2\right)^2 + \left(\tilde{x}_3 - x_3\right)^2}$ – расстояние от спутника до возмущающего тела; $\tilde{\mathbf{x}} = \left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\right)$ – вектор положения возмущающего тела; $r' = |\tilde{\mathbf{x}}|$, а μ' – произведение гравитационной постоянной на массу возмущающего тела.

Возмущающие влияния Луны и Солнца на движение ИСЗ принято считать независимыми друг от друга, поэтому формулой (4.3) можно пользоваться и в том и в другом случаях. При одновременном учете возмущений от Луны и Солнца в правой части уравнений (3.1) будут два слагаемых типа (4.3).

Главная трудность при учете лунно-солнечного влияния будет состоять в представлении координат возмущающего тела в требуемой форме.

4.4. Негравитационные возмущения, связанные с Солнцем

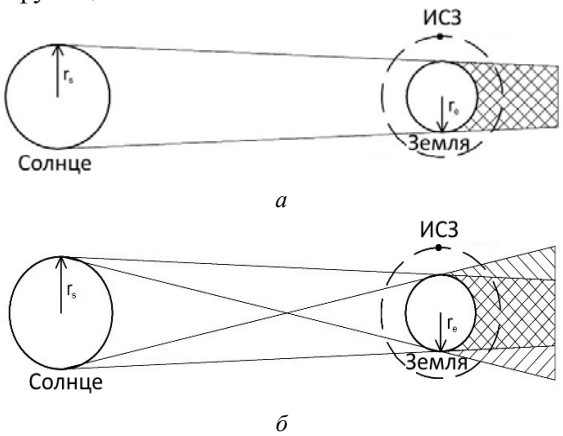
Будем предполагать, что мощность потока солнечной радиации постоянна, сила светового давления всегда направлена по линии Земля–Солнце, орбита Земли круговая, спутник имеет сферическую форму. При этих предположениях сила прямого светового давления Солнца на спутник может быть задана формулой

$$\mathbf{P} = L\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - L\left(\frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{x}}{\mathrm{c}|\mathbf{x}|} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}}{\mathrm{c}} \right), \tag{4.4}$$

$$L = \kappa\theta \frac{a_E^2}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\sigma}{m},$$

где c – скорость света; $\kappa = 1367$ Вт/м^2 – солнечная постоянная; θ – постоянная, характеризующая отражающие свойства спутника ($\theta = 1$ соответствует зеркальному отражению); a_E – большая полуось орбиты Земли; σ и m – площадь миделева сечения, отнесенная к плоскости, перпендикулярной гелиоцентрическому вектору положения, и масса исследуемого объекта соответственно. Первая часть в формуле (4.4) отвечает за световое давление, вторая – за эффект Пойнтинга–Робертсона (Robertson, 1937), связанный с переизлучением солнечной энергии спутником.

Основную трудность при вычислении возмущений, вызванных световым давлением, представляет учет эффекта вхождения спутника в тень Земли. Проблему решает введение в формулу (4.4) так называемой функции тени.



а

б

Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация световых моделей:
а – «цилиндрическая» световая модель; *б* – «конусная» световая модель

Первая световая модель с функцией тени появилась в 1963 г. (Ferraz, 1963, 1966). Условно ее можно назвать «цилиндрической» (рис. 4.1, *а*), так как созданная Солнцем тень имеет цилиндрическую форму и четкую выраженную границу тени и света, а сама функция тени Φ ведёт себя как функция Хевисайда (ступенчатая функция):

$$\Phi = \begin{cases} 1, r > r_E + r_S \\ 0, r \le r_E + r_S \end{cases},$$

где r – угол, образованный между Солнцем, объектом и Землей; r_E, r_S – угловые размеры Земли и Солнца, соответственно видимые с исследуемого объекта. Такой подход очень простой в реализации, однако грубо описывает физический процесс, происходящий в реальности.

Разработка следующей световой модели связана с появлением быстродействующих ЭВМ. Эта модель (Бордовицына, 1992) отличается от предыдущей наличием полутени, и и ее можно назвать «конусной» световой моделью (рис. 4.1б), так как форма тени напоминает конус. Функция тени Ф для данной световой модели имеет вид (Авдюшев, 2010):

$$\Phi = \begin{cases} 1, & \text{если } r > r_E + r_S \\ 1 - \dfrac{s_{SE}}{s}, & \text{если } r > \left| r_S - r_E \right| \\ 0, & \text{если } r > \left| r_S - r_E \right| \end{cases}, \qquad (4.5)$$

где s и s_{SE} – площадь дисков Солнца и площадь дисков пересечения Солнца и Земли соответственно:

$$s = \pi r_S^2, s_{SE} = \frac{r_S^2}{2}(\varphi_S - \sin\varphi_S) + \frac{r_E^2}{2}(\varphi_E - \sin\varphi_E).$$

Величины φ_S и φ_E – это углы между радиальным направлением из центров дисков в точке пересечения их границ, и они определяются как

$$\varphi_S = 2\arccos\left(\frac{r^2 + r_S^2 - r_E^2}{2rr_S}\right), \varphi_E = 2\arccos\left(\frac{r^2 + r_E^2 - r_S^2}{2rr_E}\right). \qquad (4.6)$$

Обычно для моделирования движения околоземных объектов применяют эти две представленные модели. Однако для высокоточного численного моделирования, как пример «Численная модель движения систем ИСЗ и КА», нужно использовать модель, которая будет не только учитывать полутень от Земли, но и при-

нимать во внимание двойное преломление солнечных лучей в земной атмосфере и сжатие атмосферы Земли (рис. 4.2).

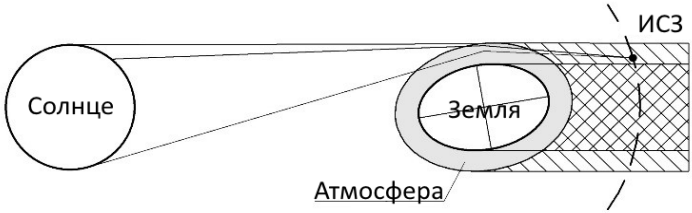


Рис. 4.2. Световая модель околоземного объекта, учитывающая двойное преломление света в атмосфере Земли и её несферичность

Все основные формулы для учета этого эффекта и их вывод можно найти в работах (Vokrouhlicky and et al, 1996).

4.5. Возмущения от сопротивления атмосферы

На ИСЗ, движущиеся на высоте 150–1500 км, заметное влияние оказывает сопротивление атмосферы. Сила сопротивления воздуха, действующие на поступательное движение спутника, направлена противоположно скорости объекта относительно воздуха, а ее абсолютная величина определена формулой

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} S c_d \rho \mathbf{v}_{отн}^2, \qquad (4.7)$$

где S – площадь поперечного сечения спутника; c_d – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха; ρ – плотность воздуха; $\mathbf{v}_{отн}$ – скорость спутника относительно атмосферы.

Наибольшая сложность при определении возмущений от сопротивления атмосферы заключается в вычислении плотности атмосферы ρ. Величина плотности атмосферы является функцией молекулярного веса воздуха M и его абсолютной кинетической температуры T :

$$\rho = \rho_1 \frac{MT}{M_1 T_1} e^{\int_{h_1}^{h} \frac{gM}{R_0 T} dh}, \qquad (4.8)$$

где h – высота над поверхностью Земли; ρ_1, M_1, T_1 – значения соответствующих величин на высоте $h = h_1$.

Изменение параметров M и T – это функции времени и геофизических факторов изменения состояния атмосферы, зависящих от активности Солнца. Именно поэтому в изменении параметров атмосферы наблюдается периодичность, связанная с обращением Земли вокруг Солнца, с обращением Солнца вокруг своей оси, с изменением солнечной активности в течение одиннадцатилетнего цикла и т.п.

Модели атмосферы, учитывающие зависимость ее параметров не только от высоты, но и от перечисленных выше факторов, принято называть динамическими. Поскольку построение этих моделей – процесс трудоемкий, на практике пользуются различными упрощенными моделями. Например, статической моделью атмосферы, которая дает возможность определять плотность как функцию высоты и не учитывает зависимость плотности от времени. Большое распределение в практике имеют также локальные модели атмосферы, пригодные лишь для заданного диапазона высот и в течение определенного интервала времени. Простейшим примером локальной модели может служить так называемая изотермическая модель

$$\rho = \rho_1 e^{-\frac{h-h_1}{H}}, \qquad (4.9)$$

полученная в предположении, что величины M и T постоянны. Здесь

$$H = \frac{R_0 T}{qM} \qquad (4.10)$$

есть высота однородной атмосферы или шкала высот, являющаяся, в свою очередь, функцией высоты h; R_0 – универсальная газовая

постоянная; q – ускорение силы тяжести, которое в данной формуле считается постоянным.

В последние несколько десятилетий разработан целый ряд так называемых квазидинамических моделей атмосферы. Первыми наиболее значимыми моделями такого рода были Модель ГОСТ – 22721-77, модель Яккиа (Jacchia, 1977), модель, разработанная Ф. Барлье и др. (Barlier F. et al., 1978), а также модель Харриса-Прейстера (Harris, Priester, 1962).

Все указанные модели вместе с изменением атмосферной плотности с высотой учитывают основные вариации этой плотности во времени. В частности, учитываются суточные вариации плотности, вариации, связанные с одиннадцатилетним и двадцатисемидневным циклами солнечной активности, полугодовые вариации и вариации, обусловленные геомагнитной активностью. Модели Яккиа–Робертса и Барлье учитывают также сезонно-высотные вариации концентрации гелия в атмосфере, причем модель Барлье дает несколько заниженное по сравнению с измеренными значение амплитуды зимних колебаний концентрации гелия.

Модель ГОСТ 22721-77 была разработана в ИКИ АН СССР и представляет собой совокупность формул для определения плотности воздуха. Характеристики модели получены по наблюдениям спутников серии «Космос», выполненным в 1964–1970 гг. Модель предназначена для вычисления значений плотности верхней атмосферы на высотах 140–500 км в годы низкой и умеренной солнечной активности. Эта модель является наиболее эффективной по быстродействию при ее реализации на ЭВМ. К слабым сторонам модели следует отнести ограниченный диапазон высот, а также недостаточно точную аппроксимацию вариаций плотности атмосферы, связанную с индексом $F_{10,7}$ – интенсивностью потока радиоизлучения на волне 10,7 см. Последний недостаток частично ликвидирован авторами в уточненной модели.

Модифицированная модель Яккиа представляет собой дальнейшее развитие модели CIRA 1972. Она состоит из обширных таблиц, содержащих данные о концентрации основных составля-

ющих верхней атмосферы: атмосферного кислорода, молекулярного кислорода, молекулярного азота, аргона, гелия и водорода, а также о среднем молекулярном весе и других физических характеристиках атмосферы для различных высот и различных температур. Модель пригодна для вычисления плотности воздуха в интервале высот от 90 до 2500 км над поверхностью Земли. Существует также аналитическая аппроксимация модели Яккиа.

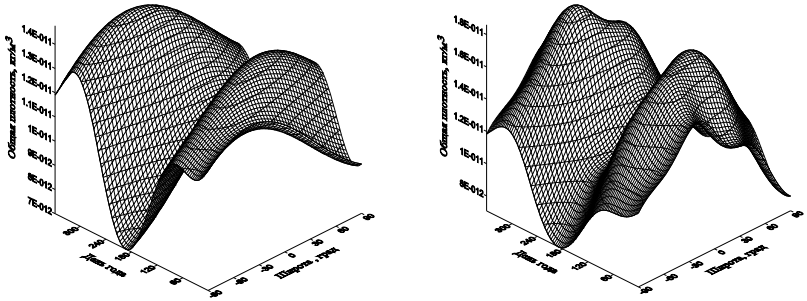
Модель Барлье представляет собой совокупность формул для вычисления значений плотности воздуха на высотах 120–1200 км над поверхностью Земли.

Модель Хариса–Прейстера, которая была создана в центре космических полетов NASA, предназначена для диапазона высот 120–800 км. Она представляет собой обширные таблицы значений плотности воздуха для различных высот над поверхностью Земли, уровней солнечной активности и различных значений солнечного местного времени.

В модифицированной модели Хариса–Прейстера скорость вычисления достигается путем многих упрощений, что снижает достоинство модели. Наиболее полной является в настоящее время модель Яккиа. Модифицированная модель на 20% быстрее в вычислительном отношении, чем немодифицированная. Максимальное расхождение значений плотности, полученное по двум моделям, не превосходит 0,8%.

Современным продолжением моделей ГОСТ является отечественная модель ГОСТ Р 25645.166-2004 (ГОСТ Р.2004), а продолжение моделей CIRA – модель NASA NRLMSISE-00 (http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html). Обе модели получены по обширному наблюдательному материалу и рассчитаны на диапазон высот от 120 до1500 км над поверхностью Земли. Сравнительная характеристика этих моделей (Бордовицына, Куликова, 2007) показала, что по своим возможностям эти модели очень близки. На рис. 4.3 показана широтно-сезонная зависимость плотности атмосферы, по двум моделям, при фиксированных параметрах: $\varphi=0°$, $\lambda=0°$, $F_{10,7}=150$, $F_{81}=150$, $t_s=14^h$, $h=350$ км. Причем φ, λ – географические широта и долгота; $F_{10,7}$ – поток радиоиз-

лучения Солнца на волне 10,7 см в единицах 10^{-22} Вт/(м^{2}Гц); F_{81} – поток $F_{10,7}$, осредненный за три оборота Солнца вокруг своей оси; t_s – местное солнечное время; h – высота над поверхностью Земли.



Модель ГОСТ Р 25645.166-2004 Модель NRLMSISE

Рис. 4.3. Сопоставление моделей

При построении аналитических и численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ применяются, как правило, упрощенные модели атмосферы. С численными же методами в зависимости от условий задачи могут использоваться модели всех упомянутых выше типов: динамические, статистические, локальные. Более того, применение в практике прогнозирования движения ИСЗ достаточно полных моделей атмосферы возможно пока только в сочетании с численными методами вследствие сложной структуры этих моделей.

4.6. Классификация орбит ИСЗ

Орбиты запускаемых ИСЗ очень разнообразны. Они определяются начальными условиями, задаваемыми при выводе спутника на орбиту, и действием естественных сил на пассивном участке полета. По геометрическому характеру движения различают следующие основные классы орбит.

Круговые *и близкие к круговым*. Эти орбиты имеют эксцентриситеты 0–0,03. Высота над поверхностью Земли для таких спутников мало меняется в процессе полета. Состояние движения спутников на разных высотах определяется различными возмущающими силами. В зависимости от высоты спутника этого класса орбит подразделяют на низколетящие, средневысокие и высоколетящие.

Слабоэллиптические орбиты характеризуются умеренным эксцентриситетом, $0,03<e<0,02$. Для них разность высот в апогее и перигее составляет от нескольких сотен до нескольких тысяч километров. По влиянию возмущающих сил спутника этого класса орбит поддаются приведенной выше классификации зависимости от высоты Н.

Высокоэллиптические орбиты характеризуются большими значениями эксцентриситетов, $e > 0,2$. При этом высота спутников в апогее может превышать высоту спутников в перигее в десятки и сотни раз. Спутники с такими орбитами называются высокоапогейными. Они не поддаются удобной классификации, приведенной нами для орбит класса 1, так как существенными для них могут быть все основные виды возмущений: от несферичности Земли, сопротивления атмосферы, притяжения Луны и Солнца.

Низколетящие ИСЗ движутся на высотах Н=200–1500 км. Основными источниками возмущений на таких расстояниях от Земли являются несферичность Земли и сопротивление атмосферы. Превалирующим является сжатие Земли. Сопротивление атмосферы играет существенную роль до высоты 500–600 км и заметно влияет на движение для высот до 1500 км. Хотя возмущения, обусловленные сжатием Земли, значительно больше возмущений из-за сопротивления атмосферы, они не меняют существенно орбиту спутника, а только поворачивают ее в пространстве. Торможение же в атмосфере даже на больших высотах (1000–15000 км) изменяют орбиту спутника и, по сути дела, определяет продолжительность его существования. Влиянием атмосферы и ограничивается данный вид спутников.

Средневысокие (или *среднеорбитальные*) – это внеатмосферные ИСЗ, движущиеся на высотах до 30–35 тыс. км. Основными

возмущающими факторами являются несферичность Земли и гравитационное влияние Луны и Солнца. Превалирующим попрежнему остается сжатие Земли. Начиная с высот около 20 000 км возмущения от притяжения Луны и Солнца становятся сравнимыми с влиянием аномалий силы тяжести Земли.

Высоколетящие ИСЗ движутся на высотах H>30 тыс. км. Для таких спутников возмущающее влияние Луны и Солнца становится равным или превышает возмущение от сжатия Земли. Начиная с высот 50 000 км действие притяжения Луны и Солнца превосходит все остальные гравитационные возмущения.

Из числа приведенных видов спутников интересно выделить те, которые имеют периоды обращения, соизмеримые с периодом вращения Земли. Эти спутники могут иметь орбиты, относящиеся к любому из рассматриваемых классов, и движение их будет характеризоваться соответствующими возмущающими силами. Однако явление резонанса, возникающее вследствие соизмеримости среднего движения спутника с частотой вращения Земли, порождает дополнительные возмущающие силы, которые также могут оказывать значительное влияние на их орбиты.

Помимо приведенных классификаций можно ввести еще классификацию спутников по расположению орбит в пространстве: *экваториальные* спутники и близкие к ним; их орбиты характеризуются небольшим наклонением i к экватору, до 20°; спутники *со средним наклонением*, $i = 40 - 70°$; *полярные* спутники и близкие к ним, $i = 80 - 100°$.

Спутники с наклонением $i > 90°$ движутся по орбитам в обратном направлении, пересекая плоскость экватора с севера на юг. Такие спутники называются спутниками *с обратным движением*.

5. ГЛАВНАЯ ПРОБЛЕМА В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

5.1. Вводные замечания

Поскольку влияние возмущений от второй зональной гармоники геопотенциала в движении ИСЗ существенно больше влияния всех остальных возмущений, проблема учета влияния второй зональной гармоники была сформулирована как главная проблема в теории движения ИСЗ. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ, содержащие возмущения от J_2, не интегрируются в квадратурах. Высокоточный учет влияния этой гармоники геопотенциала в аналитической теории движения ИСЗ предполагает построение достаточно длинных рядов по степеням малого параметра. Эта процедура является весьма трудоемкой. Многие авторы пытались найти приближенные задачи, незначительно отличающиеся от исходной по величине возмущений, но позволяющие находить более простые решения. Практическая их ценность состоит в том, что решения этих задач могут быть использованы как промежуточные при построении полных аналитических теорий движения ИСЗ. Таких задач было предложено весьма много, но мы остановимся только на тех из них, которые нашли свое применение в практике построения аналитических теорий движения ИСЗ. Полный обзор всех задач главной проблемы теории движения ИСЗ можно найти в работе (Справочное руководство… 1971) или в нашей электронной хрестоматии (http//:solar.tsu.ru)

5.2. Возмущающая функция

Возмущающая функция, обусловленная второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли, дается формулой

$$R = -J_2 \frac{fmr_0^2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi' - \frac{1}{2}\right), \qquad (5.1)$$

где J_2 – коэффициент при второй зональной гармонике. Величина $J_2 = 1082{,}628 \cdot 10^{-6}$, в то время как величина остальных зональных коэффициентов $J_n \sim 10^{-6}$ при $n \geq 3$. С ледовательно, возмущения от сжатия примерно в 1000 раз больше возмущений от остальных зональных гармоник.

Разложение функции R по степеням эксцентриситета e с точностью до e^2 включительно имеет следующий вид (Справочное руководство… 1971):

$$
\begin{aligned}
R = {} & \frac{1}{2} J_2 fm \frac{r_0^2}{a^3}\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)\left[1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4+\frac{35}{16}e^6+\right. \\
& +3\left(e+\frac{9}{8}e^3+\frac{87}{64}e^5\right)\cos M+\frac{9}{2}\left(e^2+\frac{7}{9}e^4+\frac{47}{48}e^6\right)\cos 2M+ \\
& +\frac{53}{8}\left(e^3+\frac{393}{848}e^5\right)\cos 3M+\frac{77}{8}\left(e^4+\frac{129}{770}e^6\right)\cos 4M+ \\
& \left.+\frac{1773}{128}e^5\cos 5M+\frac{3167}{160}e^6\cos 6M\right]+ \\
& +\frac{3}{4}J_2 fm\frac{r_0^2}{a^3}s^2\left[\frac{1}{48}\left(e^3+\frac{11}{16}e^5\right)\cos(M-2\omega)+\right. \\
& +\frac{1}{24}\left(e^4+\frac{7}{10}e^6\right)\cos(2M-2\omega)+\frac{81}{1280}e^5\cos(3M-2\omega)+ \\
& +\frac{4}{45}e^6\cos(4M-2\omega)-\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{8}e^3+\frac{5}{192}e^5\right)\cos(M+2\omega)+ \\
& +\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{13}{16}e^4-\frac{35}{288}e^6\right)\cos(2M+2\omega)+ \\
& +\frac{7}{2}\left(e-\frac{123}{56}e^3+\frac{489}{448}e^5\right)\cos(3M+2\omega)+ \\
& +\frac{17}{2}\left(e^2-\frac{115}{51}e^4+\frac{601}{408}e^6\right)\cos(4M+2\omega)+ \\
& +\frac{845}{48}\left(e^3-\frac{6505}{2704}e^5\right)\cos(5M+2\omega)+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{533}{16}\left(e^4-\frac{13827}{5330}e^6\right)\cos(6M+2\omega)+$$
$$+\frac{228347}{3840}e^5\cos(7M+2\omega)+\frac{73369}{720}e^6\cos(8M+2\omega)\Bigg], \quad (5.2)$$

где через s обозначен синус наклонения орбиты.

5.3. Вековые возмущения

Если осреднить возмущающую функцию R (5.2) по средней аномалии M, она запишется как

$$R=\frac{1}{2}J_2 fm\frac{r_0^2}{a^3}\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}.$$

Подставив ее в уравнения Лагранжа (3.12), мы обнаружим, что эти уравнения примут вид

$$\dot{\Omega}=-\frac{3}{2}J_2 n\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\cos i(1-e^2)^{-2}, \quad (5.3)$$

$$\dot{\pi}=\frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\frac{5\cos^2 i-2\cos i-1}{(1-e^2)^2}, \quad (5.4)$$

$$\dot{\varepsilon}=\frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\frac{\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)\cos^2 i-2\cos i-1-\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^2}, \quad (5.5)$$

где n – среднее движение спутника. Учитывая, что $\varepsilon=\pi+M_0$, $\pi=\Omega+\omega$ для элементов ω и M_0 будем иметь

$$\dot{\omega}=\frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\frac{5\cos^2 i-1}{(1-e^2)^2}, \quad (5.6)$$

$$\dot{M}_0=\frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\frac{3\cos^2 i-1}{(1-e^2)^{3/2}}. \quad (5.7)$$

Соотношения (5.3)–(5.7) говорят о том, что вековые возмущения содержатся только в угловых элементах ω, M_0 (или ε) и долготе узла Ω.

Формулы (5.3)–(5.7) справедливы при всех значениях наклонения i и $e<1$. Эти формулы показывают, что вековое движение узла достигает максимума при $i=0°$, $180°$ (экваториальные орбиты) и обращается в нуль при $i=90°$ (полярные орбиты), а вековое движение перицентра достигает максимума при $i=0°$, $180°$ и обращается в нуль при $i=63°26'$. Это значение наклонения называется критическим.

5.4. Короткопериодические возмущения

Короткопериодические возмущения содержатся во всех элементах. С точностью до членов первого порядка относительно J_2 они приведены в книге (Справочное руководство… 1971).

5.5. Задача Акснеса

Поскольку здесь вводятся формулы, которые аппроксимируют только первые два члена потенциала притяжения Земли, то для силовой функции U можно принять следующее упрощенное выражение:

$$U=\frac{fm}{r}\left\{1-J_2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)\right\}, \qquad (5.8)$$

где f – постоянная притяжения; m и r_0 – масса и средний экваториальный радиус Земли; J_2 – безразмерная постоянная; r и φ – геоцентрический радиус-вектор и широта спутника. В формуле (5.8) отброшены члены, имеющие порядок J_2^2 и выше.

К. Акснес построил свою промежуточную орбиту на основе промежуточного потенциала V, определяемого формулой

$$V = \frac{fm}{r}\left\{1 - J_2 \frac{r_0^2}{rp}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)\right\}. \qquad (5.9)$$

Формула для возмущающей функции R в этом случае имеет вид

$$R = fmJ_2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right). \qquad (5.10)$$

Функция V, таким образом, мало отличается от U, если эксцентриситет орбиты спутника является малой величиной.

Общее решение уравнений промежуточного движения в этом случае также может быть найдено методом Гамильтона–Якоби. Приведем здесь первые интегралы задачи Акснеса. Они таковы:

$$\frac{fm}{L^2} + \dot{r}^2 - \frac{2fm}{r} + \frac{G^2}{r^2} = 0,$$
$$G^4 - r^4\left(\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2 + \dot{\varphi}^2\right)G^2 - J_2(fm)^2 r_0^2\left(3\sin^2\varphi - 1\right) = 0, \qquad (5.11)$$
$$r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda} = H.$$

Здесь

$$L = \sqrt{fma},$$
$$G = \sqrt{fma(1-e^2)},$$
$$H = \sqrt{fma(1-e^2)}\cos i$$

– канонические переменные Делоне.

На основе задачи Акснеса В.В. Нестеровым (1984) была построена аналитическая теория для обработки наблюдений, выполненных по проекту МЕРИТ. Недостаток промежуточного потенциала Акснеса заключается в следующем. Он зависит не только от характеристик гравитационного поля Земли, но и от элементов орбиты (большая полуось, эксцентриситет, наклон) спутника. Поэтому точность аппроксимации для разных орбит будет разной. Кроме того, возмущающая функция содержит короткопериодические члены первого порядка относительно J_2. Промежуточная

орбита не учитывает этих возмущений, и их нужно определять методами теории возмущений.

5.6. Задачи Винти и Кислика

В этом параграфе будет рассмотрен другой тип аппроксимирующих выражений для потенциала притяжения Земли. Эти выражения были предложены Дж. Винти и М.Д. Кисликом (Справочное руководство… 1971). Все они обладают двумя важнейшими свойствами. Во-первых, они отличаются от потенциала реальной Земли членами порядка выше первого относительно сжатия. Во-вторых, дифференциальные уравнения движения в гравитационном поле, определяемом аппроксимирующими потенциалами, строго интегрируются в квадратурах. В отличие от промежуточного потенциала Акснеса они зависят только от постоянных гравитационного поля Земли и не зависят от элементов орбиты спутника. Возмущающая функция в этом случае не содержит второй зональной гармоники.

Дж. Винти и М.Д. Кислик независимо предложили аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли, которые в сущности совпадают друг с другом, и их можно представить следующей формулой:

$$V = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_2^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi)\right\}. \qquad (5.12)$$

Если обозначить через R возмущающую функцию, то

$$R = \frac{fm}{r}\sum_{k=3}^{\infty} j_k \left(\frac{r_0}{r}\right)^k P_k(\sin\varphi), \qquad (5.13)$$

где

$$\left.\begin{aligned} j_{2n+1} &= -J_{2n+1}, \\ j_{2n} &= -\left[J_{2n} + (-1)^n J_2^n\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Поскольку коэффициенты J_k имеют второй порядок малости относительно J_2, то из формул (5.13) и (5.14) видно, что возмущающая функция содержит лишь члены второго порядка.

Дифференциальные уравнения задачи Винти и Кислика могут быть проинтегрированы в сфероидальных координатах ξ, η, ω, связанных с x, y, z равенствами

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1-\eta^2)}\cos\omega, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1-\eta^2)}\sin\omega, \\ z &= \xi\eta. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Первые интегралы задачи записываются в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{J}, \quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{F(\eta)}}{J}, \\ &(\xi^2 + c^2)(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha_3, \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2,$$

$$\Phi(\xi) = (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1\xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2\alpha_3^2,$$

$$F(\eta) = (1-\eta^2)(2\alpha_1 c^2\eta^2 + \alpha_2^2) - \alpha_3^2,$$

$$c = r_0\sqrt{J_2},$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – канонические постоянные Якоби.

Таким образом, задача Винти и Кислика представляет собой интегрируемую динамическую проблему. Она нашла приложение в современной небесной механике как в теории движения ИСЗ, так и в теории движения естественных спутников планет.

Промежуточная орбита, основанная на задаче Винти и Кислика, исследовалась не только ее авторами, но и многими другими специалистами по динамике ИСЗ. Рабочие формулы для вычисления промежуточной орбиты можно найти в работе М.Д. Кислика (1960).

5.7. Задача двух неподвижных центров

В 1961 г. Е.П. Аксенов, Е.А. Гребеников и В.Г. Демин предложили использовать в качестве промежуточного потенциал обобщенной задачи двух неподвижных центров с комплексными массами и расстояниями. Обоснование применения этой задачи для искусственных спутников Земли можно найти в их монографиях (Демин, 1968) и (Аксенов, 1977). Промежуточная орбита с потенциалом обобщенной задачи двух неподвижных центров учитывает полностью возмущения от второй, третьей и частично четвертой зональных гармоник земного потенциала. Интегралы задачи и формулы, описывающие промежуточное движение, даны в монографии Е.П. Аксенова (1977).

Потенциал обобщенной задачи двух неподвижных центров задается формулой (Аксенов, 1977):

$$W = \frac{fm}{2}\left[\frac{1+j\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2}\right], \tag{5.17}$$

где $j = \sqrt{-1}$; c и σ – некоторые вещественные постоянные,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left[z - c(\sigma + j)\right]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left[z - c(\sigma - j)\right]^2}.$$

Если разложить потенциал (5.24) в ряд по полиномам Лежандра, то получим

$$W = \frac{fm}{k}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n'\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\phi)\right\},$$

где J_n' – некоторые вещественные коэффициенты, связанные с постоянными c и σ следующей формулой:

$$J_n' = -\frac{1}{2}\left(\frac{c}{r_0}\right)^n \left[(1+j\sigma)(\sigma+j)^n + (1-j\sigma)(\sigma-j)^n\right].$$

Выбирая c и σ из условия, чтобы функция W была наиболее близкой к потенциалу притяжения Земли, а именно положив $J_2' = J_2$, $J_3' = J_3$, получим

$$c = r_0 \left\{ J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2},$$

$$\sigma = \frac{J_3}{2J_2} \left\{ J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Подставляя теперь числовые значения r_0, J_2 и J_3, найдем $c = 209,729$ км, $\sigma = -0,035647$.

Следовательно, при соответствующем выборе постоянных промежуточный потенциал отличается от потенциала земного тяготения коэффициентами при четвертой зональной гармонике земного потенциала, т.е. членами порядка квадрата сжатия.

Как известно, дифференциальные уравнения задачи двух неподвижных центров

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad (i = 1,2,3) \tag{5.18}$$

интегрируются в квадратурах. Полные формулы, описывающие промежуточное движение, содержат в себе эллиптические интегралы и эллиптические функции, которые можно представить в виде рядов по степеням малых параметров c, σ и ε, где

$$\varepsilon = c / a(1 - e^2), \tag{5.19}$$

причем $\varepsilon^2 \cdot \sigma^2 = 10^{-3}$.

Промежуточное движение, определяемое уравнениями (5.18), принято называть эйлеровым движением, а соответствующую этому движению орбиту – эйлеровой. Элементы эйлеровой орбиты

$$\hat{a},\ \hat{p},\ \hat{s},\ \Omega,\ \omega,\ M$$

аналогичны кеплеровым элементам и обращаются в них при $\varepsilon = 0$. С точностью до ε^2 для позиционных переменных и ε^4 для угловых переменных эта связь определяется формулами

$$
\begin{aligned}
&\widehat{a} = a\{1+\varepsilon^2(1-e^2)\alpha^2\},\\
&\widehat{p} = p\{1+2\varepsilon^2(1+e^2)\alpha^2\}, \quad p = a(1-e^2),\\
&1-\widehat{s}^2 = \alpha^2\{1-\varepsilon^2(1-e^2)(1-\alpha^2)\},\\
&\Omega = \mu\psi + \Omega_0, \quad \omega = \nu\psi + \omega_0, \quad M = n_0(t-t_0) + M_0\left(1+\lambda\right),
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

причем

$$
\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\widehat{e}}{1-\widehat{e}}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},
$$

$$
\widehat{e} = \widehat{e}\{1+\varepsilon^2(1-e^2)\left(1-2s^2\right)\},
$$

$$
s = \sin i, \quad \alpha = \cos i.
$$

Здесь λ, μ, ν характеризуют вековые возмущения соответствующих угловых элементов орбиты от сжатия Земли и выражаются следующими формулами:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = -\frac{\varepsilon^4}{16}\left(1-e^2\right)^{3/2}\left(24-96s^2+75s^4\right),\\
&\mu = -\frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha\left[1+\frac{\varepsilon^2}{8}\cdot\left(6-17s^2-24e^2s^2\right)\right],\\
&\nu = \frac{3}{4}\varepsilon^2\left(4-5s^2\right)+\frac{\varepsilon^4}{64}\times\left[288-1296s^2+1035s^4-e^2\left(144+288s^2-510s^4\right)\right],
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

а n_0 определяется как

$$
n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}}\left\{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha^2\left(1-e^2\right)+\frac{3}{8}\varepsilon^4\alpha^2\left(1-e^2\right)\left(1+11s^2-e^2+5e^2s^2\right)\right\}. \tag{5.22}
$$

Формулы (5.27) включают в себя возмущения от сжатия Земли первого и второго порядков относительно J_2.

Промежуточная орбита задачи двух неподвижных центров может описываться также каноническими элементами $\widehat{L}, \widehat{G}, \widehat{H}$ и $\widehat{l}, \widehat{g}, \widehat{h}$, аналогичными элементам Делоне

$$L=\sqrt{fma},\quad G=\sqrt{fma}\sqrt{1-e^2},\quad H=\sqrt{fma}\sqrt{1-e^2}\cos i,$$
$$l=M=M_0+n\left(t-t_0\right),\quad g=\omega_0,\quad h=\Omega_0$$

и обращающимися в них при $\varepsilon=0$. Эти элементы связаны с эйлеровыми элементами орбиты следующими формулами:

$$\widehat{L}=\sqrt{fma}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-e^2\right)\alpha^2+\frac{\varepsilon^4}{4}\sqrt{(1-e^2)}\left(2-3s^2\right)\right],$$
$$\widehat{G}=\sqrt{fma}\sqrt{1-e^2}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right]\left[4-5s^2+e^2(4-3s^2)\right], \qquad (5.23)$$
$$\widehat{H}=\sqrt{fma}\sqrt{1-e^2}\cos i\left[1+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[2-3s^2+e^2(2-s^2)\right]\right].$$

Угловые элементы являются линейными функциями времени и аналогичны средней аномалии, долготе восходящего узла и долготе перигея:

$$\widehat{l}=M_0\left(1+\lambda\right)+n\left(t-t_0\right),$$
$$\widehat{g}=\omega_0+\nu\cdot n_0\left(t-t_0\right), \qquad (5.24)$$
$$\widehat{h}=\Omega_0+\mu\cdot n_0\left(t-t_0\right).$$

В следующей главе мы рассмотрим уравнения в возмущениях эйлеровых элементов.

6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

6.1. Вывод уравнений в возмущениях промежуточного движения обобщенным методом Лагранжа

Запишем систему уравнений движения ИСЗ в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H}{\partial x'}-X'=0, \quad \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial x}+\tilde{X}=0,\\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H}{\partial y'}-Y'=0, \quad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial y}+\tilde{Y}=0,\\ &\qquad\qquad \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где x, x', y, y',... обозначают неизвестные функции, число которых $2k$ может быть каким угодно; H – гамильтониан системы; величины $X', \tilde{X}, Y', \tilde{Y}$ – функции времени и $2k$ величин x, x', y, y',...

Рассмотрим уравнения, получающиеся из (6.1) отбрасыванием всех величин $X', Y', \tilde{X}, \tilde{Y}$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H}{\partial x'}=0, \quad \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial x}=0,\\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H}{\partial y'}=0, \quad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial y}=0, \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

и допустим, что эти уравнения могут быть полностью проинтегрированы. Общее решение этих уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &x=\Phi(t,a,b,\ldots,g), \quad x'=\Psi(t,a,b,\ldots,g),\\ &\qquad\qquad \ldots \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $a,b,...,g$ суть $2k$ произвольных постоянных интегрирования.

Функции (6.3) удовлетворяют уравнениям (6.2), каковы бы ни были произвольные постоянные.

Чтобы получить общее решение первоначальных уравнений (6.1), сохраним те же аналитические выражения (6.3) для функций $x,x',\ldots$, но будем рассматривать величины $a,b,\ldots,g$ уже не как постоянные, а как некоторые функции времени, подлежащие определению.

В этом предположении будем иметь:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+\frac{\partial x}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+\frac{\partial x'}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t},\ \ldots$$

Внесем эти выражения в уравнения (6.1) и потребуем, чтобы эти уравнения удовлетворялись. При этом имеется в виду, что

$$\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial H'}{\partial x'}\equiv 0,\quad \frac{\partial x'}{\partial t}-\frac{\partial H'}{\partial x'}\equiv 0.$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+\frac{\partial x}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}-X'=0,\\
&\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+\frac{\partial x'}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\tilde{X}=0,\\
&\qquad\ldots\\
&\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+\frac{\partial y}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}-Y'=0,\\
&\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+\frac{\partial y'}{\partial g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\tilde{Y}=0,\\
&\qquad\ldots
\end{aligned}\tag{6.4}$$

Полученные уравнения содержат $2k$ неизвестных производных, относительно которых они линейны. Приведем эти уравнения к более простому виду.

Введем в рассмотрение величины, называемые скобками Лагранжа:

$$[a,b]=\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial b}-\frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial X'}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial Y'}{\partial a}. \tag{6.5}$$

Очевидны соотношения

$$[b,a]=-[a,b],\quad [a,a]=0.$$

Положим, кроме того,

$$\begin{aligned} R_a &= \tilde{X}\frac{\partial x}{\partial a}+\tilde{Y}\frac{\partial y}{\partial a}+\ldots+X'\frac{\partial x}{\partial a}+Y'\frac{\partial y}{\partial a}+\ldots \\ R_b &= \tilde{X}\frac{\partial x}{\partial b}+\tilde{Y}\frac{\partial y}{\partial b}+\ldots+X'\frac{\partial x}{\partial b}+Y'\frac{\partial y}{\partial b}+\ldots \end{aligned} \tag{6.6}$$

Умножая уравнения (6.4) последовательно на все производные

$$\frac{\partial x}{\partial a},\ldots,\frac{\partial x'}{\partial a},\ldots$$
$$\frac{\partial x}{\partial b},\ldots,\frac{\partial x'}{\partial b},\ldots$$

и складывая, получим

$$\begin{aligned} &[a,a]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+[a,b]\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+[a,g]\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+R_a=0, \\ &[b,a]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+[b,b]\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+[b,g]\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+R_b=0, \\ &\ldots \\ &[g,a]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+[g,b]\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}+\ldots+[g,g]\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+R_g=0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Эти уравнения нужно разрешить относительно производных

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t},\ldots,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}.$$

Уравнения (6.7) обладают интересным свойством: коэффициенты этих уравнений не зависят от времени явно, что позволяет значительно упростить их вычисление. Покажем это.

Составим выражение для частной производной по времени t и убедимся, что она равна нулю:

$$\frac{\partial[a,b]}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial a\partial t}\frac{\partial x'}{\partial b}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x'}{\partial b\partial t}-\frac{\partial^2 x}{\partial b\partial t}\frac{\partial x'}{\partial a}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x'}{\partial a\partial t}$$

или

$$\frac{\partial[a,b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial b}-\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial a}-\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}\right)+\dots$$

или, учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial x'},\qquad \frac{\partial x'}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial x},$$

запишем

$$\frac{\partial[a,b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial b}+\dots\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}+\dots\right).$$

Учитывая, что H зависит от a и b только посредством x, x',…, выводим

$$\frac{\partial[a,b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial b}-\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial H}{\partial a}=\frac{\partial^2 H}{\partial a^2}b-\frac{\partial^2 H}{\partial b^2}a=0.$$

В каждом отдельном случае функция H имеет определенное значение, $\Phi,\Psi,\dots$ в (6.3) предполагаются известными функциями времени и могут быть вычислены с помощью элементарных операций. Разрешая затем систему относительно $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t,\dots,\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$, мы получим $2k$ уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=A(t,a,b,\dots g),\\ \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}&=B(t,a,b,\dots g),\\ &\dots\\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}&=G(t,a,b,\dots g),\end{aligned}\qquad(6.8)$$

которые и нужно интегрировать. Найдя зависимость величин $a,b,\ldots,g$ от времени и $2k$ произвольных постоянных, мы получим общее решение уравнений (6.1) по формулам (6.3).

6.2. Уравнения движения в эйлеровых элементах

Перейдем к описанию уравнений возмущенного движения спутника в эйлеровых элементах. Уравнение в прямоугольных координатах с промежуточным потенциалом $\overline{W}$ запишутся в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\partial\overline{W}}{\partial\mathbf{x}}+\frac{\partial R}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}, \tag{6.9}$$

где R – потенциальная функция тех возмущающих сил, которые не были приняты во внимание при построении промежуточной орбиты **P** – силы, не имеющие потенциала.

Канонические уравнения

В качестве канонических переменных возьмем элементы типа Делоне (5.23) – (5.24), введенные в предыдущей главе, и для удобства введем для них следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &L_1=\widehat{L},\ L_2=\widehat{G},\ L_3=\widehat{H},\\ &l_i=n_i(t-t_0)+l_{i,0},\ \ i=1,2,3, \end{aligned} \tag{6.10}$$

где величины n_i даются формулами

$$n_1=\frac{n_0}{1-\lambda},\quad n_2=\frac{\nu n_0}{1-\lambda},\quad n_1=\frac{\mu n_0}{1-\lambda},$$

а $l_{i,0}$ определяется формулами

$$l_{1,0}=M_0(1+\lambda),\ l_{2,0}=\omega_0+\nu M_0,\ l_{3,0}=\Omega_0+\mu M_0. \tag{6.11}$$

Канонические уравнения для системы элементов L_i, l_i запишутся в виде

$$\frac{\mathrm{d}\,L_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial R'}{\partial l_i},\quad \frac{\mathrm{d}\,l_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial R'}{\partial L_i}, \tag{6.12}$$

где $R' = -\alpha_1 + R$. При этом предполагается, что возмущающая функция R выражена через L_i, l_i, а невозмущенный гамильтониан α_1 определяется с точностью до второго порядка сжатия формулой

$$\alpha_1 = -\frac{(fm_0)^2}{2L_1^2}\left\{1 - \frac{c^2(1+\sigma^2)(fm_0)^2}{2L_1L_2^3}\left(1 - 3\frac{L_3^2}{L_2^2}\right) - \frac{3c^4(fm_0)^4}{32L_1L_2^7}\left[5\left(1 - 14\frac{L_3^2}{L_2^2} + 21\frac{L_3^4}{L_2^2}\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + 2\frac{L_2^2}{L_1^2}\left(1 - 18\frac{L_3^2}{L_2^2} + 25\frac{L_3^4}{L_2^4}\right) - 2\frac{L_2}{L_1}\left(1 - 6\frac{L_3^2}{L_2^2} + 9\frac{L_3^4}{L_2^4}\right)\right]\right\}. \quad (6.13)$$

Уравнения при $R = 0$ и $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ определяют промежуточное движение, в котором L_i являются постоянными, а l_i – линейными функциями времени.

Уравнения типа Лагранжа

Из канонических уравнений (6.12) могут быть выведены уравнения в оскулирующих эйлеровых элементах типа Лагранжа. Такие уравнения получены Е.И. Тимашковой (1971) относительно элементов $\hat{a}, \hat{e}, \hat{s}, l, g, h$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{a}}{\mathrm{d}t} &= a_1\frac{\partial R}{\partial l} + a_2\frac{\partial R}{\partial g} + a_3\frac{\partial R}{\partial h}, \\
\frac{\mathrm{d}\hat{e}}{\mathrm{d}t} &= e_1\frac{\partial R}{\partial l} + e_2\frac{\partial R}{\partial g} + e_3\frac{\partial R}{\partial h}, \\
\frac{\mathrm{d}\hat{s}}{\mathrm{d}t} &= s_1\frac{\partial R}{\partial l} + s_2\frac{\partial R}{\partial g} + s_3\frac{\partial R}{\partial h}, \\
\frac{\mathrm{d}\hat{l}}{\mathrm{d}t} &= n_1 - a_1\frac{\partial R}{\partial a} - e_1\frac{\partial R}{\partial e} - s_1\frac{\partial R}{\partial s}, \\
\frac{\mathrm{d}\hat{g}}{\mathrm{d}t} &= n_2 - a_2\frac{\partial R}{\partial a} - e_2\frac{\partial R}{\partial e} - s_2\frac{\partial R}{\partial s}, \\
\frac{\mathrm{d}\hat{h}}{\mathrm{d}t} &= n_3 - a_3\frac{\partial R}{\partial a} - e_3\frac{\partial R}{\partial e} - s_3\frac{\partial R}{\partial s},
\end{aligned} \quad (6.14)$$

где с точностью до ε^2:

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{fm_0\hat{a}^{-1}}}\left\{1+\frac{\varepsilon^2}{2}(1-\hat{e}^2)\cos^2 i\right\},$$

$$a_2 = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{fm_0\hat{a}^{-1}}}\left\{12-15\hat{s}^2+8\sqrt{1-\hat{e}^2\cos^2 i}\right\},$$

$$a_3 = -\frac{\varepsilon^2\cos^2 i}{\sqrt{fm_0\hat{a}^{-1}}}\left\{3+2\sqrt{1-\hat{e}^2}\right\};$$

$$e_1 = \frac{1-\hat{e}^2}{\hat{e}\sqrt{fm_0\hat{a}^{-1}}}\left\{1+\frac{\varepsilon^2}{2}(1-\hat{e}^2)(5-4\hat{s}^2)\right\},$$

$$e_2 = -\frac{\sqrt{1-\hat{e}^2}}{\hat{e}\sqrt{fm_0\hat{a}}}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{4}\left[(12-5\hat{s}^2)\sqrt{1-\hat{e}^2}-22+23\hat{s}^2-\hat{e}^2(18-17\hat{s}^2)\right]\right\},$$

$$e_3 = \frac{\varepsilon^2\sqrt{1-\hat{e}^2}\cos i}{2e\sqrt{fm_0\hat{a}}}\left\{3+5\hat{e}^2-3\sqrt{1-\hat{e}^2}\right\},$$

$$s_1 = \frac{\varepsilon^2(1-\hat{e}^2)\hat{s}\cos^2 i}{2\sqrt{fm_0\hat{a}}},$$

$$s_2 = \frac{\cos^2 i}{\hat{s}\sqrt{fm_0\hat{a}(1-\hat{e}^2)}}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{4}(6-9\hat{s}^2+2\hat{e}^2+\hat{e}^2\hat{s}^2)\right\},$$

$$s_3 = -\frac{\cos i}{\hat{s}\sqrt{fm_0\hat{a}(1-\hat{e}^2)}}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{2}(3+\hat{e}^2-4\hat{s}^2)\right\}.$$

Уравнения (6.14) при $\varepsilon^2 = 0$ обращаются в уравнения Лагранжа для кеплеровых оскулирующих элементов, причем элементы *l, g, h* переходят соответственно в кеплеровские элементы *M,* ω, Ω. Существенно, что уравнения (6.14) не только имеют вид уравнений Лагранжа, но и возмущающая функция *R* выражается через эйлеровы элементы *a, e, i, l, g, h* точно так же, как возмущающая функция *R* в кеплеровском движении через соответствующие кеплеровские элементы.

Уравнения Ньютона–Эйлера

При изучении различных возмущений, обусловленных непотенциальными силами, такими как сопротивление атмосферы, световое давление и т.п., удобнее пользоваться уравнениями типа Ньютона, связывающими изменения эйлеровых элементов с компонентами возмущающего ускорения *S, T, B*, которые заданы в орбитальной системе координат. Возмущающие ускорения *S, T, B* определим следующим образом.

Пусть **x** есть вектор с компонентами $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3 - c\sigma)$:

$$\overline{r} = |\,\mathbf{x}\,| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - c\sigma)^2},$$

$$\tilde{v} = |\,\dot{\mathbf{x}}\,| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} \ - \text{орбитальная скорость.}$$

Направим составляющую *S* вдоль вектора **x**, вектор *T* – по направлению, перпендикулярному **x**, лежащему в плоскости **x** и $\dot{\mathbf{x}}$ и составляющему с направлением движения угол, меньший $90°$, а *B* – по нормали к плоскости **x**, $\dot{\mathbf{x}}$. Связь между компонентами возмущающего ускорения

$$F_{x_i} = \frac{\partial R}{\partial x_i} + P_i$$

и величинами *S*, *T*, *B* будет задаваться формулами

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{s}_1 & \overline{s}_2 & \overline{s}_3 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

где

$$\begin{aligned}
&\overline{s}_1 = \frac{x_1}{r}, \quad \overline{s}_2 = \frac{x_2}{r}, \quad \overline{s}_3 = \frac{x_3 - c\sigma}{r}, \\
&\tau_1 = \frac{r\dot{x}_1 - x_1\dot{\overline{r}}}{b}, \quad \tau_2 = \frac{r\dot{x}_2 - x_2\dot{\overline{r}}}{b}, \quad \tau_3 = \frac{r\dot{x}_3 - (x_3 - c\sigma)\dot{\overline{r}}}{b}, \\
&b_1 = \frac{x_2\dot{x}_3 - (x_3 - c\sigma)\dot{x}_2}{b}, \quad b_2 = \frac{(x_3 - c\sigma)\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3}{b}, \quad b_3 = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{b}, \\
&b = r\sqrt{\overline{v}^2 - \dot{\overline{r}}^2}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Уравнения типа Ньютона выведены относительно оскулирующих эйлеровых элементов

$$\hat{a},\ \hat{p},\ \hat{s},\ \Omega,\ \omega,\ M, \tag{6.17}$$

заданных формулами (5.20). Они записываются следующим образом (Аксенов, Носков, 1972). Уравнения для элементов $\hat{a}, \hat{p}, \hat{s}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\hat{a}}{\mathrm{d}t} = 2\hat{a}^2\left(rS' + \sqrt{v^2 - r^2}T'\right),\\
&\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2c^2(x_3 - c\sigma)\dot{x}_3}{r}S' + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\overline{v}^2 - \dot{\overline{r}}^2}}T' +\\
&\qquad + \frac{2[c^2(x_3 - c\sigma)\dot{\overline{r}}\,\dot{x}_3 - \overline{r}Q]}{\overline{r}\sqrt{\overline{v}^2 - \dot{\overline{r}}^2}}T' - \frac{2c^2\alpha_3\dot{x}_3}{\overline{r}\sqrt{\overline{v}^2 - \dot{\overline{r}}^2}}B',\\
&\hat{s}\frac{\mathrm{d}\hat{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{1-\hat{s}^2}{\hat{p}}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{c^2(x_3 - c\sigma)\dot{x}_3}{r}S' + \dfrac{c^2(x_3 - c\sigma)\overline{r}\,\dot{x}_3 - \overline{r}Q}{\overline{r}\sqrt{\overline{v}^2 - \dot{\overline{r}}^2}}T' - \\ -\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\dfrac{\overline{r}(x_3 - c\sigma)\overline{r}^2\dot{x}_3 + c^2(1-\hat{s}^2)\dot{x}_3}{\overline{r}\sqrt{\overline{v}^2 - \dot{\overline{r}}^2}}B' \end{array}\right\},
\end{aligned} \tag{6.18}$$

где положено

$$S = fm_0S',\ T = fm_0T',\ B = fm_0B',$$

$$Q = \frac{2fm_0\xi\eta(c^2\eta + c\sigma\xi)}{\xi^2 + c^2\eta^2},\ \ \alpha_2^2 = fm_0\hat{p},\ \ \alpha_3^2 = fm_0\hat{p}(1-\xi^2),$$

а ξ, η, w – сфероидальные координаты, связанные с прямоугольными координатами соотношениями

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\left(\xi^2 + c^2\right)\left(1-\eta^2\right)}\cos w,\\
y &= \sqrt{\left(\xi^2 + c^2\right)\left(1-\eta^2\right)}\sin w,\\
z &= c\sigma + \xi\eta.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Уравнения для угловых элементов Ω, ω, M представляются в виде

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \mu\dot{\psi} + A_1 S' + A_2 T' + A_3 B',$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \nu\dot{\psi} + B_1 S' + B_2 T' + B_3 B', \qquad (6.20)$$
$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n_0 + C_1 S' + C_2 T' + C_3 B'.$$

Здесь $\dot{\psi}$ – производная по входящему явно времени. Выражения для коэффициентов можно найти в работе (Аксенов, 1977).

6.3. Метод Цейпеля

Метод Цейпеля является одним из основных методов аналитического решения уравнений небесной механики и теории движения ИСЗ в том числе. Почти все известные аналитические теории движения ИСЗ были получены этим методом.

В разделе 2.3 мы рассмотрели способ нахождения решения первого приближения для гамильтоновой системы. Первый член производящей функции S_0 находился как решение уравнения в частных производных (уравнение Гамильтона–Якоби). Делоне, а затем Цейпелем в обобщенном виде была предложена методика нахождения более высоких приближений. Суть методики в том, что производящая функция S представляется в виде $S = \sum \tau^n S_n$, а S_n определяются последовательно как решения цепочки дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть гамильтониан системы есть

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n H_n(\mathbf{p},\mathbf{q},t), \qquad (6.21)$$

где $\mathbf{q}$ – вектор обобщенных координат, $\mathbf{p}$ – вектор обобщенных импульсов.

Пусть $S_0 = S_0(\mathbf{P},\mathbf{q},t)$ есть полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

$$H_0\left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right] + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0 \tag{6.22}$$

и пусть $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P},\mathbf{Q},t)$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P},\mathbf{Q},t)$ решения уравнений

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{P}}. \tag{6.23}$$

Предположим, что $\mathbf{P},\mathbf{Q} \neq \text{const}$ и меняются со временем. Выберем функцию $S = S_0(\mathbf{P},\mathbf{q},t)$ в качестве производящей для перехода от канонических переменных $\mathbf{p},\mathbf{q}$ к каноническим переменным $\mathbf{P},\mathbf{Q}$. Гамильтониан преобразуется к виду

$$H = \tilde{H}(\mathbf{P},\mathbf{Q},t)$$

Или, с учетом (6.21):

$$\tilde{H}(\mathbf{P},\mathbf{Q},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n H_n(p(\mathbf{P},\mathbf{Q},t), q(\mathbf{P},\mathbf{Q},t), t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \tilde{H}_n(\mathbf{P},\mathbf{Q},t). \tag{6.24}$$

Следовательно, P, Q описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{P},\mathbf{Q},t), \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{P},\mathbf{Q},t). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Для определения приближенного решения уравнений (6.25) с точностью до любого порядка введем в рассмотрение почти тождественное преобразование канонических переменных $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ к переменным $\mathbf{P}^*,\mathbf{Q}^*$ с помощью производящей функции

$$S = \sum_{i=1}^{N} P_i^* Q_i + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n S_n(\mathbf{P}^*,\mathbf{Q},t). \tag{6.26}$$

Так что

$$\begin{aligned} P_i &= P_i^* + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial S_n}{\partial Q_i}(\mathbf{P}^*,\mathbf{Q},t), \\ Q_i^* &= Q_i + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial S_n}{\partial P_i^*}(\mathbf{P}^*,\mathbf{Q},t), \end{aligned} \tag{6.27}$$

а гамильтониан $\tilde{H}$ преобразуется к виду

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n K_n(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \tilde{H}_n \left[\left(\mathbf{P}^* + \sum_{m=1}^{\infty} \tau^m \frac{\partial S_m}{\partial \mathbf{Q}} \right), \mathbf{Q}, t \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial S_n}{\partial t}. \tag{6.28}$$

Для определения K_n приравняем в (6.48) справа и слева коэффициенты при одинаковых степенях n. Получим уравнения

$$\begin{aligned} K_1 &= \tilde{H}_1(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \\ K_2 &= \tilde{H}_2(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial S_1}{\partial Q_i} \frac{\partial H_1}{\partial P_i}(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, t) + \frac{\partial S_2}{\partial t}, \\ K_n &= F_n + \frac{\partial S_n}{\partial t}, \end{aligned} \tag{6.29}$$

где F_n известные функции $\tilde{H}_1, ... \tilde{H}_n, S_1, ... S_{n-1}$. Функции S_n остаются неопределенными и могут быть выбраны по нашему усмотрению. Исходя из необходимости усреднения гамильтониана, разделим F_n на быстроменяющиеся слагаемые F_n^s и медленноменяющиеся слагаемые F_n^i и положим

$$K_n = F_n^i, \quad \frac{\partial S_n}{\partial t} = -F_n^s.$$

Таким образом, новый гамильтониан n-ого порядка будет содержать только медленноменяющиеся члены.

Главным недостатком метода Цейпеля является зависимость производящей функции (6.46) одновременно от новых импульсов и старых координат. В этой связи получение явных выражений новых переменных через старые, и наоборот, требует дополнительных усилий. От указанного недостатка полностью свободен метод усреднения Хори–Депри, основанный на использовании рядов и преобразований Ли.

6.4. Метод рядов и преобразований Ли (метод Хери–Депри)

Пусть имеем систему

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}},\qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}}, \tag{6.30}$$

где $\mathbf{q}=\{q_1,...q_N\}$, $\mathbf{p}=\{p_1,...p_N\}$, как и ранее, – обобщенные координаты и импульсы, гамильтониан $h=h(t,q,p,\mu)$, τ – малый параметр.

Возьмем в качестве «производящей» функции некоторую достаточно гладкую функцию $T(q,p)$ и рассмотрим замену переменных в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}},\qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}, \tag{6.31}$$
$$\mathbf{q}\,|_{\tau=0}=\mathbf{Q},\quad \mathbf{p}\,|_{\tau=0}=\mathbf{P}.$$

Решение системы уравнений (6.31) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{q}&=\overline{\mathbf{q}}(\mathbf{Q},\mathbf{P},\tau,T),\\ \mathbf{p}&=\overline{\mathbf{p}}(\mathbf{Q},\mathbf{P},\tau,T).\end{aligned} \tag{6.32}$$

В силу (6.32) любая функция от $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ становится функцией от $\mathbf{Q},\mathbf{P},\tau,T$:

$$f(\mathbf{q},\mathbf{p})=f(\overline{\mathbf{q}}(\mathbf{Q},\mathbf{P},\tau,T),\overline{\mathbf{p}}(\mathbf{Q},\mathbf{P},\tau,T))=\overline{f}(\mathbf{Q},\mathbf{P},\tau,T). \tag{6.33}$$

Как показано в работе (Холшевников, 1973), семейство канонических преобразований (6.32) при фиксированных τ и T образуют однопараметрическую коммутативную непрерывную группу Ли с законом композиции

$$(\tau_1,T)*(\tau_2,T)=(\tau_1+\tau_2,T), \tag{6.34}$$

т.е. результат композиции есть движение по траектории системы (6.31) за время $\tau_1+\tau_2$.

Из соотношения (6.34) следует:

а) тождественное преобразование (единица группы) отвечает нулевому значению τ:

$(0,T)=$ тождественное преобразование;

б) обратное преобразование отвечает изменению знака τ :

$$(\tau, T) * (-\tau, T) = (0, T). \tag{6.35}$$

Это большое достоинство метода. Преобразование, обратное (6.32), получается автоматически без дополнительных вычислений простой заменой знака τ:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \overline{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, -\tau, T) \\ \mathbf{P} &= \overline{\mathbf{p}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, -\tau, T) \end{aligned}, \tag{6.36}$$

и вообще, любая

$$f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \overline{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, -\tau, T). \tag{6.37}$$

Подходящей линейной заменой независимой переменной системы (6.51) можно показать, что

$$(\alpha\tau, T) = (\tau, \alpha T) \tag{6.38}$$

и представить (6.34) в виде

$$(\tau, \alpha_1 T) * (\tau, \alpha_2 T) = [\tau, (\alpha_1 + \alpha_2) T], \tag{6.39}$$

где $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ – произвольные вещественные числа.

Согласно (6.38) обратное преобразование можно представить в форме

$$f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \overline{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau, -T). \tag{6.40}$$

Для практического применения метода остается дать явное выражение для преобразования (6.32). Это достигается использованием так называемого ряда Ли по степеням τ. Этот ряд связан с задачей Коши вида

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= g(x), \\ x|_{\tau=0} &= X, \end{aligned} \tag{6.41}$$

решение которой задается рядом Ли

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} D^n X \equiv e^{\tau D} X, \tag{6.42}$$

сходящимся при достаточно малом τ. Здесь D – оператор Ли:

$$D = g(x)\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{m=1}^{n} g_m(x)\frac{\partial}{\partial x^m}, \qquad (6.43)$$
$$D^0 = 1, \qquad D^{n+1} = DD^n$$

и для любой произвольной функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} D^n f(X) \equiv e^{\tau D} f(X). \qquad (6.44)$$

Ряд Ли является некоторым обобщением ряда Тейлора.

Пусть теперь система (6.31), связывающая $\mathbf{q}, \mathbf{p}, T, \tau$ с $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$, имеет вид (6.41). Тогда преобразование (6.32) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{q} &= e^{\tau D}\mathbf{Q}, \\ \mathbf{p} &= e^{\tau D}\mathbf{P}, \\ f(\mathbf{q},\mathbf{p}) &= e^{\tau D} f(\mathbf{Q},\mathbf{P}), \end{aligned}\right\} \qquad (6.45)$$

а оператор D в нашем случае, после замены в (6.43) g_m на $\frac{\partial T}{\partial Q_m} - \frac{\partial T}{\partial P_m}$, будет представлять собой скобку Пуассона

$$D = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial T(\mathbf{Q},\mathbf{P})}{\partial P_m}\frac{\partial}{\partial Q_m} - \frac{\partial T(\mathbf{Q},\mathbf{P})}{\partial Q_m}\frac{\partial}{\partial P_m} \right), \qquad (6.46)$$

так что

$$Df = [fT] = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_m}\frac{\partial T}{\partial P_m} - \frac{\partial f}{\partial P_m}\frac{\partial T}{\partial Q_m} \right).$$

Обратное к (6.45) преобразование получается сменой знака при τ, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Q} &= e^{-\tau d}\mathbf{q}, \\ \mathbf{P} &= e^{-\tau d}\mathbf{p}, \\ f(\mathbf{Q},\mathbf{P}) &= e^{-\tau d} f(\mathbf{q},\mathbf{p}). \end{aligned}\right\} \qquad (6.47)$$

Оператор d определяется формулой

$$d = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial T(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial p_m} \frac{\partial}{\partial q_m} - \frac{\partial T(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial q_m} \frac{\partial}{\partial p_m} \right). \tag{6.48}$$

Таким образом, имеем систему (6.30) и замену (6.31), τ – мало. Нужно найти уравнение в частных производных относительно T, связывающее T с новым гамильтонианом $\widehat{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$. Поскольку τ мало, мы имеем почти тождественное или бесконечно малое контактное преобразование от **q, p** к **Q, P** , определяемое формулами (6.45) и

$$h(q,p) = \widehat{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = e^{\tau \mathrm{D}} H, \tag{6.49}$$

где H есть результат формальной подстановки **Q, P** в h:

$$H = H(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = h(\mathbf{Q},\mathbf{P}).$$

В новых переменных система (6.31) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \mathbf{P}}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \mathbf{Q}}. \tag{6.50}$$

Далее будем действовать в рамках метода малого параметра. Разложим h, T, D по степеням τ:

$$h = h_0 + \tau h_1 + \tau^2 h_2 + \ldots,$$

причем система с гамильтонианом h_0 – интегрируема.

$$T = T_1 + \tau T_2 + \tau^2 T_3 + \ldots$$

В силу (6.39) преобразование (τ, T) можно представить следующим образом:

$$(\tau, T_1 + \tau T_2 + \ldots) = (1, \tau T_1 + \tau^2 T_2 + \ldots).$$

Поэтому в (6.45) и (6.47) можно положить $\tau = 1$, а оператор D разложить в ряд по степеням τ :

$$D = \sum_{m=1}^{\infty} \tau^m D_m,$$

$$D_m = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial T_m}{\partial P_j} \frac{\partial}{\partial Q_j} - \frac{\partial T_m}{\partial Q_j} \frac{\partial}{\partial P_j} \right).$$

Операторы D_m в общем случае некоммутативны.

Формула (6.49) принимает вид

$$\widehat{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tau^m D_m \right)^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tau^j H_j \right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \widehat{H}_n(\mathbf{Q},\mathbf{P}). \quad (6.61)$$

Получим рекуррентные соотношения для общего члена ряда (6.61). Определим $H_{n,m}(Q,P)$ как коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} D_o H &= \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m H_{0,m}, \\ \frac{1}{1!} D_1 H &= \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{1+m} H_{1,m}, \\ &\cdots \\ \frac{1}{n!} D_1 H &= \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{n+m} H_{n,m}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Поскольку степень n в (6.61) означает кратность применения оператора D, то $H_{n,m}$ будет иметь вид

$$H_{n,m} = \frac{1}{n!} \sum (H_k, T_{k_1}, \ldots T_{k_n}), \quad (6.63)$$

причем нужно иметь в виду, что скобки Пуассона неассоциативны и антикоммутативны, т.е.

$$[f,g,h,w] = \{[(f,g),h],w\}.$$

Исходя из определения $H_{n,m}$, можно записать, что

$$H_{n,m} = \sum_{j=0}^{m} (H_{n-1,m-j}, T_{j+1}), \quad (6.64)$$

т.е. сумма всех членов при τ_{n+m}.

Приравнивая в (6.61) справа и слева члены при одинаковых степенях τ, получим

$$\widehat{H}_n = \sum_{m=0}^{n} H_{m,n-m}. \quad (6.65)$$

Таким образом, для получения $\widehat{H}_n$ с точностью до τ^n достаточно вычислить $(n+1)(n+2)/2$ элементов треугольной матрицы

$$
\begin{array}{lllll}
H_{0,0} & H_{0,1} & H_{0,2} & H_{0,3} & \ldots \\
H_{1,0} & H_{1,1} & H_{1,2} & \ldots & \\
H_{2,0} & H_{2,1} & \ldots & & \\
H_{3,0} & \ldots & & & \\
\ldots & & & &
\end{array} \qquad (6.66)
$$

Или, расписывая (6.65), получим систему уравнений в частных производных

$$
\begin{aligned}
&\widehat{H}_0 = H_0, \\
&\widehat{H}_1 = H_1 + (H_0, T_1), \\
&\widehat{H}_2 = H_2 + (H_0, T_2) + (H_1, T_1) + \frac{1}{2}(H_0, T_1, T_1), \\
&\widehat{H}_3 = H_3 + (H_0, T_3) + (H_1, T_2) + (H_2, T_1) + \frac{1}{2}(H_0, T_1, T_2) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(H_0, T_2, T_1) + \frac{1}{2}(H_1, T_1, T_1) + \frac{1}{6}(H_0, T_1, T_1, T_1)
\end{aligned} \qquad (6.67)
$$

.....

для нахождения членов разложения производящей функции T.

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ВИДЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ

7.1. Вводные замечания

Методы представления сил, действующих на ИСЗ, в виде функций элементов орбит по своим принципам не отличаются от классических методов разложения возмущающей функции в ряд, используемых в небесной механике, однако имеют ряд особенностей. Прежде всего для спутникового движения эта задача является гораздо более трудоемкой, поскольку действующих сил много и по своей природе они разнообразны. При этом высокоточному представлению поддается только разложение возмущающей функции от геопотенциала. Все остальные разложения выполняются с какими-либо ограничениями. Скажем, в случае возмущений от Луны и Солнца трудность представляет учет влияния возмущений в движении самих возмущающих тел на движение ИСЗ. При учете атмосферных возмущений приходится ограничиваться упрощенной моделью вычисления атмосферной плотности и т.п. В настоящем разделе мы остановимся лишь на представлении потенциала Земли (Уральская, Журавлев, 1980) и лунно-солнечных возмущений в виде функций элементов орбит (Емельянов, 1980). Представление возмущений от сопротивления атмосферы в виде функций элементов можно найти, например, в работе (Тамаров, Черницов, 1998), а аналогичные представления для возмущений от светового давления – в работе (Черницов, Тамаров, 2003).

7.2. Формы представления потенциала Земли в виде функции элементов орбит

Потенциал Земли U можно представить в виде функции элементов орбиты спутника: большой полуоси a, эксцентриситета e,

наклона орбиты i, средней аномалии M, долготы восходящего узла Ω, долготы перигея ω следующим образом:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} U_{n,m},$$
$$U_{n,m} = \frac{fmr_0^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^{\infty} F_{n,m,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{n,p,q}(e) S(\omega, M, \Omega, \theta), \tag{7.1}$$

где

$$S(\omega, M, \Omega, \theta) =$$
$$= \begin{bmatrix} C_{n,m} \\ -S_{n,m} \end{bmatrix} \begin{matrix} n-m \text{ чет} \\ n-m \text{ нечет} \end{matrix} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \theta)] +$$
$$+ \begin{bmatrix} S_{n,m} \\ C_{n,m} \end{bmatrix} \begin{matrix} n-m \text{ чет} \\ n-m \text{ нечет} \end{matrix} \sin[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \theta)].$$

(7.2)

Здесь θ – гринвичское звездное время, $F_{n,m,p}(i)$ и $G_{n,p,q}(e)$ – функции наклона и функции эксцентриситета соответственно.

Существуют различные формы записи функций наклона. Так, У. Каула (Каула, 1970) предложил записывать функцию наклона в следующем виде:

$$F_{n,m,p}(i) = \sum_i \frac{(2n-2t)!}{t!(n-t)!(n-m-2t)!2^{2n-2t}} (\sin i)^{n-m-2t} \times$$
$$\times \sum_s \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{n-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}, \tag{7.3}$$

где k – целая часть $(n\text{-}m)/2$, а t изменяется в пределах от 0 до p или k в зависимости от того, что меньше:

$$\binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}.$$

Выражение (7.3) может быть записано в виде однократной суммы, и таким образом функция $F_{n,m,p}(i)$ будет функцией половинного угла $i/2$:

$$F_{n,m,p}(i) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{(n+m)!}{2^n p!(n-p)!} \sum_k (-1)^k \binom{2n-2p}{k} \times \\ \times \binom{2p}{n-m-k} \left(\cos\frac{i}{2}\right)^{2n-\alpha} \left(\sin\frac{i}{2}\right)^{\alpha}, \tag{7.4}$$

где $\alpha = m - n + 2p + 2k$.

В.А. Брумберг (1980) ввел так называемые обобщенные функции наклона $\overline{F}_{n,m,p}(I)$ и выразил их через гипергеометрическую функцию F

$$F_{k,j,l}(i) = \lambda_{k,j,l} \left(\sin\frac{i}{2}\right)^{|k-j-2l|} \left(\cos\frac{i}{2}\right)^{|k+j-2l|} \times \\ \times F(-m, 2k-m+1, 1+|k-j-2l|; \sin^2\frac{I}{2}), \tag{7.5}$$

где числовые множители $\lambda_{k,j,l}$ определяются формулами

$$\lambda_{k,j,l} = \begin{cases} (-1)^{B\left(\frac{k-j}{2}\right)} \dfrac{2^{k-j-l}\left(\frac{1}{2}\right)_{k-l}}{(1)_l (1)_{k-j-2l}}, & k-j-2l \geq 0, \\ (-1)^{B\left(\frac{k-j}{2}\right)+k-j} \dfrac{(1+k-j)_{2j}(1-k+j+2l)_{k-j}}{2^k (1)_l (1)_{k-l}}, & k-j-2l \leq 0, \end{cases} \\ (\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha_s) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1), \tag{7.6}$$

причем I – угол наклона плоскости отсчета к плоскости экватора.

Многие авторы стремились получить рекуррентные соотношения для вычисления функций наклона. В частности, Дж. Джиокалья (Giacaglia, 1975) нашел для них следующие рекуррентные соотношения:

а) Для фиксированных индексов *m* имеются три основных соотношения:

$$2j(n-m+1)F_{n+1,m,0} = (2n+1)\sin i\, F_{n,m,0},$$
$$2j(n-m+1)F_{n+1,m,n+1} = -(2n+1)\sin i\, F_{n,m,n},$$
$$2j(n-m+1)F_{n+1,m,p+1} = (2n+1)\sin i\,(F_{n,m,p+1} - F_{n,m,p}) - 2j(n+m)F_{n-1,m,p}.$$

б) Для фиксированных индексов n имеем

$$c^2s^2F_{n,m+2,p+2} = -c^2s^2F_{n,m+2,p-1} - 2(1-c^2s^2)(F_{n,m+2,p+1} + F_{n,m+2,p})\times$$
$$+2j(m+1)sc[c^2F_{n,m+1,p+2} + s^2F_{n,m+1,p-1} + (1+c^2)F_{n,m+1,p+1} + (1+s^2)F_{n,m+1,p}] -$$
$$-(n-m)(n+m+1)[c^4F_{n,m,p+2} + s^4F_{n,m,p-1} + s^2(1+c^2)F_{n,m,p} + c^2(1+s^2)F_{n,m,p+1}].$$

в) Для переменных индексов n и m справедливо следующее соотношение:

$$s^2F_{n+1,m+1,p+2} = s^2F_{n-1,m+1,p+1} +$$
$$+c^2(F_{n-1,m+1,p-1} - F_{n+1,m+1,p}) + (F_{n-1,m+1,p} - F_{n+1,m+1,p+1}) -$$
$$-[c^2s^2(F_{n,m,p+2} + F_{n,m,p-1}) + (1-c^2s^2)(F_{n,m,p+1} - F_{n,m,p})],$$

где $c = \cos i/2;\ s = \sin i/2;\ j = \sqrt{-1}.$

Функции эксцентриситета $G_{n,p,q}(e)$ могут быть представлены с помощью коэффициентов Ганзена, являющихся, в свою очередь, коэффициентами Фурье разложения выражения $(r/a)^n \exp(jmv)$ в ряд по кратным средней аномалии

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(jmv) = \sum_k G_{n,p,q}(e)\exp(jkM). \qquad (7.7)$$

Функции эксцентриситета $G_{n,p,q}(e)$ являются коэффициентами Ганзена с определенным набором индексов, а именно:

$$G_{n,p,q}(e) = X_{n-2p+q}^{-n-1,n-2p}.$$

Общее выражение коэффициентов Ганзена через функции Бесселя задается формулой

$$X_k^{n,m} = (1+\beta^2)^{-n-1}\sum_{s=0}^{s_1}\sum_{j=-s}^{j_1}\binom{n-m+1}{s}\binom{n+m+1}{s+j}(-\beta)^j I_{k-m+j}(ke)\beta^{2s},$$

где

$$\beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}.$$

В общем случае $X_k^{n,m}$ являются степенными рядами по β. Для $k=0$ коэффициент $X_0^{n,m}$ может быть выражен с помощью гипергеометрического ряда

$$X_0^{n,m} = \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}}(-\beta)^m \binom{n+m+1}{m} F(n+2, n+m+2, m+1, \beta^2).$$

Наиболее полные разложения для $(r/a)^n \exp(jmv)$ до двадцатой степени эксцентриситета получены в работе (Jarnagin, 1965). Кроме того, коэффициенты Ганзена могут вычисляться с помощью рекуррентных соотношений и, в частности, по формулам, приведенным в работе (Giacaglia, 1975):

$$(n-2p)(1-e^2)G_{n,p,q} = (n-2p+q)\sqrt{1-e^2}\,G_{n-2,p-1,q} - (n+1)\frac{e}{2}\times$$
$$\times (G_{n-1,p-1,q-1} - G_{n-1,p,q+1}),$$

$$(1-E^2)G_{n,p,q} = \left(1-\frac{e^2}{2}\right)G_{n-2,p-1,q} + e(1-e^2)[G_{n-1,p-1,q-1} + G_{n-1,p,q+1}] -$$
$$-\frac{e^2}{4}[G_{n-2,p-2,q-2} + G_{n-2,p,q+2}].$$

7.3. Особенности вычисления лунно-солнечных возмущений

По сравнению с прочими возмущениями в движении искусственных спутников Земли влияние притяжения Луны и Солнца считается хорошо изученным. Положения возмущающих тел, Луны и Солнца, определяются с высокой точностью с помощью существующих теорий их движения. Пертурбационная функция задачи как функция от прямоугольных координат спутника и возмущающего тела имеет простой вид. Однако вычисление возмущений от Луны и Солнца в элементах орбиты ИСЗ представляет

собой сложную задачу. Эта сложность резко возрастает с увеличением требуемой точности вычисления возмущений.

Лунно-солнечные возмущения в элементах орбиты ИСЗ имеют характерный множитель

$$\varepsilon' = \frac{m'}{m}\left(\frac{a}{a'}\right)^3, \qquad (7.8)$$

где m' – масса Луны или Солнца; m – масса Земли; a – большая полуось орбиты ИСЗ; a' – большая полуось орбиты возмущающего тела. Возмущающая функция, отнесенная к величине основного ускорения от притяжения Земли, имеет примерно тот же порядок, что и ε'. Вариации элементов на интервале одного оборота спутника, обусловленные притяжением Луны и Солнца, также имеют порядок ε'. А. Рой (Рой, 1981) исследовал зависимости ε' от большой полуоси орбиты спутника в случаях, когда возмущающими телами являются Луна или Солнце, и сделал сравнение с аналогичной зависимостью для параметра $\varepsilon_{\text{СЖ}}$, характеризующего величину возмущений в элементах ИСЗ от сжатия Земли, заданного формулой

$$\varepsilon_{\text{СЖ}} = 3J_2 \frac{R_0^2}{a^2(1-e^2)}, \qquad (7.9)$$

где J_2 – коэффициент при второй зональной гармонике в разложении геопотенциала; R_0 – экваториальный радиус Земли; e – эксцентриситет орбиты спутника. Как показывают оценки, возмущения от Луны и Солнца возрастают, а возмущения от сжатия Земли убывают с ростом a. Одинаковый порядок эти возмущения имеют при $a = 44000$ км.

При получении аналитических выражений для возмущений элементов орбиты ИСЗ от Луны и Солнца вводится ряд упрощений. Прежде всего устанавливают, будут ли уравнения для возмущений решаться только в первом или также и во втором и последующих приближениях. При решении уравнений во втором приближении в их правые части подставляют элементы или координа-

ты ИСЗ, уже содержащие возмущения от других факторов. Так, например, получаются лунно-солнечные возмущения второго порядка, пропорциональные сжатию Земли.

Ряд существенных упрощений приходится делать при разложении возмущающей функции, чтобы выразить ее через элементы орбиты спутника. Приведем разложение возмущающей функции от внешнего тела из работы Е.И. Тимошковой и К.В. Холшевникова (1974). Прежде всего запишем возмущающую функцию R в зависимости от геоцентрических координат спутника x, y, z и возмущающего тела x', y', z':

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right), \tag{7.10}$$

где r' – геоцентрическое расстояние возмущающего тела; Δ – расстояние от спутника до возмущающего тела. Обозначим через H угол между геоцентрическими радиусами-векторами спутника и возмущающего тела. Тогда

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}, \tag{7.11}$$

где $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H}. \tag{7.12}$$

Функцию R можно разложить в ряд по степеням r / r':

$$R = \frac{fm'}{r'}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^k P_k(\cos H). \tag{7.13}$$

где $P_k(\cos H)$ – полином Лежандра k-го порядка. В написанном разложении член при k=2 называют основным или хилловским членом, остальные – параллактическими.

Выражение возмущающей функции через элементы орбит ИСЗ и возмущающего тела имеет вид

$$R = fm'\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{p=0}^{l}\sum_{p'=0}^{l}\sum_{\bar{m}=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{q'=-\infty}^{\infty}\left(2-\delta_{j,0}\frac{\alpha^l}{\alpha''^{l+1}}\right)\frac{(l-j)!}{(l+j)!}F_{l,j,p}(i)F_{l,j,p'}(i')X^{l,l-2p}_{l-2p'+q'}(e')\times \tag{7.14}$$
$$\times\cos[(l-2p+q)M-(l-2p'+q')M'+(l-2p)g-(l-2p')g'+\bar{m}(\Omega-\Omega')],$$

причем $g = \omega + 90°$, $g' = \omega' + 90°$. Здесь введены следующие обозначения: f – гравитационная постоянная; i, e, Ω, ω, M – наклон, эксцентриситет, долгота восходящего узла, аргумент перигея, средняя аномалия орбиты спутника; $i', e', \Omega', \omega', M'$ – такие же элементы орбиты возмущающего тела. Элементы i, Ω, i', Ω' относятся к экватору Земли. Кроме того, $\delta_{j,0}$ – символ Кронекера, $F\ldots(i)$ – функция наклона, $X^{\cdots}_{\cdots}(e)$ – функция эксцентриситета.

При определении возмущений первого порядка полагают, что элементы a, e, i, a', e', i' – постоянные, а элементы $M, \omega, \Omega, M', \omega', \Omega'$ суть известные линейные функции времени. Линейные функции для M', ω', Ω' определяют из теории движения возмущающего тела, а возмущения элементов M, ω, Ω определяются как сумма вековых возмущений от всех известных возмущающих факторов. Вековой член в R получается, если положить $l - 2p + q = 0$, $l - 2p' + q' = 0$, $l - 2p = 0$, $l - 2p' = 0$, $j = 0$. Очевидно, что он не зависит от M, ω, Ω.

После подстановки возмущающей функции в уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов получим общий вид возмущений любого элемента $э_i$ из совокупности $a, e, i, M, \omega, \Omega$:

$$\delta э_i = \overline{A}_i^{э}(t - t_0) + \\ + \Sigma' A^{э}_{l,p,p',\overline{m},q,q'} \frac{\cos[(l-2p+q)M - (l-2p'+q')M' + (l-2p)g - (l-2p')g' + \overline{m}(\Omega - \Omega')]}{(l-2p+q)\dot{M} - (l-2p'+q')\dot{M}' + (l-2p)\dot{g} - (l-2p')\dot{g}' + \overline{m}(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')}, \quad (7.15)$$

где t_0 – эпоха элементов ИСЗ, а штрих у знака суммы означает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $l - 2p + q = 0$, $l - 2n' + q' = 0$, $l - 2p = 0$, $l - 2p' = 0$, $\overline{m} = 0$. Коэффициенты $A^{э}_{l,p,p',\overline{m},q,q'}$, $A_l^{э}$ зависят только от a, a', e, i, i'. Вековые возмущения первого порядка присутствуют лишь в элементах M, ω, Ω.

Чтобы классифицировать периодические возмущения, введем следующие обозначения. Пусть T – период обращения спутника; T' – период обращения Луны; T'' – период обращения Солнца; T_1 –

период обращения перигея Луны; T_1' – период обращения перигея Луны; T_1'' – период обращения перигея Солнца; T_2 – период обращения узла спутника; T_2' – период обращения узла Луны; T_2'' – период обращения узла Солнца. Для ИСЗ с высотой до 36000 км T имеет величину от 90^m до 24^h, $T' \approx 28$ сут, $T'' = 1$ год, T_1, T_2 имеют для разных спутников величину от 250 до 1000 и более суток, T_1', T_1'', T_2', T_2'' превышают 10 лет.

Гармоники в выражении для $\delta э_i$ с периодами, примерно равными $T / k\,(k = 1,2,\ldots)$, называются короткопериодическими возмущениями. Гармоники с периодом $T/2$, как правило, доминируют. Группу гармоник с периодами примерно равными $T', T'/2, T'/3, \ldots$ принято называть долгопериодическими возмущениями, однако некоторые авторы относят их к короткопериодическим. Остальные гармоники в выражениях для $\delta э_i$ имеют периоды порядка года и более и называются долгопериодическими возмущениями. Среди возмущений с периодами $T', T'/2, T'/3, \ldots$ и т.д. максимальную амплитуду имеют гармоники с периодом $T'/2$, т.е. около двух недель. Заметим, что амплитуда гармоники возмущений оказывается пропорциональной ее периоду, поэтому долгопериодические возмущения превалируют над короткопериодическими.

Функции наклона $F_{l,\bar{m},p}(i)$ и функции эксцентриситета $X_{l-2p'+q'}^{l,l-2p}(e)$, или коэффициенты Ганзена, определяются по формулам, приведенным в предыдущем параграфе.

Рассмотрим некоторые свойства лунно-солнечных возмущений первого порядка в движении ИСЗ.

Вековым возмущениям от Луны и Солнца подвержены только элементы Ω, ω, M. Главный член в вековых возмущениях для Ω и ω имеет вид

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{16} n \frac{m}{m'} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{2+3e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2 - 3\sin^2 i') \cos i,$$
$$\dot{\omega} = \frac{3}{16} n \frac{m}{m'} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{4 - 5\sin^2 i + e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2 - 3\sin^2 i'). \qquad (7.16)$$

Для элемента M вековые возмущения можно приближенно определить по формуле

$$\dot{M} = -\frac{fm'}{\sqrt{fma}} \frac{a^2}{a'^3} F_{2,0,1}(i) X_0^{-3,0}(e') \left[4X_0^{2,0}(e) + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial X_0^{2,0}(e)}{\partial e} \right]. \qquad (7.17)$$

Выражения для вековых возмущений не имеют никаких особенностей при $e = 0$ и всех значениях i.

Что касается долгопериодических возмущений первого порядка в движении ИСЗ от Луны до Солнца, то большая полуось орбиты спутника a не имеет долгопериодических возмущений первого порядка. Формулы для долгопериодических возмущений остальных элементов справедливы при всех $0 \le e < 1$. Долгопериодические возмущения быстро возрастают с ростом a. Возмущения с периодами $T', T'/2, T'/3$ и т.д. возрастают пропорционально a^3, а с периодами $T > T'$ возрастают как a^5 или как a^3. Выражения для долгопериодических возмущений содержат в знаменателе некоторые функции от наклона орбиты ИСЗ. Эти функции таковы, что ряд значений i обращает в нуль знаменатели некоторых возмущающих гармоник. Вот список таких критических значений:

46°20′, 54°00′, 63°30′, 69°00′, 73°10′, 90°00′, 116°30′, 120°00′.

Особого внимания заслуживает влияние возмущений от внешнего тела на приполярный спутник. Впервые особенности эволюции орбиты такого спутника были рассмотрены М.Л. Лидовым (1961). Было показано, что при определенных начальных условиях быстрая эволюция эксцентриситета орбиты спутника может приводить к его столкновению с Землей. Более подробно такого рода особенности мы рассмотрим в гл. 14.

Дальнейшее развитие эти исследования нашли в работах М.А. Вашковьяка и В.М. Прохоренко. Обзор работ можно найти в работе (Прохоренко, 2006).

8. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

8.1. Особенности численного интегрирования уравнений движения ИСЗ

В иностранной литературе численные методы интегрирования называют еще методами частных (special) возмущений. Последняя терминология более ясно характеризует конечный результат рассматриваемых методов. Методы частных возмущений, в отличие от аналитических (общих возмущений), вычисляют приращения к заданным значениям интегрируемых параметров, поведение которых задается дифференциальными уравнениями. Поэтому численные методы интегрирования определяют частное решение дифференциальных уравнений, тогда как аналитические – общее.

Преимущество численных методов интегрирования состоит в том, что они не требуют упрощения правых частей дифференциальных уравнений и позволяют учесть весь спектр действующих возмущений. В аналитических методах это практически неосуществимо.

Значительный недостаток методов частных возмущений связан с накоплением численной ошибки, обусловленной округлением. Очевидно, что влияние ошибки округления можно ослабить за счет увеличения числа значащих разрядов. Этого можно достичь либо используя усовершенствованные вычислительные средства, либо преобразуя дифференциальные уравнения с использованием априорных сведений о их решении.

Ввиду того, что частные возмущения аппроксимируются отрезком степенного ряда по независимой переменной, для обеспечения требуемой точности шаг интегрирования в численных методах выбирается существенно меньшим, чем в аналитических. Таким образом, задача Коши разбивается на множество подзадач со своими частными решениями, которые последовательно определяются шаг за шагом.

Многошаговость численного процесса также приводит к серьезным трудностям при интегрировании. В большинстве численных методов шаг интегрирования выбирается в зависимости от величин старших членов аппроксимирующей суммы. В случае если старшие члены становятся достаточно большими, как, например, вблизи сингулярных точек, шаг интегрирования уменьшается. На исследуемом интервале это приводит к дроблению (уплотнению) шага и, как следствие, к умножению неустранимой ошибки округления на шаге.

Ляпуновская неустойчивость решений уравнений небесной механики, и уравнений движения ИСЗ в том числе, усиливает влияние ошибки аппроксимации метода на шаге интегрирования, что при длительных интервалах прогнозирования приводит к большому накоплению суммарной ошибки.

Перечисленные особенности процесса численного интегрирования уравнений движения ИСЗ побуждают нас искать такие формы представления уравнений движения и организации численного процесса, которые позволили бы устранить или хотя бы ослабить негативное влияние указанных выше факторов. Детально мы рассмотрим эти способы в двух последующих главах, а в этой главе остановимся на алгоритмах вычисления возмущающих ускорений в движении ИСЗ, используемых в численном моделировании.

8.2. Рекуррентные алгоритмы для вычисления шаровых функций V_{nm} и их производных

Алгоритм, предложенный Л. Каннингемом

Как правило, моделирование возмущений в численном прогнозировании движения ИСЗ производится в прямоугольных координатах независимо от формы записи уравнений движения. Первый рекуррентный алгоритм для вычисления шаровых функций V_{nm} и их произвольных был предложен Л. Каннингемом (Cunningham, 1970).

Будем использовать потенциал Земли в виде представления

$$U = \frac{fm}{r_0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_{n,m}(\sin\varphi)[\bar{C}_{n,m}\cos m\lambda + \bar{S}_{n,m}\sin m\lambda\right\}. \quad (8.1)$$

Введем функцию

$$V_{n,m} \equiv \frac{P_{n,m}(\sin\varphi)(\cos m\lambda + i\sin m\lambda)}{r^{n+1}} \quad (8.2)$$

и перепишем (8.1):

$$U = \mathrm{Real}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r_0^n (C_{n,m} - iS_{n,m})V_{n,m}. \quad (8.3)$$

Выразим x, y, z через r, λ, φ :

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = r\sin\varphi. \quad (8.4)$$

Выразим $V_{n,m}$ через x, y, z :

$$V_{n,m} = \frac{P_{n,m}(\sin\varphi)(x+iy)^m}{\cos^m\varphi}. \quad (8.5)$$

Введем обозначение

$$Z_{n,m} = \frac{r^{n-m}P_{n,m}(\sin\varphi)}{\cos^m\varphi}, \quad V_{n,m} = \frac{(x+iy)^m Z_{n,m}}{r^{2n+1}}. \quad (8.6)$$

Можно записать явное выражение (Аксенов, 1977):

$$P_{n,m}(\sin\varphi) = \cos^m\varphi \sum_{k=0}^{[(n-m)/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-m-2k)!(n-k)!}\sin^{n-m-2k}\varphi. \quad (8.7)$$

Таким образом, $Z_{n,m}$ содержит в числителе гармонический полином и можно ввести функцию

$$H_{n,m} = (x+iy)^m Z_{n,m}, \quad (8.8)$$

которая является стандартной сферической гармоникой степени m порядка n, а введенная нами функция $V_{n,m}$:

$$V_{n,m} = \frac{H_{n,m}}{r^{2n+1}}$$

является шаровой. Гармонический полином (8.8) можно представить в операторной форме

$$H_{n,m} = \frac{(-1)^n}{(n-m)!} r^{2n+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-m} \left(\frac{1}{r} \right). \qquad (8.9)$$

Для $m = n$:

$$V_{n,m} = (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{1}{r} \right), \qquad (8.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{1}{r} \right) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \frac{(x+iy)^n}{r^{2n+1}},$$

$$V_{n,n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{(x+iy)^n}{r^{2n+1}}. \qquad (8.11)$$

Из (8.11) получается первое рекуррентное соотношение

$$V_{n,n} = (2n-1) \frac{x+iy}{r^2} V_{n-1,n-1}. \qquad (8.12)$$

Рекуррентное соотношение (2.10) для присоединенных функций Лежандра

$$(n+2-m) P_{n+2,m}(z) - (2n+3) z P_{n+1,m}(z) + (n+m+1) P_{n,m}(z) = 0$$

позволяет получить рекуррентное соотношение

$$(n-m) V_{n,m} = (2n-1) \frac{z}{r^2} V_{n-1,m} - \frac{n+m-1}{r^2} V_{n-2,m}. \qquad (8.13)$$

Далее, очевидно, что

$$V_{n+1,m} = -\frac{\partial}{\partial z} V_{n,m}.$$

Из (8.11) следует

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial z} = -(2m+1) \frac{z}{r^2} V_{n,m}.$$

Пусть $n = m+1$:

$$(n-m) V_{n,m} = (2n-1) \frac{z}{r^2} V_{n-1,m}. \qquad (8.14)$$

Таким образом, начальные величины, необходимые для рекуррентного соотношения (8.13), задаются (8.11) и (8.14):

$$V_{0,0} = \frac{1}{r},$$

следовательно

$$V_{1,1} = \frac{x+iy}{r^3}, \quad V_{2,2} = 3\frac{x+iy}{r^2}\frac{x+iy}{r^3} = 3\frac{(x+iy)^2}{r^5},$$

$$V_{1,0} = \frac{z}{r^3}, \qquad V_{2,1} = 3\frac{z}{r^2}\frac{x+iy}{r^3} = 3\frac{z(x+iy)}{r^5},$$

$$V_{2,0} = \frac{1}{2}3\frac{z}{r^2}V_{1,0} - \frac{1}{r^2}V_{0,0} = \frac{3}{2}\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

Выведем $\dfrac{\partial V_{n,m}}{\partial(x,y,z)}$ из (8.10) и получим

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}V_{n,m} = (-1)^\nu \frac{(n-m+\nu)!}{(n-m)!}V_{n+m,m}, \tag{8.15}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s V_{n,m} = (-1)^s V_{n+s,m+s}.$$

Это имеет место для неотрицательных значений *n, m, s*.
Кроме того:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V_{n,m} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}V_{n,m},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)V_{n,m} = \frac{(n-m+2)!}{(n-m)!}V_{n+1,m-1}, \qquad m = 0. \tag{8.16}$$

Введем операторы

$$P \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y},$$

$$M \equiv \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Очевидно, что

$$2\frac{\partial}{\partial x} = P + M,$$

$$2\frac{\partial}{\partial y} = P - M.$$

Используя выражения (8.15) и (8.16) и операторы P и M, можно выписать необходимые рекуррентные соотношения

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial x} = -\frac{V_{n+1,m+1}}{2} + \frac{(n-m+2)!}{2(n-m)!}V_{n+1,m-1} \qquad (m>0),$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial x} = -\frac{V_{n+1,1}}{2} - \frac{V^*_{n+1,1}}{2} \qquad (m=0),$$

$$V_{n,-m} = (-1)^m \frac{n-m}{(n+m)!}V^*_{n,m},$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial y} = \frac{iV_{n+1,m+1}}{2} + \frac{i(n-m+2)!}{2(n-m)!}V_{n+1,m+1}, \qquad (m>0),$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial y} = \frac{iV_{n+1,1}}{2} - \frac{iV^*_{n,n+1}}{2}, \qquad (m=0), \tag{8.17}$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial z} = -\frac{(n-m+1)!}{(n-m)!}V_{n+1,m}, \qquad (m>0).$$

Здесь * обозначены комплексно сопряженные величины.

Для полностью нормированных функций Лежандра (см. гл. 2) эти соотношения можно записать в виде

$$\bar{V}_{n,m} = \sqrt{\frac{E_m(2n+1)}{E_{m-1}2m}}\frac{x+iy}{r^2}\bar{V}_{n-1,m-1}, \qquad (m=n),$$

$$\bar{V}_{n,m} = \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2-m^2}}\frac{z}{r^2}\bar{V}_{n-1,m} - \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2-m^2]}{(2n-3)(n^2-m^2)}}\frac{1}{r^2}\bar{V}_{n-2,m},$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2, \qquad V_{0,0} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial \overline{V}_{n,m}}{\partial x} = -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}}\,\frac{\overline{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\ + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}}\,\frac{\overline{V}_{n+1,m-1}}{2} \quad (m>0),$$

$$\frac{\partial \overline{V}_{n,m}}{\partial x} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}}\,\mathrm{Real}\,\overline{V}_{n+1,1} \quad (m=0),$$

$$\frac{\partial \overline{V}_{n,m}}{\partial y} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}}\,i\,\frac{\overline{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\ + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}}\,i\,\frac{\overline{V}_{n+1,m-1}}{2} \quad (m>0), \tag{8.18}$$

$$\frac{\partial \overline{V}_{n,m}}{\partial y} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}}\,\mathrm{Imag}\,\overline{V}_{n+1,1} \quad (m=0),$$

$$\frac{\partial \overline{V}_{n,m}}{\partial z} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3}}\,\overline{V}_{n+1,m} \quad (m\geq 0).$$

Причем

$$E_m = \begin{cases} 1, & \text{при } m=0, \\ 2, & \text{при } m\neq 0. \end{cases}$$

Алгоритм, предложенный А. Дрожинером и В. Брумбергом

Более простой вывод рекуррентных соотношений для $V_{n,m}$, а также способ избавиться от работы с мнимыми величинами предложен А. Дрожинером и В. Брумбергом (Брумберг, 1980).

Разделим правую часть выражения (8.2) на действительную и мнимую части

$$V_{n,m} = X_{n,m} + iY_{n,m}. \tag{8.19}$$

В результате этого выражение (8.1) для потенциала U примет вид

$$U = fM_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} r_0^n (\mathrm{C}_{n,m} X_{n,m} + S_{n,m} Y_{n,m}). \qquad (8.20)$$

Выражение (8.20) можно получить и непосредственно из (8.1), вводя обозначения

$$X_{n,m} = \frac{P_{n,m}(\sin\varphi)\cos m\lambda}{r^{n+1}},$$
$$Y_{n,m} = \frac{P_{n,m}(\sin\varphi)\sin m\lambda}{r^{n+1}}. \qquad (8.21)$$

Используем для присоединенных функций Лежандра рекуррентное соотношение вида

$$P_{n+1,j}(\sin\varphi) = (2n+1)\cos\varphi P_{n,j-1}(\sin\varphi) + P_{n-1,j}(\sin\varphi) \qquad (8.22)$$

для получения первых рекуррентных соотношений для вычисления функций $V_{n,m}$, $X_{n,m}$, $Y_{n,m}$. Действительно, полагая $j = n+1$, умножая правую и левую части на $\left(\cos(n+1)\lambda + i\sin(n+1)\lambda\right)/r^{-n-1}$ и учитывая, что по определению присоединенных функций Лежандра $P_{n-1,n+1} = 0$, получим

$$V_{n+1,n+1} = (2n+1)r^{-n-1}\cos\varphi P_{n,n}(\sin\varphi)(\cos(n+1)\lambda + i\sin(n+1)\lambda),$$

или

$$V_{n+1,n+1} = (2n+1)\frac{(x+iy)}{r^2} V_{n,n}. \qquad (8.23)$$

Подставляя сюда (8.19), будем иметь в вещественном виде

$$\begin{pmatrix} X_{n+1,n+1} \\ Y_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = \frac{(2n+1)}{r^2}\left[x\begin{pmatrix} X_{n,n} \\ Y_{n,n} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -Y_{n,n} \\ X_{n,n} \end{pmatrix}\right]. \qquad (8.24)$$

Рекуррентное соотношение для присоединенных функций Лежандра вида

$$(n+1-j)P_{n+1,j}(\sin\varphi) = (2n+1)\sin\varphi P_{n,j}(\sin\varphi) - (n+j)P_{n-1,j}(\sin\varphi)$$

позволяет получить рекуррентное соотношение для случая $n \neq m$ ($j = m$):

$$(n-m+1)V_{n+1,m} = (2n+1)\frac{z}{r^2}V_{n,m} - \frac{n+m}{r^2}V_{n-1,m}\,. \qquad (8.25)$$

Причем этот же вид соотношений будет сохраняться для $X_{n,m}, Y_{n,m}$, а начальные условия запишутся как

$$X_{0,0} = \frac{1}{r}, \quad Y_{0,0} = 0\,.$$

Что же касается формул для вычисления производных от функций $X_{n,m}, Y_{n,m}$, то их можно представить двумя способами. Либо получить рекуррентные соотношения типа (8.25), (8.26), выражающие производные для более высоких индексов *n* и *m* через производные для более низких индексов *n* и *m*, как это делает А. Дрожинер (Drozyner, 1977). Либо, как это предлагает В. Брумберг (Брумберг, 1980), выразить производные через сами дифференцируемые функции. Остановимся на последнем подходе. Аналогично (8.9) можно записать для $Y_{n,m}$

$$V_{n,m} = \frac{(-1)^n}{(n-m)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-m}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (8.27)$$

что дает

$$\begin{aligned} V_{n+1,m} &= -\frac{1}{n-m+1}\frac{\partial}{\partial z}Y_{n,m}, \\ V_{n+1,m+1} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)Y_{n,m}. \end{aligned} \qquad (8.28)$$

В силу уравнения Лапласа можно записать

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{r}\,.$$

Поэтому

$$V_{n+1,m-1} = \frac{(-1)^n}{(n-m+2)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-m}\frac{1}{r}$$

или

$$V_{n+1,m-1} = \frac{1}{(n-m+2)(n-m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)V_{n,m} \ . \qquad (8.29)$$

Разрешая соотношения (8.27)–(8.29) относительно производных, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}V_{n,m} &= -\frac{1}{2}V_{n+1,m+1} + \frac{1}{2}(n-m+2)(n-m+1)V_{n+1,m-1}, \\
\frac{\partial}{\partial y}V_{n,m} &= \frac{i}{2}V_{n+1,m+1} + \frac{i}{2}(n-m+2)(n-m+1)V_{n+1,m-1}, \qquad (8.30) \\
\frac{\partial}{\partial z}V_{n,m} &= -(n-m+1)V_{n+1,\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$

При *m=0* формулы (8.30) значительно упрощаются. В вещественных переменных первые два соотношения в (8.30) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} X_{n,m} \\ Y_{n,m} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_{n+1,m+1} \\ Y_{n+1,m+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(n-m+2)(n-m+1)\begin{pmatrix} X_{n+1,m-1} \\ Y_{n+1,m-1} \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} X_{n,m} \\ Y_{n,m} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -Y_{n+1,m+1} \\ X_{n+1,m+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(n-m+2)(n-m+1)\begin{pmatrix} -Y_{n+1,m-1} \\ X_{n+1,m-1} \end{pmatrix},
\end{aligned} \qquad (8.31)$$

а производные по *z* от $X_{n,m}, Y_{n,m}$ будут совпадать по форме с аналогичной производной от $V_{n,m}$.

Алгоритм, предложенный К.В. Холшевниковым

К.В. Холшевниковым (2005) предложен иной подход к вычислению производных от функции *U*.

Будем использовать гравитационный потенциал в форме (8.20):

$$U = fM_0 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r_0^n (\mathrm{C}_{n,m} X_{n,m} + S_{n,m} Y_{n,m}).$$

Как мы видели ранее, градиент шаровой функции сам является шаровой функцией, а ее порядок повышается на единицу, поэтому можно записать

$$\operatorname{grad} U = fM_0 \sum_{n=l+1}^{N+1} r^{n-1} \sum_{k=0}^{n} (\mathbf{A}_{nk} X_{nk} + \mathbf{B}_{nk} Y_{nk}). \qquad (8.32)$$

Остается только выразить безразмерные компоненты A^i_{nk}, B^i_{nk} векторов $\mathbf{A}_{nk}, \mathbf{B}_{nk}$ через $C_{n-1,s}, S_{n-1,s}$, $0 \le s \le n-1$, что можно сделать, используя рекуррентные соотношения. Например, выражения для компонент A^i_{nk}, B^i_{nk} векторов $\mathbf{A}_{nk}, \mathbf{B}_{nk}$, представленные как линейные комбинации $C_{n-1,s}, S_{n-1,s}$, $n \ge 1$, $s = k-1, k+1$, при $i = 1,2$, $s = k$ и при $i = 3$ будут иметь вид

$$A^1_{nk} = -\frac{1+\delta_{1k}}{2}(1+\delta_{0k}) C_{n-1,k-1} + v_{nk} C_{n-1,k+1},$$

$$B^2_{nk} = (1-\delta_{0k}) \left[-\frac{1-\delta_{1k}}{2} S_{n-1,k-1} + v_{nk} S_{n-1,k+1} \right],$$

$$A^2_{nk} = \frac{1+\delta_{1k}}{2}(1+\delta_{0k}) S_{n-1,k-1} + v_{nk} S_{n-1,k+1},$$

$$B^2_{nk} = -(1-\delta_{0k}) \left[-\frac{1+\delta_{1k}}{2} C_{n-1,k-1} + v_{nk} C_{n-1,k+1} \right],$$

$$A^3_{nk} = -(n-k) C_{n-1,k},$$

$$B^3_{nk} = -(1-\delta_{0k})(n-k) S_{n-1,k}.$$

Здесь δ_{ik} – символ Кронекера:

$$v_{nk} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Значения функций $X_{n,m}, Y_{n,m}$ в формуле (8.32) вычисляются по формулам (8.24) и (8.25).

8.3. Вычисление возмущений от приливных деформаций центрального тела

В задачах численного моделирования движения ИСЗ все возмущения, связанные с Землей, удобно вычислять с помощью ре-

куррентных соотношений, аналогичных описанным в предыдущем разделе.

Возмущения от твердых приливов

В соответствии с IERS стандарт возмущения от приливных деформаций Земли под действием притяжения Луны и Солнца вводятся как поправки в свободные от приливов коэффициенты $\overline{C}_{n,m}, \overline{S}_{n,m}$ разложения гравитационного поля Земли (8.1). На первом шаге в рамках модели Лява (IERS,2010) вычисляются поправки, обусловленные частотно независимыми величинами k_{nm}, по формуле

$$\Delta\overline{C}_{nm} - \Delta\overline{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1}\sum_{j=2}^{3}\frac{GM_j}{GM_\oplus}\left(\frac{R_e}{r_j}\right)^{n+1}\overline{P}_{nm}\left(\sin\Phi_j\right)e^{-im\Lambda_j}, \quad (8.33)$$

где k_{nm} – номинальное число Лява степени n, порядка m; R_e, $GM_\oplus$ – как и ранее, экваториальный радиус Земли и гравитационный параметр Земли соответственно; GM_j – гравитационные параметры Луны ($j=2$) и Солнца ($j=3$); r_j – расстояние от геоцентра до Луны или Солнца; Φ_j, Λ_j – соответственно широта и долгота Луны или Солнца в геоцентрической системе координат, фиксированной в теле Земли; $\overline{P}_{nm}$ – как и ранее, нормализованные присоединенные функции Лежандра.

Влияние на коэффициенты четвертой степени, производимое приливами второй степени, вычисляется также по формуле (8.33), но вместо коэффициентов k_{nm} берутся коэффициенты $k_{nm}{}^{+}$ (IERS, 2010).

На втором шаге учитывается суперпозиция колебаний, связанных с твердым приливом и прецессионно-нутационными колебаниями. Эта часть приливных возмущений задается моделью Вара. Различие между моделью Вара и Лява вводится в разложение V

также в виде поправок к нормализованным гармоническим коэффициентам:

$$\Delta\bar{C}_{2,0} = \mathrm{Re}\sum_{f(2,0)}(A_0\delta k_f H_f)e^{i\theta_f} = \\ = \sum_{f(2,0)}\left[(A_0\delta k_f^R H_f)\cos\theta_f - (A_0\delta k_f^I H_f)\sin\theta_f\right], \tag{8.34}$$

$$\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m} = \eta_m\sum\left(A_m\delta k_f H_f\right)e^{i\theta_f},\ (m=1,2), \tag{8.35}$$

где $A_0 = \dfrac{1}{R_e\sqrt{4\pi}} = 4,4228\times10^{-8}\,м^{-1}$,

$$A_m = \frac{(-1)^m}{R_e\sqrt{8\pi}} = (-1)^m\left(3,1274\times10^{-8}\right)м^{-1},\ (m\neq0),$$

$$\eta_1 = -i,\ \eta_2 = 1.$$

Здесь $\delta k_f = k_f - k_2$ (k_f – числа из модели Вара; k_2 – номинальное число Лява); H_f – амплитуда членов с индексом f (IERS, 2010);

$$\theta_f = \bar{n}\cdot\bar{\beta} = \sum_{i=1}^{6} n_i\beta_i,\ \text{или} \\ \theta_f = m\left(\theta_g+\pi\right) - \bar{N}\cdot\bar{F} = m(\theta_g+\pi) - \sum_{j=1}^{5} N_j F_j, \tag{8.36}$$

где $\bar{N} = \{N_j\}$ – пятимерный вектор множителей к фундаментальным аргументам; $\bar{n} = \{n_j\}$ – шестимерный вектор множителей к переменным Дудсона; $\beta = \{\tau, s, h, p, N', p_s\}$ – переменные Дудсона, связанные с фундаментальными аргументами $F = \{l, l', F, D, \Omega\}$ соотношениями

$$\begin{aligned} &\bar{s} = F+\Omega = \beta_2, \quad && N = -\Omega = \beta_5, \\ &h = \bar{s} - D = \beta_3, \quad && \rho_1 = \bar{s} - D - l' = \beta_6, \\ &\rho = \bar{s} - l = \beta_4, \quad && \bar{\tau} = h_g + \pi - \bar{s} = \beta_1, \end{aligned} \tag{8.37}$$

θ_g – среднее звездное время нулевого меридиана.

Все коэффициенты, необходимые для вычисления поправок к $\overline{C}_{n,m}$ и $\overline{S}_{n,m}$ за счет различия моделей Вара и Лява, приведены в IERS Conventions (IERS, 2010).

Возмущения от океанических приливов

Динамический эффект от океанических приливов учитывается в виде периодических вариаций нормализованных гармонических коэффициентов $\overline{C}_{n,m}, \overline{S}_{n,m}$. Вариации определяются формулой (IERS, 2010):

$$\Delta\overline{C}_{n,m} - i\Delta\overline{S}_{n,m} = F_{n,m}\sum_{s(n,m)}\sum \mp(C^{\pm}_{s,n,m} \mp iS^{\pm}_{s,n,m})e^{\pm i\theta_S}, \qquad (8.38)$$

где

$$F_{n,m} = \frac{4\pi G\rho_\omega}{g}\left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0,m})}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+k'_n}{2n+1}\right);$$

$g = 9,798261$ м$\cdot$с$^{-2}$; G – универсальная гравитационная постоянная, равная $6,672\cdot10^{-11}$ м$^3\cdot$кг$^{-1}\cdot$с$^{-2}$; ρ_ω – плотность морской воды, $\rho_\omega = 1025$ кг$\cdot$м$^{-3}$; k_n – нагрузочные деформационные коэффициенты ($k'_2 = -0,3075$, $k'_3 = -0,195$, $k'_4 = -0,132$, $k'_5 = -0,1032$, $k'_6 = -0,0892$); $C^{\pm}_{s,n,m}$, $S^{\pm}_{s,n,m}$ – океанические приливные коэффициенты по m для приливной составляющей s; θ_s – аргумент приливной составляющей s, определенный формулой (8.36). Коэффициенты $C^{\pm}_{s,n,m}$, $S^{\pm}_{s,n,m}$ и числа Дудсона для вычисления θ_s можно найти на сервере ftp.csr.utexas.edu.

При вычислении суммы $\sum\mp$ выбор верхнего знака означает суммирование выражений, связанных с наступающими волнами $C^{+}_{s,n,m}$ и $S^{+}_{s,n,m}$, выбор нижнего знака выражений, связанных с отступающими волнами $C^{-}_{s,n,m}$, $S^{-}_{s,n,m}$. Для удобства вычисления соотношения (8.38) могут быть записаны в следующей форме:

$$\Delta\overline{C}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [(C^{+}_{s,n,m} + C^{-}_{s,n,m})\cos\theta_s + (S^{+}_{s,n,m} + S^{-}_{s,n,m})\sin\theta_s]; \quad (8.39)$$

$$\Delta\overline{S}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [(S^{+}_{s,n,m} - S^{-}_{s,n,m})\cos\theta_s - (C^{+}_{s,n,m} - C^{-}_{s,n,m})\sin\theta_s]. \quad (8.40)$$

Коэффициенты $C^{\pm}_{s,n,m}$, $S^{\pm}_{s,n,m}$ и числа Дудсона для вычисления θ_s определяются используемой приливной моделью и их можно найти на сервере ftp.csr.utexas.edu.

На данный момент существует несколько глобальных приливных океанических моделей. Однако широкую известность приобрела модель CSR, основанная на данных, полученных по наблюдениям спутника TOPEX/Poseidon. За 14 лет работы спутника были построены несколько моделей CSR. Приведем краткое описание этих моделей, используя данные, приведенные на вышеуказанном сервере:

– TEG-2B – Первая аналитическая океаническая модель приливов Свидерского содержит коэффициенты приливных гармоник до 5-го порядка включительно.

– CSR 1.6 – Модель, содержащая первые оценочные коэффициенты приливных гармоник, полученные с помощью спутника TOPEX/Poseidon. Определены коэффициенты приливных гармоник до 20-го порядка включительно. Главным недостатком данной модели является то, что коэффициенты не оптимально подобраны к приливным гармоникам, вследствие чего в представлении наблюдений появляются ошибки.

– CSR 2.0 – В этой модели устранены недостатки, обнаруженные в модели CSR 1.6.

– CSR 2.0(big8) – Коэффициенты приливных гармоник в этой модели подобраны таким образом, чтобы максимально учесть влияние суточных возмущений, действующих на спутники.

– CSR 3.0 – Уточнение коэффициентов приливных гармоник и расширение их до 30-го порядка включительно.

– CSR 4.0 – Дальнейшее уточнение коэффициентов приливных гармоник модели CSR 3.0.

Возмущения от полюсного прилива

В IERS соглашении 2000 г. (IERS, 2000) предлагается учитывать влияние от твердотельного полюсного прилива по формуле

$$\Delta\overline{C}_{2,1} = -1{,}333\times10^{-9}(m_1 + 0{,}0155m_2)$$
$$\Delta\overline{S}_{2,1} = -1{,}333\times10^{-9}(m_2 - 0{,}0155m_1)\ ,$$

где

$$m_1 = (x_p - \overline{x}_p)$$
$$m_2 = -(y_p - \overline{y}_p)\ , \qquad (8.41)$$

причем $\overline{x}(t) = \overline{x}_p(t_0) + (t-t_0)\dot{\overline{x}}_p(t_0)$, $\overline{y}(t) = \overline{y}_p(t_0) + (t-t_0)\dot{\overline{y}}_p(t_0)$.

Коэффициенты и скорости среднего полюса определены как $\overline{x}_p(t_0) = 0{,}054$, $\dot{\overline{x}}_p(t_0) = 0{,}00083$, $\overline{y}_p(t_0) = 0{,}357$, $\dot{\overline{y}}_p(t_0) = 0{,}00395$; t_0 – J2000,0. В последнем IERS соглашении (IERS, 2010) предлагается более точная формула определения координат среднего полюса $\overline{x}(t), \overline{y}(t)$, которая позволяет учитывать вековые изменения до 10^{-3} угловых секунд.

$$\overline{x}_p = \sum_{i=0}^{3}(t-t_0)^i \times \overline{x}_p^i, \qquad \overline{y}_p = \sum_{i=0}^{3}(t-t_0)^i \times \overline{y}_p^i\ . \qquad (8.42)$$

Таблица 8.1

Скорости изменения координат среднего полюса

Степень *i*	До 01.01.2010 г.		После 01.01.2010 г.	
	$\overline{x}_p^i$, уг. с/год	$\overline{y}_p^i$, уг. с/год	$\overline{x}_p^i$, уг. с/год	$\overline{y}_p^i$, уг. сек/год
0	55,974	346,346	23,513	358,891
1	1,8243	1,7896	7,6141	–0,6287
2	0,18413	–0,10729	0,0	0,0
3	0,007024	–0,000908	0,0	0,0

Координаты среднего полюса $\overline{x}_p, \overline{y}_p$ измеряются в секундах дуги, а $\dot{\overline{x}}_p, \dot{\overline{y}}_p$ – в секундах дуги в год (табл. 8.1); t_0 – J2000,0.

Возмущения от океанического полюсного прилива

Формулы для учета влияния океанического полюсного прилива на гармонические коэффициенты появились в последнем IERS соглашении

$$\begin{bmatrix}\Delta\overline{C}_{n,m}\\ \Delta\overline{S}_{n,m}\end{bmatrix}=R_n\left\{\begin{bmatrix}\overline{A}^R_{n,m}\\ \overline{B}^R_{n,m}\end{bmatrix}(m_1\gamma_2^R+m_2\gamma_2^I)+\begin{bmatrix}\overline{A}^I_{n,m}\\ \overline{B}^I_{n,m}\end{bmatrix}(m_2\gamma_2^R-m_1\gamma_2^I)\right\},\qquad(8.43)$$

где $$R_n=\frac{\Omega^2 a_E^4}{GM_\oplus}\frac{4\pi G\rho_\omega}{g}\left\{\frac{1+k'_n}{2n+1}\right\};$$

a_E – астрономическая единица; $\gamma=\gamma_2^R+i\gamma_2^I=(1+k_2-h_2)=$ $=0,6870+i0,0036$. Коэффициенты $\overline{A}_{n,m}=\overline{A}^R_{n,m}+i\overline{A}^I_{n,m}$, $\overline{B}_{n,m}=\overline{B}^R_{n,m}+i\overline{B}^I_{n,m}$ определены до 360-го порядка и степени в IERS Conventions 2010 (IERS 2010).

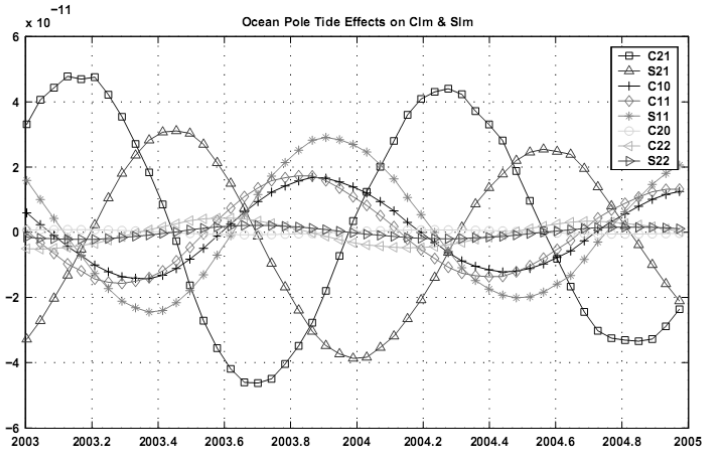


Рис. 8.1. Изменение первых коэффициентов гармоник за счет влияния океанического полюсного прилива

Вклад от влияния океанического полюсного прилива на коэффициенты гармоник до 2-го порядка дает приблизительно 90% от всего вклада океанического полюсного прилива (рис. 8.1), а

99% – влияние океанического полюсного прилива дает учет поправок для коэффициентов гармоник до 10-го порядка (IERS 2010).

8.4. Особенности представления других возмущений в численном моделировании движения ИСЗ

Вычисление лунно-солнечных возмущений

Распространенным способом определения координат Луны является использование упрощенной теории Хилла–Брауна, координат Солнца – теории Ньюкома.

Следует, однако, иметь в виду, что при прогнозировании движения высоколетящих объектов этот способ задания координат Луны и Солнца вносит значительные ошибки в вычисленные положения спутника.

Ошибки прогнозирования можно существенно уменьшить, если использовать для вычисления координат Луны и Солнца в высокоточной теории движения этих объектов. В настоящее время известны две высокоточные теории движения больших планет, Солнца и Луны: американская DE200/LE200 и французская VSOP82/LP2000.

Теория DE200/LE200 получена численными методами, охватывает период 1800–2000 гг. и дает координаты в виде полиномов Чебышева в прямоугольной барицентрической системе координат с экватором Земли и равноденствием J2000.0. Теория VSOP82/LP2000 получена аналитически. Постоянные теории определялись из уравнения с численной теорией DE200/LE200. Координаты больших планет представлены в виде полиномов Чебышева на интервале времени 1735–2011 гг. В теории используются три системы координат: геоцентрическая, отнесенная к эпохе J2000.0, и две гелиоцентрические экваториальные, связанные с эпохами 1950.0 и 1975.0.

Для определения координат больших планет и Луны, в IERS соглашении 2010 г. рекомендуется использовать эфемериды боль-

ших планет из фонда DE421/LE421. Ошибка в представлении координат больших планет и Луны в этом фонде имеет порядок одной миллисекунды дуги.

Вычисление негравитационных возмущений

Для вычисления негравитационных возмущений, обусловленных влияниями светового давления и атмосферы Земли, в численном моделировании используются непосредственно формулы, приведенные в гл. 4. Необходимые координаты и скорости спутника вычисляются в процессе численного интегрирования.

Релятивистские эффекты

Релятивистские поправки правых частей уравнений движения, записанных в геоцентрической системе координат, могут быть представлены согласно (Brumberg, 2004) в виде

$$\Delta\ddot{\mathbf{x}} = c^{-2}\sum_{n=1}^{6}\Phi_n, \quad \Phi_n = \{\Phi_{n1}, \Phi_{n2}, \Phi_{n2}\}. \ ,$$

где c – скорость света; Φ_1 – шварцшильдовские возмущения, определяемые полем тяготения Земли, рассматриваемой как сферически-симметричное тело; Φ_2 – эффекты лензе-терринговской прецессии, порожденной вращением Земли; Φ_3 – релятивистские квадрупольные члены; обусловленные наличием у Земли моментов инерции второго порядка; Φ_4 – релятивистские члены, обусловленные взаимодействием Земли и внешних масс (Луны, Солнца), они описывают нелинейную суперпозицию гравитационных полей Земли и внешних масс; Φ_5 – релятивистские члены, которые можно интерпретировать как приливные возмущения от внешних масс; Φ_6 – поправки к ньютоновским возмущениям от внешних масс. Формулы для вычисления релятивистских ускорений Φ_n можно найти в (Brumberg, 2004).

9. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.1. Вводные замечания

Современные средства наблюдений позволяют получать пространственные положения ИСЗ с точностью, равной 1 милиарксекунде. Как показано в работе (Черницов, 2002), чтобы не потерять эту точность при использовании наблюдений, нужно иметь возможность вычислять пространственные положения ИСЗ с методической точностью, по крайней мере, в три раза превышающей точность наблюдений. Этого можно достичь только при применении в процессе моделирования движения ИСЗ численных методов высоких порядков.

В данной главе мы дадим описание наиболее часто употребляемых в практике моделирования движения ИСЗ методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). К ним относятся явные одношаговые алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга (Fehlberg, 1969, 1972), высоких порядков, неявный одношаговый алгоритм Эверхарта (Everhart, 1974a, 1974b), метод рациональной экстраполяции Булирша и Штера (Bulirsh, Stoer, 1964, 1966; Stoer, 1974) и многошаговый алгоритм Адамса–Мультона–Коуэлла (Oesterwinter, Cohen, 1969).

Изложение теории методов Рунге–Кутты можно найти в работах Дж. Бутчера (Butcher, 1963, 1964a, 1964b), в двух написанных Дж. Бутчером главах (5-я и 10-я) книги «Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений» (Холл, Уатт, 1979), опубликованной на русском языке в 1979 г., в монографии Т.В. Бордовицыной (1984) и книге Э. Хайрера, С. Нерсетта и Г. Ваннера (1990). В приложении к последней книге имеются также написанные на языке Фортран программы явных алгоритмов Рунге–Кутты (в модификации Дормана и Принса) пя-

того и восьмого порядков для решения ОДУ первого и второго порядков. Изложение метода Эверхарта, кроме указанных выше работ самого автора, приводится также в монографии Т.В. Бордовицыной (1984). Обоснование экстраполяционных методов можно найти в монографии Дж. Штеттера (1978) и в книге Э. Хайрера, С. Нерсетта и Г. Ваннера (1990). В приложении к этой книге даны Фортран-программы экстраполяционных алгоритмов переменного шага и порядка для решения ОДУ первого и второго порядков. Изложение многошагового алгоритма Адамса–Мультона–Коуэлла можно найти в указанной выше работе авторов, а также в монографии Т.В. Бордовицыной (1984).

9.2. Явные одношаговые алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга

Явные алгоритмы Рунге–Кутты, предложенные Э. Фельбергом, построены по типу вложенных алгоритмов. Определение главного члена погрешности метода интегрирования на одном шаге осуществляется в этих алгоритмах по двум формулам Рунге–Кутты смежных порядков. Полученное значение главного члена ошибки метода на шаге используется затем для выбора шага интегрирования, который основывается на требовании одинаковой локальной точности вычислений на каждом шаге. Аналогичный же подход к выбору шага можно найти в работе А.К. Платонова, З.К. Власовой и В.А. Степанянца (1976).

Для решения дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y)$$

с начальным условием $y(t_0) = y_0$ запишем две формулы Рунге–Кутты смежных порядков:

$$y = y_0 + h\sum_{k=0}^{s} b_k g_k + O(h^{r+1}), \quad \overline{y} = y_0 + h\sum_{k=0}^{s+l} \overline{b}_k g_k + O(h^{r+2}), \quad (9.1)$$

где

$$g_0 = f(t_0, y_0),\ g_k = f\left(t_0 + c_k h, y_0 + h\sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} g_i\right),\ k = 1, 2, \ldots, s + l. \quad (9.2)$$

Для решения дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = f(t, y)$$

с начальными условиями $y(t_0) = y_0,\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$ будем использовать три формулы:

$$y = y_0 + h\dot{y}_0 + h^2 \sum_{k=0}^{s} b_k g_k + O(h^{r+1}),$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + h\sum_{k=0}^{s} \tilde{b}_k g_k + O(h^{r+1}), \quad (9.3)$$

$$\overline{y} = y_0 + h y_0 + h^2 \sum_{k=0}^{s+l} \overline{b}_k g_k + O(h^{r+2}),$$

причем

$$g_0 = f(t_0, y_0),\ g_k = f\left(t_0 + c_k h,\ y_0 + \dot{y}_0 c_k h + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} g_i\right), \quad (9.4)$$
$$k = 1, 2, \ldots, s + l.$$

Здесь $y, \dot{y}_0, \overline{y}, g_0, g_k$ – n-мерные векторы.

Алгоритмы Фельберга построены таким образом, что первые s значений в формулах для y и $\overline{y}$ совпадают. Свободные параметры среди c_k выбираются из условия минимума главной ошибки метода на шаге. Разность $TE = \overline{y} - y$ определяет величину главного члена погрешности метода, имеющего порядок r, на одном шаге интегрирования. Контроль величины шага интегрирования с помощью TE может быть осуществлен следующим образом. Для всех интегрируемых уравнений на каждом шаге интегрирования вычисляются величины

$$A_i = \frac{TE_{yi}}{TOL} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (9.5)$$

где $TOL = \varepsilon\, y_i$ – абсолютная точность вычислений; ε – относительная точность; n – число интегрируемых уравнений. Затем проверяется условие

$$\frac{1}{2^{r+1}} \le A_{\max} \le 1,$$

где r – порядок метода.

Если $A_{\max} > 1$, новый шаг интегрирования уменьшается вдвое, $H = h/2$, а если $A_{\max} \le 1/2^{r+1}$, то $H = 2h$. Этот критерий смены шага предложен Э. Фельбергом. Для определения шага интегрирования может быть использована также формула Холла

$$H = 0{,}9h\left(\frac{TOL}{TE_{\max}}\right)^{1/r},$$

позволяющая непрерывно менять шаг интегрирования. Здесь $TE_{\max}$ – максимальная величина из всех TE_{yi}; $0{,}9$ – константа, подобранная эмпирически; r – порядок метода.

Э. Фельберг опубликовал алгоритмы 5 (6)-го и 7 (8)-го порядков для решения уравнений первого порядка, получившие название алгоритмов Рунге–Кутты–Фельберга, и полный набор алгоритмов от 4 (5)-го и до 8 (9)-го порядков для решения уравнений второго порядка без сведения их к уравнениям первого порядка. Эти алгоритмы названы Фельбергом алгоритмами Рунге–Кутты–Нистрема (Fehlberg, 1972), так как первые алгоритмы, предназначенные для непосредственного интегрирования уравнений второго порядка, были даны А. Нистремом в 1925 г. Коэффициенты a_{ij}, b_i, c_i даны Э. Фельбергом в виде рациональных дробей.

Возможность производить оценку точности вычислений на каждом шаге с помощью главного члена ошибки метода является большим достоинством алгоритмов Фельберга. Однако, как отмечает Дж. Бутчер, само вычисление главного члена ошибки метода в алгоритмах Фельберга не для всех задач выполняется одинаково точно, поскольку практически та и другая составные части метода основаны на одной и той же квадратурной формуле. Однако в ряде

задач небесной механики алгоритмы Фельберга оказываются достаточно гибкими и дают хорошие результаты.

9.3. Неявный одношаговый алгоритм Эверхарта

В 1973 г. Э. Эверхарт предложил интегратор (Everhart, 1974a, 1974b), разработанный им специально для численного исследования орбит, и продемонстрировал его высокую эффективность в задачах кометной динамики. По-видимому, обнаружив в дальнейшем принадлежность своего интегратора к семейству интеграторов типа Бутчера, Эверхарт акцентировал внимание на оригинально реализованном им алгоритме интегрирования и обобщил его для численного решения любых обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Тем самым ему удалось расширить область применения своего интегратора, который, тем не менее, остается одним из самых популярных именно в решении задач небесной механики.

9.3.1. Основные формулы

Предположим, на шаге h мы решаем задачу Коши

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y), \quad y_0 = y(t_0).$$

Представим приближенно правую часть уравнений f в виде интерполяционного канонического многочлена степени $s-1$ на сетке $c_1,\ldots,c_s$ в безразмерном времени $\tau = (t - t_0)/h$:

$$y' = y'_\tau / h = f \approx g'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^{s} a_j \tau^{j-1}, \tag{9.6}$$

где коэффициенты a пока не определены. Интегрируя (9.6) по τ, получаем приближенное решение

$$y(t_0 + h\tau) \approx g(t_0 + h\tau) = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} \frac{a_j}{j} \tau^j. \tag{9.7}$$

Перепишем канонический многочлен (9.6) в виде интерполяционного многочлена Ньютона:

$$f \approx g'(t_0 + h\tau) = \alpha_1 + \sum_{j=2}^{s} \alpha_j \prod_{m=1}^{j-1} (\tau - c_m). \tag{9.8}$$

Равенство правой части уравнения и многочлена в (9.8) имеет место в точках $c_1, \ldots, c_s$, поэтому из соотношений

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0 + hc_1, g(t_0 + hc_1)) = f(t_0 + hc_1, z_1) = \alpha_1, \\ k_i &= f(t_0 + hc_i, g(t_0 + hc_i)) = f(t_0 + hc_i, z_i) = \\ &= \alpha_1 + \sum_{j=2}^{i} \alpha_j \prod_{m=1}^{j-1} (c_i - c_m), \quad (i = 2, \ldots, s) \end{aligned} \tag{9.9}$$

последовательно получаем разделенные разности α:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = k_1 \\ &\alpha_2 = (k_2 - \alpha_1) / (c_2 - c_1), \\ &\alpha_3 = ((k_3 - \alpha_1) / (c_3 - c_1) - \alpha_2) / (c_3 - c_2), \\ &\ldots \end{aligned} \tag{9.10}$$

В свою очередь, сравнивая коэффициенты многочленов (9.6) и (9.8) при одинаковых степенях τ, будем иметь

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 + (-c_1)\alpha_2 + (c_1 c_2)\alpha_3 + \ldots + (-1)^{s-1}(c_1 \ldots c_{s-1})\alpha_s, \\ a_2 &= \alpha_2 + (-c_1 - c_2)\alpha_3 + \ldots, \\ &\ldots \\ a_s &= \alpha_s. \end{aligned}$$

Эти соотношения, а также обратный переход от a к α можно представить как

$$a_j = \sum_{i=j}^{s} c_{ij}\alpha_i, \quad \alpha_j = \sum_{i=j}^{s} d_{ij} a_i \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{9.11}$$

Коэффициенты c_{ij} и d_{ij} являются числами Стирлинга, которые вычисляются по формулам

$$c_{ii} = d_{ii} = 1, \quad c_{i0} = d_{i0} = 0 \quad (i > 0),$$
$$c_{ij} = c_{i-1,j-1} - c_{i-1}c_{i-1,j}, \quad d_{ij} = d_{i-1,j-1} - c_j d_{i-1,j} \quad (i > j > 0). \tag{9.12}$$

9.3.2. Интегрирование на шаге

Величины α (9.10) определяются по k (9.9), которые, в свою очередь, вычисляются по приближенным решениям в узловых точках $c_1,\ldots,c_s$. Согласно (9.7), эти решения будем задавать как

$$z_i = g(t_0 + hc_i) = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} \frac{a_j}{j} c_i^j \quad (i = 1,\ldots,s). \tag{9.13}$$

Формулы (9.13) представляют собой неявные уравнения относительно z: $z = z(a(\alpha(k(z))))$, поэтому они решаются итерационным способом. Для этого применяется метод простых итераций в модификации Зейделя.

Для получения начальных приближений $\overline{a}$ и $\overline{\alpha}$ на следующем шаге $\overline{h}$ используется информация о коэффициентах a на текущем шаге h. Безразмерная независимая переменная следующего шага будет $\overline{\tau} = (t - t_1)/\overline{h}$, где $t_1 = t_0 + h$. Отсюда

$$\tau = r\overline{\tau} + 1, \tag{9.14}$$

где $r = \overline{h}/h$. Согласно (9.6):

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \tau^{j-1} = \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_j \overline{\tau}^{j-1}. \tag{9.15}$$

Подставляя (9.14) в (9.15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\overline{\tau}$, получаем

$$\overline{a}_j = r^{j-1} \sum_{i=j}^{s} e_{ij} a_i \quad (j = 1,\ldots,s), \tag{9.16}$$

где e_{ij} – числа арифметического треугольника, вычисляемые по рекуррентным формулам

$$e_{ii} = e_{i1} = 1, \quad e_{ij} = e_{i-1,j-1} + e_{i-1,j} \quad (i > j > 1). \tag{9.17}$$

Кроме того, оценка $\overline{a}$ уточняется путем внесения поправки Δa, получаемой как разность между значениями a после итераций и оценкой $\overline{a}$ на текущем шаге h. Далее, пользуясь соотношениями (9.11) для перехода от a к α, находим начальное приближение $\overline{\alpha}$.

Каждая итерация выполняется следующим образом. Сначала определяется решение z_1, из которого по первой формуле (9.10) находится значение α_1, а затем по первой группе соотношений (9.11) уточняется a_1. Далее определяется z_2, по которому улучшается α_2 и соответственно a_1 и a_2, и так до z_s. Как правило, для получения достаточно хороших приближений необходимо всего лишь 2 итерации, очень редко – 3.

Как только величины a получены, приближенное решение на шаге h ($\tau = 1$) будет

$$y_1 = y_0 + h\sum_{j=1}^{s}\frac{a_j}{j}. \qquad (9.18)$$

В начале интегрирования, на первом шаге, итерационный процесс буквально запускается с нуля, т.е. в качестве $\overline{a}$ и $\overline{\alpha}$ выбирают нулевые значения. Если начальный шаг достаточно большой, чтобы обеспечить заданную локальную точность, то его следует уменьшить. При оптимально выбранном шаге высокая точность приближений достигается уже на 4-й итерации.

В оригинальной версии интегратора Эверхарта используется левое разбиение Гаусса–Радо, а не Гаусса–Лежандра, поэтому аппроксимирующая схема имеет порядок $p = 2s - 1$. По-видимому, автор нашел это разбиение более удобным, поскольку оно не требует перевычислений коэффициентов в первой узловой точке при решении нелинейных уравнений (9.13). Действительно, ведь в этом случае $c_1 = 0$ и $a_1 = \alpha_1 = k_1 = f(t_0, y_0)$.

9.3.3. Выбор шага

В интеграторе Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена в (9.18). Пусть $\| e \|_{tol}$ – заданная точность. Потребуем, чтобы на следующем шаге выполнялось равенство

$$\frac{\bar{h}}{s} \| \bar{a}_s \| (= \| e \|_{cal}) = \| e \|_{tol} .$$

Отсюда, используя последнее соотношение (9.16) ($j = s$), получаем оценку

$$\bar{h} = hr = h \left(\frac{s}{h} \frac{\| e \|_{tol}}{\| a_s \|} \right)^{1/s} . \qquad (9.19)$$

Очевидно, при разбиениях Гаусса недостаток такой оценки состоит в том, что шаг по ней выбирается фактически как для решения порядка $s-1$, поэтому, вообще говоря, она не обеспечивает сохранение требуемой локальной точности.

Во избежание слишком больших (и малых) локальных ошибок, на r следует наложить ограничение (Авдюшев, 2015):

$$\frac{1}{\sigma} < r^s < \sigma. \qquad (9.20)$$

Для того чтобы величина последнего члена в (9.18) была ограничена в пределах одного порядка, значение σ должно быть равно $\sqrt{10}$. Это следует из того факта, что

$$\bar{h} \| \bar{a}_s \| \sim r^s .$$

Выполнение обоих неравенств проверяется лишь в начале интегрирования при выборе стартового шага: если (9.20) не выполняется, то интегрирование повторяется с новым шагом $\bar{h} = hr$ и так далее, пока не выполнится условие (9.20). Обычно для получения стартового шага требуется не более 4 итераций. В дальнейшем для ограничения r проверяется только правое неравенство: если неравенство не выполняется, то r принимает значение правого предела.

Начальное приближение стартового шага получается из оценки, подобной (9.19), для $s = 2$ (Авдюшев, 2015):

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{2h \| e \|_{tol}}{\| k_2 - k_1 \|}}, \quad k_1 = f(t_0, y_0), \quad k_2 = f(t_0 + h, y_0 + hk_1),$$

где h – малая величина. Если h настолько мала, что в компьютерной арифметике $k_1 = k_2$, она увеличивается в 10 раз, и оценка повторяется снова.

9.4. Экстраполяционные алгоритмы

9.4.1. Экстраполяционные схемы Невилла и Штера

Пусть $D(h)$ есть дискретная аппроксимация решения $D(0)$, определенная для шага $h \in H = [0, T]$, причем h достаточно мало. В том случае, если $D(h)$ имеет асимптотическое разложение

$$D(h) = l_0 + l_1 h^2 + l_2 h^4 + \ldots,$$

(9.21)

Л. Ричардсон (Richardson, 1910) предложил получать улучшенную аппроксимацию из двух или более значений $D(h)$, определенных в $h_0 > h_1 > \ldots > h_n$, требуя, чтобы линейная комбинация $D(h_m)$:

$$P_0^n = \sum_{m=0}^{n} C_m^{(n)} D(h_m) \tag{9.22}$$

удовлетворяла условию

$$P_0^n = D(0) + O(T^{2n+2}), \tag{9.23}$$

в то время как $h_0 \to 0$.

Такую процедуру построения улучшенной аппроксимации принято называть экстраполяцией, поскольку она используется на каждом шаге интегрирования. Существенно, что константы $C_m^{(m)}$ вычислять не нужно. При экстраполяции полиномами P_0^n может быть найдено непосредственно по рекуррентному алгоритму

Невилла, а при экстраполяции рациональными функциями для этой цели может быть использован алгоритм Штера.

Пусть $P_n^m(h^2)$ есть полином степени m относительно h^2, который интерполирует $D(h)$ в точках $h = h_k, k = n,\ldots,n+m$. Тогда P_n^m может быть найдено с помощью следующей линейной рекуррентной схемы

$$p_0^n = D(h_0), \quad P_n^m = P_{n+1}^P m - 1 + \frac{P_{n+1}^P m - 1 P_n^P m - 1}{(h_n / h_{n+m})^2 - 1} \tag{9.24}$$

с диаграммой

$$\begin{array}{cccc} P_0^0 & & & \\ & P_0^1 & & \\ P_1^0 & & P_0^2 & \\ & P_1^1 & & P_0^3 \\ P_2^0 & & P_1^2 & \\ & P_2^1 & \ldots & \ldots \\ P_3^0 & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{9.25}$$

Как показано Ф. Бауэром, Х. Рутишаузером и Е. Штифелем (Bauer et al., 1963), эта последовательность преобразований сходится в P_0^n. Основную вычислительную трудность составляет определение первого столбца диаграммы P_0^n.

Пусть далее $r_n^m = r_n^{(\mu\nu)} h^2$ есть рациональная функция, числитель которой есть полином степени μ, а знаменатель – полином степени $\nu, m = \mu + \nu$. Функция r_n^m интерполирует $D(h)$ в точках $h = h_k, k = n, n+1,\ldots,n+m$. Алгоритм Штера для последовательности $\mu\nu = (0,0),(0,1),(1,1),(1,2),\ldots$ дает следующую рекурсивную схему построения функций r_n^m:

$$r_n^{-1} = 0, \quad r_n^0 = D(h_n),$$
$$r_n^m = r_{n+1}^{m-1} + \frac{r_{n+1}^{m-1} - r_n^{m-1}}{\left(\dfrac{h_n}{h_{m+n}}\right)^2 \left[1 - \dfrac{r_{n+1}^{m-1} - r_n^{m-1}}{r_{n+1}^{m-1} - r_{n+1}^{m-2}}\right] - 1} \tag{9.26}$$

с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} r_n^{m-2} & & \\ & r_n^{m-1} & \searrow \\ r_{n+1}^{m-2} & \rightarrow & r_n^m \\ & r_{n+1}^{m-1} & \nearrow \\ r_{n+2}^{m-2} & & \end{array} \tag{9.27}$$

Исследование сходимости последовательности функций r_n^m выполнено В. Греггом (Gragg, 1965).

9.4.2. Метод Булирша и Штера

Для того чтобы применить локальную экстраполяцию к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

необходимо выбрать в качестве основы интегрирования численный метод, для которого существует асимптотическое разложение вида (9.21). В методе рациональной экстраполяции Булирша и Штера для этой цели используется модифицированный метод прямоугольников:

$$\eta_0 = y_0, \quad \eta_1 = \eta_0 + \frac{h_k}{2} f(t_0, \eta_0).$$

Для $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$:

$$\eta_{i+1} = \eta_{i-1} + h_k f(t, \eta_i),$$
$$\eta(h, t) = \frac{1}{2}\left[\eta(t_{2n}, h_k) + \eta(t_{2n-1}, h_k) + hf(t, \eta_{2n})\right], \tag{9.28}$$

где $h_k = H / n_k$, а $H = t - t_0$ – основной шаг интегрирования; n_k – натуральное число; $t_i = t_0 + ih_k / 2, \quad k = 0,1,2,\ldots$ Тогда дискретная аппроксимация решения $D(h_k, t)$ определится следующим образом:

$$D(h_k, t) = \eta\left(\frac{h_k}{2}, t\right). \tag{9.29}$$

Авторы метода рекомендуют выбирать в качестве h_k следующую последовательность чисел:

$$F = \left\{H, \frac{H}{2}, \frac{H}{3}, \frac{H}{4}, \frac{H}{6}, \frac{H}{8}, \frac{H}{12}, \ldots\right\}. \tag{9.30}$$

9.4.3. Выбор шага интегрирования

Экстраполяционные методы позволяют варьировать одновременно порядок метода, длину основного шага интегрирования и количество этапов вычислений на каждом шаге. Одинаковой точности вычислений можно добиться, лишь увеличивая порядок метода, либо увеличивая число этапов вычислений на шаге, либо уменьшая длину шага интегрирования. Однако при практическом использовании метода следует учитывать, что влияние ошибки округления растет с увеличением порядка экстраполяции. Поэтому во всех реализованных на ЭВМ версиях алгоритма, начиная с первой программы Булирша и Штера, порядок метода не превосходит шести. Авторами алгоритма предложены два способа выбора шага интегрирования (Bulirsch, Stoer; 1966; Stoer, 1974).

Первый способ, довольно грубый, но весьма простой и удобный для практической реализации, состоит в следующем. Пусть необходимая точность вычислений достигается при порядке экстраполяции $m < 6$, т.е. при $m < 6$ и $1 \le k \le m$ выполняется неравенство

$$(1/s)\,|\, r_k^{m-k} - r_k^{m-k-1} \,| < \varepsilon, \tag{9.31}$$

где ε – заданная точность вычислений; $s = \max_{t\in|0,T|} |y(t)|$, тогда длина основного шага интегрирования H увеличивается и новый шаг $\tilde{H}$ вычисляется по формуле

$$\tilde{H} = 1{,}5H. \tag{9.32}$$

Если, напротив, требуемая точность не достигается после девяти этапов, т.е.

$$(1/s)\,|r_4^6 - r_3^6| < \varepsilon, \tag{9.33}$$

то шаг уменьшается и длина его определяется по формуле

$$\tilde{H} = 0{,}9(0{,}6)^{m-6} H. \tag{9.34}$$

Во втором способе выбора шага максимальный порядок экстраполяции не задается, а вычисляется по формуле

$$l = l(\varepsilon) \approx [(m + 2{,}5)/2], \tag{9.35}$$

если $\varepsilon = 10^{-m}$, где символ [ ] означает целую часть числа; m – требуемое число значащих цифр. Новый шаг $\tilde{H}$ определяется формулой

$$H = \frac{\tilde{H}}{u}. \tag{9.36}$$

Корректирующий множитель u задается группой соотношений

$$u \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\sqrt[2j+1]{\left|\dfrac{r_j^{j-1} - r_{j-1}^{j-1}}{s}\right| \varphi_{j-1,j-1}}, & \text{если} \quad j \le l, \\ \dfrac{1}{\alpha}\sqrt[2l+3]{\left|\dfrac{r_j^{l} - r_{j-1}^{l}}{s}\right| \varphi_{j-l,l}}, & \text{если} \quad j > l, \end{cases} \tag{9.37}$$

где

$$\varphi_{jl} = (n_j n_{j-1} \ldots n_{j-l})^2, \quad \alpha = \sqrt[2l+3]{\varepsilon \varphi_{ll}},$$

$$\varphi_{ll} = n_0^2 \cdot n_1^2 \cdot \ldots \cdot n_j^2, \quad n_j = H / h_j.$$

Далее проверяется условие, является ли последний член r_j^m, $m = \min(jl)$ достаточно точным, т.е. имеет ли место соотношение

$$\left|\frac{r_j^j - r_j^{j-1}}{s}\right| \cdot \frac{1}{(n_j^2 - 2)} \le \varepsilon, \quad \text{если} \quad j \le l,$$

или

$$\left|\frac{r_{j-1}^l - r_{j-1-l}^l}{s}\right| \cdot \frac{n_{j-1-l}^2}{n_j^2} \le \varepsilon, \quad \text{если} \quad j > l.$$

Если $u \le 1$ и элемент r_j^m достаточно точен, решение полагается равным r_j^m, $y = r_j^m$ и новый шаг интегрирования выбирается равным $\tilde{H} = H / u$. Если $u > 1$, вычисляется новый индекс $i_0(u)$, которым следует ограничить вычисление начального столбца таблицы r_j^m:

$$i_0(u) = \begin{cases} l+1, & \text{если } 1 \le u \le 1{,}063, \\ l + 2 + [3{,}14 \cdot \ln u - 1{,}19], & \text{если } u > 1{,}063. \end{cases} \tag{9.38}$$

Если при этом количество перевычислений A_j функций f удовлетворяет соотношению

$$A_j + uA_l < A_{i_0(u)}, \tag{9.39}$$

то шаг уменьшается: $\tilde{H} = H / u$. В противном случае индекс j полагается равным $j+1$ и происходит простое расширение таблицы r_j^m.

9.5. Многошаговые методы

9.5.1. Принципы построения

Линейные многошаговые методы являются традиционным математическим аппаратом численного решения уравнений движения небесных тел, как естественных, так и искусственных. Более того, первые многошаговые методы были разработаны Адамсом и Коуэллом для решения задач небесной механики. Изложение многошаговых методов можно найти практически во всех учебниках,

касающихся численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, Бахвалов, 1973), а также в некоторых учебниках и статьях по небесной механике (Субботин, 1937; Чеботарев, 1965; Куликов, 1960; Oesterwintwer, Cohen, 1969). Детальное изложение теории многошаговых методов можно найти в работе (Хайрер и др., 1990). Поэтому в настоящем учебнике мы остановимся лишь на принципах построения разностных формул и приведем получивший распространение в задачах небесной механики алгоритм Адамса–Мультона–Коуэлла. Формулы для вычисления коэффициентов этого метода были получены Ш. Коеном и Е. Хаббардом и приведены в работе (Oesterwintwer, Cohen, 1969) и монографии (Бордовицына, 1984).

Одношаговые методы, как мы видели ранее, для получения значения в y в $(n+1)$-й точке требуют знания значения y в n-й точке, все же остальные значения для вычисления y_{n+1} не используются. В многошаговых методах, наоборот, для вычисления y_{n+1} используются некоторые предварительно определенные значения $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$

Проинтегрируем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y) \tag{9.40}$$

в пределах от t до $t+h$ и получим тождество

$$y(t+h) - y(t) = \int_t^{t+h} f\left(\tau, y(\tau)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{9.41}$$

Заменим далее $f\left(\tau, y(\tau)\right)$ каким-либо интерполяционным полиномом $P(\tau)$, принимающим значения $f(t_n, y_n)$ на множестве точек t_n, для которых y_n уже известны. Выбор в качестве $P(\tau)$ интерполяционной формулы Ньютона с разностями назад определит группу методов Адамса.

При $t = t_n$ мы получим формулу метода Адамса–Башфорта в виде

$$y_{n+1} - y_n = h\sum_{r=0}^{k} \gamma_r^* \Delta^r f_n \tag{9.42}$$

или в форме Лагранжа

$$y_{n+1} - y_n = h\sum_{r=0}^{k} a_r^* f_{n-r}. \tag{9.43}$$

Причем $\Delta^r f_n$ – r-я разность функции f, а f_{n-r} – значение функции в точке t_{n-r}.

Полагая $t = t_{n-1}$, будем иметь формулу Адамса–Мультона в виде

$$y_n - y_{n-1} = h\sum_{r=0}^{k} \gamma_r \Delta^r f_n \tag{9.44}$$

или в форме Лагранжа

$$y_n - y_{n-1} = h\sum_{r=0}^{k} a_r f_{n-r}. \tag{9.45}$$

При выборе в качестве $P(\tau)$ интерполяционной формулы Стирлинга получим метод Коуэлла. В существующем виде этот метод используется для решения уравнений второго порядка без сведения их к уравнениям первого порядка и определяется формулой

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h\sum_{r=0}^{n} c_r f_r. \tag{9.46}$$

Общую формулу многошаговых методов можно принять следующей:

$$\sum_{r=0}^{k} \beta_r y_{n+r} = h\sum_{r=0}^{k} \alpha_r f_{n+r}, n = 0,1,2,..., \tag{9.47}$$

где α_r, β_r – постоянные, причем $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.

Если $\alpha_k = 0$, многошаговый метод называется явным. Если же $\alpha_k \neq 0$, правая часть формулы (9.47) содержит $f(t_{n+k}, y_{n+k})$ и формула представляет собой нелинейное уравнение относительно y_{n+k}. В этом случае метод называется неявным многошаговым. Для одних и тех же k неявный метод является более точным, чем явный, поскольку обладает более высокой устойчивостью к малым

возмущениям y_n. Поэтому на практике используются, как правило, неявные многошаговые методы. Нелинейное уравнение (9.45) удобно переписать в виде

$$y_{n+k} = \frac{h\alpha_k}{\beta_k} f\left(t_{n+k}, y_{n+k}\right) + g_n, \quad m = 0,1,2,..., \tag{9.48}$$

причем g_n содержит известные величины y_{n+r}, f_{n+r}, $r = 0,1,2,...,k-1$. Существование и единственность решения y_{n+k} уравнения (9.46) для известных многошаговых методов доказана П. Хенричи (Henrici, 1962).

Коэффициенты $\gamma_r, \gamma_r^*, a_r, a_r^*$ для формул (9.42)–(9.45) до $r = 8$ можно найти в книге (Хайрер и др., 1990). Коэффициенты основных разностных формул до 12-го порядка можно найти в книге (Штифель, Шейфеле, 1975), коэффициенты методов Адамса–Мультона–Коуэлла до 16-го порядка – в работе (Oesterwintwer, Cohen, 1969) и монографии (Бордовицына, 1984).

Начальное приближение определяется обычно с помощью явной многошаговой формулы. В этом случае явный метод называется предсказующим, а неявный – исправляющим, а весь процесс отыскания решения y_{n+k} называется методом предсказания и коррекции. Для применения многошаговой формулы на каждом k-м шаге интегрирования необходимо иметь так называемую таблицу интегрирования, которая для метода Адамса–Мультона состоит из величин

$$y_{n-1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-k}, \tag{9.49}$$

а для метода Коуэлла имеет вид

$$y_{n-1}, y_{n-1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-k}, \tag{9.50}$$

где k – порядок аппроксимирующей формулы.

Вычисление таблиц функций (9.49), (9.50) в начале интегрирования производится, как правило, с помощью какого-либо одношагового метода, однако существуют и самостартующие многошаговые методы. К таким методам относится самостартующий алгоритм метода Коуэлла, развитый Д.К. Куликовым (1960).

Возможны два способа организации методов предсказания и коррекции. В первом способе итерации проводятся до тех пор, пока сходимость не будет достигнута. При этом можно либо фиксировать шаг, оставляя число итерации произвольным, либо фиксировать число итераций, оставляя произвольной величину шага. Такой метод принято называть исправлением до сходимости. Поскольку в многошаговом методе любое изменение шага приводит к перевычислению начальной таблицы интегрирования, то с практической точки зрения гораздо более удобно фиксировать шаг, оставляя число итерации произвольным.

Во втором способе число применений исправляющей формулы фиксировано. Различные схемы вычисления, которые в этом случае могут быть использованы, в обозначениях Холла и Кримера записываются следующим образом:

$$PECE\,,\ PEC\,,\ P\left(EC\right)^m E\,,\ P\left(EC\right)^m .$$

Здесь P означает однократное применение предсказующей формулы; C – однократное применение исправляющей формулы; E – вычисление функции f; m – число итераций.

9.5.2. Алгоритм Адамса–Мультона–Коуэлла

Перейдем к описанию метода Адамса–Мультона–Коуэлла, нашедшего широкое применение в исследовании движения больших планет и спутниковой геодезии. Метод предназначен для интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y\right), \quad y_0 = y\left(t_0\right), \quad \dot{y}_0 = \dot{y}\left(t_0\right) \tag{9.51}$$

без сведения их к уравнениям первого порядка.

Для построения метода используются формулы (9.45) и (9.46). Коэффициенты a_j, c_j приведены в табл. 9.1, причем D – общий делитель, на который должны быть разделены все числа в таблице.

Таблица 9.1

Коэффициенты методов Адамса и Коуэлла

j	a_j	c_j
0	32011868528640000	32011868528640000
1	– 16005934246320000	– 32011868528640000
2	– 2667655710720000	2667655710720000
3	– 1333827855360000	0
4	– 844757641728000	– 133382785536000
5	– 600222534912000	– 133382785536000
6	– 456783110784000	– 116974585728000
7	– 363891528000000	– 100566385920000
8	– 299520219398400	– 86707632211200
9	– 252655401398400	– 75398324601600
10	– 217227737563200	– 66193573118400
11	– 189640115028000	– 58548487788800
12	– 167636336098320	– 52401453198480
13	– 149735464049160	– 47174128491600
14	– 134928496929540	– 42755108505900
15	– 122506205369730	– 38983584907800
16	– 111956703448001	– 35736323456205
$D = 32011868528640000$		

Алгоритм начинается вычислением вспомогательных коэффициентов с использованием коэффициентов Адамса и Коуэлла, приведенных в табл. 9.1, по формулам

$$\gamma'_j = \sum_{i=0}^{[j+1,b]} (-1)^i \binom{b}{i} \left(a_{j+1-i} - c_{j+1-i}\right), \; j = 0,1,2,...,a+b,$$

где $[j+1,b]$ есть наименьшее их $j+1$ и b:

$$\gamma_j = (-1)^i \sum_{j=i}^{a+b} \binom{j}{i} \gamma'_j, \; i = 0,1,2,...,a+b,$$

$$b_j = (-1)^j \binom{a+b+1}{j+1}, \; j = 0,1,2,...,a+b,$$

$$\alpha_j^* = (-1)^j \sum_{i=j}^{c} \binom{i}{j} c_i \,,\ j = 0,1,2,...,c \,,$$

$$\beta_j^* = (-1)^j \sum_{i=j}^{c} \binom{i}{j} a_i \,,\ j = 0,1,2,...,c \,,$$

$$c_i' = \sum_{j=0}^{i} c_i \,,\ i = 0,1,2,...,m \,,$$

$$\alpha_j' = (-1)^j \sum_{i=j}^{m} \binom{j}{i} c_j' \,,\ j = 0,1,2,...,m \,,$$

$$a_i' = \sum_{j=0}^{i} a_j \,,\ i = 0,1,2,...,m \,,$$

$$\beta_j' = (-1)^j \sum_{i=j}^{m} \binom{i}{j} a_i' \,,\ j = 0,1,2,...,m \,,$$

$$\alpha_j = (-1)^j \sum_{i=j}^{m} \binom{j}{i} c_j \,,\ j = 0,1,2,...,m \,,$$

$$\beta_j = (-1)^j \sum_{i=j}^{m} \binom{i}{j} a_i \,,\ j = 0,1,2,...,m \,.$$

Здесь c и m – порядки начальной и основной аппроксимирующих формул метода соответственно; скобками внутри сумм обозначены биномиальные коэффициенты; параметры a и b связаны с аппроксимирующей формулой, предназначенной для вычисления величины

$$y_{-1} = y_0 - h\dot{y}_0 + h^2 \sum_{j=0}^{a+b} \gamma_j f_{b-i} \,. \qquad (9.52)$$

Неизвестные ускорения, входящие в формулу (9.52), полагаются равными его начальному значению в интервале от a до b. Числа a и b не могут превосходить c. Вне интервала (a,b) неизвестные ускорения вычисляются по формулам

$$f_{-n} = \sum_{j=0}^{a+b} b_j f_{-n+1+j}\ ,\ n = a+1, a+2, ..., c\ ,$$

$$f_n = \sum_{j=0}^{a+b} b_j f_{n-1-j}\quad n = b+1, b+2, ..., c\ . \tag{9.53}$$

Положения и скорости в интервале от a до b вычисляются по формулам

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{c} \alpha_j^* f_{n-j}\ ,\ n = 1, 2, ..., b\ ,$$

$$y_{n-1} = 2y_{-n=1} - y_{-n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{c} \alpha_j^* f_{-n+j}\ ,\ n = 1, 2, ..., a\ , \tag{9.54}$$

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^{c} \beta_j^* f_{n-j}\ ,\ n = 1, 2, ..., b\ ,$$

$$\dot{y}_{-n} = \dot{y}_{-n+1} - h \sum_{j=0}^{c} \beta_j^* f_{-n+j}\ ,\ n = 1, 2, ..., a\ . \tag{9.55}$$

Совокупность формул (9.52) – (9.55) позволяет вычислить начальную таблицу интегрирования. Обычно это делается путем последовательных приближений.

Далее для вычисления y_n и $\dot{y}_n$ используются формулы предсказания

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{m} \alpha'_j f_{n-1-j}\ ,$$

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^{m} \beta'_j f_{n-1-j}$$

и коррекции

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{m} \alpha_j f_{n-j}\ ,$$

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^{m} \beta_j f_{n-j}\ .$$

Величины параметров m и c подбираются эмпирическим путем, исходя из особенностей задачи.

9.6. Сравнительная характеристика методов

Дадим краткую сравнительную характеристику по точности и быстродействию представленных здесь численных алгоритмов. Более подробное изложение результатов исследования эффективности численных алгоритмов можно найти в книгах (Бордовицына, 1984) и (Бордовицына и др., 1991).

Анализ результатов многочисленных исследований по сопоставлению эффективности представленных здесь численных методов в различных задачах динамики небесных тел, как естественных, так и искусственных, позволяет сделать следующие выводы:

– при соответствующем выборе системы уравнений, порядка метода, шага интегрирования и длины разрядной сетки ЭВМ высокой точности вычисления орбит можно достичь любым из изложенных в настоящем разделе методов;

– однако с учетом быстродействия наиболее эффективным практически во всех задачах небесной механики следует считать метод Эверхарта, на втором месте окажутся метод Булирша–Штера и метод Адамса–Мультона–Коулла, а на третьем – алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга.

10. МЕТОДЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ

Движение небесных тел можно исследовать в самой разнообразной формализации. В численном моделировании орбит она представляет собой систему дифференциальных уравнений, которые интегрируются численно. В связи с этим для высокоэффективного моделирования очень важно, насколько удачно формализовано орбитальное движение, поскольку от этого непосредственно зависят точность и быстродействие численного интегрирования.

Классические уравнения орбитального движения в прямоугольных координатах относительно массивного центрального тела можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \mathbf{P} \equiv \mathbf{F} + \mathbf{P}.$$

Здесь $\mathbf{x}$ – вектор положения; t – время; μ – гравитационный параметр центрального тела; $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}$ – центральная и возмущающая силы. Причем будем полагать, что $|\mathbf{P}| \ll |\mathbf{F}|$.

Численное интегрирование уравнений движения связано со следующими трудностями. Правые части уравнений представляют собой быстроизменяющиеся функции, которые необходимо интегрировать с малым шагом. Это приводит к увеличению объема вычислений, что, в свою очередь, сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления. Данная трудность усугубляется наличием в уравнениях движения особенности при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, что в случае сильновытянутых орбит становится причиной эксцентричного поведения правых частей. Кроме того, уравнения неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс.

В данной главе мы фокусируем свое внимание на известных методах формализованного представления орбитального движения, которые устраняют названные выше трудности. Эти методы будем называть методами теории специальных возмущений[2]. Получение с их помощью качественно новых уравнений, как правило, основывается на некоторой априорной информации об исследуемом орбитальном движении. Мы излагаем принципы тех методов, которые основаны на решении задачи двух тел в предположении, что исследуемая орбита близка к кеплеровской. В частности, мы рассмотрим методы регуляризации, метод вариации координат (Энке) и постоянных (Лагранжа), а также численную стабилизацию Баумгарта.

10.1. Стабилизация уравнений орбитального движения

Как уже отмечалось, ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений создает при численном интегрировании благоприятные условия для культивирования всевозможных ошибок. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Поэтому устойчивые уравнения для численного интегрирования более предпочтительны.

Задача стабилизации заключается как раз в том, чтобы ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на численное решение и улучшить таким образом поведение неустранимых ошибок интегрирования.

Родоначальниками стабилизации в небесной механике, бесспорно можно считать Й. Баумгарта (Baumgarte, 1973) и П. Накози (Nacozy, 1971). Их стабилизирующие методы основаны на применении известных интегралов, которые содержат дополнительную информацию о решении и рассматриваются как необходимые условия, предъявляемые к решению.

---

[2] В зарубежной литературе под методами специальных возмущений понимают численные методы (Рой, 1981; Херрик, 1977).

Технически стабилизация достигается путем исправления численного (ошибочного) решения за его уклонение от интегральной поверхности в фазовом пространстве интегрируемых переменных. В возмущенной задаче, когда интегральная поверхность динамична, а ее интегральный параметр становится переменным, для оценки уклонений решения используются те же интегральные соотношения, однако система уравнений дополняется уравнением для интегрального параметра, которое интегрируется численно совместно со всей системой (Baumgarte, 1973), (Бордовицына, Сухоплюева, 1980).

Стабилизация применяется как непосредственно к самому решению в процессе интегрирования (Nacozy, 1971), так и посредством введения дополнительных так называемых стабилизирующих членов в дифференциальные уравнения (Baumgarte, 1973). Очевидно, в этом случае стабилизация тем эффективнее, чем слабее возмущения и чем медленнее меняются параметры опорных интегральных поверхностей.

Из всех интегральных соотношений авторы стабилизирующих методов выделяют энергетические, поскольку, как показывает практика, именно стабилизация по энергии является наилучшим подспорьем в борьбе с ляпуновской неустойчивостью.

10.1.1. Неустойчивость кеплеровского движения

Рассмотрим две кеплеровские орбиты $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{\sim}$, которые отличаются друг от друга в некоторый начальный момент времени t_0 на малые векторные величины

$$\Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{\sim} \text{ и } \Delta\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0 - \dot{\mathbf{x}}_0^{\sim}.$$

Из формул задачи двух тел нетрудно показать, что с точностью до малых первого порядка отклонение $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\sim}$ будут удовлетворять оценке

$$\Delta\mathbf{x} = \frac{3}{2}\frac{\Delta H_K}{H_K}\dot{\mathbf{x}}\Delta t. \qquad (10.1)$$

Здесь $H_K = \text{const}$ – кеплеровская энергия, которая является интегралом орбиты $\mathbf{x}$ (для определенности); $\Delta H_K = H_K - \tilde{H_K} = \text{const}$ – разность кеплеровских энергий; $\Delta t = t - t_0$.

Если теперь одно из двух решений рассматривать как точное, скажем опорное $\tilde{\mathbf{x}}$, а другое, смежное $\mathbf{x}$, – как ошибочное, обусловленное ошибкой $\Delta\mathbf{x}_0$ в начальный момент времени, то формулу (10.1) можно использовать как оценку ошибки $\Delta\mathbf{x}$ ошибочного решения на любой другой момент времени.

Оценка (10.1) показывает, что эволюция $\Delta\mathbf{x}$ носит периодически вековой характер: в целом ошибка растет по величине со временем t, то локально увеличиваясь к перицентру, когда скорость и ускорение возрастают, то локально уменьшаясь к апоцентру, когда скорость и ускорение убывают. Также видно, что средняя скорость роста $\Delta\mathbf{x}$ явно зависит от относительной ошибки в среднем движении: чем меньше $\Delta H_K / H_K$, тем ниже скорость $\Delta\mathbf{x}$. Однако какой бы малой ни была ΔH_K, всегда наступит такой момент времени, когда $\Delta\mathbf{x}$ станет недопустимо большой. Собственно говоря, так обнаруживает себя ляпуновская неустойчивость.

Когда кеплеровская орбита интегрируется численно, ошибки, подобные $\Delta\mathbf{x}_0$ и $\Delta\dot{\mathbf{x}}_0$, возникают на каждом шаге интегрирования. Они, в свою очередь, отклоняют вычисляемую орбиту от интегральной поверхности, задаваемой энергией $\Delta\tilde{H_K}$ в фазовом пространстве координат и их производных. Это отклонение проявляет себя главным образом как линейный рост ΔH_K, но в соответствии с (10.1) это приводит к квадратичному росту $\Delta\mathbf{x}$.

Таким образом, для того чтобы ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на точность численного решения, необходимо тем или иным способом в процессе интегрирования производить искусственную коррекцию вычисляемых переменных, которая бы укладывала ошибочное решение на интегральную поверхность $H_K = H_K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ и тем самым бы уменьшала ΔH_K. В этом и состоит задача стабилизации.

10.1.2. Метод Баумгарта

Простой, но мощный метод стабилизации был предложен Й. Баумгартом (Baumgarte, 1973). Метод Баумгарта основан на идее искусственного введения в дифференциальные уравнения движения так называемых стабилизирующих (возмущающих) членов, компенсирующих отклонения численного (ошибочного) решения от некоторой опорной интегральной поверхности (точного решения). Практическое применение метода Баумгарта довольно широко и не ограничивается только задачами динамики. Рассмотрим метод на примере систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть система уравнений первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) \tag{10.2}$$

имеет интеграл

$$C(\mathbf{q}) = \mathrm{const}, \tag{10.3}$$

где $\mathbf{q}$ – вектор интегрируемых переменных; t – независимая переменная; $\mathbf{Q}$ – известная вектор-функция $\mathbf{q}$ и t.

Будем стабилизировать систему (10.2) по опорной интегральной поверхности, задаваемой уравнением

$$C(\mathbf{q}) = C^{\sim}, \tag{10.4}$$

причем $C(\mathbf{q}^{\sim}) \equiv C^{\sim}$ для точного решения $\mathbf{q}^{\sim}$.

Следуя Баумгарту, систему (10.2) после введения стабилизирующих членов можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Q} - \gamma \Delta C \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-2}, \quad \Delta C = C(\mathbf{q}) - C^{\sim}. \tag{10.5}$$

Здесь $\gamma \neq 0$ – так называемый стабилизирующий параметр, который выбирается опытным путем.

Полученные уравнения (10.5) особенны тем, что они асимптотически устойчивы по C, т.е. $\Delta C \to 0$ при $t \to \infty$ для любых $\mathbf{q}$. Иначе говоря, при любых ошибках интегрирования дифференци-

ального уравнения (10.5) его решение $\mathbf{q}$ будет всегда стремиться «лечь» на интегральную поверхность (10.4).

Использование интегралов в качестве дополнительной информации о численном решении иногда позволяет существенно ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на ошибки численного интегрирования. Однако в большинстве случаев применение интегральной стабилизации неэффективно, поскольку, очевидно, не все интегралы, даже если они имеются, хороши для стабилизации как средства борьбы с ляпуновской неустойчивостью, и это обстоятельство значительно ограничивает область применения интегральной стабилизации.

Тем не менее в небесной механике интегральная стабилизация надежно зарекомендовала себя как великолепное подспорье для решения многих прикладных задач, в том числе и спутниковых.

Пусть теперь система уравнений (10.2) возмущается некоторой функцией $\mathbf{P}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Q}(\mathbf{q},t) + \mathbf{P}(\mathbf{q},t). \tag{10.6}$$

В возмущенном случае опорное значение $C^{\sim}$ интегральной функции становится переменной и, как нетрудно показать, ее поведение будет описываться дифференциальным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}C^{\sim}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{P}\right). \tag{10.7}$$

Как и в невозмущенном случае, введем в систему (10.2) те же стабилизирующие члены, поскольку здесь они также будут удовлетворять условию асимптотической устойчивости по C.

Так как для вычисления стабилизирующих членов используется переменная $C^{\sim}$, стабилизация в этом случае предполагает включение уравнения (10.7) в возмущенную систему.

В результате стабилизированная система в возмущенном случае примет вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} - \gamma \Delta C \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-2},$$
$$\frac{\mathrm{d}C^{\sim}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{P} \right), \quad \Delta C = C(\mathbf{q}) - C^{\sim}. \tag{10.8}$$

С аналитической точки зрения при $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\sim}$ стабилизированная система (10.8) эквивалентна системе (10.6), так как $\Delta C = 0$. Однако, в отличие от последней, первая асимптотически устойчива по C. Это свойство дифференциальных уравнений весьма ценно при численном интегрировании, поскольку оно позволяет удерживать насаждаемое всевозможными ошибками численное решение около интегральной поверхности, учитывая при этом топологические свойства точного решения, тогда как численное интегрирование нестабилизированных уравнений сопровождается дрейфом ошибки от интегральной поверхности.

Говоря о начальных условиях стабилизированной системы, следует заметить только, что стартовое значение переменной $C^{\sim}$ задается по начальным значениям переменных $\mathbf{q}$: $C_0^{\sim} = C^{\sim}(\mathbf{q}_0)$.

Несмотря на то что после стабилизации уравнения становятся сложнее и требуют больше вычислительного времени, они могут значительно повысить оперативность интегрирования за счет своих замечательных свойств, так как стабилизация позволяет увеличить шаг интегрирования, сохраняя при этом точность численного решения.

10.1.3. Возмущенная задача двух тел

Рассмотрим стабилизацию Баумгарта на примере задачи двух тел, уравнения которой можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}. \tag{10.9}$$

В данном случае выберем энергию в качестве интеграла, по которому будем выполнять стабилизацию:

$$H_K = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|}. \tag{10.10}$$

Следуя Баумгарту, получим стабилизированную по энергии систему

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\mathbf{x}} - \gamma \Delta H_K \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2}, \\ \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{\mathbf{x}} - \gamma \Delta H_K \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2}, \end{aligned} \tag{10.11}$$

где $\Delta H_K = H_K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \tilde{H_K}$ – отклонение энергии, вычисляемой по формуле (10.10), от опорной $\tilde{H_K} = \mathrm{const}$, а

$$\ddot{\mathbf{x}} \equiv -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}.$$

Впрочем, сам Баумгарт изначально получил другие стабилизированные уравнения, на наш взгляд, более эстетичного вида. В качестве исходных он взял уравнения задачи, записанные в виде системы уравнений второго порядка:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}, \tag{10.12}$$

к которым и применил свою стабилизацию, изначально разработанную им как раз для подобного рода систем. В итоге он получил следующие стабилизированные по энергии уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} - \gamma \Delta H_K \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^2}. \tag{10.13}$$

В возмущенной задаче двух тел уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \tag{10.14}$$

где $U = U(\mathbf{x})$ – потенциальная функция консервативных возмущающих сил; $\mathbf{P}$ – неконсервативные силы, а в качестве интеграла примем полную энергию

$$H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} + U, \tag{10.15}$$

которая является интегралом системы в консервативной задаче.

После стабилизации уравнения возмущенной задачи (10.14) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{x}} - \gamma\Delta H \frac{\ddot{\mathbf{x}}_U}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}_U^2},\\
&\frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\mathbf{x}}_U + \mathbf{P} - \gamma\Delta H \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}_U^2},\\
&\frac{\mathrm{d}H^{\sim}}{\mathrm{d}t} = (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}),\\
&\Delta H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} + U - H^{\sim},
\end{aligned} \tag{10.16}$$

где

$$\ddot{\mathbf{x}}_U \equiv -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}.$$

Так же как и в невозмущенном случае, стабилизация применительно к системе уравнений второго порядка дает более компактные уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} - \gamma\Delta H \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2},\\
&\frac{\mathrm{d}H^{\sim}}{\mathrm{d}t} = (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}),\\
&\Delta H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} + U - H^{\sim}.
\end{aligned} \tag{10.17}$$

Безусловно, утверждение о ляпуновской устойчивости стабилизированной системы (10.16) весьма сомнительно. Это, вообще говоря, нужно доказывать. Но даже если после стабилизации система не становится устойчивой, то, по крайней мере, можно полагать, что при слабых возмущениях «остаточная» неустойчивость

будет мала в сравнении с устраняемой неустойчивостью. Очевидно, что эффективность применения стабилизированной системы тем выше, чем слабее влияние неконсервативных сил **P**.

Говоря о численных аспектах в применении стабилизированных уравнений на практике, необходимо отметить следующее. В уравнения движения искусственно вводятся возмущающие (стабилизирующие) члены, которые, очевидно, не рассматриваются в физической постановке задачи. В связи с этим встает вопрос об адекватности решения системы (10.16) реальному орбитальному движению, описываемому системой (10.14).

С вычислительной точки зрения, строго говоря, ни одна из систем не описывает адекватно реальное движение, так как их численное интегрирование сопровождается численными ошибками. В этом случае уместно говорить о степени неадекватности систем, сравнивая их решения с точным аналитическим.

Как показывает практика, численное интегрирование стабилизированной системы (10.16) обеспечивает устойчивое (невозрастающее) поведение ошибки в энергии и линейное в координатах, тогда как интегрирование соответствующей неустойчивой системы (10.14) приводит к линейному росту ошибки в энергии и квадратичному (суперлинейному) в координатах. Эти результаты согласуются с оценками (10.1).

Следует заметить, что поскольку стабилизация выполняется по энергии, то она обеспечивает сохранение только тех переменных, которые непосредственно связаны с энергией, таких как большая полуось, среднее движение или орбитальный период. В то же время введение в уравнения движения стабилизирующих возмущающих сил влечет дополнительные численные ошибки в других орбитальных элементах, которые, однако, не приводят к вековым ошибкам в координатах и их производных. Поэтому стабилизирующие преобразования целесообразно применять лишь при интегрировании на длительных интервалах времени от нескольких десятков орбитальных периодов и более, где явно раскрывается практическая ценность стабилизации.

Использование стабилизированной системы остается эффективным даже в случае, когда опорная энергия $H^{\sim}$ стартует от значения, которое лишь приближенно соответствует истинной энергии в начальный момент времени, т.е. $H^{\sim} \approx H(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$. Как было показано, постоянная ошибка ΔH приводит главным образом к линейному росту ошибки $\Delta\mathbf{x}$, и поэтому несоответствие между начальными значениями задаваемой и истинной энергией существенно не изменит характер поведения численной ошибки $\Delta\mathbf{x}$. Но все же случай равенства остается наиболее предпочтительным. В связи с этой особенностью стабилизированной системы (10.16) опорную величину $H^{\sim}$ можно рассматривать как самостоятельную переменную, не зависящую от начальных условий, а в невозмущенном случае – как параметр.

В этом смысле известные уравнения в кеплеровских элементах также стабилизированы, если интегрируемые переменные, непосредственно связанные с энергией, рассматривать как самостоятельные. В невозмущенном движении такие переменные обращаются в постоянные параметры. Тогда вся система уравнений становится устойчивой по всем интегрируемым переменным, за исключением энергетических. То же самое, например, можно сказать о системах теории Кустаанхеймо–Штифеля (Штифель, Шейфеле, 1975) или о системах уравнений Шперлинга–Боде (Silver, 1975).

10.2. Регуляризация уравнений движения. Преобразование Кустаанхеймо–Штифеля

Будем рассматривать движение материальной частицы массой m в поле тяготения центрального тела массой M под действием консервативных сил с потенциальной функцией V и неконсервативных сил $\mathbf{P}$. Тогда дифференциальные уравнения движения частицы в прямоугольной системе координат, связанной с центральным телом M, можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \qquad (10.18)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \tag{10.19}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор положения; t – физическое время; $\mu = k^2(M+m)$; k^2 – универсальная гравитационная постоянная; $V = V(\mathbf{x})$.

Уравнения (10.1) сингулярны в окрестности начала координат. Для орбит, имеющих большие эксцентриситеты, наличие особенности в начале координат приводит к сильным и неравномерным изменениям функций правых частей уравнений движения. При численном интегрировании такая неравномерность требует постоянного изменения шага интегрирования. Это снижает точность численного интегрирования и приводит к непроизводительным затратам машинного времени.

Регуляризировать уравнения движения и их решения позволяет преобразование Кустаанхеймо–Штифеля (KS) (Штифель, Шейфеле, 1975) вместе с временным преобразованием Сундмана $\mathrm{d}t = |\mathbf{x}|\,\mathrm{d}s$, осуществляющим переход к новой независимой переменной s, называемой фиктивным временем. Регуляризирующее преобразование Кустаанхеймо–Штифеля задает отображение физического пространства ($\mathbf{x}$) в четырехмерное KS-пространство ($\mathbf{u}$) и представляется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \tag{10.20}$$

где

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \tag{10.21}$$

– матрица KS-преобразования; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ – 4-мерный вектор положения в KS-пространстве. Причем для $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ справедливо соотношение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^2.$$

Необходимо заметить, что в (10.20) вектор $\mathbf{x}$ дополняется нулевой четвертой компонентой $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, 0)^T$.

В результате уравнения движения в новых переменных преобразуются к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mu - 2(\mathbf{u}', \mathbf{u}')}{2(\mathbf{u}, \mathbf{u})}\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right], \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s}. \tag{10.22}$$

Подставляя в (10.22) энергетическое соотношение

$$-H_K = \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} = \frac{\mu - 2(\mathbf{u}', \mathbf{u}')}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} > 0,$$

получим уравнения возмущенного гармонического осциллятора

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}s^2} - \frac{H_K}{2}\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right]. \tag{10.23}$$

Система (10.23) не замкнута, и ее следует дополнить дифференциальными уравнениями для энергии и времени

$$\frac{\mathrm{d}H_K}{\mathrm{d}s} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})\left(\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\right) - (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P})\right), \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}). \tag{10.24}$$

При исследовании возмущенного эллиптического движения удобнее в качестве независимой переменной рассматривать так называемую обобщенную эксцентрическую аномалию E.

Предполагая, что полная энергия

$$-H = \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V > 0,$$

переменную E введем с помощью дифференциального соотношения

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{2\omega}\mathrm{d}E, \tag{10.25}$$

где $\omega = \sqrt{-H/2}$ – частота системы. Замена независимой переменной приводит к новой системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2} + \frac{1}{2}\mathbf{u} = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left[V\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{P} + \frac{2\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}\right], \tag{10.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E} = -\frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{8\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}},\mathbf{P})\right), \tag{10.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E} = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{2\omega}. \tag{10.28}$$

Полученные таким образом уравнения и их решения полностью регулярны в окрестности соударения с центральным телом. При отсутствии возмущений решение в KS-пространстве представимо в форме

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\cos\frac{E}{2} + \boldsymbol{\beta}\sin\frac{E}{2},$$

где регулярные оскулирующие элементы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – векторные константы.

Скорость изменения функций правых частей в уравнениях (10.26), (10.28) можно понизить, перейдя с помощью известного метода вариации произвольных постоянных к уравнениям в регулярных элементах $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$. Принимая обозначение $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \omega)^T$, систему дифференциальных уравнений в регулярных элементах можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}E} = \mathbf{R}\left(\frac{E}{2}\right)\mathbf{Q}, \tag{10.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E} = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{2\omega} \tag{10.30}$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\beta}_0 = 2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}E}\right), \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_K^2 - V_0/2}, \tag{10.31}$$

где

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.32}$$

$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, Q_3)^T$ – вектор возмущений, компоненты которого $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ – четырехмерные векторы, а Q_3 – скаляр:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{Q}_2 = -\frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{4\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left[V\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{P} + \frac{2\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}\right], \qquad (10.33)$$

$$Q_3 = -\frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{8\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P})\right).$$

Точность численного интегрирования уравнения для быстрой переменной (10.30) чувствительна к значению эксцентриситета, поскольку величина t как функция E даже в невозмущенном движении может меняться сложным образом. Поэтому целесообразно использовать временной элемент τ, который изменяется почти линейно в слабовозмущенном движении и связан с физическим временем соотношением

$$t = \tau - \frac{1}{4\omega^2}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Дифференцируя правую и левую части этого соотношения и разрешая его относительно производной τ, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu - 2|\mathbf{x}|V + |\mathbf{x}|\left(\mathbf{x}, \mathbf{P} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right) - 4\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\right] \qquad (10.34)$$

с начальным условием

$$\tau_0 = \frac{1}{4\omega_0^2}(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) \quad (t_0 = 0). \qquad (10.35)$$

Численные эксперименты показывают, что в случае возмущенного эллиптического движения алгоритм с дифференциальным уравнением для временного элемента лучше по точности вычисления времени, чем алгоритм с дифференциальным уравнением времени.

Таким образом, система (10.29), (10.34) становится полностью нечувствительна к изменению эксцентриситета. Однако она по-

прежнему содержит уравнение для быстрой переменной, которое будет определять размер шага интегрирования.

Кроме того, очевидно, что при численном интегрировании на ЭВМ с ограниченной разрядной сеткой текущие вычисления неограниченно возрастающих величин типа τ за счет округления (усечения) производят неограниченно возрастающие ошибки, которые могут усиливаться ляпуновской неустойчивостью.

Кроме того, самостоятельной проблемой для всех перечисленных здесь вариантов регуляризированных уравнений является проблема точного выхода в физическое пространство на заданный момент физического времени.

Попытка решить проблему точного выхода в физическое пространство $\mathbf{x}$ на заданный момент физического времени t и одновременно устранить уравнение для быстрой переменной из интегрируемой системы была предпринята Н.А. Шарковским (Шарковский, 1990, 1998).

Подход Шарковского основан на использовании в качестве независимой переменной невозмущенной эксцентрической аномалии E_K и применении свойств матриц поворота $\mathbf{R}$ (10.32). (Здесь и далее индекс K обозначает переменные в кеплеровском движении.)

Переход к новой независимой переменной осуществляется с помощью преобразования

$$\mathrm{d}E = (1+\varepsilon)\,\mathrm{d}E_K, \quad \varepsilon = \frac{|\mathbf{x}_K|\,\omega}{|\mathbf{x}|\,\omega_K} - 1. \tag{10.36}$$

Тогда уравнения (10.29), (10.30) преобразуются к виду

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}E_K} = (1+\varepsilon)\mathbf{R}\left(\frac{E}{2}\right)\mathbf{Q}, \tag{10.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E_K} = (1+\varepsilon)\frac{|\mathbf{x}|}{2\omega} = \frac{|\mathbf{x}_K|}{2\omega_K}. \tag{10.38}$$

Уравнение (10.38) интегрируется в квадратурах

$$t - t_0 = \frac{\mu}{8\omega_K^3}\left(E_K - \sin E_K\right) + |\mathbf{x}_0|\left[\frac{\sin E_K}{2\omega_K} + \frac{(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)}{|\mathbf{x}_0|}\frac{1-\cos E_K}{4\omega_K^2}\right], \tag{10.39}$$

что позволяет исключить его из системы дифференциальных уравнений, решаемой численно, или, иначе говоря, понизить порядок системы. Правые части уравнений (10.37) еще зависят от E. Чтобы привести их к зависимости от новой переменной E_K, воспользуемся основными свойствами ортогональных матриц $\mathbf{R}$, согласно которым для любых вещественных значений φ и ψ:

$$\mathbf{R}(\varphi+\psi)=\mathbf{R}(\varphi)\mathbf{R}(\psi), \quad \mathbf{R}^T(\varphi)=\mathbf{R}^{-1}(\varphi).$$

Применяя эти свойства к уравнениям (10.37) и предполагая, что $E=E_K+\delta E$ (δE – отклонение возмущенной эксцентрической аномалии от невозмущенной), приведем их к виду

$$\mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}E_K}=(1+\varepsilon)\mathbf{R}\left(\frac{E_K}{2}\right)\mathbf{Q}. \qquad (10.40)$$

Преобразуем левые части уравнений (10.40):

$$\mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}E_K}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_K}\left[\mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right)\mathbf{q}\right]-\mathbf{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_K}\left[\mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_K}\left[\mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right)\mathbf{q}\right]+\frac{1}{2}\mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right)\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{I},$$

где

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначая $\mathbf{R}^T\left(\delta E/2\right)\mathbf{q}$ через $\mathbf{q}^*$, получим следующую окончательную систему:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}^*}{\mathrm{d}E_K}+\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{I}\mathbf{q}^*=(1+\varepsilon)\mathbf{R}\left(\frac{E_K}{2}\right)\mathbf{Q}$$

с начальными условиями (10.31).

Алгоритм Шарковского был апробирован в задачах динамики близких спутников планет (Шарковский, 1998) и зарекомендовал себя как высокоэффективный по точности вычислений и быстродействию.

10.3. Метод Энке

Эффективность численных алгоритмов можно повысить, если вместо отклонений действительных координат от заданных начальных значений (иначе говоря, просто координат) интегрировать отклонения от их аналогов на некоторой промежуточной (опорной) орбите, используя при этом априорные сведения о характерных свойствах исследуемого движения. Впервые такой подход была предложен немецким астрономом И.Ф. Энке для исследования кометных орбит (Encke, 1852).

Основная идея метода Энке состоит в том, чтобы подобрать такую опорную орбиту, которая в течение длительного времени была бы близка к реальной эволюционирующей орбите. Для отклонений координат реальной орбиты от соответствующих величин на опорной траектории составляется система дифференциальных уравнений, которая затем интегрируется численными методами.

Таким образом, метод Энке нацелен на то, чтобы получить такие дифференциальные уравнения, численное интегрирование которых не требовало бы вычислительных операций с большими величинами, которые, как известно, обременены большими ошибками округления. Представим классическое изложение метода.

10.3.1. Классический метод Энке

Пусть движение объекта описывается уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}=-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{P} \tag{10.41}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(t_0),\quad \dot{\mathbf{x}}_0=\dot{\mathbf{x}}(t_0). \tag{10.42}$$

Для получения своих уравнений в качестве промежуточной Энке использовал оскулирующую кеплеровскую орбиту, удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_K}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K=\mathbf{0}. \tag{10.43}$$

Поскольку промежуточная орбита в момент времени t_0 оскулирует реальную орбиту, то начальные условия уравнений (10.43) будут совпадать с условиями (10.42):

$$\mathbf{x}_{0K} = \mathbf{x}_K(t_0) = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_{0K} = \dot{\mathbf{x}}_K(t_0) = \dot{\mathbf{x}}(t_0). \tag{10.44}$$

Пусть $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_K$ – изохронные отклонения действительных координат от их аналогов на промежуточной орбите. Тогда дифференциальные уравнения для отклонений запишутся как

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{x}_K}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} + \frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \tag{10.45}$$

а начальные условия примут тривиальный вид

$$\delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}. \tag{10.46}$$

Отклонения $\delta\mathbf{x}$ можно получить непосредственным интегрированием системы (10.45). Кеплеровский член $\mu\mathbf{x}_K / r_K^3$ определен заранее из аналитического решения $\mathbf{x}_K$ задачи двух тел, а $\mu\mathbf{x}/r^3$ и правая часть уравнений являются функциями действительных координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}$ и времени t. Таким образом, система (10.45) самодостаточна и пригодна для использования.

Вблизи эпохи оскуляции $\delta\mathbf{x}$ – малые величины. Кеплеровские члены в уравнениях (10.45), как правило, существенно больше. Поэтому их малая разность будет вычисляться с неудовлетворительной точностью. Й.Ф. Энке предложил прием, устраняющий эту трудность, и тем самым повысил практическую ценность своего метода.

Преобразуем разность кеплеровских членов к виду

$$\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}-\frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K=\frac{\mu}{r_K^3}\left(\frac{r_K^3}{r^3}\mathbf{x}-\mathbf{x}+\mathbf{x}-\mathbf{x}_K\right)= \\ =\frac{\mu}{r_K^3}\left(\left(\frac{r_K^3}{r^3}-1\right)\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\right). \tag{10.47}$$

Поскольку

$$r^2=(\mathbf{x},\mathbf{x})=(\mathbf{x}_K+\delta\mathbf{x},\mathbf{x}_K+\delta\mathbf{x})=r_K^3+2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x}),$$

то

$$\frac{r^2}{r_K^2}=1+\frac{2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x})}{r_K^2}.$$

Положим, что

$$2q\equiv\frac{2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x})}{r_K^2}, \tag{10.48}$$

тогда

$$\frac{r^2}{r_K^2}=1+2q \quad\Rightarrow\quad \frac{r_K^3}{r^3}-1=(1+2q)^{-3/2}-1\equiv f(q)q.$$

Разложение в ряд функции f по степеням q дает

$$f(q)=-3+\frac{15}{2}q-\frac{105}{6}q^2+\ldots \tag{10.49}$$

В итоге уравнения Энке принимают окончательный вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}\,t^2}+\frac{\mu}{r_K^3}(fq\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})=-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P} \tag{10.50}$$

с начальными условиями

$$\delta\mathbf{x}_0=\mathbf{0},\quad \delta\dot{\mathbf{x}}_0=\mathbf{0}, \tag{10.51}$$

где f с заданной точностью определяется конечной суммой ряда (10.9).

Неудобство использования полученных уравнений заключается в том, что f в процессе интегрирования вычисляется приближенно. Однако существуют способы, позволяющие вычислять разность кеплеровских членов без использования рядов.

Представим разность кеплеровских членов в виде

$$\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}-\frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K=\frac{\mu}{r^3}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_K+\mathbf{x}_K-\frac{r^3}{r_K^3}\mathbf{x}_K\right)=$$

$$=\frac{\mu}{r^3}\left(\delta\mathbf{x}-\left(\frac{r^3}{r_K^3}-1\right)\mathbf{x}_K\right).$$

Имеем

$$r^2-r_K^2=2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x}).$$

Расписывая разность квадратов и разрешая относительно разности радиусов, получим

$$r-r_K=\frac{2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x})}{r+r_K}.$$

Тогда

$$\frac{r}{r_K}=1+\frac{2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x})}{r_K(r+r_K)}\equiv 1+d$$

и

$$\frac{r^3}{r_K^3}-1=(1+d)^3-1=d(3+3d+d^2)\equiv D.$$

После соответствующей замены получаем уравнения Энке в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{r^3}(\delta\mathbf{x}-D\mathbf{x}_K)=-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}. \qquad (10.52)$$

10.3.2. Обобщение метода Энке

Таким образом, метод Энке формально реализуется по следующей схеме.

Предположим, что движение небесного тела описывается системой уравнений первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{Q}(\mathbf{q},t),\quad \mathbf{q}_0=\mathbf{q}(t_0). \qquad (10.53)$$

В пространстве $\mathbf{q}$ выбирается опорная промежуточная орбита $\mathbf{q}_K = \mathbf{q}_K(t)$, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}_K}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K, t), \quad \mathbf{q}_{K0} = \mathbf{q}_K(t_0). \tag{10.54}$$

Прямым вычитанием уравнений (10.53) из (10.54) получаем уравнения для отклонений $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_K$:

$$\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_K + \delta\mathbf{q}, t) - \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K, t), \quad \delta\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0) - \mathbf{q}_K(t_0). \tag{10.55}$$

Если удается в $\mathbf{Q}$ явно выделить невозмущенную $\mathbf{Q}_K$ и возмущенную $\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_K$ части, путем соответствующих преобразований решается проблема вычитания близких величин

$$\mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K + \delta\mathbf{q}, t) - \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K, t). \tag{10.56}$$

Следуя терминологии С. Херрика, разность (10.56) будем называть членом Энке.

Вблизи эпохи оскуляции возмущения $\delta\mathbf{q}$ малы, но со временем возрастают. На достаточно длинных интервалах времени они увеличиваются настолько, что член Энке становится сравнимым с возмущающими членами. В этом случае прибегают к процедуре исправления орбиты путем перевычисления параметров опорного движения на новую эпоху t_1. Параметры $\mathbf{q}_K(t_1)$ определяются из текущих значений $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_K(t_1) + \delta\mathbf{q}(t_1)$ до исправления, а в качестве критерия переопределения параметров рассматривается величина члена Энке.

Причиной возрастания $\delta\mathbf{q}$, очевидно, является неточное представление движения промежуточной орбитой, которое, кроме того, усиливается неустойчивостью движения. Представление можно улучшить путем вариации параметров промежуточной орбиты таким образом, чтобы на длительном интервале времени она учитывала основные тенденции динамической эволюции. Другой подход, более фундаментальный, состоит в поиске новых математических моделей для конструирования промежуточных орбит.

10.3.3. Уравнения Энке в переменных Кустаанхеймо–Штифеля

Метод Энке в KS-интерпретации имеет разнообразные преимущества. Во-первых, благодаря линейности исходных уравнений в KS-переменных преобразование Энке не требует специальных алгебраических действий для устранения вычитаний близких по значению величин. Во-вторых, как будет продемонстрировано ниже, в результате преобразования формульный вид дифференциальных уравнений принципиально не меняется. В частности, уравнения в отклонениях, описывающие движение в KS-пространстве, сохраняют вид уравнений возмущенного гармонического осциллятора. В-третьих, опорное решение выражается явно через независимую переменную, обобщенную эксцентрическую аномалию.

Для конструирования дифференциальных уравнений Энке примем в качестве промежуточной орбиты невозмущенное решение системы (10.26)–(10.28). В этом случае V и $\mathbf{P}$ равны нулю, и дифференциальные уравнения движения принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}_K}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}\mathbf{u}_K=\mathbf{0},\quad \frac{\mathrm{d}\omega_K}{\mathrm{d}E}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\tau_K}{\mathrm{d}E}=\frac{\mu}{8\omega_K^3}. \tag{10.57}$$

Решение системы (10.57) имеет простую форму

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_K&=\boldsymbol{\alpha}_K\cos\frac{E}{2}+\boldsymbol{\beta}_K\sin\frac{E}{2},\\ \omega_K&=\omega_0,\quad \tau_K=\frac{\mu}{8\omega_K^3}E+\tau_0,\end{aligned} \tag{10.58}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_K,\boldsymbol{\beta}_K$ – векторные константы, определяемые из начальных данных, а ω_0,τ_0 – начальные значения для ω и τ.

Следовательно, уравнения в возмущениях относительно решения (10.58) запишутся в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}\delta\mathbf{u}=\frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left(-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right)-\frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}E}, \tag{10.59}$$

$$\delta\mathbf{u}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_K=\delta\boldsymbol{\alpha}\cos\frac{E}{2}+\delta\boldsymbol{\beta}\sin\frac{E}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta\omega}{\mathrm{d}\,E} = -\frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{8\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}},\mathbf{P})\right), \tag{10.60}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta\tau}{\mathrm{d}\,E} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu\left(1-\frac{\omega^3}{\omega_K^3}\right) - 2rV + r\left(\mathbf{x},\mathbf{P} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)\right] - \frac{2}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,E}\left(\mathbf{u},\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{u}}{\mathrm{d}\,E}\right), \tag{10.61}$$

$$\delta\omega = \omega - \omega_K, \quad \delta\tau = \tau - \tau_K.$$

Член Энке в (10.61) как разность кубов легко выражается через малую величину $\delta\omega$:

$$1 - \frac{\omega^3}{\omega_K^3} = -\frac{\delta\omega}{\omega_K}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_K}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_K}\right) + 1\right].$$

Интересная особенность KS-возмущений состоит в том, что они не изохронны. Независимая переменная E в регулярных уравнениях является аналогом возмущенной эксцентрической аномалии, а в невозмущенном случае с точностью до постоянной фазы совпадает с кеплеровской. Как и любая аномалия в орбитальном движении, эксцентрическая указывает на местоположение объекта на орбите. Следовательно, отнесенные к аномалии E возмущения становятся изотопными[3].

Благодаря устойчивости решения KS-системы по координатам $\mathbf{u}$ отклонения $\delta\mathbf{u}$ в слабовозмущенном движении остаются малыми на достаточно длительных интервалах времени, в связи с чем реже возникает необходимость исправлять орбиту $\mathbf{u}_K$. Между тем известно, что решение $\tau = \tau(E)$ неустойчиво. Поэтому независимо от малости возмущающих факторов с течением E отклонения $\delta\tau$ неограниченно возрастают и промежуточное решение τ_K требует периодического переопределения.

В данном разделе уместно отметить еще один очевидный, но важный аспект в методе Энке, который проявляет себя в случае применения метода к системам, подобно рассмотренной выше, с быстроменяющимися и неограниченно возрастающими перемен-

[3] От греч.: isos – равный и topos – место.

ными. Такие переменные, как правило, выражаются в виде различных комбинаций долгот и аномалий либо времени и временных элементов. Соответственно их уравнения описывают саму динамику тела на орбите. Именно эти уравнения и задают шаг интегрирования при численном решении всей системы в целом.

При удачном выборе опорного движения метод Энке приводит к возмущениям, которые, как правило, малы. Для возмущений в указанных переменных это также справедливо. Интегрирование малых возмущений допускает большой шаг интегрирования, за счет чего, помимо точности, повышается оперативность вычислений.

10.3.4. Метод Энке как метод приведения систем к стандартному виду

В своей монографии А. Рой (1981) привел уравнения возмущенного движения, выражаясь языком Н.Н. Боголюбова, к стандартному виду, где применил метод Энке, преобразовав уравнение истинной долготы λ к уравнению для ее возмущения $\delta\lambda$:

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta\lambda}{\mathrm{d}\,t} = \frac{c}{r^2} - \frac{c_K}{r_K^2} + \frac{c_1\dot{c}_2 - c_2\dot{c}_1}{c(c+c_3)}. \qquad (10.62)$$

В уравнении c, c_1, c_2, c_3 – соответственно величина и компоненты момента количества движения.

Остановимся на случае, когда время t выступает как зависимая переменная от эксцентрической аномалии E. Рассмотрим метод Энке на примерах KS-системы и системы, записанной в кеплеровских элементах.

В регулярной KS-системе уравнение времени имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,E} = \frac{r}{2\omega}. \qquad (10.63)$$

В невозмущенном движении связь между кеплеровской эксцентрической аномалией и временем задается с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}t} = \frac{2\omega_K}{r_K}. \tag{10.64}$$

Введем обозначение: $\delta E = E - E_K$ и $\delta r = r - r_K$. Учитывая (10.63) и (10.64), производная для δE выразится как

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E} = 1 - \frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}E} = 1 - \frac{\omega_K r}{r_K \omega} = \frac{\delta\omega}{\omega} - \frac{\delta r}{r_K}\frac{\omega_K}{\omega}.$$

Таким образом, уравнение для δE запишется в виде

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E} = \frac{\delta\omega}{\omega} - \frac{\delta r}{r_K}\frac{\omega_K}{\omega}. \tag{10.65}$$

В (10.65) $\delta\omega$ определяется из уравнения (10.60), а δr вычисляется по формуле

$$\delta r = r - r_K = (\mathbf{u},\mathbf{u}) - (\mathbf{u}_K,\mathbf{u}_K) = 2(\mathbf{u}_K,\delta\mathbf{u}) + (\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}).$$

Поправка за возмущение δE однозначно задает время. Действительно, имея δE в шкале E, всегда можно определить кеплеровскую аномалию как $E_K = E - \delta E$. Уравнение (10.64) интегрируется аналитически, а его решение представляет собой известное уравнение Кеплера $t = t(E_K)$, которое точно задает связь между временем и аномалией. Следовательно, уравнение времени (10.63) можно заменить уравнением для возмущения независимой переменной (10.65), не нарушая тем самым достаточности системы.

Аналогичный прием можно повторить применительно к системам в кеплеровских элементах. Запишем уравнение времени в виде

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E} = \frac{R}{n+\nu}, \tag{10.66}$$

где $R = 1 - e\cos E$; n – среднее движение, а

$$\nu = \left(\sin v \sin E + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\cos v - 2e\frac{r}{p}\right)\right)\tilde{S} +$$

$$+\left(\sin E(\cos v + \cos E) - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin v \right)\tilde{T},$$

где v – истиная аномалия; p – фокальный параметр;

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T,$$

а S и T – радиальная и трансверсальная составляющие возмущающих ускорений соответственно.

Уравнение кеплеровской аномалии примет вид

$$\frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}t} = \frac{n_K}{R_K}. \tag{10.67}$$

Введем обозначения: $\delta n = n - n_K$ и $\delta R = R - R_K$. Дифференцирование δE дает уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E} = 1 - \frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}E} = 1 - \frac{Rn_K}{R_K(n+\nu)} = \frac{\delta n + \nu}{n+\nu} - \frac{\delta R n_K}{R_K(n+\nu)},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E} = \frac{\delta n + \nu}{n+\nu} - \frac{\delta R n_K}{R_K(n+\nu)}. \tag{10.68}$$

В (10.68) δR вычисляется по формуле

$$\delta R = 2e_K \cos E_K \sin^2 \delta E / 2 - \delta e \cos E_K \cos \delta E + e \sin E_K \sin \delta E,$$

а для определения δn и δe можно воспользоваться уравнениями возмущенного движения, записанными для этих отклонений.

10.3.5. Уравнения Энке в задачах спутниковой динамики

В классическом методе Энке в качестве опорной используется орбита невозмущенной задачи двух тел. В последнее время предпринимались попытки усовершенствовать метод Энке путем использования лучшей опорной орбиты.

У.Т. Кайнер и М.М. Беннет (1966) показали, что при интегрировании уравнений движения низкого спутника Земли метод Энке можно улучшить, если при построении опорной траектории учесть эффект первого порядка от сжатия Земли.

В основе построения любых промежуточных решений для метода Энке лежат геометрические и динамические свойства орбит,

которые могут быть известны заранее. Именно это обеспечивает им практическую ценность в тех или иных задачах численного исследования. Но, к сожалению, чаще всего до интегрирования нам мало что известно об исследуемом движении не только в количественном, но даже в качественном аспекте.

Весьма полезными для построения промежуточных решений могут быть некоторые задачи, имеющие аналитическое решение в частных случаях. Рассмотрим данный подход на примере спутников, движущихся по почти круговым экваториальным орбитам, как, например, геосинхронные ИСЗ.

Как уже отмечалось выше, в своем движении ИСЗ испытывают действия двух основных факторов: силы притяжения массы центральной планеты, определяющей кеплеровское движение, и гравитационное влияние ее экваториального утолщения за счет сжатия. Причем для ИСЗ фактор сжатия вносит настолько существенный вклад в возмущения их кеплеровских орбит, что использование решения задачи двух тел для предсказания положений спутников становится неприемлемым уже на малых интервалах времени.

Движение рассматриваемого спутника в поле тяготения сжатой планеты можно с высокой точностью интерпретировать общей задачей двух неподвижных центров, которая имеет аналитическое решение в замкнутых формулах. В общем случае для обеспечения высокой точности и малости возмущений именно это решение и целесообразно принять в качестве промежуточного. Однако на практике использование такой достаточно «тяжеловесной» теории для построения опорных решений является весьма нерациональным.

Намек на изящное решение данной проблемы сформулирован С. Херриком (1978) в следующем тезисе: «Увеличение центральной силы или массы уменьшает возмущения, поскольку произвольная часть членов высокого порядка переходит в члены, определяемые задачей двух тел». В самом деле, ведь фактор сжатия в динамике близких спутников можно трактовать как «эффект дополнительной массы» центральной планеты. Поэтому для постро-

ения опорных решений здесь достаточно использовать кеплеровскую теорию с модифицированным гравитационным параметром.

Изложенную идею легко продемонстрировать на примере уравнений в прямоугольных координатах. Для этого предварительно рассмотрим одну простую задачу.

Пусть спутник движется в экваториальной плоскости центральной планеты по круговой орбите. Тогда $x_3 = 0$ и

$$V = V(r) = -\frac{\lambda}{2r^3},$$

где $\lambda = \mu J_2 b^2$; J_2 – коэффициент второй зональной гармоники; b – экваториальный радиус планеты, а дифференциальные уравнения движения можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} = -\frac{3}{2}\frac{\lambda}{r^5}\mathbf{x}. \tag{10.69}$$

Группируя коэффициенты при кеплеровском множителе, получим

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{J_2 b^2}{r^2}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{10.70}$$

Таким образом, круговое движение экваториального спутника в поле тяготения сжатой планеты описывается уравнениями задачи двух тел с видоизмененным (увеличенным) гравитационным параметром.

Интересно также заметить, что идея Херрика (1978) была заимствована из общей теории возмущений. В терминологии кеплеровских элементов «эффект дополнительной массы» интерпретируется как наличие в среднем движении постоянных возмущений порядка малости J_2 или, что то же самое, вековых возмущений в средней аномалии.

Получим уравнения Энке относительно промежуточной орбиты Херрика в KS-переменных, принимая во внимание все их преимущества с практической точки зрения.

В терминологии KS-переменных «эффект дополнительной массы» равносилен повышению частоты в KS-пространстве и умень-

шению физического периода, что непосредственно следует из получаемых уравнений.

Согласно принятым условиям задачи, дифференциальные уравнения движения в KS-переменных можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}\mathbf{u}=-\frac{1}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(rV), \tag{10.71}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}=0, \tag{10.72}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}E}=\frac{1}{8\omega^3}\left[\mu-\frac{\partial}{\partial r}(r^2V)\right]. \tag{10.73}$$

Вычисляя частные производные, преобразуем дифференциальные уравнения (10.71) и (10.73) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}\mathbf{u}=-\frac{\lambda}{8\omega^2r^3}\mathbf{u}, \tag{10.74}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}E}=\frac{1}{8\omega^3}\left[\mu-\frac{\lambda}{2r^2}\right].$$

В круговом движении

$$r=\frac{\mu}{4\omega^2}. \tag{10.75}$$

Подставим соотношение (10.75) в дифференциальные уравнения (10.74) и введем новое обозначение

$$\Phi=\frac{(2\omega)^4\lambda}{2\mu^3}. \tag{10.76}$$

Тогда уравнения движения можно привести к невозмущенной форме с измененной частотой и периодом:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}(1+4\Phi)\mathbf{u}=\mathbf{0}, \tag{10.77}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}E}=\frac{\mu}{8\omega^3}\left[1-\Phi\right].$$

Таким образом, как показывают уравнения, сжатие центральной планеты в KS-пространстве (как и в физическом) изменяет ча-

стоту движения экваториального спутника и его период. При увеличении сжатия, определяемого величиной J_2, частота увеличивается, а период соответственно уменьшается.

Решение (10.77) представимо в форме

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\cos\varphi + \boldsymbol{\beta}\sin\varphi, \quad \varphi = \sqrt{\frac{1+4\Phi}{4}}E,$$

$$\omega = \omega_0, \quad \tau = \frac{\mu}{8\omega^3}\left[1-\Phi\right]E + \tau_0.$$

Очевидно, что решение полученных уравнений может достаточно хорошо представлять движение экваториальных спутников с почти круговыми орбитами (в особенности ИСЗ, когда величина Φ существенно изменяет частоту движения). Исходя из этого, в алгоритмах типа Энке при исследовании движения данных объектов именно это решение целесообразно использовать в качестве опорного вместо кеплеровского.

На основе нового опорного решения уравнения Энке в отклонениях KS-переменных для случая консервативных сил принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2} + \frac{1}{4}(1+4\Phi)\delta\mathbf{u} = -\frac{1}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(rV) + \Phi\mathbf{u}, \qquad (10.78)$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta\omega}{\mathrm{d}E} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\delta\tau}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{8\omega^2}\left[\mu\Phi - \frac{\partial}{\partial r}(r^2V)\right],$$

а в общем случае

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2} + \frac{1}{4}(1+4\Phi)\delta\mathbf{u} = \frac{r}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left(-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}} + \mathbf{P}\right) - \frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2} - \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}E} + \Phi\mathbf{u},$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta\omega}{\mathrm{d}E} = -\frac{r}{8\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}},\mathbf{P})\right), \qquad (10.79)$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta\tau}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu\left(1-\frac{\omega^3}{\omega_K^3}\right)[1-\Phi] + \mu\Phi - 2rV + r\left(\mathbf{x},\mathbf{P}-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}\right)\right] -$$

$$-\frac{2}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}\left(\mathbf{u},\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}E}\right).$$

Появление в уравнениях Энке (10.79) членов с Φ-множителем влечет за собой вычитания величин типа

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}\mathbf{u}+\Phi\mathbf{u},\quad \mu\Phi-\frac{\lambda}{2r^2}$$

или

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}\mathbf{u}+\frac{\lambda}{8\omega_K^2\overline{r}^3}\mathbf{u},\quad \frac{\lambda}{2\overline{r}^2}-\frac{\lambda}{2r^2}, \tag{10.80}$$

где

$$\overline{r}=\mu/4\omega^2,$$

которые при вычислении правых частей дифференциальных уравнений приводят к существенной потере точности. С помощью несложных алгоритмических выкладок разности (10.80) можно привести к выражениям с членами, пропорциональными известным малым величинам, и избежать, таким образом, «опасных» вычитаний:

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}\mathbf{u}+\frac{\lambda}{8\omega_K^2\overline{r}^3}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}\Phi}{(1+\Delta\omega)^2}\left[3\Delta r-3(\Delta r)^2+(\Delta r)^3+2\Delta\omega+(\Delta\omega)^2\right], \tag{10.81}$$

$$\frac{\lambda}{2\overline{r}^2}-\frac{\lambda}{2r^2}=\mu\Phi\left[2\Delta r-(\Delta r)^2\right].$$

Здесь $\Delta r=(r-\overline{r})/r$, а $\Delta\omega=\delta\omega/\omega_K$. Во избежание потери точности при прямом вычитании $r-\overline{r}$ величину Δr следует вычислять по следующей формуле:

$$\Delta r=\frac{\delta r+r_K-\overline{r}}{r},$$

где разность $r_K-\overline{r}$ задается с помощью аналитического выражения

$$r_K-\overline{r}=|\alpha_K|^2-\overline{r}+(2(\alpha_K,\beta_K)\cos\varphi+(|\alpha_K|^2-|\beta_K|^2)\sin\varphi)\sin\varphi.$$

10.4. Метод вариации постоянных

В методе вариации произвольных постоянных орбита представляется в невозмущенном виде, где орбитальные параметры (элементы) рассматриваются как переменные. В соответствии с формой представления орбиты составляются дифференциальные уравнения для орбитальных параметров, которые затем интегрируются приближенными методами. Следует заметить, что методику Лагранжа можно применять не только к постоянным параметрам, но и к различным переменным функциям этих параметров и времени.

В случае гладких возмущений параметры – медленноменяющиеся переменные, поэтому их уравнения при использовании численных методов будут интегрироваться гораздо эффективнее, нежели классические уравнения.

С вычислительной точки зрения уравнения в кеплеровских элементах (см. гл. 3) неудобны тем, что они довольно сложны и содержат много тригонометрических функций и, кроме того, имеют особенность для нулевых наклонений и эксцентриситетов. Чтобы обойти эти недостатки, А. Рой предложил в качестве орбитальных параметров рассматривать момент количества движения $\mathbf{c}$, вектор Лапласа $\mathbf{g}$ и истинную долготу $\lambda = v + \Omega + \omega$. Их уравнения можно записать в виде (Рой, 1981):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x} \times \mathbf{P}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{P} \times \mathbf{c} + \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{c}}, \quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{c_1\dot{c}_2 - c_2\dot{c}_1}{|\mathbf{c}|(|\mathbf{c}| + c_3)}. \qquad (10.82)$$

Система (10.82) имеет серьезный недостаток, который проявляется главным образом при интегрировании сильновытянутых орбит. Последнее уравнение в (10.82) сингулярно в начале координат, что приводит к эксцентричному поведению его правой части. Чтобы разрешить эту трудность, достаточно заменить λ на среднюю долготу $l = M + \Omega + \omega$, которая в слабовозмущенном движении меняется почти линейно.

10.5. Исследование эффективности методов теории специальных возмущений в задачах динамики ИСЗ

Выше были изложены основополагающие идеи и принципы построения методов теории специальных возмущений, а также обосновано их применение к решению прикладных задач спутниковой динамики. Далее дается сравнительный анализ эффективности некоторых методов применительно к численному моделированию спутниковых орбит.

10.5.1. Численный эксперимент

Численная эффективность методов теории специальных возмущений (табл. 10.1) исследовалась на примере моделирования движения близкого и геосинхронного спутников (табл. 10.2). В табл. 10.1 также приводятся ссылки на уравнения методов; G – соответствующие интегрируемым переменным обозначения для характеристик численной эффективности методов на приводимых ниже рисунках, а N – число интегрируемых уравнений.

Следует заметить, что в методах Энке опорные решения перевычислялись через каждые 2 оборота. В табл. 10.2 T, e и i – период, эксцентриситет и наклонение исследуемых орбит соответственно (наклонения для спутников даны относительно экватора Земли). В задачах учитывались следующие возмущающие факторы: влияние несферичности центрального тела и лунно-солнечные притяжения. Другие возмущающие факторы не рассматривались ввиду их незначительного влияния на эффективность численного моделирования. Для интегрирования уравнений движения был использован широко известный среди небесных механиков метод Эверхарта (1974), разработанный автором специально для численного моделирования орбит.

Таблица 10.1

Методы теории специальных возмущений

Переменные	G	Ссылка	N	Переменные	G	Ссылка	N
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ (t)	$\mathbf{x}$		6	$\mathbf{c}, \mathbf{g}, l$ (t)	$\mathbf{ry}$	(10.82)	7
$\delta\mathbf{x}, \delta\dot{\mathbf{x}}$ (t)	$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$	(10.52)	6	$\mathbf{u}, \mathbf{u}', h, \tau$ (E)	$\mathbf{u}$	(10.26, 27, 34)	10
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, h$ (t)	$\mathbf{st}$	(10.17)	7	$\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}', \delta h, \delta\tau$ (E)	$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$	(10.59–61)	10

Таблица 10.2

Орбиты спутников

Объект	Центр	T (сут)	e	i (°)	Интервал (г.,об.)	
300 км	Земля	0,063	0,000	50,0	0,038	222
ГСС	Земля	0,997	0,010	10,0	40	14600

Низколетящий ИСЗ (с высотой 300 км) – это быстрый околоземный объект. Всего за 2 недели он совершает 222 оборота. Именно на этом интервале мы и рассматривали его орбитальное движение: во-первых, нас интересовала целесообразность использования исследуемых методов на таком интервале времени применительно к интегрированию довольно гладкой орбиты; во-вторых, рассматривать движение низких спутников на более длительном временном интервале просто не имеет смысла, поскольку он довольно часто подвергается орбитальной коррекции за уменьшение его высоты вследствие сопротивления атмосферы. При этом ввиду незначительного влияния на эффективность численного интегрирования сопротивление атмосферы мы все же не учитывали.

Геосинхронный объект интересовал нас лишь как представитель наиболее загрязненной области околоземного пространства, как один из многочисленных фрагментов космического мусора. Его динамика моделировалась на 40-летнем временном интервале, фактически соизмеримом с эрой освоения (и загрязнения) космоса.

10.5.2. Характеристики эффективности численного интегрирования

Для оценки точности интегрирования варьировался параметр интегратора L (Everhart, 1974) и по решению с большим параметром оценивалась глобальная ошибка решения с меньшим параметром. Быстродействие численного интегрирования оценивалось по числу выполненных шагов. В результате для каждой системы интегрируемых уравнений были получены зависимости точности интегрирования от быстродействия, по которым анализировали эффективность методов теории специальных возмущений.

Следует заметить, что оценка быстродействия по числу шагов интегрирования здесь вполне обоснована. Конечно, предлагаемые методы усложняют уравнения орбитального движения, что естественно сказывается на времени вычисления их правых частей. Поэтому, казалось бы, каждый шаг интегрирования для разных систем должен быть по-разному трудоемок. Тем не менее нельзя забывать, что подавляющая часть времени в современных моделях тратится на вычисление возмущающей функции $\mathbf{P}$, которая без изменения присутствует во всех рассматриваемых нами системах; и все артефакты, появляющиеся в уравнениях после преобразований, просто меркнут на фоне конгломерата $\mathbf{P}$. Поэтому для оценки быстродействия в нашем анализе эффективности методов достаточно знать лишь число обращений к $\mathbf{P}$ либо пропорциональное ему число шагов, выполненных за весь процесс интегрирования.

10.5.3. Численные результаты

Характеристики точность–быстродействие приведены на рис. 10.1 и 10.2. Для оценки значимости ошибок интегрирования на рисунках пунктирными линиями приведены два уровня: один соответствует величине большой полуоси орбиты (a), второй – приблизительно односекундной угловой ошибке относительно земного наблюдателя (1").

Полученные результаты говорят о том, что методы теории специальных возмущений весьма эффективны и могут быть рекомендованы к применению для численного моделирования спутниковых орбит. Впечатляющие результаты получаются при использовании KS-уравнений (**u**, **δu**) и уравнений Роя (**ry**). Так, при сохранении точности интегрирования с их помощью удается повысить быстродействие в 3–4 раза. Кроме того, метод Энке в KS-переменных (**δu**) за счет ослабления влияния ошибок округления позволяет повысить уровень наивысшей точности почти на 1–2 порядка.

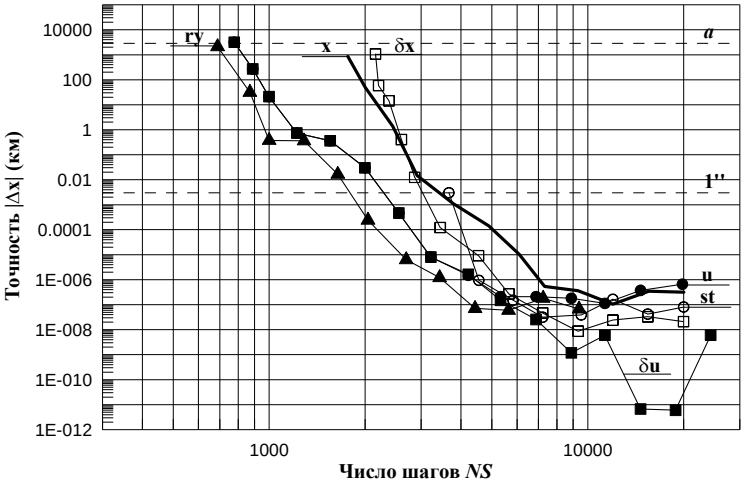


Рис. 10.1. Характеристики точность-быстродействие методов для низколетящего ИСЗ

Высокая эффективность этих уравнений состоит прежде всего в том, что они обладают стабилизирующим эффектом. Несмотря на это, использование стабилизированных уравнений (**st**) существенно менее эффективно. По-видимому, это объясняется наличием в этих уравнениях искусственно введенных членов (стабилизирующих возмущений), поведение которых связано с ошибками интегрирования, не имеющими никакого отношения к физике задачи. Поэтому данный артефакт, вполне обоснованный с точки зрения

стабилизации как средство для борьбы с ляпуновской неустойчивостью, все же имеет побочный эффект, который со временем заметно искажает динамическую картину задачи.

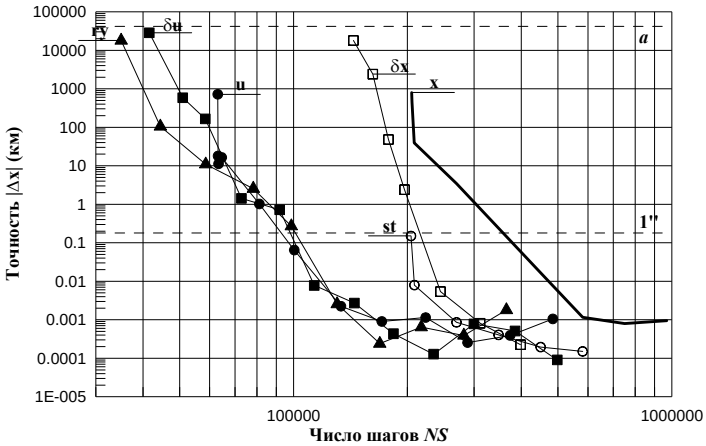


Рис. 10.2. Характеристики точность–быстродействие методов для геосинхронного ИСЗ

Как видно из рис. 10.1 и 10.2, эффективность методов по быстродействию для низколетящего спутника заметно ниже, нежели для геосинхронного объекта. Это главным образом связано с тем, что практическая ценность методов теории специальных возмущений становится тем выше, чем больше временной интервал, на котором рассматривается движение объекта. При сравнении эффективности методов для разных объектов прежде всего необходимо помнить, что длительность численного интегрирования (моделирования) определяется не столько величиной временного интервала, сколько количеством совершенных объектом оборотов. При этом 300-километровый спутник совершает почти в 70 раз меньше оборотов, нежели геосинхронный.

11. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ

11.1. Вводные замечания

В этой главе мы рассмотрим примеры применения аналитических методов для построения точных и приближенных моделей движения ИСЗ.

Ограниченные возможности настоящего издания не позволяют дать подробное описание высокоточных аналитических теорий движения, разработанных за последние 20 лет, поэтому мы остановимся на них кратко. А для того, чтобы продемонстрировать возможности аналитических методов и показать, как ими можно пользоваться на практике, рассмотрим подробно решение двух приближенных задач с применением метода преобразований Ли.

11.2. Высокоточные аналитические модели движения ИСЗ

Несмотря на большую популярность у специалистов аналитических методов решения задач динамики ИСЗ, полных аналитических теорий движения, способных представлять современные наблюдения, разработано не так уж много. Это связано прежде всего с трудоемкостью задачи. Разработка общей аналитической теории движения, пригодной для любых типов орбит, задача практически нереальная, так как именно тип орбиты, ее эксцентриситет и величина большой полуоси определяют структуру аналитической теории. Поэтому все существующие аналитические теории привязаны к конкретному типу орбит.

Мы приведем здесь краткое описание пяти наиболее полных аналитических теорий движения ИСЗ, разработанных отечественными авторами. Иностранные работы по созданию аналитических теорий тоже существуют, но их результаты практически недоступны.

Большая группа специалистов в области небесной механики во главе с Е.П. Аксеновым занималась в 70–80 гг. прошлого столетия созданием теории движения ИСЗ на основе эйлеровой промежуточной орбиты. Была разработана сама теория обобщенной задачи двух неподвижных центров, а затем с использованием этой задачи в качестве промежуточной орбиты была построена полная теория движения ИСЗ с учетом всех возмущений. Описанием этой работы является известная книга Е.П. Аксенова «Теория движения искусственных спутников Земли», опубликованная в 1977 г. (Аксенов, 1997). В конце 1980-х гг. активное участие в этой работе принимала группа томских специалистов во главе с В.А. Тамаровым (1983, 1984). Программная реализация полученных аналитических алгоритмов принадлежит В.Н. Емельянову (1986) и В.А. Тамарову (Аксенов и др., 1988).

Первая практически применимая отечественная аналитическая теория движения ИСЗ была разработана В.В. Нестеровым (1984) для использования в программе MERIT. По своим точностным характеристикам она ориентирована на представление лазерных измерений расстояний до ИСЗ «Лагеос». Теория была построена методом последовательных приближений Пикара, в качестве промежуточной орбиты использовалась задача Акснеса (см. гл. 5).

М.А. Вашковьяк (1972, 1983) разработал численно-аналитические теории движения резонансных ИСЗ, движущихся по почти круговым орбитам с периодами 24 и 12 ч. При вычислении возмущений от несферичности Земли используется классический подход, который состоит в аналитическом учете короткопериодических возмущений элементов орбиты, связанных с орбитальным движением спутника и вращением Земли, и численном интегрировании осредненных уравнений, свободных от быстрых переменных. Осреднение уравнений выполнено методом Цейпеля. Учет возмущений от Луны, Солнца осуществляется по оригинальной методике, кратко описанной нами в гл. 6, при учете светового давления влияние экранировки спутника Землей не принимается во внимание.

Точность численно-аналитических методик расчета, построенных по этим теориям, на конце интервала в 100 оборотов объекта составляет для 24-часового спутника 500 м вдоль орбиты и 15 м по радиус-вектору и бинормали, а для 12-часового спутника – 40 м по радиус-вектору и 400 м вдоль орбиты и по бинормали.

С.М. Кудрявцевым (Kudryavtsev, 1995) построена полностью аналитическая теория движения ИСЗ пятого порядка с учетом возмущений от всех геодинамических сил. Кроме того, этим же автором получено (Kudryavtsev, 2005) высокоточное разложение возмущающей функции, обусловленное притяжением Луны, Солнца и планет, и есть надежда, что построение полностью аналитической теории движения ИСЗ высокого порядка будет продолжено.

11.3. Решение главной проблемы движения ИСЗ методом преобразований Ли

Приведем пример применения аналитических методов в задачах динамики ИСЗ. Для этого рассмотрим решение главной проблемы движения ИСЗ, изложенной в гл. 4, методом преобразований Ли. Этот пример предложен К.В. Холшевниковым (1973, 1985). Мы приводим его с исправлением некоторых небольших опечаток, имеющихся в предыдущих изданиях.

В этой задаче с тремя степенями свободы функция Гамильтона равна

$$h = \frac{\mu}{2a} - J\frac{\mu A^2 P_2\left(\sin\delta\right)}{r^3}. \qquad (11.1)$$

Здесь A – экваториальный радиус планеты; J – коэффициент при второй зональной гармонике; остальные обозначения стандартны. Оскулирующие элементы и координаты $a, r, \ldots$ считаются функциями канонических элементов Делоне L_K, l_K, где $L_1 = \sqrt{\mu a}$, $L_2 = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}$, $L_3 = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\cos i$, а $l_1 = l$ – средняя аномалия;

$l_2 = g$ – аргумент перицентра; $l_3 = \Gamma$ – прямое восхождение восходящего узла.

В качестве промежуточной орбиты выберем эллипс с вращающимися линиями апсид и узлов.

Прежде всего, выразим $P_2(\sin\delta)$ через элементы, радиус-вектор и истинную аномалию θ:

$$h = \frac{\mu}{2a} + \frac{\mu A^2 J\left(2 - 3\sin^2 I\right)}{4a^3}\frac{a^3}{r^3} + \frac{3\mu A^2 J \sin^2 I}{4a^3}\frac{a^3\cos\left(2\theta + 2g\right)}{r^3}. \quad (11.2)$$

Первый член (11.2) зависит лишь от одной переменной L_1. Чтобы избежать вырождения, добавим к первому члену среднее значение следующих.

Непосредственным интегрированием легко получить

$$\begin{aligned} M_l\left(a^3 r^{-3}\right) &= \left(1 - e^2\right)^{-3/2}, \\ M_l\left\{a^3 r^3 \cos 2\left(\theta + q\right)\right\} &= 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Формулы (11.3) показывают, что среднее по $l = l_1$ не зависит от $g = l_2$, что делает задачу о движении спутника близкой к интегрируемой.

Представим h в форме

$$h = h_0 + \tau h_1 + \tau^2 h_2. \quad (11.4)$$

Здесь

$$h_0 = \frac{\mu}{2a} + \frac{\mu A^2 J\left(2 - 3\sin^2 I\right)}{4a^3\left(1 - e^2\right)^{3/2}}, \quad (11.5)$$

$$h_1 = \frac{\mu A^2 J\left(2 - 3\sin^2 I\right)}{4a^3}\left[\frac{a^3}{r^3} - \left(1 - e^2\right)^{-3/2}\right] + \frac{3\mu A^2 J \sin^2 I}{4a^3}\frac{a^3\cos\left(2\theta + 2g\right)}{r^3}.$$

Решим теперь задачу с гамильтонианом (11.4) с точностью до $\tau^2 = J^2$ включительно.

1. Будем обозначать старые и новые переменные одинаково, подразумевая, что $H, \mathcal{H}, \partial H / \partial L, n, \ldots$ выражены через новые (средние) элементы; $h, \partial h / \partial L$ – через старые (оскулирующие).

2. Согласно (6.49) $\mathcal{H}_0$ совпадает с H_0, т.е. с первым из выражений (11.5), где элементы считаются средними.

Вычислим средние движения

$$n_k = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L_K}. \tag{11.6}$$

Учитывая зависимость L_K от кеплеровых элементов орбиты, получим

$$\begin{aligned}
n_1 &= -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} I}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = \\
&= \sqrt{\mu a^{-3}}\left\{1 + \frac{3}{4}\frac{A^2 J\left(2 - 3\sin^2 I\right)}{a^2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\right\}, \\
n_2 &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu a}}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} I}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = \frac{3}{4}\mu J A^2 \frac{4 - 5\sin^2 I}{a^{1/2}\left(1-e^2\right)^2}, \\
n_3 &= \frac{1}{\sin I\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu} J A^2 \cos I}{a^{7/2}\left(1-e^2\right)^2}.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

3. Согласно (6.57), связь между T_1 и $\mathcal{H}_0$ дается формулой

$$\sum_{K=1}^{3} n_K \frac{\partial T_1}{\partial l_K} = H_1 - \mathcal{H}_1. \tag{11. 8}$$

Откуда $\mathcal{H}_1 = M_{l_1, l_2, l_3} H_1 = 0$. Правая часть (11.7) не зависит от l_3. Поэтому можно считать $\dfrac{\partial T_1}{\partial l_3} = 0$ и (11.8) переписывается как

$$n_1 \frac{\partial T_1}{\partial l} + n_2 \frac{\partial T_1}{\partial g} = H_1\left(l, g\right). \tag{11.9}$$

Остальные переменные, от которых зависит H_1, рассматриваются здесь как параметры. Функция H_1 определяется второй из формул (11.5), где элементы считаются средними. Это значит, в

частности, что r, θ выражаются теперь через средние элементы по формулам кеплеровского движения.

Из теории линейных уравнений в частных производных известно, что общее решение (11.6) можно получить одной квадратурой

$$T_1 = \frac{1}{n_1} \int H_1 \left(l, \frac{n_2}{n_1} l + C \right) \mathrm{d}l + \tilde{C}, \qquad (11.10)$$

где $\tilde{C}$ – произвольная функция, не зависящая от l, g. После интегрирования следует положить

$$C = g - \frac{n_2}{n_1} l.$$

Интеграл от первого слагаемого для H_1 вычисляется элементарно переходом к истинной аномалии

$$\int \left[\frac{a^3}{r^3} - \left(1 - e^2\right)^{-3/2} \right] \mathrm{d}l = \left(1 - e^2\right)^{-3/2} \left(\theta - l + e \sin\theta\right). \qquad (11.11)$$

Здесь использовано

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{\left(1 + e\cos\theta\right)^3}{\left(1 - e^2\right)^3}, \quad \mathrm{d}l = \frac{\left(1 - e^2\right)^{3/2}}{\left(1 + e\cos\theta\right)^2} \mathrm{d}\theta.$$

Интеграл от второго слагаемого

$$\int \left(\frac{a^3}{r^3} \exp 2i\theta \right) \exp 2ig \, \mathrm{d}l \qquad (11.12)$$

не элементарен. Разложим его по степеням $\frac{n_2}{n_1} \sim J$.

Для этого вычислим сначала

$$\psi = 2i \int \frac{a^3}{r^3} \exp 2i\theta \, \mathrm{d}l = 2i \left(1 - e^2\right)^{-3/2} \int \left\{ \exp 2i\theta + \frac{e}{2} \exp i\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{2} \exp 3i\theta \right\} \mathrm{d}\theta = \left(1 - e^2\right)^{-3/2} \left\{ \exp 2i\theta + e \exp i\theta + \frac{1}{3} e \exp 3i\theta \right\} + \mathrm{const}.$$

Постоянную определим из условия обращения в нуль среднего значения $M_l\psi = 0$.

Среднее значение экспоненты равно среднему значению косинуса (Козаи, 1962):

$$M_l \cos k\theta = \frac{(-e)^k}{1+\sqrt{(1-e^2)^k}}\left(1+k\sqrt{1-e^2}\right),$$

поэтому

$$\psi=\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left\{\exp 2i\theta+e\exp i\theta+\frac{e}{3}\exp 3i\theta+\frac{e^2\left(1+2\sqrt{1-e^2}\right)}{3\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)^2}\right\}. \quad (11.13)$$

Интегрируя (11.12) по частям, получим

$$\int\left(\frac{a^3}{r^3}\exp 2i\theta\right)\exp 2ig\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2i}\psi\exp 2ig-\frac{n_2}{n_1}\int\psi\exp 2ig\,\mathrm{d}l. \quad (11.14)$$

В последнем интеграле можно считать $g = \mathrm{const}$, так как ошибка скажется лишь на возмущениях третьего порядка. После весьма громоздких выкладок (Холшевников, 1973) можно получить

$$\Psi\equiv\int\psi\,\mathrm{d}l=-\frac{2}{3e^2}\left[(\theta-1)-2e\sin\theta\right]+$$
$$+\frac{i}{3e^2}\left\{2\left[-\ln\frac{2\left(1-e^2\right)}{\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)(1+e\cos\theta)}+\right.\right. \quad (11.15)$$
$$\left.\left.+\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right]-\frac{e}{1+e\cos\theta}\left[e+\left(2+3e^2\right)\cos\theta+4e\cos^2\theta\right]\right\}.$$

Постоянная в неопределенном интеграле (11.15) выбрана из условия нулевого среднего

$$M_l\psi = 0. \quad (11.16)$$

Окончательно формула для T_1 имеет вид

$$T_1 = \frac{\mu A^2 (2-\sin^2 I)}{4a^3 (1-e^2)^{3/2} n_1}(\theta - l + e\sin\theta) + \frac{3\mu A^2 \sin^2 I}{8a^3 (1-e^2)^{3/2} n_1} \times$$

$$\times \left[-\sin(2\theta+2g) + 2\sin(\theta+2g) + \frac{e}{3}\sin(3\theta+2g) + \frac{e_2\left(1+2\sqrt{1-e^2}\right)}{3\left(1+\sqrt{(1-e^2)^2}\right)}\sin 2g \right] +$$

$$+ \frac{\mu A^2 \sin^2 I\, n_2}{4a^3 n_1^2 e^2} \left\{ 2(\theta - 1 - 2e\sin\theta)\cos 2g + \right.$$

$$+2\left[-\ln\frac{2(1-e^2)}{\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)(1+e\cos\theta)} + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \right] \times$$

$$\left. \times \sin 2g - \frac{e}{1+e\cos\theta}[e + (2+3e^2)\cos\theta + 4e\cos^2\theta]\sin 2g \right\}.$$

Согласно (6.57), находим связь между T_2 и $\mathcal{H}_2$:

$$n_1 \frac{\partial T_2}{\partial l} + n_2 \frac{\partial T_2}{\partial g} = F, \qquad (11.17)$$

где

$$F = \left(H_1, T_1\right) + \frac{1}{2}\left(H_0, T_1, T_2\right) + H_2 - \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}\left(H_1, T_1\right) + H_2 - \mathcal{H}_2, \quad (11.18)$$

откуда

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} M_{lg}\left(H_1, T_1\right).$$

При вычислении $\left(H_1, T_1\right)$ достаточно получить лишь член нулевого порядка относительно J, т.е. положить $n_2 = 0$ в (11.17). С такой точностью $M_l\left(H_l, T_l\right)$ найдено К.В. Холшевниковым (1973). Усредняя по g, получим

$$\mathcal{H}_2 = \frac{3\mu^{3/2}A^4}{128 n_1 a^{13/2}}\left(1-e^2\right)^{1/2} \times \left\{8\cos^2 I\left(4-5\sin^2 I\right) + \right.$$
$$\left. + e^2\left(8\cos^2 I - 5\sin^4\right) + 4\sqrt{1-e^2}\left(2-3\sin^2 I\right)^2\right\}. \tag{11.19}$$

Функция F легко может быть найдена, но мы не будем проводить громоздких выкладок. Если учитывать возмущения лишь от зональной части геопотенциала, то F представит собой линейную комбинацию членов вида

$$F_1 - \exp i\left(k_1\theta + k_2 g\right), \tag{11.20}$$

$$F_2 = r^{-k_4}\left(\theta - 1\right)\exp i\left(k_1\theta + k_3 g\right) \quad \left(k_3 = 0, \pm 2\right). \tag{11.21}$$

При $k_1 \neq 0$ соответствующие члены T_2 вычисляются простой квадратурой, так как можно в (11.21) положить $n_2 = 0$ и брать интеграл при $g = \text{const}$:

$$T_2 \sim \frac{1}{n_1}\int F_{1,2}\,\mathrm{d}\,l = \frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{n_1}\int \frac{F_{1,2}\,\mathrm{d}\,\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}. \tag{11.22}$$

Интеграл от F_2 не элементарен. Однако, как было замечено К. Акснессом (см. Холшевников, 1973), неэлементарные части интегралов от F_2 (11.21) при различных k_1, k_3 взаимно сокращаются.

Функция F_2 не содержит членов с $k_1 = 0$, но в F_1 такие члены присутствуют.

Уравнение для соответствующего слагаемого T_2 имеет вид

$$n_1\frac{\partial T_2}{\partial l} + n_2\frac{\partial T_2}{\partial g} = C\exp ik_2 g, \tag{11.23}$$

где $k_2 \neq 0$, поскольку среднее значение F равно нулю. Общее решение (11.23), имеющее нулевое среднее, есть

$$T_2 = \frac{C}{ik_2 n_2}\exp ik_2 g \tag{11.24}$$

и содержит n_2 в знаменателе. Поэтому использованный метод не применим в окрестности (порядка 10') критического наклона, где

$n_2 \approx 0$. Впрочем, при $n_2 \sim J_2$ можно точное решение (11.23) заменить приближенным непериодическим

$$T_2 = \frac{Cl}{n_1} \exp ik_2 g. \tag{11.25}$$

Однако в таком случае появятся смешанные возмущения второго порядка у всех элементов, кроме a. Возмущения большой полуоси определяются производной $\dfrac{\partial T_2}{\partial l}$ и не содержат l вне знака тригонометрических функций.

Итак, T_2 может быть получена и выражена через элементарные функции.

4. Полученный новый гамильтониан $\mathcal{H}$ не зависит от l_K, поэтому система для средних элементов интегрируется непосредственно:

$$\left.\begin{aligned} &a, e, i = \text{const}, \\ &l_K = l_K^0 + \omega_K \left(t - t_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.26}$$

Здесь средние движения ω_K могут быть выражены через кеплеровские элементы по формулам (11.7), где следует $\mathcal{H}_0$ заменить на $\mathcal{H}$.

5. Выразим оскулирующие элементы через средние. Обозначая разность оскулирующих и средних элементов символом δ, получим из (6.57):

$$\left.\begin{aligned} \delta L_K &= \frac{\partial T}{\partial l_K} + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial T_1}{\partial l_K} T_1\right), \\ \delta l_K &= -\frac{\partial T}{\partial L_K} - \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial T_1}{\partial L_K} T_1\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.27}$$

6. Выразим средние элементы через оскулирующие. Для этого достаточно поменять их местами и изменить знак T:

$$\left.\begin{aligned}\delta L_K &= \frac{\partial T}{\partial l_K} - \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial T_1}{\partial l_K} T_1\right), \\ \delta l_K &= -\frac{\partial T}{\partial L_K} + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial T_1}{\partial L_K} T_1\right).\end{aligned}\right\} \qquad (11.28)$$

11.4. Построение численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ

Рассмотрим еще один пример применения метода Хори–Депри, но уже для построения численно-аналитического алгоритма прогнозирования движения ИСЗ. Причем в качестве промежуточной орбиты выбрана задача двух неподвижных центров, а реализация алгоритм-преобразований Ли осуществляется в кеплеровых оскулирующих элементах. На такую возможность указывал К.В. Холшевников (1973), алгоритмически эта возможность была реализована Т.С. Бороненко (1975). Остановимся прежде всего на этом алгоритме (Бордовицына и др., 1991).

11.4.1. Алгоритм преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства

Движение ИСЗ в произвольных переменных фазового пространства может быть описано с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\sigma}_p = \sum_{s=1}^{c} A_{p,c+s} \frac{\partial f(\sigma,\nu)}{\partial \sigma_{s+c}}, \quad \dot{\sigma}_{p+s} = \sum_{s=1}^{c} B_{s,c+p} \frac{\partial f(\sigma,\nu)}{\partial \sigma_s},$$

$$A_{p,c+s} = -\sum_{q=1}^{c} \frac{\partial \sigma_p}{\partial l_q} \frac{\partial \sigma_{c+p}}{\partial l_{c+q}}, \quad B_{s,c+p} = \sum_{q=1}^{c} \frac{\partial \sigma_s}{\partial l_q} \frac{\partial \sigma_{c+p}}{\partial l_{c+q}}, \qquad (11.29)$$

$$\left(p = 1,\ldots,c; \quad c = 3\right).$$

Здесь σ – вектор переменных фазового пространства с компонентами $\sigma_1,\ldots,\sigma_{2c}$; l – вектор канонических переменных с компо-

нентами $l_1,\ldots,l_{2c}$; ν – малый параметр; f – силовая функция, представляемая следующим образом:

$$f = f_1 + R, \tag{11.30}$$

где f_1 – потенциал невозмущенного движения; R – возмущающая функция, которая является суммой потенциалов различных возмущений:

$$R = \sum_{i=1}^{k} R_i. \tag{11.31}$$

Функции R_i – тригонометрические ряды, которые будут определены ниже.

Для того чтобы получить квазивековую систему дифференциальных уравнений, необходимо совершить такое преобразование $\sigma_i \to \sigma_i$, чтобы новая силовая функция $\overline{f}\left(\overline{\sigma},\nu\right)$ не содержала быстроосциллирующих переменных. Разбиение переменных на «быстрые» и «медленные» часто является условным, и решается этот вопрос в процессе построения конкретной методики, рассчитанной на определенный класс ИСЗ.

Алгоритм усредняющих преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства состоит в следующем. Представим силовую функцию $f\left(\sigma,\nu\right)$ в виде усеченного ряда

$$f = f_{0,1} + \nu f_{0,2} + \ldots + \nu^{k-1} f_{0,k}. \tag{11.32}$$

Из теории преобразований Ли для канонических систем дифференциальных уравнений известно, что расчетная схема алгоритма этого метода в конечном итоге сводится к последовательному вычислению скобок Пуассона, возникающих в результате применения дифференциального оператора Ли к некоторым аналитическим функциям $f_{0,j}$, входящим в соотношение (11.32). Оператор Ли для канонических систем, как было показано выше, имеет вид

$$D_\eta f_{i,j} = \sum_{p=1}^{c} \left(\frac{\partial T_{0,\eta}}{\partial l_p} \cdot \frac{\partial f_{i,j}}{\partial l_{p+c}} - \frac{\partial T_{0,\eta}}{\partial l_{p+c}} \cdot \frac{\partial f_{i,j}}{\partial l_p} \right), \tag{11.33}$$

где $T_{0,\eta}$ – η-й коэффициент в разложении производящей функции $T(l,\nu)$:

$$T = \nu T_{0,1} + \nu^2 T_{0,2} + \ldots + \nu^k T_{0,k}. \qquad (11.34)$$

Для того чтобы определить оператор Ли для произвольных переменных фазового пространства, нужно сделать подстановку $l = l(\sigma)$ в соотношение (11.33). В результате получаем следующее выражение:

$$D_\eta^* f_{i,j} = \sum_{p=1}^{2c} T_{p\eta} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial \sigma_p}, \qquad (11.35)$$

в котором, как легко показать, функции $T_{p,\eta}$ по форме совпадают с правыми частями дифференциальных уравнений (11.29). Таким образом, для вычисления функций $T_{p,\eta}$ достаточно подставить в правые части уравнений (11.29) вместо функции f, η-й член разложения производящей функции, выраженный в переменных σ_i.

Формулы замены переменных можно представить с помощью оператора D_η^* следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sigma_q = \tilde{\sigma}_q + \sum_{c=1}^{k} \sigma_{0,p}^{(1)}(\sigma,t) \quad (q = 1,\ldots,6),\\
&\sigma_{0,p}^{(1)} = \sum \sigma_{i,j} \quad (i = 1,2,\ldots,p;\ j = 0,1,\ldots,p;\ i+j = p), \qquad (11.36)\\
&\sigma_{i,j} = \frac{1}{i} \sum_{\xi=0}^{j} D_{\xi+1}^* \sigma_{i-1,j-\xi}.
\end{aligned}$$

Новая силовая функция $\tilde{f}(\tilde{\sigma},\nu)$ в результате выполненной замены переменных определится выражением

$$\tilde{f} = \tilde{f}_{0,1} + \nu \tilde{f}_{0,2} + \ldots + \nu^{k-1} \tilde{f}_{0,k}, \qquad (11.37)$$

в котором функции $\tilde{f}_{0,1},\ldots,\tilde{f}_{0,k}$ не содержат быстроосциллирующих переменных. Последнее достигается специальным выбором производящей функции.

Квазивековая система дифференциальных уравнений для переменных $\tilde{\sigma}$ и силовой функции $\tilde{f}$ запишется как

$$\tilde{\sigma}_p = \sum_{s=1}^{c} \tilde{A}_{p,s+c} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_{c+s}}, \quad \tilde{\sigma}_{p+c} = \sum_{s=1}^{c} \tilde{B}_{s,c+p} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_s}. \tag{11.38}$$

Преобразование переменных (11.36) связывает системы уравнений (11.29) и (11.37). Из теории преобразований Ли известно, что для получения обратных преобразований

$$\tilde{\sigma}_p = \sigma_p + \sum_{c=1}^{k} \sigma_{0c}(\sigma, \nu) \tag{11.39}$$

достаточно изменить в соотношениях (11.35) знак производящей функции на противоположный.

Вышеописанный алгоритм дает общий подход к построению квазивековой системы дифференциальных уравнений движения ИСЗ. Конкретное задание функции $l = l(\sigma)$ определяет тип переменных, в которых строится методика прогнозирования.

11.4.2. Построение полуаналитической методики расчета движения резонансных ИСЗ типа «Навстар» в эйлеровых элементах

Примем для ИСЗ типа «Навстар» следующие значения периода обращения, эксцентриситета и наклонения к плоскости экватора:

$$T = 43085 \text{ с}, \quad e = 0,01, \quad i = 63,4°.$$

В процессе построения аналитической теории движения таких спутников возникает трудность, связанная с появлением малых знаменателей в долгопериодических членах. В то же время универсальные методы точного численного интегрирования, для которых такой проблемы не существует, могут оказаться недостаточно оперативными для пользователей навигационной системы. Очевидно, что в этом случае удобнее применить к исследованию движения ИСЗ полуаналитический метод.

Как показано в работе (Бордовицына и др., 1992), наибольшие возмущения в движении таких спутников вызывают гармоника геопотенциала $V_{2,0}$ и лунно-солнечное притяжение. В излагаемой ниже приближенной методике (Бордовицына и др., 1991) рассматриваются только эти возмущения, причем влияние гармоник $V_{2,0}$ учитывается введением симметричного варианта промежуточной орбиты обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Возмущения второго порядка относительно сжатия для указанной промежуточной орбиты можно описать с помощью системы дифференциальных уравнений (6.14), пренебрегая в них членами порядка $\varepsilon^2\gamma$. Здесь ε – параметр сжатия, определяемый формулой (5.19); γ – параметр, характеризующий малость возмущений функции R. Для того чтобы устранить в этих уравнениях особенность, связанную с малым эксцентриситетом, введем вместо переменных l, g, h величины

$$M = l, \quad F = M + g, \quad \lambda' = M + g + h.$$

Для удобства использования машинных программ, оперирующих рядами Пуассона, заменим всюду выражение $\sqrt{1-e^2}$ его разложе-

нием, ограничиваясь квадратом эксцентриситета, и введем величины $a^* = \sqrt{a}, b^* = \sqrt{fm_0}$, где a – большая полуось; fm_0 – гравитационная постоянная Земли. Тогда система уравнений относительно переменных a^*, e, i, M, λ' примет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{b^*}\left\{\frac{\partial R}{\partial M} + \frac{\partial R}{\partial F} + \frac{\partial \lambda'}{\partial R}\right\},\\
&\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a^* b^*}\left\{\frac{1-e^2}{e}\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{e}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial F} + \frac{\partial R}{\partial \lambda'}\right)\right\},\\
&\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1+\frac{1}{2}e^2}{a^* b^* s}\left\{\alpha\frac{\partial R}{\partial F} - (1-\alpha)\frac{\partial R}{\partial \lambda'}\right\},\\
&\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \frac{1}{a^* b^*}\left\{\frac{1-e^2}{e}\frac{\partial R}{\partial e} + a^*\frac{\partial R}{\partial a^*}\right\},\\
&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = n' + \frac{1}{a^* b^*}\left\{\frac{e}{2}\frac{\partial R}{\partial e} - \left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\frac{\alpha}{s}\frac{\partial R}{\partial i} - a^*\frac{\partial R}{\partial a^*}\right\},\\
&\frac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}t} = n'' + \frac{1}{a^* b^*}\left\{\frac{e}{2}\frac{\partial R}{\partial e} + \left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\frac{1-\alpha}{s}\frac{\partial R}{\partial i} - a^*\frac{\partial R}{\partial a^*}\right\},
\end{aligned}
\qquad (11.40)
$$

где, как и выше, $\alpha = \cos i; s = \sin i, n = n_1; n' = n_1 + n_2$ и $n'' = n_1 + n_2 + n_3$ определяются по формулам промежуточного движения и с точностью до ε^2:

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{b^*}{a^{*3}}\frac{n}{1-\lambda},\\
n' &= n(1+\nu),\\
n'' &= n(1+\nu+\mu).
\end{aligned}
\qquad (11.41)
$$

Здесь λ, ν, μ вычисляются по формулам (5.21) при $\sigma = 0$:

$$
n = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)\left\{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\left[1 + 11s^2 + e^2(5s^2-1)\right]\right\}.
$$

Для возмущающей функции R, используя разложение, полученное Н.В. Емельяновым (1980), с учетом введенных выше замен переменных получим

$$R = \frac{fm'}{a^{*2}} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (2-\delta_{j,0}) \frac{(k-j)!}{(k+j)!} \left(\frac{a^{*2}}{a'} \right)^{k+1} \times \\ \times F_{k,j,i}(i) X_{k-2,l+q}^{k,k-2l}(e) \left(S_{k,j} \sin D + C_{k,j} \cos D \right), \tag{11.42}$$

где $D = (k-2l-j)F + qM + j\lambda'$; fm' и a' – гравитационная постоянная и большая полуось возмущающего тела соответственно; $\delta_{j,0}$ – символ Кронекера; $S_{k,j}$ и $C_{k,j}$ – тригонометрические ряды, содержащие пять основных угловых аргументов в движении Луны и Солнца: l_1, l', F', D', Γ.

Исключение быстрой переменной M из возмущающей функции выполним по вышеописанному алгоритму преобразований Ли, ограничиваясь первым приближением. В этом случае схема алгоритма особенно проста и формально сводится к следующим действиям:

1. Выделяется короткопериодическая часть возмущающей функции

$$\tilde{R}\ \Phi = R - \tilde{R}, \tag{11.43}$$

где $\tilde{R}$ – функция, в которой отсутствуют члены короткого периода, т.е. члены, для которых $k - 2l + q \neq 0$.

Соответствующая (11.42) функция $\tilde{R}$ имеет вид

$$\tilde{R} = \frac{fm'}{a^{*2}} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} (2-\delta_{j,0}) \frac{(k-j)!}{(k+j)!} \left(\frac{a^{*2}}{a'} \right)^{k+1} \times \\ \times F_{k,j,l}(i) X_0^{k,k-2l}(e) (S_{k,j} \sin D + C_{k,j} \cos D), \tag{11.44}$$

где $$D = (k-2l-j)F + qM - (k-2l)M + j\lambda', \tag{11.45}$$

а общий член функции Φ может быть записан в виде

$$C_{\Phi} = A(a^*, e, i) \cos(k_1 l_1 + k_2 l' + k_3 F' + k_4 D' + k_5 \Gamma + k_6 M + \\ + k_7 F + k_8 \lambda'). \tag{11.46}$$

2. Определяется производящая функция метода преобразований Ли

$$T = \frac{\tilde{\Phi}}{\sum_{i=1}^{8} k_i v_i}, \tag{11.47}$$

где $\tilde{\Phi}$ получается из Φ заменой cos на sin; величины $v_1, v_2, v_3, v_4, v_\delta$ есть средние изменения аргументов l_1, l', F', D', Γ и задаются рациональными числами, а $v_6 = n, v_7 = n', v_8 = n''$ и представляют собой средние изменения угловых элементов орбиты спутника M, F и λ' соответственно.

Общий член производящей функции T имеет вид

$$S_T = \frac{A\left(a^*, e, i\right)}{\varphi_j + k_6 n + k_7 n' + k_8 n''} \times \\ \times \sin\left(k_1 l_1 + k_2 l' + k_3 F' + k_4 D' + k_5 \Gamma + k_6 M + k_7 F + k_8 \lambda'\right), \tag{11.48}$$

где $\varphi_j = \sum_{i=1}^{5} k_i v_i$ – некоторые рациональные числа.

3. Далее находятся частные производные функции T по элементам $a^*, e, i, M, F, \lambda'$, подстановка которых в правые части уравнений (11.40) определяет соотношения, связывающие оскулирующие (старые) переменные $a^*, e, i, F, \lambda', M$ со средними (новыми) $\tilde{a}^*, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{F}, \tilde{\lambda}', \tilde{M}$ переменными усредненной задачи.

4. Наконец, подстановка в уравнения (11.40) усредненной возмущающей функции $\tilde{R}$ дает квазивековую систему дифференциальных уравнений для средних элементов орбиты спутника.

Для числовых расчетов была выбрана модель орбиты с набором угловых элементов, при которых лунно-солнечные возмущения на 30-суточном интервале являются наибольшими и составляют в пространственном положении спутника величину ~ 130 км. Оптимальная величина шага интегрирования квазивековых уравнений равнялась 10 оборотам спутника.

Таблица 11.1

Сопоставление результатов, полученных численным и полуаналитическим методами

$t - t_0$ (с)	Метод	Векторы положения и скорости			
861700	А–М	$\mathbf{x}$ $\dot{\mathbf{x}}$	12194.795 –1,08075	21779,195 –1,849256	8278,547 3,274225
	ПМР	$\mathbf{x}$ $\dot{\mathbf{x}}$	0,907 0,00031	0.007 0,000075	0,758 0,000193
1723400	А–М	$\mathbf{x}$ $\dot{\mathbf{x}}$	–12152,231 –1,072501	21714,035 –1,877213	8509,117 3,260992
	ПМР	$\mathbf{x}$ $\dot{\mathbf{x}}$	0,303 0,000492	0,044 0,000023	0,343 0,000068
2585100	А–М	$\mathbf{x}$ $\dot{\mathbf{x}}$	–12110,249 –1,063392	21643,438 –1,905728	8744,787 3,247462
	ПМР	$\mathbf{x}$ $\dot{\mathbf{x}}$	0,319 0,000070	0,007 0,000036	5,030 0,000031

В табл. 11.1 приведены значения прямоугольных координат и компонент скорости, полученных при помощи полуаналитической методики расчета (ПМР) и численным интегрированием метода Адамса–Мультона (А–М). В полуаналитической методике учтены вторая зональная гармоника геопотенциала, а также 1-й параллактический член потенциала Луны. В эталонном расчете учтены гармоника $V_{2,0}$ и полный лунно-солнечный потенциал. Для значений координат и компонент скорости, полученных при помощи ПМР, выписаны только разности между решениями А–М и ПМР.

12. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ

12.1. Вводные замечания

В настоящем разделе мы рассмотрим примеры использования численных методов при решении различных прикладных задач динамики ИСЗ. Следует сказать, что численные методы очень широко применяются при разработке моделей функционирования ИСЗ и систем ИСЗ, при разработке высокоточного программного обеспечения для определения параметров движения ИСЗ по данным наблюдений, для решения задач геодинамики и космической геодезии.

Большим достоинством численных моделей является их полная независимость от значений начальных параметров движения ИСЗ, поэтому они особенно удобны в тех практических задачах, где производится постоянное уточнение параметров движения по данным наблюдений, т.е. во всех задачах слежения за объектами. А такие задачи присутствуют в любом космическом эксперименте и при решении любых технических задач с использованием ИСЗ.

Независимость численных моделей от значений начальных параметров движения обусловливает их успешное применение при проектировании космических систем и в исследовательских задачах, связанных с прогнозированием движения и функционирования систем ИСЗ и КА, а также при оптимизации алгоритмов в процессе разработки программно-математического обеспечения космических систем. Какими бы аналитическими или полуаналитическими алгоритмами Вы ни пользовались при разработке программно-математического обеспечения Вы обязательно захотите проверить свои алгоритмы на численных моделях.

Можно сказать, что численные методы и численные модели применяются повсеместно в практике работ, связанных с проектированием и использованием систем ИСЗ и КА.

12.2. Высокоточные численные модели движения ИСЗ

Для решения на основе современных высокоточных наблюдений задачи определения параметров движения ИСЗ, а также задач геодинамики необходимо иметь модели движения, превосходящие наблюдения по точности по крайней мере в три раза. Только в этом случае, как показано в работе (Черницов, Тамаров, 2003), полученные методом наименьших квадратов оценки определяемых параметров будут несмещенными. В противном случае ошибка модели попадет в оценку определяемых величин. Поэтому современные высокоточные численные модели должны учитывать влияние всех сил, действующих на ИСЗ, включая слабые возмущения. Алгоритмы, позволяющие моделировать действие этих сил, описаны нами в гл. 8 настоящего учебного пособия.

В настоящее время все организации, занимающиеся обработкой современных спутниковых наблюдений, имеют либо собственные, либо приобретенные высокоточные модели движения ИСЗ. В 1980–1990 гг. широко использовались в отечественной практике три высокоточные модели движения ИСЗ: «Новосибирская модель, разработанная в НИИГАиКе (ныне СГГА) Ю.В. Сурниным, С.В. Кужелевым и др. (1977), модель «Киев-Геодинамика», разработанная в ГАО НАНУ В.К. Тарадием и М.Л. Цесисом (1984) и «Численная модель движения ИСЗ», разработанная Т.В. Бордовицыной, Н.А. Шарковским и др. в НИИ ПММ при Томском государственном университете (1984, 1992).

Эти три модели и сейчас используются для обработки наблюдений и исследования движения ИСЗ в ряде организаций. Однако по современным требованиям они нуждаются в уточнении моделей действующих на ИСЗ сил в соответствии с новыми IERS-соглашениями и учете ряда слабых возмущений, влияние которых становится заметным при использовании высокоточных наблюдений. Авторы томской программы уже неоднократно ее усовершенствовали. В 2007 г. была усовершенствована «Численная модель движения ИСЗ» (Бордовицына и др., 2007), предназначенная для использования на персональном компьютере, а в 2009 г. был раз-

работан программный комплекс «Численное моделирование в среде параллельных вычислений движения больших совокупностей искусственных спутников Земли» (Бордовицына и др., 2009), реализованный на кластере «СКИФ Cyberia» Томского государственного университета. На основе этого комплекса были созданы еще два программных продукта: «Программа для определения параметров движения искусственных спутников Земли по данным измерений» (Чувашов 2011), «Программа для исследования хаотичности движения околоземных объектов» (Бордовицына, Александрова, Чувашов, 2010).

12.3. Методика численного исследования структуры возмущений и ее применение

Рассмотрим методику численного исследования структуры возмущений для ИСЗ.

Пользуясь свойством аддитивности возмущающих ускорений, которые вызываются действием всех сил, рассмотренных нами в гл. 4, уравнения (3.1) перепишем в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{x}} = \sum_k \mathbf{G}_k, \tag{12.1}$$

где U_0 – потенциал выбранной промежуточной орбиты; $G_k\left(k=1,2,3,\ldots\right)$ – возмущающее ускорение, создаваемое какой-либо одной k-й силой F_k. В качестве характеристики возмущений, обусловленной действием силы F_k, возьмем модуль разности

$$\Delta r = \left(\sum_{i=1}^{3} \Delta x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.2}$$

векторов решений, полученных с учетом и без учета оцениваемого возмущающего фактора, так что

$$\Delta x_i = \left(x_i\right)_k - \left(x_i\right)_0, \quad i=1,2,3, \tag{12.3}$$

$(x_i)_0$ – некоторое опорное решение, соответствующее уравнениям (12.1) при равенстве правых частей нулю; $(x_i)_k$ – решение уравнения вида

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}\,t^2} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{G}_k. \qquad (12.4)$$

При такой оценке возмущений вне поля зрения остаются так называемые комбинированные возмущения, обусловленные совместным влиянием различных возмущающих факторов. По величине эти возмущения значительно меньше каждого из составляющих возмущений. Оценка комбинированных возмущений, обусловленных действием сил F_k и F_j, можно получить сравнением решений $(x_i)_k$ уравнений (12.4) с решением $(x_i)_{k,j}$ уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G}_k + \mathbf{G}_j.$$

В результате получим оценку смешанных возмущений

$$\Delta x_i = (x_i)_{k,j} - (x_i)_k.$$

Чтобы включить в оценку (12.3) самые крупные комбинированные возмущения, вызванные совместным влиянием сжатия с другими возмущающими факторами, можно в качестве U_0 взять потенциал задачи, определяющий движение спутника в поле сжатого сфероида.

Разность решений уравнений (12.1) и уравнений невозмущенного движения дает оценку совокупного влияния возмущений в прямоугольных координатах спутника.

12.4. Исследование влияния возмущений от гармоник геопотенциала на движение ИСЗ различных классов орбит

Рассмотрим влияние возмущений от гармоник геопотенциала на движение ИСЗ различных классов орбит, параметры которых приведены в табл. 2.1. Продемонстрируем методику оценки на примере решения задачи на 128-битной разрядной сетке.

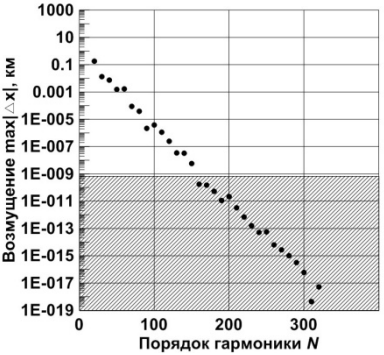
Таблица 2.1

Параметры орбит

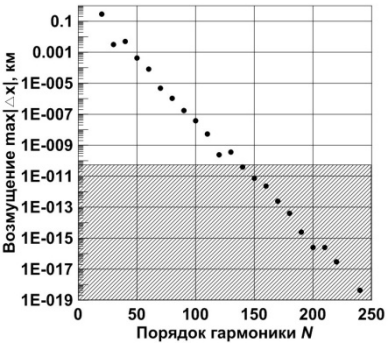
H, км	*a,* км	*e*	*i*, град	*T*, с
300	6678,13629	0,001	62,8	5431
500	6878,13629	0,001	62,8	5676
800	7178,13629	0,001	62,8	6052
1200	7578,13629	0,001	62,8	6565
1600	7978,13629	0,001	62,8	7091
2200	8578,13629	0,001	62,8	7906
3000	9378,13629	0,001	62,8	9038
4100	10738,13629	0,001	62,8	10674
5900(Лагеос)	12300,0	0,004	109,8	13680
20200(Эталон)	26600,0	0,010	63,4	43200

Для получения оценок влияния гармоник высокого порядка проводился численный эксперимент по прогнозированию движения указанных выше ИСЗ на интервалах времени, равных 1 и 30 сут с использованием 128-битной разрядной сетки. Дифференциальные уравнения интегрировались методом Эверхарта 15-го порядка.

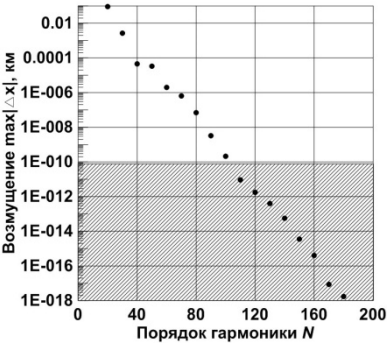
В качестве показателя влияния гармоник высокого порядка был принят вклад каждой следующей группы гармоник одного порядка и 10 степеней относительно предыдущих. Для этого рассчитывались координаты спутника на некоторой сетке исследуемого временного интервала с учетом и без учета указанной группы гармоник и определялся максимум разностей этих координат ($\max |\Delta x|$). Оценки влияний гармоник от 20 до 360 порядков приведены на рис. 12.1, *а–л*. Здесь же показан уровень численной ошибки метода (верхняя граница заштрихованной области), за пределами которого учет влияния гармоник геопотенциала становится неопределенным.



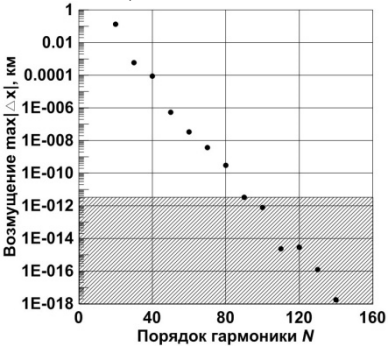
в) $H = 800$ км



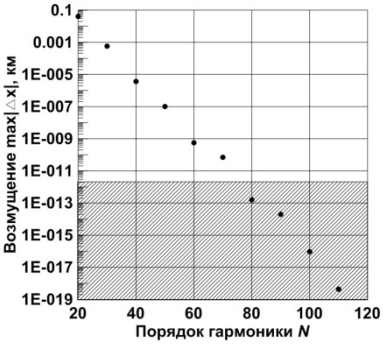
г) $H = 1200$ км



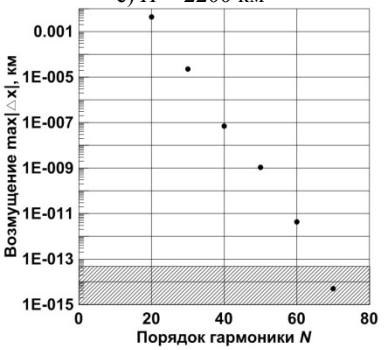
д) $H = 1600$ км



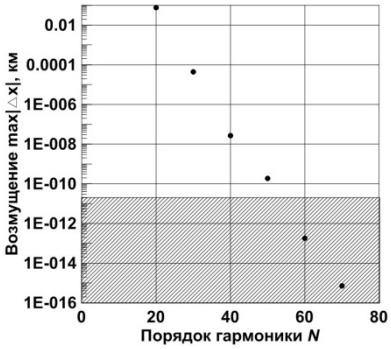
е) $H = 2200$ км



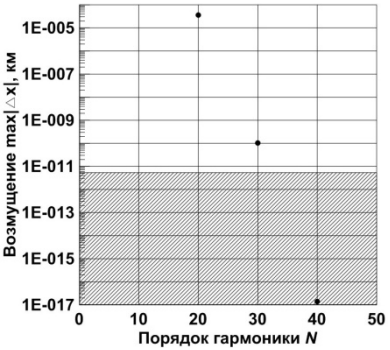
ж) $H = 3000$ км



з) $H = 4100$ км



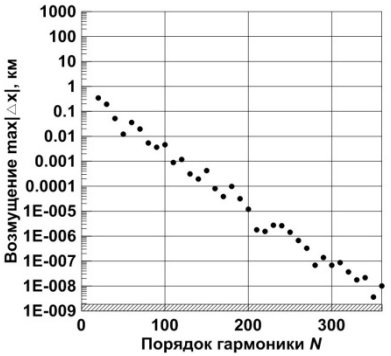
к) H = 5900 км (Лагеос)



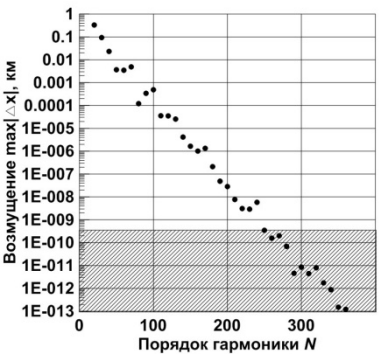
л) H = 20200 км (Эталон)

Рис. 12.1 Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала в зависимости от высоты спутника: а–з – на интервале времени 1 сут, к–л – на интервале времени 30 сут

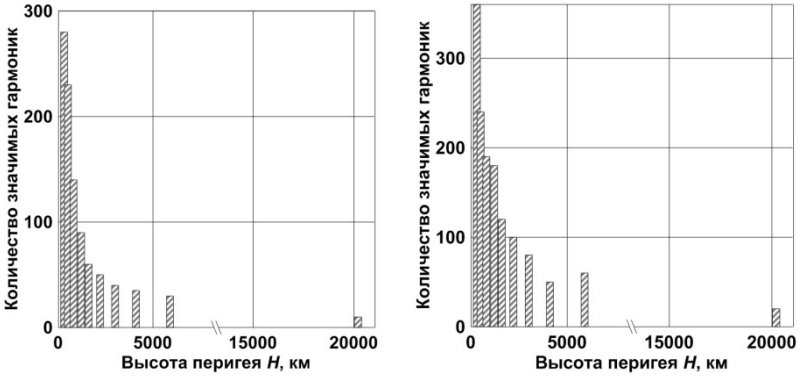
На рис. 12.2 приведены графики, которые позволяют определить порядок гармоник геопотенциала, до которого целесообразно учитывать их влияние при работе с 64- и 128-битной разрядными сетками. Эта граница определена ошибкой численного моделирования.



а) H = 300 км



б) H = 500 км



а) На 64-разрядной сетке *б*) На 128-разрядной сетке

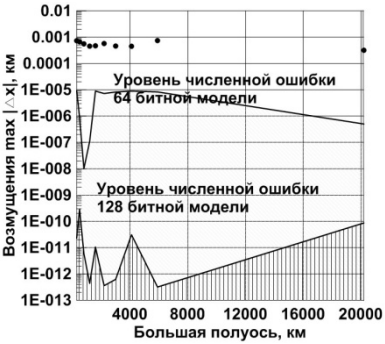
Рис. 12.2. Зависимость числа значимых гармоник от высоты перигея спутника и длины разрядной сетки

График 12.2, *а* взят из первого издания данного учебного пособия, а графики 12.1 и 12.2, *б* из работы (Чувашов, 2010). Из приведенных данных видно, что численная модель движения ИСЗ, установленная на кластере «СКИФ Cyberia» и имеющая маленькую методическую ошибку, позволяет учитывать влияние гармоник более высоких порядков по сравнению с численной моделью движения ИСЗ, разработанной для персонального компьютера.

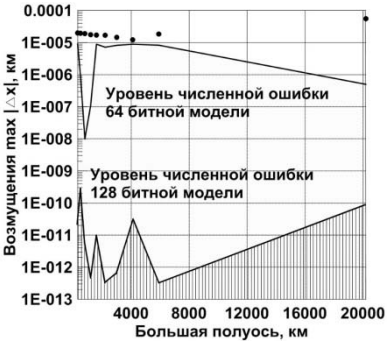
12.5. Оценки влияния приливных деформаций

Влияние приливных деформаций может так же отслеживаться для всех составляющих прилива в зависимости от высоты спутника (рис. 12.3) (Чувашов, 2010). Суммарный динамический эффект прилива включает в себя: приливные деформации Земли, которые описываются моделью Лява, возмущения от суперпозиций колебаний, связанных с твердым приливом и прецессионно-нутационными колебаниями, которые задаются моделью Вара, влияния возмущения от океанического прилива, твердотельного и океанического полюсных приливов. Для сопоставления

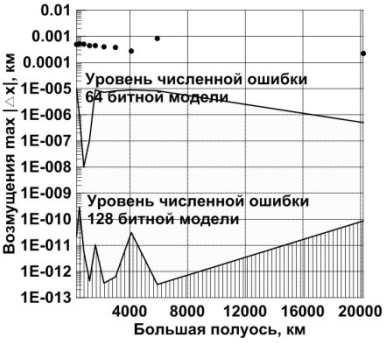
(рис. 12.3, *з*) приведены графики, позволяющие оценить влияние сжатия Луны на ИСЗ, движущиеся на рассматриваемых высотах.



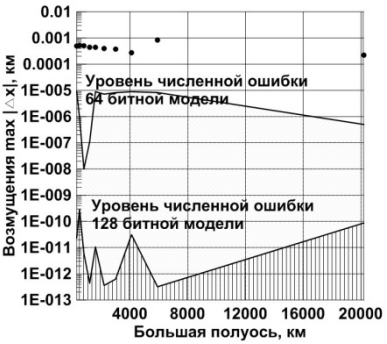
а) Влияние от изменения коэффициента C_{20} за счет твердого прилива



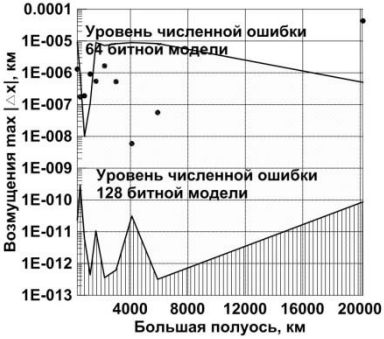
б) Влияние от изменения коэффициента C_{21} за счет твердого прилива



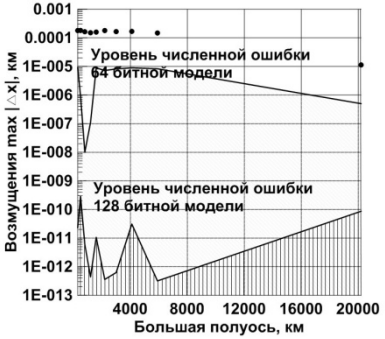
в) Влияние от изменения коэффициента S_{21} за счет твердого прилива



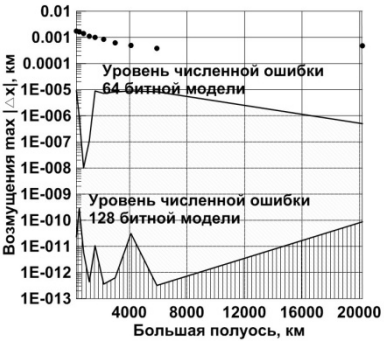
г) Влияние от изменения коэффициента C_{22} за счет твердого прилива



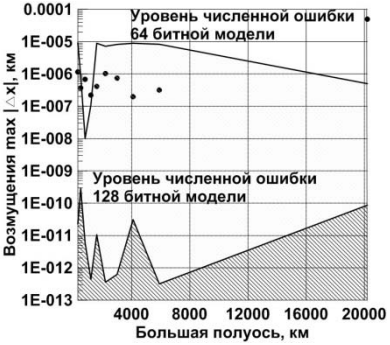
д) Влияние от полюсного твердотельного прилива



е) Влияние от океанического прилива. Модель CSR 4.0



ж) Влияние от полюсного океанического прилива



з) Влияние от сжатия Луны

Рис. 12.3 Влияние составляющих прилива на движение ИСЗ в зависимости от высоты полета

На рис. 12.3 помимо оценки влияния составляющих прилива приведены две численные ошибки интегрирования, соответствующие 64-битной и 128-битной разрядным сеткам. Как видно из графиков, влияние значительной части составляющих прилива больше, чем численные ошибки интегрирования. Однако оценку влияния возмущения от деформации коэффициента $C_{2,2}$ можно учесть только на сетке, соответствующей 32-десятичным разрядам.

12.6. Влияние от сопротивления атмосферы

Главным возмущающим фактором, действующим на движение спутников с высотами полета от 300 до 1300 км, является атмосфера. Причем влияние это настолько велико, что спутники с высотами полета 300 и 350 км, имеющие почти круговые орбиты, успевают войти в плотные слои атмосферы за первые сутки своего существования.

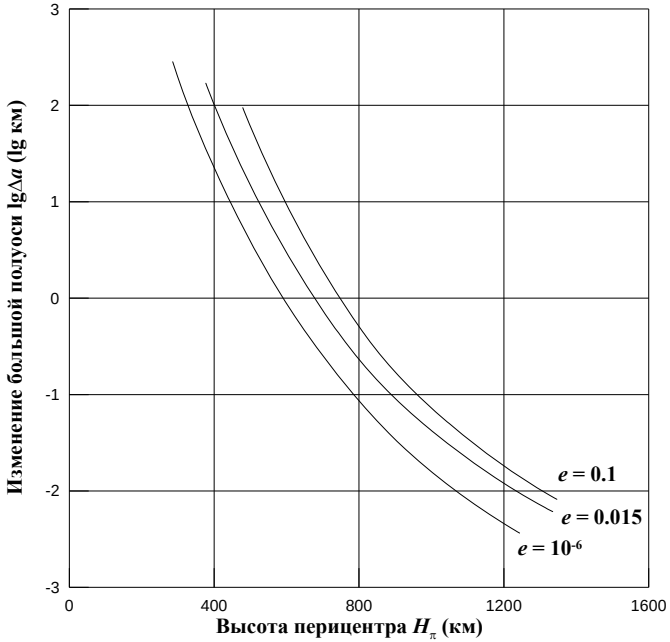


Рис. 12.4. Зависимость изменения большой полуоси от высоты полета спутника. Интервал времени 1 сут

На рис. 12.4 (Бордовицына и др., 1991) показано изменение большой полуоси спутника под действием атмосферы за одни сутки. Изменение дано для трех объектов с различными эксцентриситетами орбит. Значения эксцентриситетов приведены на графике.

Значительную роль в изменении плотности атмосферы играет, как известно, солнечная активность, главным показателем которой может служить интенсивность $F_{10,7}$ потока радиоизлучения на волне 10,7 см. На рис. 12.5 показано изменение большой полуоси орбиты спутника с эксцентриситетом e= 0,015 под действием атмосферы при различном значении индекса солнечной активности $F_{10,7}$. В качестве единицы измерения $F_{10,7}$ выбрана величина, равная 10^{-22} вт/ м^{2}гц. Оценки получены с использованием модели Барлье (Barlier et al., 1978).

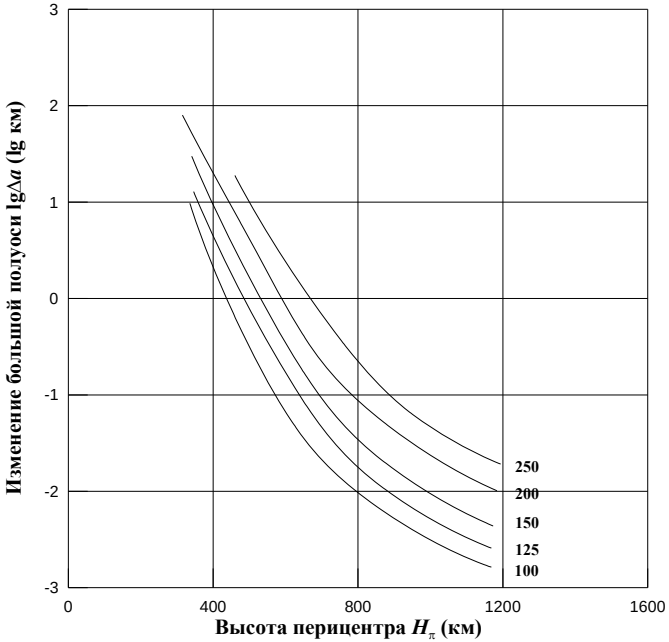


Рис. 12.5. Изменение большой полуоси при различных значениях индекса $F_{10,7}$

Таким образом, несмотря на значительное убывание влияния атмосферы с высотой, при потребности в высоких точностях прогнозирования атмосферное торможение нужно учитывать до высот

перигея 1300 км. В этих случаях необходимо также учитывать влияние Луны и Солнца.

12.7. Исследование орбитальных возмущений резонансных ИСЗ

Рассмотрим задачу исследования резонансных возмущений ИСЗ, движущихся в окрестности резонанса 1 к 2 с собственным вращением Земли. Период обращения таких объектов близок к 12 ч. По таким орбитам могут двигаться спутники системы глобального позиционирования GPS. Номинальный период обращения этих объектов составляет 11 ч 45 мин, но под действием возмущений период обращения этих объектов может приближаться к 12 ч.

Для того чтобы продемонстрировать влияние резонансных возмущений, будем рассматривать вместе с резонансным объектом с параметрами

$$T = 43085\,c, \quad e = 0,01, \quad i = 63,4°,$$

нерезонансный объект, отличающий от данного только периодом обращения $T = 41400\,c$.

Используя формулу 7.2, предварительно можно определить, что для ИСЗ рассматриваемого типа резонансными являются гармоники гепотенциала $V_{2,2}, V_{3,2}, V_{4,4}, V_{5,2}\ldots$

Явление резонанса по периоду обращения спутника для гармоники $V_{2,2}$ гоепотенциала демонстрируют графики на рис. 12.6. Приведенные оценки показывают, что область острого резонанса очень мала. На рис. 12.7–12.12 приведены результаты, которые позволяют оценить влияние резонансных гармоник $V_{2,2}, V_{3,2}\, V_{4,4}$ на движение рассматриваемого типа ИСЗ и зависимость этих возмущений от различного выбора начальной долготы восходящего узла и долготы перицентра от узла. Заштрихованные области на этих графиках – это области изменения короткопериодических возмущений.

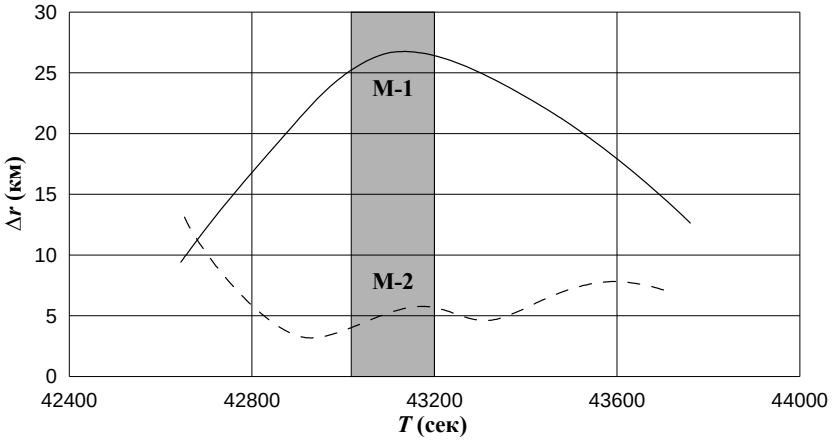


Рис. 12.6. Исследование области резонанса по периоду обращения спутника

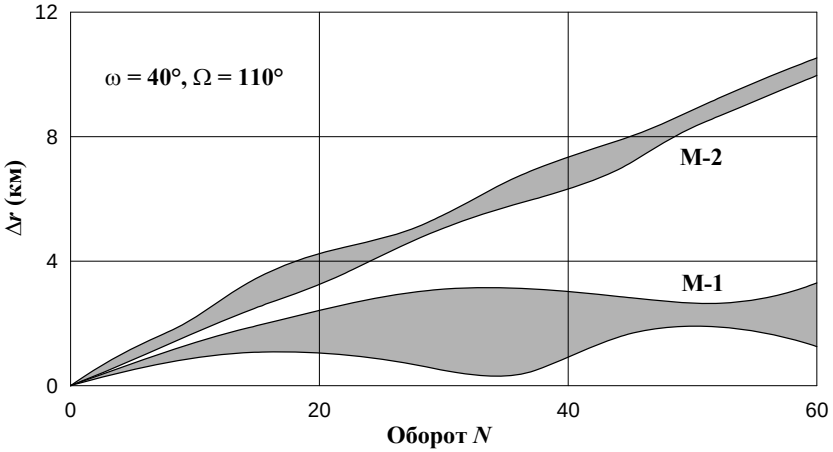


Рис. 12.7. Возмущения от гармоники $V_{2,2}$ как функции времени ($\Delta t = 30$ сут)

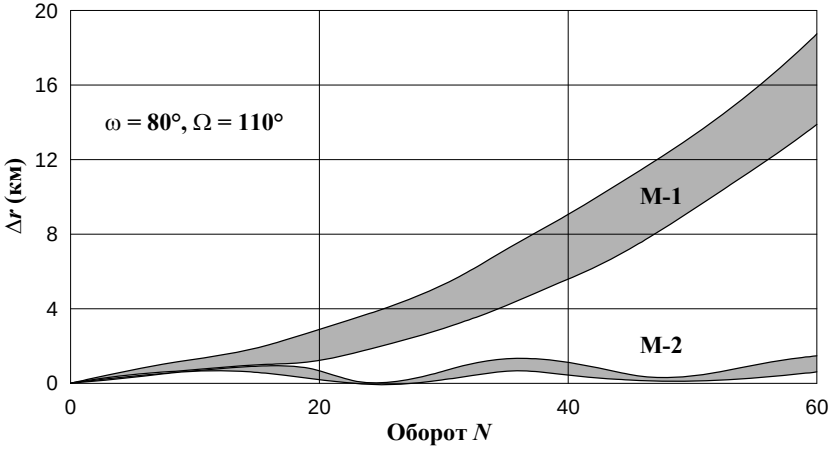


Рис. 12.8. Возмущения от гармоники $V_{2,2}$ как функции времени ($\Delta t = 30$ сут)

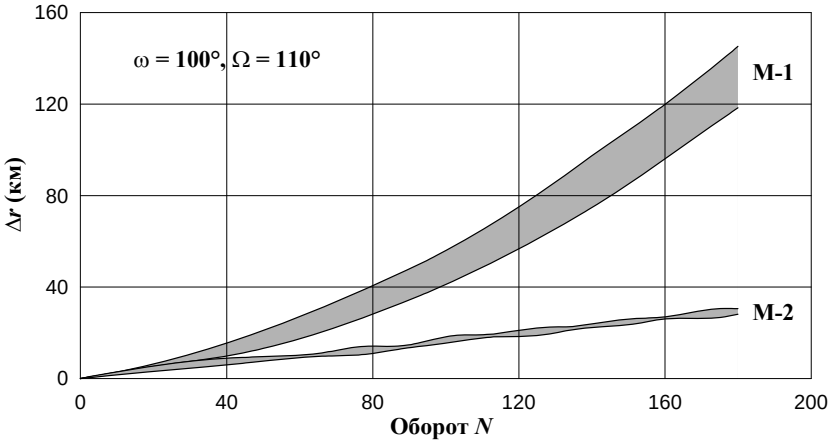


Рис. 12.9. Возмущения от гармоники $V_{2,2}$ как функции времени ($\Delta t = 90$ сут)

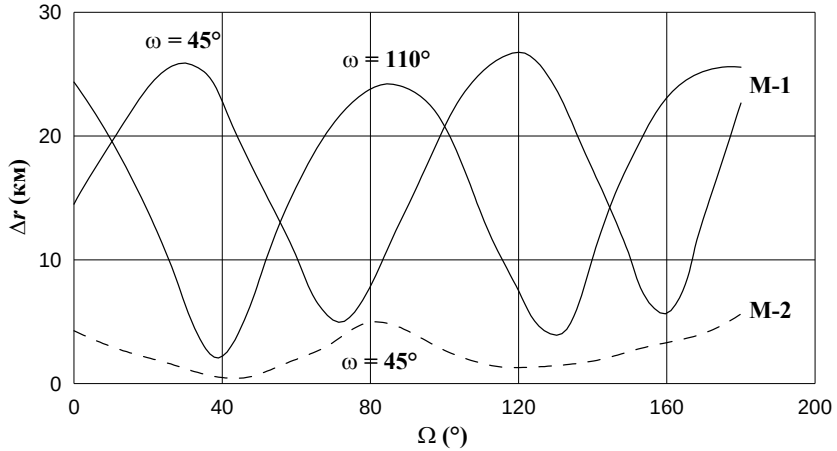


Рис. 12.10. Влияние гармоники $V_{3,2}$ в конце 30-суточного интервала как функция Ω

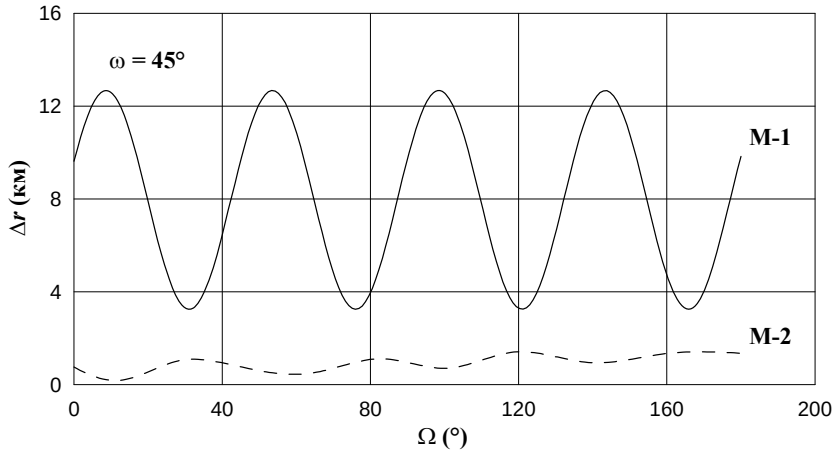


Рис. 12.11. Влияние гармоники $V_{4,4}$ в конце 30-суточного интервала как функция Ω

Интересно отметить, что при характерном возрастании в резонансном случае величина амплитуды долгопериодических колебаний не всегда одинакова, а зависит от выбора угловых переменных. Кроме того, наличие резонанса может приводить к возрастанию амплитуды короткопериодических возмущений.

На рис. 12.12 для того же спутника приведена оценка области изменения лунно-солнечных возмущений в зависимости от величины долготы узла спутника. Эта оценка показывает, что величина лунно-солнечных возмущений существенным образом зависит от положения орбиты спутника в пространстве.

Графики, приведенные на рис. 12.13–12.14, позволяют оценить влияние светового давления на движение 12-часового ИСЗ. Показана зависимость величины возмущений от отношения площади миделевого сечения S к массе спутника m, а также накапливание величины возмущений со временем при двух различных значениях этого отношения.

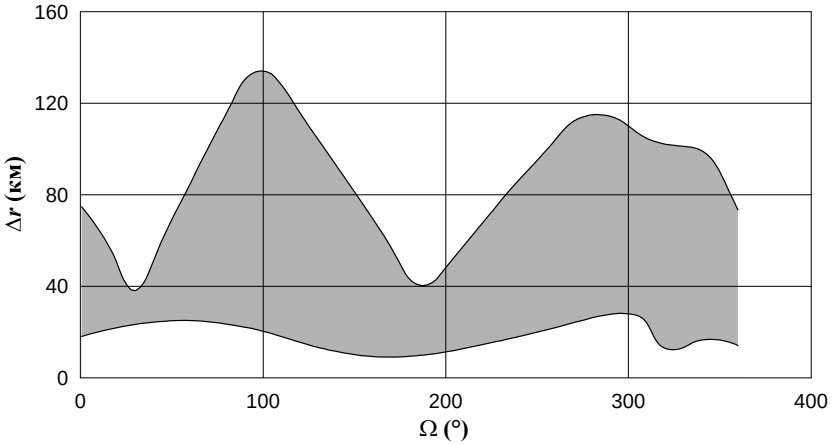


Рис. 12.12. Область возможных значений лунно-солнечных возмущений в движении 12-часового ИСЗ на 30-суточном интервале времени

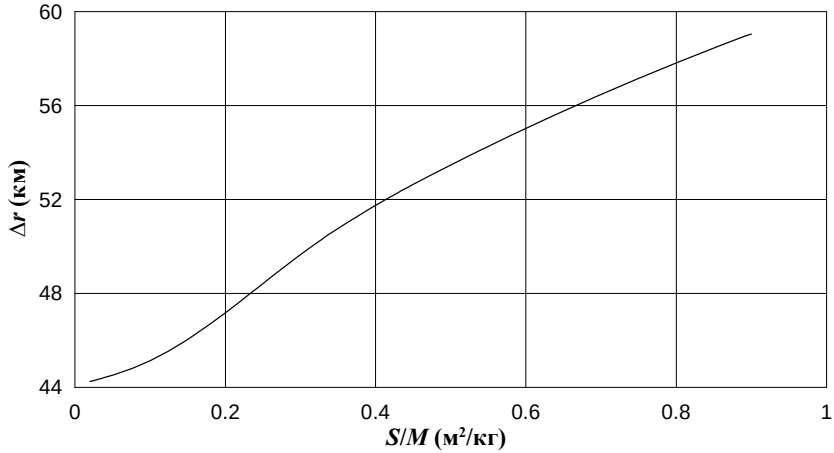


Рис. 12.13. Изменение величины возмущений от светового давления в движении 12-часового ИСЗ в зависимости от отношения S / m

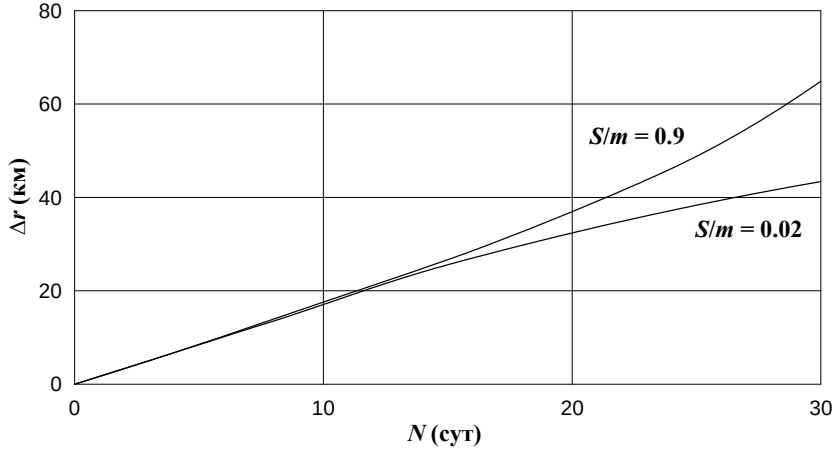


Рис. 12.14. Влияние возмущений от светового давления на движение 12-часового ИСЗ как функция времени

12.8. Определение трасс спутников

При моделировании процесса функционирования ИСЗ и КА очень часто возникает задача определения трассы спутника на поверхности Земли. Поскольку трасса спутника есть совокупность его подспутниковых точек, рассмотрим два способа определения координат подспутниковой точки: точный с использованием численного моделирования движения ИСЗ и приближенный – в рамках задачи двух тел.

1. Пусть нам известны величины: точный вектор положения спутника $\overline{\mathbf{x}}$, вычисленный с учетом всех возмущений с помощью «Численной модели движения ИСЗ», $\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5}\,[\text{рад./с}]$ – скорость среднего звездного вращения Земли, дата (юлианская) наблюдения.

Находим звездное время по формуле (1.5) из гл. 1:

$$h = H_0 + \omega(t_0 - \Delta H),$$

где t_0 – временной интервал от $0^h\ UT1$ на дату наблюдения до момента наблюдения, H_0 определяется формулой (1.6):

$$H_0 = 24110^s,54841 + 8640184^s,812866T_* + 0^s,093104T_*^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6}T_*^3.$$

Здесь T_*, как и раньше, задается выражением

$$T_* = \frac{d_*}{36525},$$

где d_* – число дней во всемирном времени от эпохи J2000.0.

Переход к вращающейся системе координат задается матрицей перехода

$$B = \begin{pmatrix} \cos h & \sin h & 0 \\ -\sin h & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор положения определяется формулой

$$\overline{\mathbf{y}} = A\overline{\mathbf{x}}.$$

Тогда координаты подспутниковой точки на поверхности Земли определяются формулами

$$\begin{cases} \lambda = \operatorname{arctg}\dfrac{y_2}{y_1}, \\ \varphi = \arcsin\dfrac{y_3}{r}, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$.

2. Пусть заданы элементы орбиты спутника. Величина H_0 определяется как в предыдущем случае.

Пусть $\overline{S} = h + \Omega$ есть модифицированное звездное время. Координаты подспутниковой точки на сфере единичного радиуса запишутся в виде

$$\begin{cases} y_1 = \cos u \cos\overline{S} + \cos i \sin u \sin\overline{S}, \\ y_2 = \cos u \sin\overline{S} + \cos i \sin u \cos\overline{S}, \\ y_3 = \sin i \sin u, \end{cases}$$

где i – наклон орбиты к экватору; u – аргумент широты; S – звездное время от эпохи прохождения начального меридиана через восходящий узел, имеем

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\lambda = \dfrac{-\cos u \sin\overline{S} + \cos i \sin U \cos\overline{S}}{\cos u \cos\overline{S} + \cos i \sin u \sin\overline{S}}, \\ \sin\varphi = \sin i \sin u, \end{cases}$$

откуда и получаем координаты подспутниковой точки.

Аргумент широты находится с использованием формулы

$$u = v + \omega,$$

где v – истинная аномалия; ω – аргумент перицентра.

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

где e – эксцентриситет, а эксцентрическая аномалия E определяется из уравнения Кеплера

$$E = M + e\sin E.$$

Здесь M – средняя аномалия, вычисляемая по формуле

$$M = n\left(t - t_0\right) + M_0,$$

где M_0 – средняя аномалия в начальный момент времени; t_0 и t – начальный и текущий моменты времени соответственно; среднее движение n определяется выражением

$$n = \sqrt{\frac{fM}{a^3}},$$

где a – большая полуось орбиты; fM – гравитационная постоянная.

Второй способ является приближенным, он позволяет находить координаты подспутниковой точки в рамках невозмущенной задачи двух тел. Однако эти же формулы могут быть использованы и для точного определения подспутниковой точки при задании оскулирующих возмущенных элементов на текущие моменты времени t. В этом случае M будет совпадать с M_0.

13. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ И ЭВОЛЮЦИИ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА

13.1. Проблема космического мусора

Быстрое освоение космического пространства с момента запуска первого искусственного спутника Земли привело к его замусориванию. Околоземное пространство засорено отслужившими свой срок космическими аппаратами, отработавшими верхними ступенями ракет-носителей, различными элементами конструкций типа переходников, крышек и т.п. Все это называется космическим мусором. Дополнительная засоренность возникает в результате преднамеренных или самопроизвольных взрывов на орбитах или при столкновении космических аппаратов (КА).

По данным (Рыхлова, 2003, Klinkrad, 2006) общее число объектов искусственного происхождения, зарегистрированных в околоземном космическом пространстве (ОКП) с момента запуска первого искусственного спутника Земли и по 1 января 2002 г., составляет 27044 объекта. Из них 18051 объект уже разрушился и сгорел в атмосфере. На орбитах на 1 января 2002 г. находилось 8993 объекта, причем среди них было всего 2853 космических аппарата и только 6% функционирующих, а все остальное – космический мусор. Это только каталогизированные объекты. Предполагается, что в космосе на сегодня находится около 140000 объектов размером от 5–10 см и более, и только 4% из них – работающие КА.

По типу орбит все каталогизированные объекты делятся на следующие классы или области:
LEO – low Earth orbist, т.е. низкоорбитальные объекты;
MEO – medium Earth orbits, объекты между LEO и GEO;
GEO – geostationary orbits, объекты на геостационарных орбитах;
GTO – GEO transfer orbits, объекты на орбитах перехода в область GEO;

HEO – highly eccentric orbits, объекты с большими эксцентриситетами орбит.

Последние два класса в значительной степени совпадают.

В процентном отношении все каталогизированные аппараты делятся по областям следующим образом: LEO (с высотами менее 2000 км) – 69,2%; MEO – 3,9%; GEO – 7,8%; HEO/GTO – 9,7%. И небольшая фракция, примерно 150 объектов, выведена на внеземные орбиты.

Всего зарегистрировано 188 взрывов и столкновений аппаратов на орбитах, 173 из них занесены в каталог NASA «History of on–ordit satellite fragmentation», который можно найти по адресу (http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov). Данными этого каталога мы будем пользоваться в своих модельных расчетах.

13.2. Математические модели распада космических аппаратов на орбите

Описание различных способов образования космического мусора и их математических моделей дано в книге Х. Клинкрада «Космический мусор. Модели и анализ риска» (Klinkrad, 2006). Мы остановимся здесь только на двух наиболее распространенных способах образования космического мусора – это взрыв аппарата на орбите и столкновение космических аппаратов. Предлагаемые алгоритмы составлены А.Г. Александровой (Бордовицына, Александрова, 2010) по анализу литературных источников и оттестированы по данным наблюдений.

Будем предполагать, что момент распада космического аппарата в результате изотропного взрыва координаты каждого фрагмента совпадают с координатами родительского тела, а компоненты скорости фрагмента определяются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} &= v_1 + \Delta v \cos\tau, \\ \dot{x}_{20} &= v_2 + \Delta v \sin\tau\cos\phi, \\ \dot{x}_{30} &= v_3 + \Delta v \sin\tau\sin\phi, \end{aligned} \qquad (13.1)$$

где v_1, v_2, v_3 – компоненты скорости родительского объекта в геоцентрической системе координат. Параметры Δv, τ и φ задают величину и направление вектора скорости фрагмента относительно родительского тела и рассматриваются как случайные величины, определяемые с помощью метода обратных функций по заданным функциям плотности распределения.

Плотности распределения для τ, φ и массы фрагментов задаются следующими формулами:

$$p(\varphi)=\frac{1}{2\pi},\ p(\tau)=\frac{\sin\tau}{2},\ p(\eta)=\frac{s-1}{1-\eta_{\max}^{1-s}}\eta^{-s}, \qquad (13.2)$$

где $s=0,83$; $\eta = m/m_{\min}$; $\eta \in (1, \eta_{\max}]$, $\eta_{\max} = m_{\max}/m_{\min}$; $m_{\min}, m_{\max}$ – минимальная и максимальная масса фрагмента.

Величина Δv связана случайным образом со средней скоростью $\Delta\overline{v}$:

$$\Delta v = \begin{cases} \Delta\overline{v}(0,1+0,6\sqrt{3y}) & 0,00 \le y \le 0,75, \\ \Delta\overline{v}(1,3-0,6\sqrt{1-y}) & 0,75 \le y \le 1,00, \end{cases} \qquad (13.3)$$

где y – случайная величина от 0 до 1 с равномерной плотностью распределения. Средняя скорость $\Delta\overline{v}$ для двух рассматриваемых здесь моделей распада (изотропный взрыв и столкновение) задается следующими формулами:

а) взрыв

$$\log\Delta\overline{v} = -0,0676(\log d)^2 - 0,804\log d - 1,514, \qquad (13.4)$$

б) столкновение

$$\log\left(\frac{\Delta\overline{v}}{\mathrm{V}}\right) = \begin{cases} A_c + B_c\left[\log(d/d_m)\right] & d \ge d_m, \\ A_c & d < d_m, \end{cases} \qquad (13.5)$$

где $d_m = E^{\frac{1}{3}}/C_c$, V, E – относительная скорость и кинетическая энергия ударника; A_c, B_c, C_c – постоянные величины, имеющие следующие численные значения:

$$A_c = -0{,}125,$$
$$B_c = -0{,}0676,$$
$$C_c = 8{,}01 \cdot 10^8,$$

а d – диаметр фрагмента (м). В предположении, что фрагмент имеет сферическую форму, диаметр определяется по формуле $d=2\sqrt{A/\pi}$, где A – площадь поперечного сечения фрагмента (м^2), которая находится из логарифмо-нормального распределения

$$p(A) = \frac{1}{0{,}8\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{A} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln A - \ln \overline{A}}{0{,}8}\right)^2},$$

а масса фрагмента m (кг) находится из соотношения

$$m = \begin{cases} 62{,}013\,\overline{A}^{1{,}13} & \overline{A} \geq 8{,}04 \cdot 10^{-5}, \\ 2030{,}33\,\overline{A}^{1{,}5} & \overline{A} \leq 8{,}04 \cdot 10^{-5}, \end{cases}$$

где $\overline{A}$ – средняя площадь поперечного сечения фрагмента (м^2).

Формула (13.5) справедлива только в случае катастрофического распада. Является ли столкновение катастрофическим, определяется из условия

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{m_t} \leq 0{,}1, \text{ режим кратеризации}, \\ \dfrac{\alpha}{m_t} \geq 0{,}1, \text{ катастрофический распад}. \end{cases}$$

Величина α определяется по формуле

$$\alpha = 1{,}15 V^2 m_p.$$

При катастрофическом распаде $m_e = m_t + m_p$, а в режиме кратеризации $m_e = \alpha$, где m_e – извергнутая масса; m_t – масса космического аппарата; m_p –масса ударника (кг).

13.3. Вычисления пространственной плотности фрагментов

Для определения плотности пространство, занятое частицами, разбивается на ячейки с определенным шагом по расстоянию от центра Земли r (км), по прямому восхождению α (град) и склонению δ (град) или по широте и долготе.

Для построения алгоритма должны быть заданы следующие параметры:

– интервал времени, отсчитываемый от момента распада КА;

– прямое восхождение, склонение (или широта и долгота) и радиус-вектор фрагментов на каждой выбранной орбите;

– для каждой непустой ячейки её нижние границы по прямому восхождению, склонению (или широте и долготе) и высоте, объем ячейки, пространственная плотность и число фрагментов в ней.

Пространственная плотность фрагментов в заданный момент времени определяется как отношение числа фрагментов, попавших в ячейку пространства, к ее объему.

13.4. Численное моделирование распределения и эволюции орбит групп фрагментов распада

Вычисленные по координатам и скоростям параметры орбит индивидуальных фрагментов позволяют построить статистические одномерные распределения для каждого из шести элементов и двумерное распределение по большой полуоси и эксцентриситету. Последнее распределение используется для выбора одной для каждой ячейки распределения характерной орбиты, в качестве которой принимается первая из общего списка орбит, попавшая в заданную ячейку. Каждой из выбранных орбит может быть приписан вес, равный числу фрагментов, попавших в заданную ячейку двумерного распределения (в процентах от общего числа фрагментов).

Информация о выбранных орбитах служит входной информацией к программе численного интегрирования, которая используется для вычисления элементов орбит фрагментов на

произвольные моменты времени с учетом заданного набора возмущающих сил.

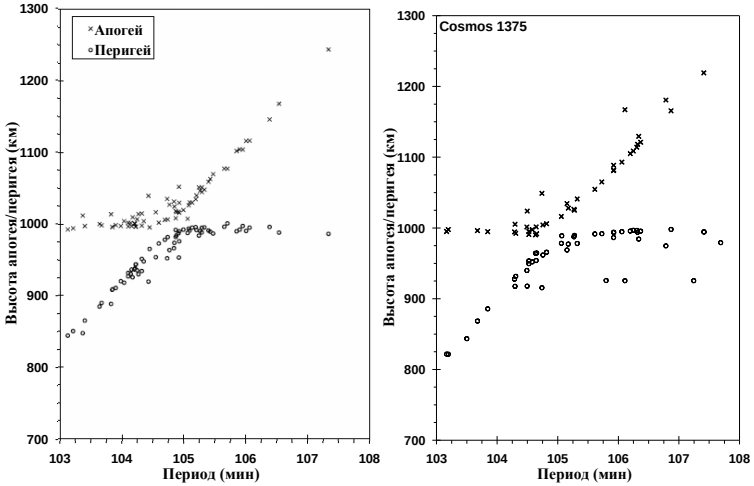
Для исследования эволюции орбит фрагментов могут быть использованы численная или аналитическая модели движения ИСЗ, описанные в предыдущих разделах. Главные требования к этим моделям – высокая оперативность и устойчивое сохранение заданной (как правило, не очень высокой) точности прогнозирования на больших интервалах времени.

13.5. Тестирование модели взрыва по данным наблюдений

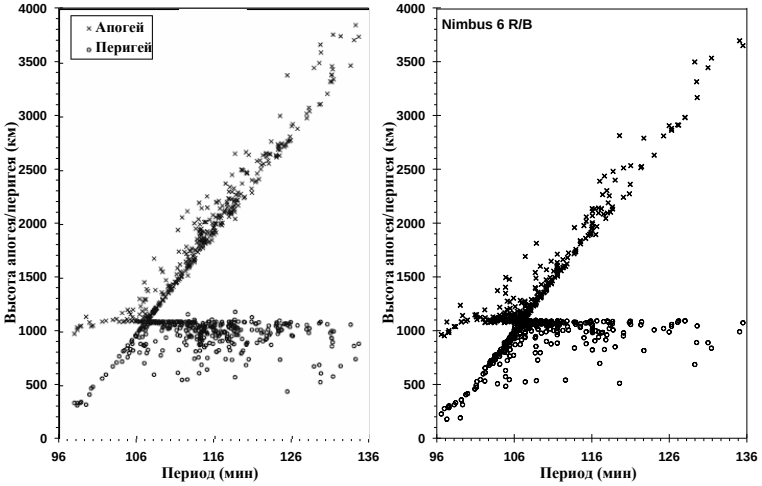
Результаты наблюдений фрагментов распада космического аппарата на орбите в каталоге NASA представлены в виде графиков зависимости высоты апогея/перигея фрагментов от периода обращения.

По данным, полученным в результате моделирования, были вычислены необходимые параметры и построены аналогичные графики (рис. 13.1, 13.2).

Сравнивая результаты моделирования с данными наблюдений, мы видим, что модели распада довольно точно отражают действительность.

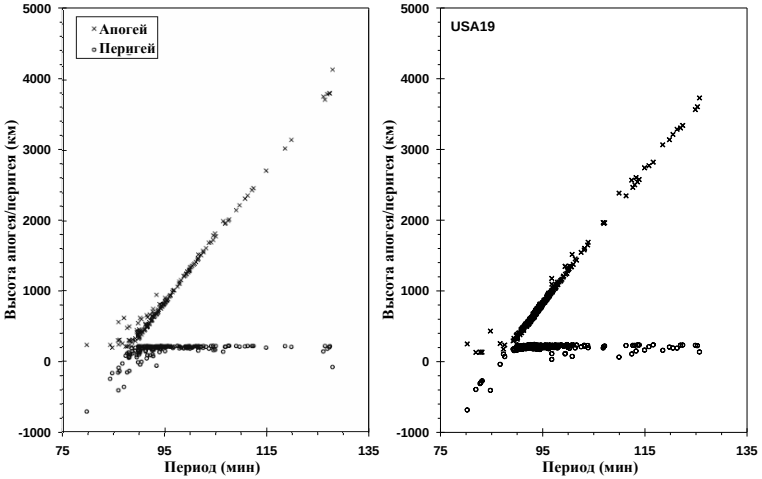


а) КА Космос 1375

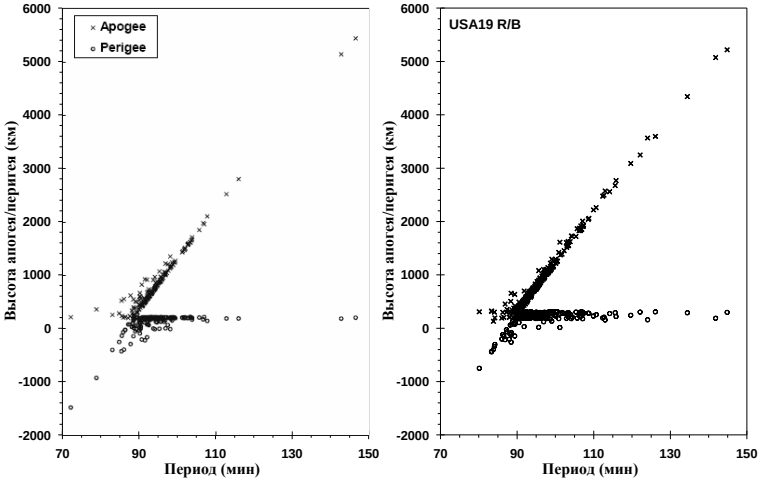


б) КА Nimbus 6 R/B

Рис. 13.1. Распределение фрагментов распада КА в результате взрыва по данным моделирования (справа) и наблюдений (слева)



а) USA 19



б) USA 19 R/B

Рис. 13.2. Распределение фрагментов распада КА в результате столкновения по данным моделирования (справа) и наблюдений (слева

13.6. Примеры численного моделирования распределения и эволюции фрагментов распада космических аппаратов на орбитах

13.6.1. Моделирование взрыва на геостационарной орбите

Первым этапом при моделировании было извлечение фрагментов заданной массы, удовлетворяющей распределению масс. При этом массы варьировались в пределах от 0,05 г до 10 кг. Второй этап – расчет углов τ и ϕ, которые задают направления векторов скоростей, по заданным функциям плотности распределения. Третий этап – вычисление скорости фрагмента относительно эпицентра взрыва. Последним этапом при моделировании является нахождение абсолютных скоростей фрагментов.

В результате распада образовалось облако (рис. 13.3), состоящее из 270 частиц с массами от 0,05 г до 10 кг. При этом максимальная скорость, соответствующая минимальной массе, составила 0,1 км/с, а минимальная скорость – 0,01 км/с.

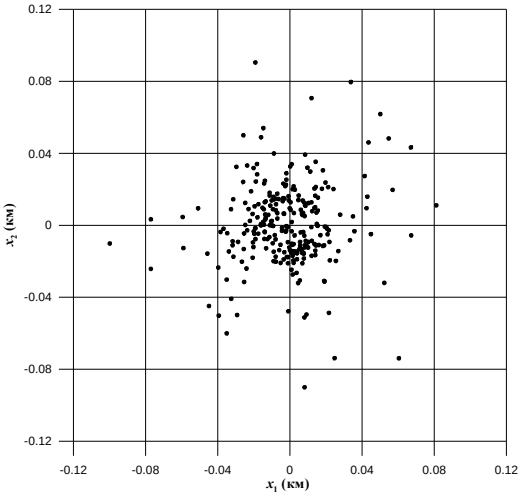


Рис. 13.3. Распределение фрагментов взрыва через 1 с

13.6.2. Анализ динамической эволюции распределения фрагментов распада

Моделирование эволюции распада производилось на интервалах времени до 365 сут На рис. 13.4, 13.5 показаны конфигурации распределения фрагментов в конце первых 6 сут, когда наступило замыкание облака фрагментов, и через год после взрыва. На коротких интервалах времени фрагменты постепенно распространяются вдоль геостационарной орбиты, хотя большинство из них, особенно обладающие наибольшей массой, остаются вблизи номинального родительского тела.

Через год мы видим равномерное распределение фрагментов распада.

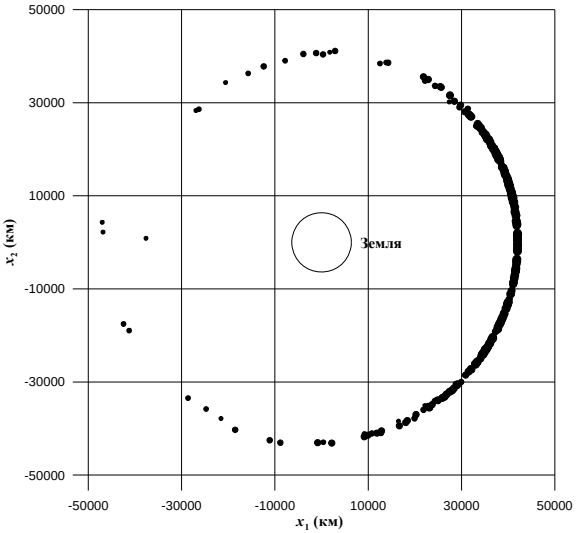


Рис. 13.4. Распределение фрагментов через 6 сут

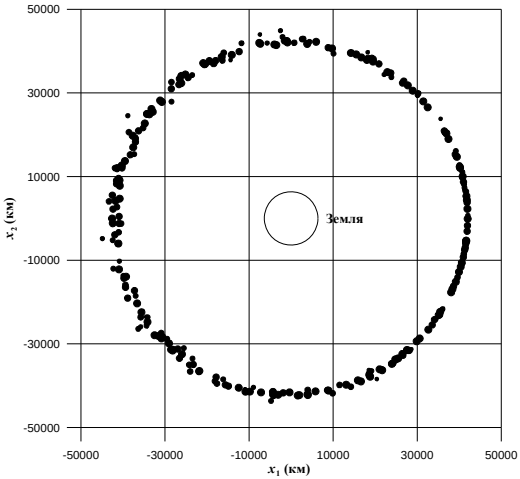


Рис. 13.5. Распределение фрагментов через 1 год

13.6.3. Исследование динамической эволюции и распределения фрагментов распада космических аппаратов, движущихся по вытянутым орбитам

В качестве КА, движущихся по вытянутым орбитам, были выбраны реальные космические аппараты Cosmos 862 и Cosmos 1317 (табл. 13.1), взорвавшиеся на орбитах. Главная особенность орбит этих объектов состоит в том, что в перигее фрагменты распада того и другого объектов проходят через верхние слои атмосферы. На рис. 13.6, 13.7 мы приводим данные об орбитальной эволюции фрагментов распада этих объектов от момента распада до полного выгорания.

Таблица 13.1

Данные о взорвавшихся объектах

N	Наименование объекта	Момент взрыва День, месяц, год	Высота апогея, км	Высота перигея, км	Наклонение, °
1	COSMOS 862	15 03 1977	39645	765	63,2
2	COSMOS 1317	25 01 1984	39055	1315	62,8

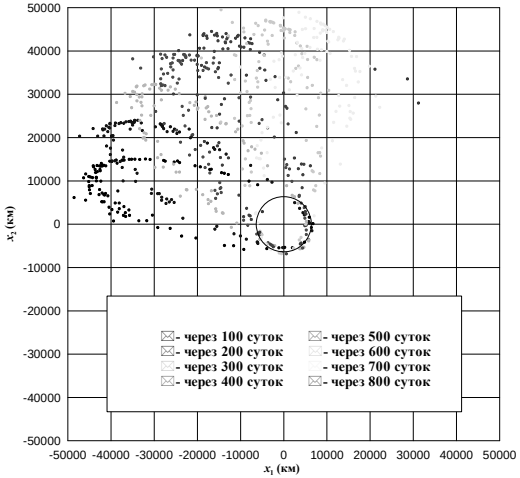


Рис. 13.6. Орбитальная эволюция фрагментов КА COSMOS 862 от момента взрыва до полного выгорания

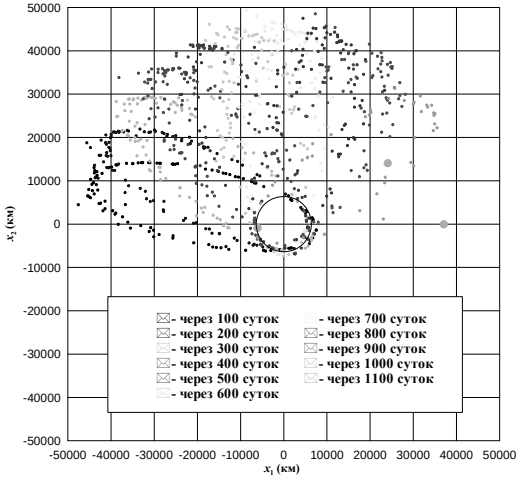


Рис. 13.7. Орбитальная эволюция фрагментов КА COSMOS 1317 от момента взрыва до полного выгорания

Как показывают графики, приведенные на рис. 13.6. и 13.7, полное выгорание КА Cosmos 862 происходит после 800 сут, КА Cosmos 1317 – после 1100 сут с момента взрыва.

14. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОКОЛОЗЕМНОГО ОРБИТАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

14.1. Вводные замечания

В последние 20 лет главным трендом динамики стало признание потенциальной хаотичности всех динамических систем, вытекающее из ляпуновской неустойчивости описывающих эти системы математических моделей. Наличие или отсутствие реальной хаотизации движения зависят от совокупности действующих сил, причем важную, можно сказать определяющую, роль в этом процессе играют разнообразные частотные резонансы.

Как известно, все динамические системы в небесной механике – это так называемые сильно возмущенные системы. В этих системах помимо основных частот, связанных со средним движением по орбите вокруг центрального тела, есть еще вековые частоты, обусловленные влиянием возмущающих факторов. Резонансы всех этих частот и создают тот или иной динамический портрет любой изучаемой системы небесных тел.

В полной мере это относится и к системе околоземных космических объектов искусственного происхождения, которая в течение последних 50 лет очень интенсивно пополняется отработавшими космическими аппаратами, последними ступенями ракет-носителей, разгонными блоками и фрагментами, образовавшимися в результате распада объектов на орбите. Все эти объекты движутся по законам небесной механики и подчиняются тем динамическим закономерностям, которые характерны для соответствующей области ОКП.

Отсюда, собственно, и вытекает необходимость в знании динамической структуры ОКП.

Рассмотрим один из возможных подходов к исследованию динамической структуры ОКП. Он состоит из двух этапов. На первом проводится анализ области орбитального пространства мето-

дом ляпуновских характеристик, что позволяет определить характер движения. На втором этапе выявляются резонансы, имеющие место в орбитальном движении объектов данной области. Такой подход дает возможность не только определить характер движения, но и выяснить его причину.

14.2. Метод ляпуновских характеристик

Пусть динамическая система определится системой уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t), \alpha), \tag{14.1}$$

где $\mathbf{x}(t)$ – шестимерный вектор состояния системы, а α – вектор параметров модели сил. Пусть далее $\phi(t) = \phi(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ есть решение системы (14.1) при начальных условиях $(t_0, \mathbf{x}_0)$, тогда ляпуновское характеристическое число (LCN) определится как

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\left\|\boldsymbol{\delta}_\phi(t)\right\|}{\left\|\boldsymbol{\delta}_\phi(t_0)\right\|}, \tag{14.2}$$

где $\boldsymbol{\delta}_\phi(t)$ – так называемый касательный вектор, который измеряет эволюцию начального бесконечно малого отклонения $\boldsymbol{\delta}_\phi(t_0) \equiv \boldsymbol{\delta}_0$ между решением $\phi(t)$ и очень близкой орбитой. Эта эволюция с точностью до бесконечно малых первого порядка может быть описана вариационным уравнением вида

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_\phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\delta}_\phi(t) = \mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t)))\boldsymbol{\delta}_\phi(t), \tag{14.3}$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t))) = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}(\phi(t))$ есть матрица Якоби системы дифференциальных уравнений. Заметим, что параметр LCN может быть представлен также в интегральной форме

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}_\phi(s)}{\delta_\phi(s)} \mathrm{d}s, \tag{14.4}$$

причем $\delta_\phi = \left\|\boldsymbol{\delta}_\phi\right\|$, $\dot{\delta}_\phi = \dot{\boldsymbol{\delta}}_\phi \cdot \boldsymbol{\delta}_\phi / \delta_\phi$.

Прямое использование параметра LCN в задачах небесной механики затруднительно, поскольку не позволяет четко отделить регулярное движение от хаотического. Поэтому вместо параметра LCN используются его более удобные модификации.

Наиболее удобным нам представляется параметр MEGNO (среднее экспоненциальное расхождение близких орбит) $Y_\phi(t)$ (Cincotta et al., 2003), который представляет собой взвешенную по времени интегральную форму LCN:

$$Y_\phi(t) = \frac{2}{t}\int_0^t \frac{\dot{\delta}_\phi(s)}{\delta_\phi(s)} s\mathrm{d}s, \tag{14.5}$$

а средняя величина $\overline{Y}_\phi(t)$ получается как

$$\overline{Y}_\phi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t Y_\phi(s)\mathrm{d}s\,. \tag{14.6}$$

Эволюция $\overline{Y}_\phi(t)$ во времени позволяет выявить различный характер орбит. Так, например, известно, что для квазипериодических (регулярных) орбит $\overline{Y}_\phi(t)$ осциллирует около 2. Более того, как показано в (Cincotta et al, 2003), для квазипериодических орбит $\overline{Y}_\phi(t)$ всегда равно 2, а для устойчивых орбит типа гармонического осциллятора $\overline{Y}_\phi(t) = 0$.

В задачах численного моделирования целесообразно (Valk, Lemaitre, Anselmo, 2008) заменить интегральные соотношения (14.5) и (14.6) дифференциальными уравнениями и интегрировать совместно с уравнениями движения (14.1) и уравнениями в вариациях (14.3) и еще два уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y = \frac{\dot{\boldsymbol{\delta}}\cdot\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\delta}} t, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w = 2\frac{y}{t},$$

причем величины y и w связаны с параметрами MEGNO как

$$Y(t) = 2y(t)/t, \quad \overline{Y}(t) = w(t)/t\,.$$

В.А. Шефером и А.М. Коксиным (2013) получены уравнения, которые позволяют оценить среднее экспоненциальное расхожде-

ние близких орбит OMEGNO по вариации $\boldsymbol{\delta}_{\perp}(t)$ – составляющей вектора $\boldsymbol{\delta}(t)$, ортогональной к направлению фазового потока в точке $\mathbf{x}(t)$.

Совместное использование величин MEGNO и OMEGNO позволяет очень точно разделить области регулярного и хаотического движений рассматриваемого объекта. Комплекс программ для исследования хаотичности в динамике ИСЗ описан в работе (Бордовицына, Александрова, Чувашов, 2010).

Метод ляпуновских характеристик может использоваться для так называемого меппинга (картирования) орбитального пространства. Такой подход позволяет разделить области орбитального или фазового пространства по признаку наличия или отсутствия в них хаотичности.

Наглядным примером такого подхода является MEGNO-mapping (рис. 14.1–14.4) фазового пространства $\{a, \lambda\}$ геостационарной зоны (Александрова, Чувашов, Бордовицына, 2011). Здесь a – большая полуось орбиты объекта; λ – восточная долгота спутника в системе координат, вращающейся вместе с Землей.

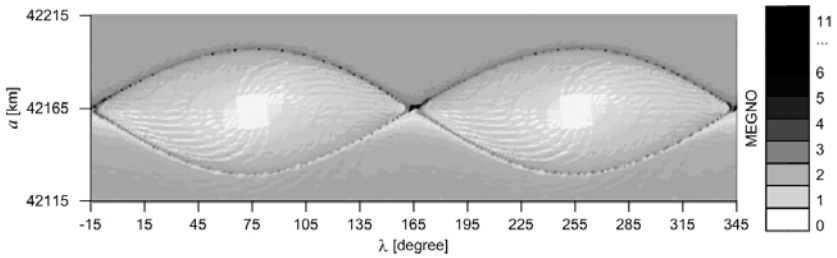


Рис. 14.1. MEGNO-анализ зоны ГЕО на 30-летнем интервале времени. Учитываются гармоники второго порядки и степени

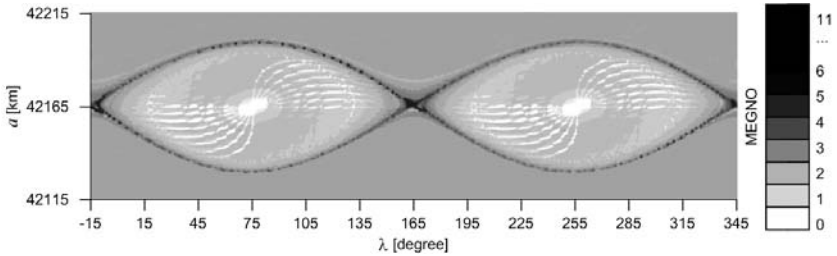


Рис.14.2. MEGNO-анализ зоны ГЕО на 100-летнем интервале времени. Учитываются гармоники второго порядки и степени

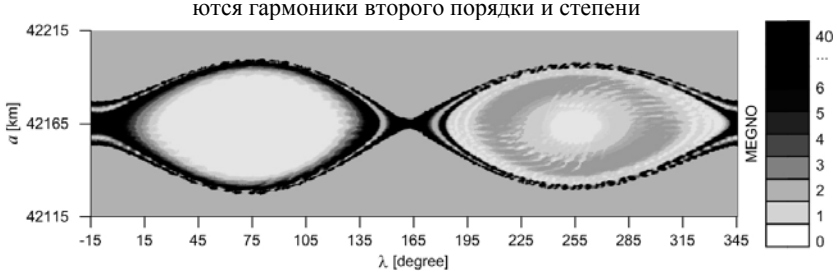


Рис. 14.3. MEGNO-анализ зоны ГЕО на 30-летнем интервале времени. Учитываются гармоники четвертого порядки и степени

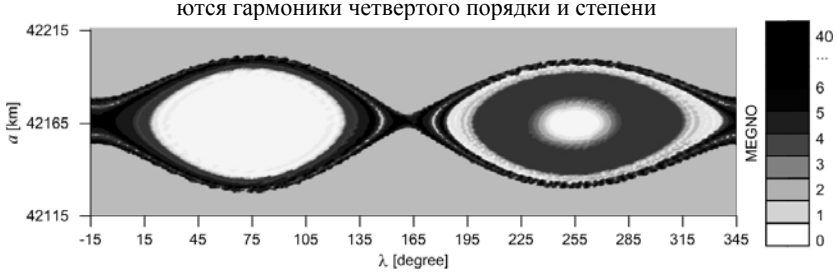


Рис. 14.4. MEGNO-анализ зоны ГЕО на 100-летнем интервале времени. Учитываются гармоники четвертого порядки и степени

На рис. 14.1 и 14.3 представлены результаты MEGNO-анализа зоны ГЕО на 30-летнем интервале времени, а на рис. 14.2 и 14.4 – на 100-летнем интервале времени. При построении рис. 14.1 и 14.2 учитывались возмущения только от гармоник второго порядка и степени, а при построении рис. 14.2 и 14.4 – влияние гармоник до 4-го порядка и степени.

Приведенные на рис. 14.1–14.4 MEGNO-карты позволяют получить большое количество информации о динамике объектов зоны ГЕО.

Как известно, объекты зоны ГЕО движутся в околоэкваториальной области в резонансе 1:1 со скоростью вращения Земли и находятся в так называемом либрационном резонансе. На рисунках четко видны либрационные зоны и сепаратрисы, которые отделяют эти зоны от зон с другими типами движения. Эти рисунки говорят о том, что тип движения зависит от долготы начальной точки, из которой стартует объект. Хорошо видно, что минимальные значения параметра приходятся на области в окрестности устойчивых точек либрации $75°$ и $255°$, максимальные – на области неустойчивых $165°$ и $345°$. Зона хаотичности простирается вдоль сепаратрис. Со временем происходит расширение зоны хаотичности в основном за счет объектов с двумя типами движения: либрацией относительно двух устойчивых точек и квазипериодическим движением. Данные, приведенные на рис. 14.1–14.4, показывают, что влияние гармоник более высоких порядков существенно меняет картину эволюции орбит. Расширяются зоны хаотичности вдоль сепаратрис, появляются зоны хаотичности внутри области либрационного движения, связанной с устойчивой точкой либрации $255°$. Появление дополнительных областей с неустойчивым движением объясняется влиянием резонансов более высоких порядков. Причем в окрестности точки $75°$ влияние резонансов высоких порядков очень мало, что, как выяснилось (Александрова, Чувашов, Бордовицына, 2011), связано с разной степенью влияния гармоник геопотенциала на объекты, находящиеся в окрестностях устойчивых точек либрации.

14.3. Численно-аналитическая методика выявления вековых резонансов

Численно-аналитическая методика выявления вековых резонансов была сформулирована в (Бордовицына, Томилова, Чува-

шов, 2011). Она состоит в вычислении условий возникновения резонансов.

Осредним возмущающую функцию (7.14) по быстрым переменным, которыми являются средние движения спутника и третьего тела. Аргументы возмущающих функций для однократно и двукратно осредненной задачи будут иметь вид

$$\begin{gathered}\underline{\psi} = (l-2p'+q')M' - (l-2p)\omega + (l-2p')\omega' - \overline{m}(\Omega-\Omega'), \\ \underline{\underline{\psi}} = (l-2p')\omega' - (l-2p)\omega - \overline{m}(\Omega-\Omega'),\end{gathered} \tag{14.7}$$

где

$$M'=M'_0+\overline{n}'\left(t-t_0\right),\ \ \omega'=\omega'_0+\dot{\omega}'\left(t-t_0\right),\ \ \Omega'=\Omega'_0+\dot{\Omega}'\left(t-t_0\right),$$
$$\omega=\omega_0+\dot{\omega}\left(t-t_0\right),\ \ \Omega=\Omega_0+\dot{\Omega}\left(t-t_0\right).$$

Тогда условие возникновения резонанса может быть сформулировано как

$$\dot{\underline{\psi}} \approx 0, \quad \dot{\underline{\underline{\psi}}} \approx 0. \tag{14.8}$$

Выражения (14.8) принято называть резонансными соотношениями. Вековые частоты в движении спутника

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2} + \dot{\Omega}_L + \dot{\Omega}_S,\ \ \dot{\omega} = \dot{\omega}_J + \dot{\omega}_L + \dot{\omega}_S \tag{14.9}$$

определяются влиянием второй зональной гармоники геопотенциала (формулы 5.3 и 5.6), а также влиянием третьего тела – Луны (L) и Солнца (S) – и вычисляются по формулам (7.16).

Процедура выявления того или иного резонанса в орбитальной динамике объекта сводится к исследованию степени малости соотношений (14.8) для различных наборов индексов l, p, p', q' и $\overline{m}$. Далее для тех же значений индексов рассматривается эволюция во времени соотношений (14.7), так называемых критических аргументов. Это необходимо (Мюрей, Дермот, 2009; Морбидели, 2014) для того, чтобы установить, какой характер имеют резонансные конфигурации: устойчивый при либрационном изменении соотношений (14.7) или неустойчивый при циркуляционном изменении. При исследовании долговременной эволюции во времени соотношений (14.7) и (14.8) значения элементов орбиты спутника определяются с численным моделированием.

Полагая индексы, равными $l = 2,\quad p, p', \bar{m} = 0,\ 1,\ 2,$ $q, q' = -1,\ 0,\ 1,$ мы получим все резонансные соотношения низких порядков, которые можно, следуя (Rosengren et al., 2015), разделить на 4 группы, или класса: резонансные соотношения, связанные со средним движением Солнца, резонансные соотношения, связанные со средним движением Луны, апсидально-нодальные резонансы, связанные с Солнцем, и аналогичные резонансы, связанные с Луной, причем геометрический резонанс Лидова–Козаи $\dot{\omega} \approx 0$ (Лидов, 1961; Kozai, 1962) являтся частным случаем апсидально-нодальных резонансов. Полный набор апсидально-нодальных резонансов приведен в табл. 14.1. Каждая группа резонансных соотношений, связанных со средним движением третьего тела, насчитывает по 48 членов. Впервые 16 типов вековых резонансных соотношений низких порядков были получены в (Cook, 1962).

Таблица 14.1

Апсидально-нодальные резонансы

Типы резонансных соотношений	Типы резонансных соотношений	Типы резонансных соотношений
$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) - \dot{\omega} - \dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\Omega - \Omega'_{S,L}\right) - 2\dot{\omega}'_{S,L}$
$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) + 2\dot{\omega}$	$\left(\Omega - \Omega'_{S,L}\right) + 2\dot{\omega}'_{S,L}$
$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) - 2\dot{\omega}$	$\left(\Omega - \Omega'_{S,L}\right) + 2\dot{\omega}'_{S,L}$
$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) + \dot{\omega}$	$\dot{\omega} - \dot{\omega}'_{S,L}$
$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) + \dot{\omega} + \dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) - \dot{\omega}$	$\dot{\omega} + \dot{\omega}'_{S,L}$
$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) - 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\Omega - \Omega'_{S,L}\right) + \dot{\omega}'_{S}$	$\dot{\omega}$
$\left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{S,L}\right) + 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_{S,L}$	$\left(\Omega - \Omega'_{S,L}\right) - \dot{\omega}'_{S,L}$	

Если считать, как это делается, например, авторами работ (Rosengren et al., 2015, Daquin et al., 2016), что величины $\dot{\omega}'_S$ и $\dot{\Omega}'_S$, связанные с прецессией орбиты Земли, малы, формулы, приведен-

ные в табл. 14.1 для апсидально-нодальных резонансов, связанных с Солнцем, существенно упрощаются.

Динамические портреты вековых резонансов строятся в фазовой плоскости (Мюрей, Дермотт, 2009; Морбиделли, 2014):

$$x = e\cos\psi, \quad y = e\sin\psi,$$

где e – эксцентриситет орбиты спутника; ψ – критический аргумент, представленный в виде (14.1). Они используются в данной методике для определения границ устойчивости резонанса.

14.4. Численно-аналитический эксперимент

С помощью описанной выше методики были решены некоторые интересные задачи по исследованию динамической структуры околоземного орбитального пространства. Коротко эти результаты можно сформулировать следующим образом (Бордовицына, Томилова, 2016).

Выявлены вековые резонансы и проведен анализ их распространенности в околоземном орбитальном пространстве в диапазоне больших полуосей от 8000 до 65000 км и наклонений от 0 до 90 градусов, а также исследование влияния вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию околоземных объектов.

Исследована зависимость возрастания эксцентриситета орбиты спутника от величины наклонения и долгот восходящего узла и перицентра.

Показано, что среди вековых резонансов, связанных со средним движением третьего тела, наибольшее влияние на движение объектов оказывают вековые резонансы, связанные со средним движением Солнца, а среди апсидально-нодальных резонансов – геометрический резонанс Лидова–Козаи.

Показано, что область наибольшего влияния вековых резонансов начинается от значений большой полуоси 20000 км и наклонений 45°, причем в области орбитального пространства с большими полуосями от 40000 км и выше и наклонениями 55–90° на движение объектов одновременно влияет большое количество вековых резонансов. Эволюция приполярных орбит с наклонениями 80 и

90° градусов является особенно сложной, причем орбитальная эволюция объектов с наклонениями 90° градусов является катастрофичной при любых значениях эксцентриситетов. Кроме того, движение таких объектов является хаотичным.

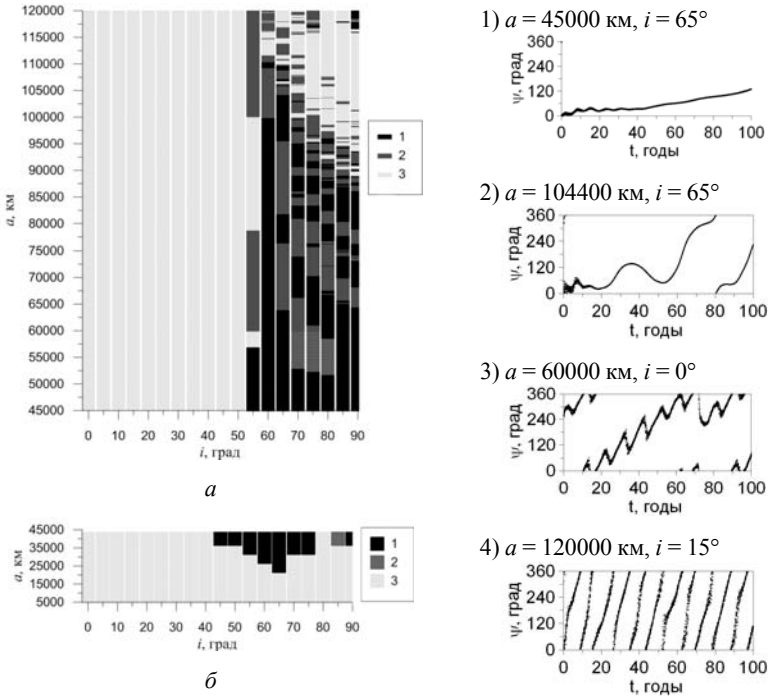
Наложение нескольких устойчивых вековых резонансов различного спектрального класса не приводит к возникновению хаотичности, в то же время вхождение объекта в орбитальный резонанс с вращением Земли при наличии вековых резонансов может сопровождаться возникновением хаотичности в движении объектов. Хаотичность возникает при наложении на устойчивый вековой резонанс резонансов, для которых критический аргумент меняет либрационный характер изменения на циркуляционный и обратно.

Проведен анализ динамической эволюции отработавших объектов спутниковых радионавигационных систем (СРНС) ГЛОНАСС, GPS и BEIDOU IGSO и показано, что влияние вековых резонансов существенно меняет характер движения этих объектов. Показано, что при выборе орбит утилизации необходимо учитывать влияние вековых резонансов, так как они оказывают значительное воздействие на орбитальную эволюцию отработавших космических аппаратов, которое проявляется, главным образом, в возрастании эксцентриситета орбиты.

14.5. Резонанс Лидова–Козаи и его влияние на орбитальную эволюцию

Для выявления распространенности резонанса Лидова–Козаи в околоземном орбитальном пространстве были взяты результаты численного эксперимента, охватывающие область орбитального пространства в диапазоне больших полуосей от 8000 до 120000 км и наклонениями от 0 до 90°. Для диапазона больших полуосей от 8000 до 45000 км был выбран шаг, равный 1000 км, от 45000 до 60000 км – 200 км, и от 60000 до 120000 км – 100 км. Шаг по наклонению составил 5°. Эксцентриситет был выбран равным 0,001 (Александрова, Бордовицына, Томилова, 2016).

Для каждого модельного объекта была определена орбитальная эволюция основных элементов его орбиты: большой полуоси *a,* эксцентриситета *e* и наклонения *i* на интервале времени 100 лет. Для расчета динамической эволюции использовался программный комплекс «Численная модель движения систем ИСЗ». При этом учитывались следующие возмущающие факторы: несферичность Земли, притяжение Луны и Солнца. Уравнения движения интегрировались методом Эверхарта 19-го порядка. Были построены динамические портреты резонансов, содержащие сведения об изменениях на столетнем интервале времени резонансного соотношения и критического аргумента, а также фазовые портреты резонанса в плоскости, связывающей изменения эксцентриситета и критического аргумента.



а *б*

Рис. 14.5. Распределение различных типов резонанса Лидова–Козаи в околоземном орбитальном пространстве по параметрам *a*, *i*

На рис. 14.5, *а*, *б* даны схемы распределения различных типов, резонанса Лидова–Козаи в зависимости от величины большой полуоси и наклонения на начальный момент времени.

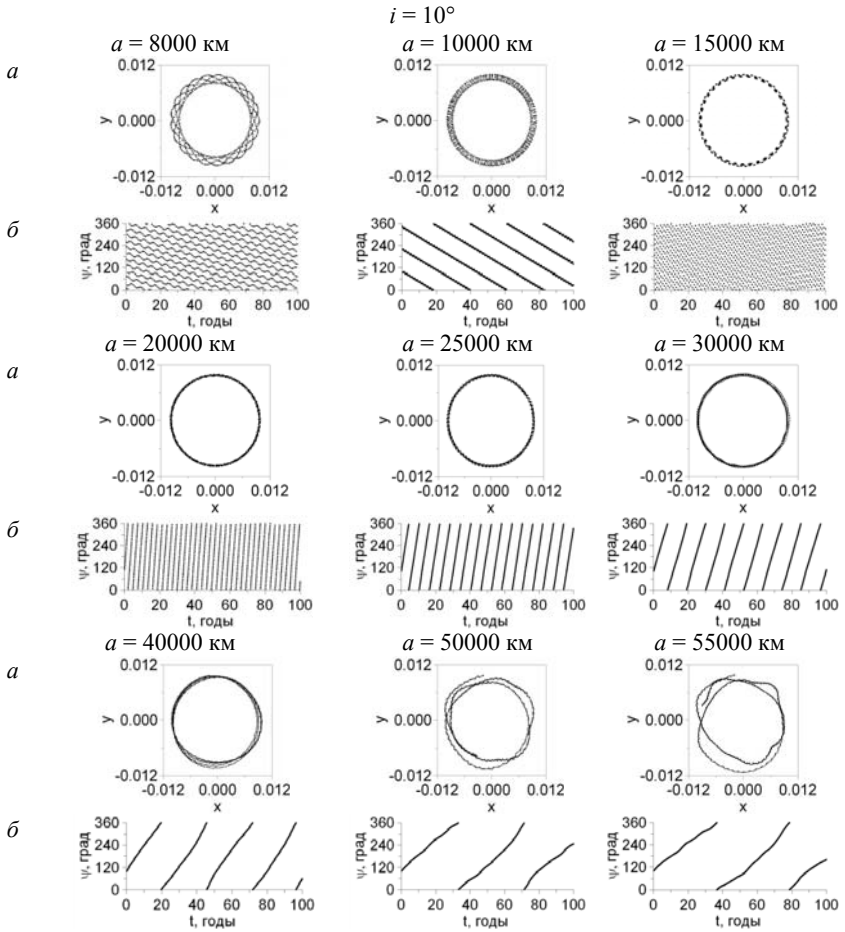


Рис. 14.6. Динамический портрет векового резонанса Лидова–Козаи $\dot{\psi} = \dot{\omega} \approx 0$ и эволюция критического аргумента ψ для ряда модельных объектов с малым наклонением: *а*) фазовый портрет в плоскости $x = e\cos\psi, \quad y = e\sin\psi$; *б*) эволюция критического аргумента ψ на интервале 100 лет

На рис. 14.5 справа приведены примеры поведения критического аргумента на столетнем интервале времени для каждого типа резонанса. График на рис. 14.5, *б* позволяет определить нижние границы большой полуоси и наклонения, на которых начинается действие резонанса Лидова–Козаи. Остановимся на определении этих границ подробнее.

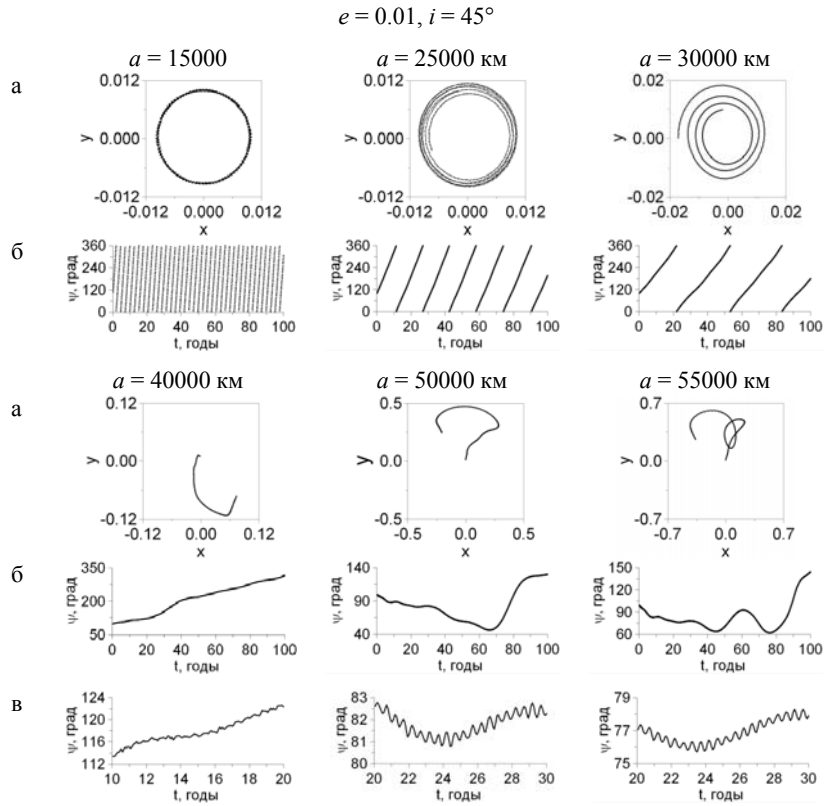


Рис. 14.7. Динамический портрет векового резонанса Лидова–Козаи $\dot{\psi} = \dot{\omega} \approx 0$ и эволюция критического аргумента ψ для ряда модельных объектов наклонением орбиты $i = 45°$: *а* – фазовый портрет в плоскости $x = e\cos\psi, \quad y = e\sin\psi$; *б* – эволюция критического аргумента ψ на интервале 100 лет; *в* – фрагмент рисунка *б*) на интервале 10 лет

На рис. 14.6–14.8 приведены фазовые портреты резонанса Лидова–Козаи $\dot{\psi} = \dot{\omega} \approx 0$ в плоскости $x = e\cos\psi$, $y = e\sin\psi$, которые иллюстрируют в деталях общие данные, приведенные на рис. 14.5.

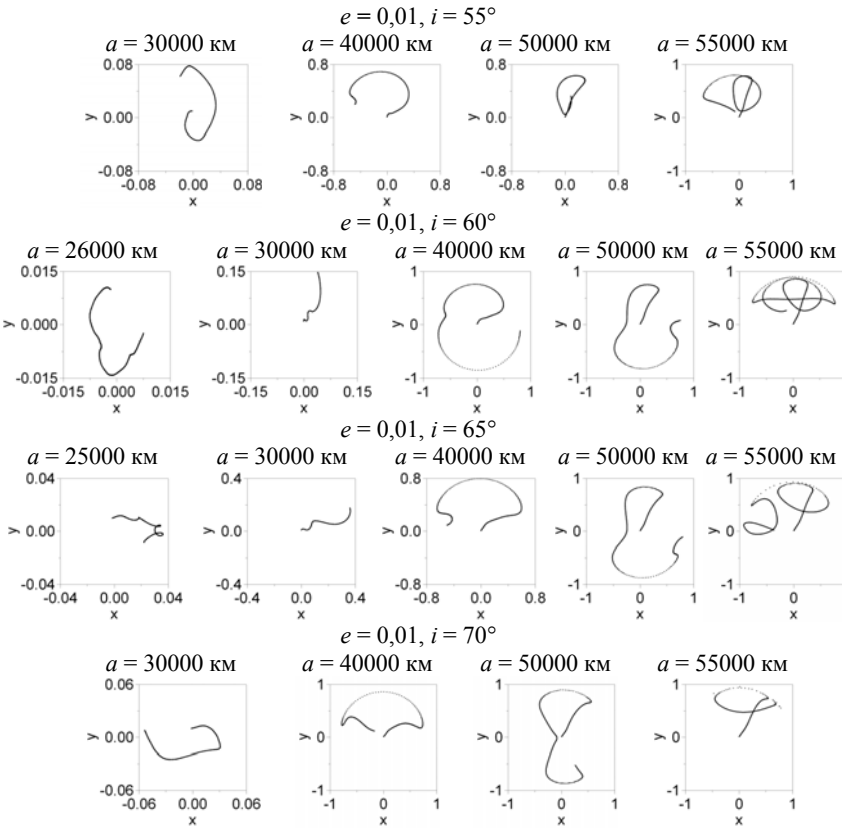


Рис. 14.8. Динамический портрет векового резонанса Лидова–Козаи $\dot{\psi} = \dot{\omega} \approx 0$ для модельных объектов с наклонениями от 55 до 70°

На рис. 14.6 приведены динамические портреты резонанса Лидова–Козаи, которые показывают, что на орбитах с небольшими наклонениями нет устойчивых конфигураций резонанса Лидова–Козаи.

Данные, приведенные на рис. 14.7, показывают, что при наклонении $i = 45°$ устойчивые конфигурации резонанса Лидова–Козаи возникают у объектов с большими полуосями от 40000 км и выше. Графики на рис. 14.8 говорят о том, что при наклонении $i = 55°$ область устойчивого резонанса начинается с 30000 км по большой полуоси, а для наклонений 60–65° нижняя граница опускается до 26000–25000 км и затем при $i = 70°$ вновь поднимается до 30000 км. Насколько позволяют судить оценки, приведенные на рис. 14.5, модельные объекты с наклонениями около 60° показывают наличие устойчивого резонанса Лидова–Козаи в широком диапазоне больших полуосей от 25000 до 110000 км.

В целом воздействие векового резонанса Лидова–Козаи на движение околоземных объектов проявляется в большой области орбитального пространства почти круговых орбит с наклонениями от 45 до 90° и в диапазоне больших полуосей от 25 000 до 120 000 км. Причем верхняя граница резонансной области постепенно опускается с ростом наклонения от 70 до 90°. На высоких приполярных орбитах имеется обширная область, где влияние резонанса Лидова–Козаи отсутствует.

Рассмотрим влияние резонанса Лидова–Козаи на долговременную орбитальную эволюцию околоземных объектов.

Нужно сказать, что в областях действия резонанса Лидова–Козаи выбрать объекты, которые были бы подвержены влиянию только этого резонанса, сложно, поскольку действие большинства резонансов также приходится на эту область околоземного пространства (Бордовицына, Томилова, 2016), но все-таки несколько таких объектов найти удалось.

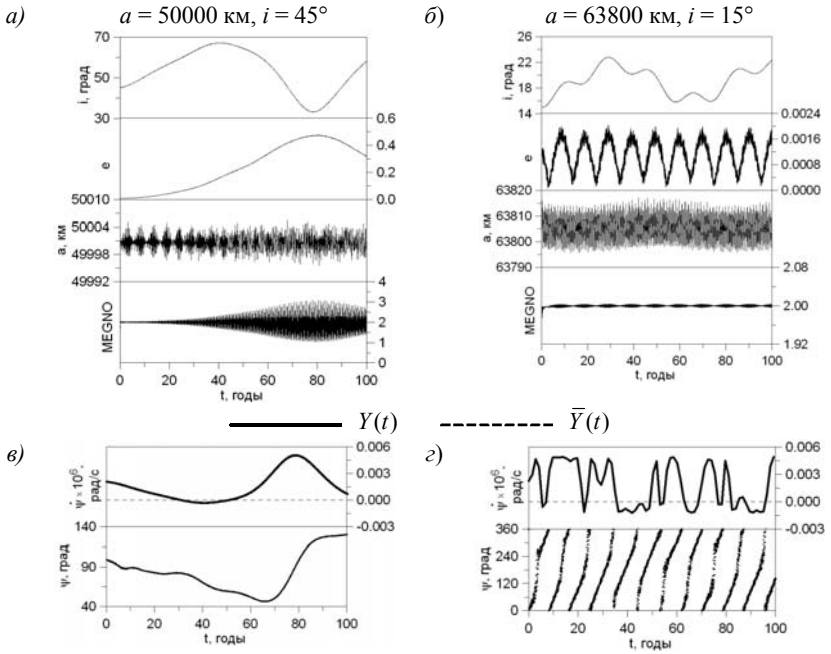


Рис. 14.9. Орбитальная эволюция объектов с регулярным движением.
а – объект, подверженный действию устойчивого резонанса Лидова–Козаи;
б – объект с неустойчивым действием резонанса Лидова–Козаи;
в, *г* – соответствующие этим объектам изменения во времени резонансного соотношения и критического угла

На рис. 14.9 показана орбитальная эволюция двух объектов, один из которых (график *а*) подвержен влиянию устойчивого резонанса Лидова–Козаи, о чем свидетельствует поведение резонансного соотношения и критического аргумента, и объект (график *б*), на который резонанс Лидова–Козаи практически не влияет, поскольку конфигурация неустойчива, критический аргумент циркулирует. В первом случае наблюдается долгопериодическое возрастание эксцентриситета орбиты, во втором случае эксцентриситет сохраняет свое первоначальное значение.

На рис. 14.10 приведены данные по орбитальной эволюции двух объектов, подверженных устойчивому влиянию резонанса Лидова–Козаи. В том и другом случае резонансное соотношение переходит через нулевое значение, а критический аргумент либрирует. Оба объекта имеют долгопериодические колебания эксцентриситета с большой амплитудой.

На рис. 14.11 представлены более сложные случаи движения, связанные с влиянием на объекты помимо резонанса Лидова–Козаи других вековых резонансов.

На графике 14.11, *а* показана орбитальная эволюция объекта, на который помимо резонанса Лидова–Козаи действует апсидально-нодальный резонанс $\left(\dot{\Omega}-\dot{\Omega}'_S\right)+2\dot{\omega}-2\dot{\omega}'_S$, связанный с Солнцем. На графике 14.11, *б* приведены данные об орбитальной эволюции объекта, на который вместе с резонансом Лидова–Козаи действует резонанс $\dot{M}'_S-\dot{\omega}+\dot{\omega}'_S$, связанный со средним движением Солнца. В первом случае (графики *а, в* и *д*) влияние резонанса Лидова–Козаи следует считать слабым – резонансное соотношение не переходит через нулевое значение и критический аргумент скорее циркулирует, нежели либрирует. Влияние апсидально-нодального резонанса можно считать более уверенным. Этот резонанс также способен вызывать рост и долгопериодические колебания эксцентриситета орбиты (Rossi, 2008; Бордовицына, Томилова, 2014), но менее значительные, чем резонанс Лидова–Козаи, что мы и наблюдаем в данном случае.

В орбитальной эволюции объекта, приведенного на 14.11, *б*, имеет место устойчивое влияние резонанса Лидова–Козаи, но в то же время на него действует вековой резонанс, связанный со средним движением Солнца. Влияние этого последнего резонанса можно считать слабым, так как его резонансное соотношение нигде не переходит через нулевое значение. В то же время его критический аргумент ведет себя сложным образом.

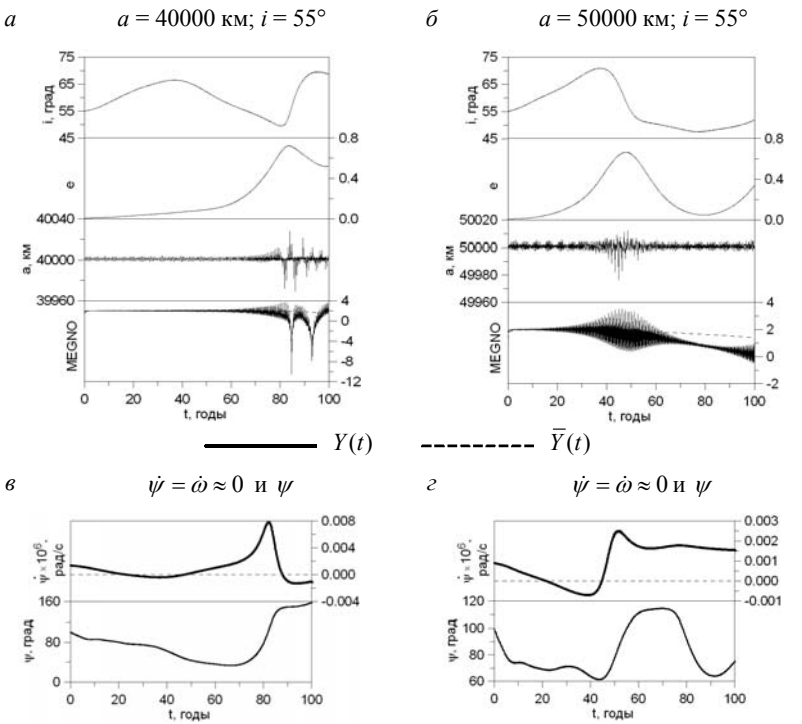


Рис. 14.10. Орбитальная динамика модельных объектов при наличии устойчивого векового резонанса Лидова–Козаи:
а, *б* – долговременная орбитальная эволюция элементов орбит и параметров MEGNO; *в*, *г* – изменение во времени резонансного соотношения $\dot{\psi} = \dot{\omega} \approx 0$ и его критического аргумента

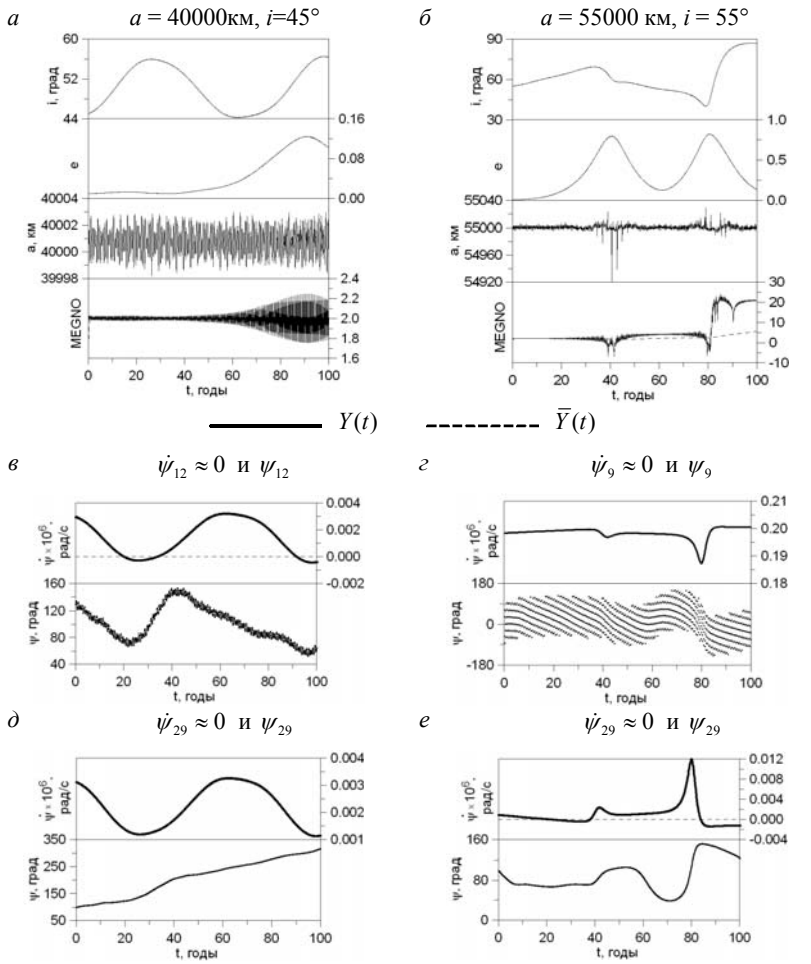


Рис. 14.11. Орбитальная динамика модельных объектов, в структуре возмущений которых присутствует влияние резонанса Лидова–Козаи: *а*, *б* – долговременная орбитальная эволюция элементов орбит и параметров MEGNO; *в*–*е* – изменение во времени резонансных соотношений и их критических аргументов

В движении объекта наблюдается хаотичность, причем она появляется при достижении эксцентриситетом величины, большей 0,6 и при переходе критического аргумента резонанса Лидова–Козаи с одного уровня либрирования на другой.

Таким образом, приведенный численно-аналитический эксперимент показывает, что резонанс Лидова–Козаи распространен в значительной части орбитального пространства почти круговых орбит в диапазоне больших полуосей от 25000 до 110000 км и в диапазоне наклонений орбит от 45 до 90°.

Область полностью устойчивого резонанса Лидова–Козаи вытянута вдоль наклонения, близкого к 60°, для значений больших полуосей от 25000 до 110000 км.

Резонанс Лидова–Козаи оказывает заметное влияние на орбитальную эволюцию околоземных объектов, которое проявляется в возрастании и долгопериодическом изменении эксцентриситета с большой амплитудой колебаний.

Для орбит с большими эксцентриситетами общие закономерности эволюции сохраняются, однако рост эксцентриситета идет значительно быстрее (Бордовицына, Томилова, 2014).

Приведенный пример наглядно иллюстрирует возможности предложенной численно-аналитической методики.

ЛИТЕРАТУРА

Авдюшев В.А. Численные алгоритмы типа Энке в регуляризирующих элементах // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики : сб. ст. Томск : Изд-во ТГУ, 1997. С. 121–125.

Авдюшев В.А. Новая промежуточная орбита в задаче о движении близкого спутника сжатой планеты // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. Томск : Изд-во ТГУ, 1999. Вып. 3. С. 126–127.

Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса–Эверхарта // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 4. С. 31–47.

Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит небесных тел. Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. 336 с.

Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М. : Наука, 1977. 360 с.

Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М. : Наука, 1986. 320 с.

Аксенов Е.П., Емельянов Н.В., Тамаров В.А. Практическое применение промежуточной орбиты спутника. Формулы, программы, тесты // Труды ГАИШ. 1988. Т. 59. С. 3–40.

Аксенов Е.П., Носков Б.Н. Одна форма дифференциальных уравнений возмущенного движения спутника // Астрономический журнал. 1972. № 49. С. 1292–1299.

Александрова А.Г., Чувашов И.Н., Бордовицына Т.В. MEGNO-анализ орбитальной эволюции объектов зоны ГЕО // Известия вузов. Физика. 2011. № 6/2. С. 47–54.

Александрова АГ., Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Резонанс Лидова–Козаи и его влияние на орбитальную эволюцию околоземных космических объектов // Сборник докладов «М.Л. Лидов – яркое имя в космической науке». М. : ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2016. С. 40–66.

Батраков Ю.В., Макарова Е.Н. Обобщенный метод Энке для изучения возмущенного движения // Бюллетень ИТА АН СССР. Л. : Наука, 1979. Вып. 14. С. 397–401.

Батраков Ю.В., Соколов В.Г. Об устойчивости регуляризированных решений задачи двух тел // Компьютерные методы небесной механики – 95. СПб. : Изд-во ИТА РАН, 1995. С. 28–29.

Бордовицына Т.В., Куликова П.В. Сравнительная характеристика и использование в задачах динамики ИСЗ новой национальной модели атмосферы. ГОСТ Р 25645.166-2004 // Известия вузов. Физика. 2007. Т. 50, № 12/2. С. 20-25.

Бордовицына Т.В., Сухоплюева Л.Е. Исследование эффективности численных алгоритмов, использующих стабилизирующие преобразования // Бюллетень института теоретической астрономии. Л. : Изд-во ИТА АН СССР, 1980. Т. 10 (163). С. 591–596.

Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с.

Бордовицына Т.В. Сравнительная характеристика различных критериев оценки точности численного интегрирования уравнения движения небесных тел // Астрономия и геодезия. Томск : Изд-во ТГУ, 1986. Вып. 14. С. 88–92.

Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Бороненко Т.С., Тамаров В.А., Шарковский Н.А., Шмидт Ю.Б. Численные и численно-аналитические алгоритмы прогнозирования движения ИСЗ // Томск : Изд-во ТГУ, 1991. 156 с.

Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Кардаш А.В., Федяев Ю.А., Шарковский Н.А. Эффективные алгоритмы численного моделирования движения ИСЗ // Известия вузов. Физика. Томск : Изд-во ТГУ, 1992. Т. 35. С. 62–70.

Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Авдюшев В.А. Проблемы применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах динамики спутников планет и астероидов // Астрономия и геодезия. Томск : Изд-во ТГУ, 1998. Вып. 16. С. 33–57.

Бордовицына Т.В., Батурин А.П., Авдюшев В.А., Куликова П.В. Численная модель движения ИСЗ. Новая версия // Известия вузов. Физика. 2007. Т. 50. № 12/2. С. 60–65.

Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А., Чувашов И.Н., Александрова А.Г., Томилова И.В. Численное моделирование движения систем ИСЗ в среде параллельных вычислений // Известия вузов. Физика. 2009. Т. 52. № 10/2. С. 5–11.

Бордовицына Т.В., Александрова А.Г. Численное моделирование процесса образования орбитальной эволюции и распределения фрагментов космического мусора в околоземном пространстве // Астрономический вестник. 2010. Т. 44. С. 259–272.

Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н. Комплекс алгоритмов и программ для исследования хаотичности в динамике искусственных спутников Земли // Известия вузов. Физика. 2010. № 8/2. С. 14–21.

Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамической эволюции околоземных космических объектов на вытянутых орбитах // Известия вузов. Физика. 2014а. № 4. С. 84–91.

Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Особенности структуры вековых резонансов в динамике околоземных космических оъектов // Известия вузов. Физика. 2016. № 3. С. 41–48.

Бороненко Т.С. Алгоритм для реализации в системе «Авто-Аналитик» метода усреднения уравнений возмущенного движения в Кеплеровых элементах // Астрономия и геодезия. Томск : Изд-во ТГУ, 1975. Вып. 5. С. 27–45.

Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М. : Мир, 1964. 514 с.

Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М. : Наука, 1980. 208 с.

Вашковьяк М.А. О методе приближенного расчета движения стационарного ИСЗ // Космические исследования. 1972. Т. 10, № 2. С. 147–158.

Вашковьяк С.Н. Представление функции тени в виде ряда по степеням эксцентриситета орбиты спутника // Сообщения ГАИШ. М. : Изд-во МГУ, 1979. № 208–209. С. 3–6.

Вашковьяк М.А. О численно-аналитическом методе расчета движения 12-часового ИСЗ по почти круговым орбитам // Космические исследования. 1983. Т. 21, № 6. С. 819–823.

Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М. : Изд-во иностр. лит. 1952. 476 с.

Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле Земли. М. : Наука, 1968.

Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968. 800 с.

Емельянов Н.В. Метод вычисления Лунно-Солнечных возмущений элементов орбит ИСЗ // ГАИШ. 1980. Т. 49. С. 122–129.

Емельянов В.Н. Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ // Итоги науки и техники. Серия Исследование космического пространства. М. : ВИНИТИ, 1980. Т. 15. С. 44–63.

Емельянов Н.В. Построение аналитической теории движения искусственных спутников с точностью до третьего порядка относительно сжатия Земли // Астрономический журнал. 1986. Т. 63. С. 800–809.

Каула У. Спутниковая геодезия. М. : Мир, 1970.

Кислик М.Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // Искусственные спутники Земли. 1960. Вып. 13, 24.

Козлов Е.А., Соколов В.Г. Об устойчивости численного решения регуляризированных уравнений в случае эллиптического движения // Компьютерные методы небесной механики – 97. СПб. : Изд-во ИТА РАН, 1997. С. 84–88.

Куликов Д.К. Интегрирование уравнений движения небесной механики на электронных вычислительных машинах по квадратурному методу Коуэлла с автоматическим выбором шага // Бюллетень ИТА. 1960. Т. 7, № 10. С. 770–797.

Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5–45.

Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М. : Физматлит, 2009. С. 588.

Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. Москва ; Ижевск : Ин-т компьют. исследований, 2014. 432 с.

Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Таратынова Г.П. Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты // УФН. 1957. Т. LXIII, вып. 1. С. 31–50.

Платонов А.К., Власова З.К., Степанянц В.А. Многоточечный метод интегрирования с переменным шагом для обыкновенныз диффренциальных уравнений. М., 1976. 18 с. (Препринт/ ИПМ:72)

Прохоренко В.И. Долговременная эволюция орбит ИСЗ под влиянием гравитационных возмущений, обусловленных сжатием Земли, с учетом возмущений от третьих тел // Известия вузов. Физика. 2006. № 2. С. 63–73.

Рой А. Движение по орбитам. М. : Мир, 1981. 544 с.

Рыхлова Л.В. Засоренность околоземного пространства объектами техногенного происхождения // Околоземная астрономия – 2003 : труды конф. Т. 2. Терскол, сентябрь 2003 г. Институт астрономии РАН. СПб. : ВВМ, 2003. С. 11–19.

Рыхлова Л.В. Проблемы околоземной астрономии // Околоземная астрономия / под ред. А.Г. Масевич. М. : ИНАСАН, 1998. С. 8–16.

Светашкова Н.Т., Сухотин А.А. Распределение элементов орбит спорадических метеорных тел и их вековая эволюция // Астрономический вестник. 1995. Т. 29, № 4. С. 360–366.

Себехей В. Теория орбит. М. : Наука, 1982. 656 с.

Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж Холла и Дж Уатта. М. : Мир, 1979. 312 с.

Сорокин Н.А. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ в задаче двух неподвижных центров и их численное интегрирование // Научные информации. М. : Изд-во ИА АН СССР, 1991. Вып. 69. С. 114–123.

Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г.Н. Дубошина. М. : Наука, 1971. 862 с.

Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М. : Наука, 1968. 800 с.

Сурнин Ю.В., Кужелев С.В., Ащеулов В.А., Дементьев Ю.В. Программа прогнозирования движения геодезических искусственных спутников Земли // Наблюдения ИСЗ. София. 1977. № 16. С. 157–174.

Тамаров В.А., Черницов А.М. Аналитический алгоритм вычисления возмущений в движении ИСЗ, обусловленных сопротивлением атмосферы // Астрономия и геодезия. Томск : Изд-во ТГУ, 1998. Вып. 16. С. 134–148.

Тарадий В.К., Цесис М.Л. Численное определение траекторий искусственных спутников Земли методом Адамса переменного порядка // Астрономия и Астрофизика. 1984. № 53. С. 56–65.

Таратынова Г.П. О движении искусственного спутника в нецентральном поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосферы // УФН. 1957. Т. LXIII, вып. 1. С. 51–58.

Тимашкова Е.И. Уравнения возмущенного движения спутника // Астрономический журнал. 1971. Т. 48, № 5. С. 1061–1066.

Тимашкова Е.И., Холшевников К.В. Лунно-солнечные возмущения в движении спутников планеты // Ученые записки ЛГУ. 1974. № 373. С. 141–156.

Уральская В.С., Журавлев С.Г. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли // Итоги науки и техники. Серия Исследование космического пространства. М. : ВИНИТИ, 1980. Т. 15. С. 5.

Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990. 512 с.
Херрик С. Астродинамика. М. : Мир, 1977. Т. 2. 263 с.
Херрик С. Астродинамика. М. : Мир, 1978. Т. 3.
Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1979. 312 с.
Холшевников К.В. Применение метода осреднения к задаче о движении в гравитационном поле несферической планеты I // Вестник ЛГУ, 1967. № 7.
Холшевников К.В. Применение метода осреднения к задаче о движении в гравитационном поле несферической планеты II // Вестник ЛГУ. 1967. № 13.
Холшевников К.В. Преобразования Ли в небесной механике // Астрономия и геодезия. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1973. Вып. 4. С. 21–43.
Холшевников К.В. Асимптотические методы небесной механики. Л. : Изд-во Лен. ун-та, 1985. 208 с.
Холшевников К.В., Питьев Н.В., Титов В.Б. Притяжение небесных тел. СПб. : Изд-во СПб. ун-та, 2005. 104 с.
Холшевников К.В. Представление градиента гравитационного потенциала небесных тел рядом шаровых функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2007. Вып. 3. С. 160–166.
Черницов А.М., Тамаров В.А. Определение допустимого уровня систематических ошибок наблюдений при построении областей возможных движений малых тел. // Известия вузов. Физика. Приложение. 2003. Т. 46, № 12. С.75–81.
Чувашов И.Н. Прогнозирование движения ИСЗ с использованием параллельных вычислений. Учет слабых возмущений // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53, № 8/2. С. 22–29.
Чувашов И.Н. Программно-математическое обеспечение для решения обратных задач динамики ИСЗ с использованием параллельных вычислений // Известия вузов. Физика. 2011. Т. 54, № 10/2. С. 6–13.
Шарковский Н.А. Вариационные алгоритмы Энке // Алгоритмическое и программное обеспечение теории движения ИСЗ. Л. : Изд-во ИТА АН СССР, 1990. С. 71–72.
Шарковский Н.А. Вариационный метод Энке // Астрономия и геодезия, Томск : Изд-во ТГУ, 1998. Вып. 16. С. 13–21.
Шефер В.А. Обобщенные методы Энке для исследования возмущенного

движения // Астрономия и геодезия. Томск : Изд-во ТГУ, 1998. Вып. 16. С. 149–171.

Шефер В.А., Коксин А.М. Вычисление показателей хаотичности орбит, основанных на касательных векторах: применение к ограниченной задаче трех тел // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 6/3. С. 256–258.

Штерн Т. Введение в небесную механику. М. : Мир, 1964.

Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1978. 461 с.

Штифель Е., Шайфель Г. Линейная и регулярная небесная механика. М. : Наука, 1975. 304 с.

Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М. : Наука, 1965. 540 с.

Barlier F., Berger C., Falin J., Kockarts, Thuillier G.A. Thermospheric Model Based on Satellite Dragdata // Ann. Geophys. 1978. V. 34, № 1. P. 9–24.

Baumgarte J. Numerical Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion // Cel. Mech. 1973. Vol. 5 (4). P. 490–501.

Baumgarte J., Stiefel E. Examples of the transformations improving the numerical accuracy of the integration of differential equations // Lect. Not. in Math. 1974. Vol. 362. P. 207–236.

Brumberg V.A. On Relativistic Equations of Motion of an Earth Satellite // Cel. Mech. and Dyn. Astron. 2004. Vol. 88. P. 209–225.

Bulirsch R., Stoer J. Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolations Methods // Num. Math. 1966. № 8. P. 1–13.

Butcher J.C. Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration Pricesses // J. of Austral. Math. Soc. 1963. Vol. 3. P. 185–201.

Butcher J.C. On Runge-Kutta Prosesses of High Order // J. of Austral. Math. Soc. 1964a. V. 4. P. 179–195.

Butcher J.C. Implicit Runge-Kutta Prosesses // Math. Comp. 1964б. Vol. 18. P. 50–64.

Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C. Phase space structureof multidimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // Physica D. 2003. Vol. 182. P. 151–178.

Chobotov V.A., Spenser D.B. Debris Evolution and Lifetime Following an Orbital Breakup // AIAA. 1989. № 85. P. 1–11.

Cook G.E. Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite // Geophys. J. 1962. Vol. 6. № 3. P. 271–291.

Cunningham L.E. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // Cel. Mech. 1970. Vol. 2. P. 207–216.

Deprit A., Elipe A., Ferrer S. Linearization: Laplace versus Stiefel // Celest. Mech. 1994. V. 58. P. 151–201.

Drozyner A. Recurrent Calculation of Gravitational Accseleration of a Satellite // Acta Astronomica. 1977. Vol. 27, № 1. P. 15–22.

Daquin J. and et al. The dynamical structure of the MEO region: long-term stability, chaos, and transport // Celest Mech Dyn Astr. Published online 02 January 2016.

Encke J.F. Uber eine neue Methode der Berechung der Planetenstorungen // Astr. Nach. 1852. Vol. 33. P. 377–398.

Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits // Celest. Mech. 1974a. V. 10. P. 35–55.

Everhart E. On Efficient Integrator of Very High Order and Accuracy with Appendix Listing of RADAU // Denver. Univ. of Denver. 1974b. P. 20.

Giacaglia G.E.O. Evolution of Geopotential and Luna-Solar Perturbations by a Recursive Algorithm // Appl. Mach. Res. Lab. Paper. Univ. of Texas t Austin. 1975. № 1073. P. 1–18.

Giacaglia G.E.O. Lunar perturbations of artifical satellites of the Earth // Celest. Mech. 1974. Vol. 9, № 2. P. 239–267.

Gragg W.B. On Extrapolation Algorithms for Ordinary Initial Value Problems // SIAM J. Numer. Anal. 1965. Vol. 2, No. 3. P. 384–403.

Harris I. Priester W. Time-Dependent Structure of the Upper Atmosphere. NnASA TN D – 1443 Goddard Space Flight Center. Maryland, 1962.

Henrici P. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equation. New York, Lomdon, Sydney, 1962. 407 p.

Hodges R.R. Monte Carlo Simulation of the terestrial exosphere // J. Geophys. Res. 1994. Vol. 99. P. 23229–23247.

Hughes D.W. The Relationship between Comets and Meteoroid Stream //Asteroids, comets, meteors III. Uppsala Univ. Press. Uppsala, 1986. P. 503–519.

IERS Conventions, 1996 – IERS Technical Note // U.S. Naval Observatory, 1996. V. 21. 98 p.

IERS Conventions, 2003 – IERS Technical Note // U.S. Naval Observatory, 2003. № 32. 128 p.

IERS Conventions, 2010 – IERS Technical Note // U.S. Naval Observatory, 2010. № 36. 78 p.

IERS Standarts. –IERS Technical Note. Paris : Central Bureau of IERS, 1992. 150 p.

Jacchia L.G. Termospheric Temterature, Density and Composition New Models; SAO Special Report 375. Cambridge, 1977.

Jarnagin M.P. Expantions in Elliptic Motion //Astron/papers Am. Ephemeris, 1965. V. 18. P. 1–659.

Jehn R. Dispersion of Debris Clouds from in-Orbit Fragmentation Events // ESA J. 1991. Vol. 15. P. 63–77.

Klinkrad H. Space Debris. Springer, 2006. 430 p.

Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // Astron. J. 1962. Vol. 67. P. 591–598.

Kozai Y. Mean Values of Cosine Functions in Elliptical Motion // Astron. Journ. 1962. Vol. 67, № 5.

Kudryavtsev S.M. The fifth-order analytical solution of the equations of motion of a satellite in orbit around a non-spherical planet. Celest. Mech. Dyn. Astron. 1995. Vol. 61. P. 207–215.

Kudryavtsev S.M. Harmonic development of an arbitrary function of the Moon/Sun/planets coordinates to Poisson series. In: Shopbell P.L, Britton M.C., Ebert R. (eds.) Proc. of Astron. Data Analysis Software and Systems XIV, ASP Conference series, Astron. Soc. of the Pacific. 2005. Vol. 347. P. 133–137.

Kyner W.T., Benett M.M. A modified Encke special perturbation method // Astron. J. 1966. Vol. 71. P. 579–584.

Fehlberg E. Low-order classical Runge-Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems. NASA Technical Report 315 (1969), extract published in Computing. 1969. Vol. 6. P. 61–71.

Fehlberg E. Classical eighth- and lower-order Runge-Kutta-NystrËom formulas with stepsize control for special second-order differential equations. NASA Technical Report R-381. 1972.

Ferraz-Mello S. Astion de la pression de radiation sur le movement d'un satellite artificial de la ferra // XIV Congress JAF. Paris. 1963. P. 41–50.

Ferraz-Mello S. 1964. C.R. Sur le probleme de pression de radiation dans la theorie des satellites artificials // Acad. Sci.Vol. 258. P. 463–466.

Montenbruck O., Gill E. Satellite Orbits. Models, Methods and Applications. Springer. 2000. 369 p.

McKnight D.S. Determination of Breakup initial condition // J. Spacekraft and Rockets. 1991. Vol. 28, № 4. P. 470–477.

Nacozy P.E. The Use of Integrals in Numerical Integrations of the N-Body Problem // Astrophys. Space Sci. 1971. Vol. 14. P. 40–51.

Nesterov V.V. Earth Rotation Parameters from LAGEOS Laser Ranging in the 1980 MERIT Campaign // Pis'ma Astron. Zh. 10. P. 465–468.

Oesterwinter C., Cohen C. New Orbital Elements for Moon and Planets // Celest. Mech. 1969. Vol. 5. P. 317–395.

Reynolds R.C. Review of Current asteroids to Model and Measure the Orbital Debris Environment in Low-Earth Orbit // Adv. Space Res. 1990. Vol. 10, № 4. C. 359–366.

Richardson L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. Phil. Trans., A. 1910. Vol. 210. P. 307–357.

Robertson H.P. Dynamical Effects of Radiation in the Solar System // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1937. Vol. 97. P. 423–438.

Roy A.E. Luni-solar Perturbations of an Earth satellite // Astrophys. and Space Sci. 1969. Vol. 4, № 4. P. 375–386.

Rosengren A.J., Alessi E.M., Rossi A., Valsecchi G.B. Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion // MNRAS. 2015. Vol. 449, Is. 4. P. 3522–3526.

Rossi A. Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2008. Vol. 100. P. 267–286.

Silver M.A. A Short Derivation of the Sperling-Burdet Equations // Cel. Mech. 1975. Vol. 11 (4). P. 339–341.

Stoer J. Extrapolaton Method for the Solution of Initial Value Problem and their Practical Realization // Lect. Not. In Math. 1974. № 362. P. 1–21.

Valk S., Lemaitre A., Anselmo L. Analytical and semi-analytical investigations of geosynchronous space debris with high area-to-mass ratios influenced by solar radiation pressure // Adv. Space Res. 2008. Vol. 41. P. 1077–1090.

Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F. Complete Theory of Direct Solar Radiation Pressure: IV. Effects of the Earth Flattening, Astron. Astroph. 1996. Vol. 307. P. 635–644.

Учебное издание

Бордовицына Татьяна Валентиновна
Авдюшев Виктор Анатольевич

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Учебное пособие

2-е издание, исправленное и дополненное

Редактор К.В. Полькина
Оригинал-макет К.В. Полькиной
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 26.12.2016 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,8.
Тираж 30 экз. Заказ № 2166.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-94621-607-4