

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22  
DOI 10.17223/19988621/46/1

М.С. Бухтяк

**СОСТАВНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ,  
БЛИЗКАЯ К ПСЕВДОМИНИМАЛЬНОЙ**

Данная публикация продолжает серию работ автора о моделировании деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора. Схема моделирования формы деформированного лепестка сетеполотна осесимметричного рефлектора, предложенная В.М. Гряником и В.И. Ломаном, разработана для изотропного упругого материала, прикрепляемого к параболическим жестким ребрам, и не видно способов адаптировать её для ортотропного сетеполотна с иными способами закрепления. Автором в публикациях 2016 года предложена методика моделирования формы ортотропного упругого материала, основанная на использовании поверхности, для которой отношение главных кривизн есть величина постоянная (выражающаяся через отношение коэффициентов растяжения материала в двух ортогональных направлениях). Такая поверхность названа псевдоминимальной. В указанных публикациях методика адаптирована под конкретную ситуацию, описанную Гряником и Ломаном (лепесток сетеполотна осесимметричного рефлектора). Автором решены вопросы и более общего характера. Доказана теорема существования (широта класса псевдоминимальных поверхностей оказалась такая же, как и для минимальных поверхностей – две функции одного аргумента, то есть – в принципе – псевдоминимальная поверхность указанного веса определяется граничной линией). Данные о широте класса допускают иное истолкование: возможность (теоретическая!) построить составную псевдоминимальную поверхность, присоединяя к одной плоской линии семейство других плоских линий. Пример построения такой поверхности (она задается вектор-функцией) строится в данной статье. Для этой же поверхности строится явное задание. Это открывает возможности для моделирования поверхности ортотропного материала при выборе иных способов закрепления.

**Ключевые слова:** *гладкая поверхность, главные кривизны, ортотропия, псевдосредняя кривизна, задание поверхности посредством семейства обрезающих кривых, явное задание поверхности.*

**1. Постановка задачи**

Автор продолжает исследование о моделировании деформированного лепестка осесимметричного параболического рефлектора [1–6]. Схема моделирования формы деформированного лепестка сетеполотна осесимметричного рефлектора, предложенная в [7], разработана для изотропного упругого материала, и не видно способов адаптировать её для ортотропного сетеполотна. Автором в [1, 6] предложена методика моделирования формы ортотропного упругого материала, осно-

ванная на использовании поверхности, для которой отношение главных кривизн есть величина постоянная (выражающаяся через отношение коэффициентов растяжения материала в двух ортогональных направлениях. Такая поверхность названа псевдоминимальной. В [1] методика адаптирована под конкретную ситуацию (лепесток сетеполотна осесимметричного рефлектора). Работа [6] посвящена вопросам более общего характера. Доказана теорема существования (широта класса псевдоминимальных поверхностей оказалась такая же, как и для минимальных поверхностей – две функции одного аргумента, то есть – в принципе – псевдоминимальная поверхность указанного веса [6] определяется граничной линией). Данные о широте класса допускают иное истолкование: возможность (теоретическая!) построить составную псевдоминимальную поверхность, присоединяя к одной плоской линии семейство других плоских линий. Пример построения такой поверхности (она задается вектор-функцией) строится в данной статье. Для этой же поверхности строится явное задание.

В работе [1] применен способ моделирования ортотропных свойств лепестка сетеполотна осесимметричного рефлектора, основанный на зависимости отношения главных кривизн поверхности сетеполотна от коэффициентов растяжения в указанных направлениях.

На этом пути автор пришел к понятию псевдосредней кривизны и псевдоминимальной поверхности [6]. А именно, если главные кривизны поверхности

$$\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \in C^2$$

упорядочены номерами ( $k_1$  и  $k_2$ ), то псевдосредней кривизной веса  $L$  называется величина

$$H_L = k_1 + Lk_2, \quad (L = const, \quad L \neq 0),$$

а поверхность, для которой

$$H_L = 0, \quad (1)$$

называется псевдоминимальной поверхностью веса  $L$ . Ясно, что при  $L = 1$  получаем минимальную поверхность.

Если отсутствует правило упорядочения главных кривизн, то, имея в виду условность нумерации, говорим об ослабленном условии псевдоминимальности в виде

$$(k_1 + Lk_2)(Lk_1 + k_2) = 0,$$

которое, очевидно, от перемены номеров не меняется.

Пусть  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $\Sigma$ , а  $b_{11}, b_{12}, b_{22}$  – коэффициенты второй квадратичной формы. Тогда ослабленное условие псевдоминимальности веса  $a$  запишется [4] в виде

$$L(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2 + (1-L)^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = 0. \quad (2)$$

Соответственно безразмерный показатель псевдоминимальности с весом  $L$

$$\delta(u, v) = \frac{(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2}{(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} - \frac{(1-L)^2}{L}.$$

## 2. Построение поверхности

В [1, 2] составлено дифференциальное уравнение, решение которого позволяет построить псевдоминимальную поверхность, проходящую через сечение параболоида вращения двумя плоскостями, проходящими через ось его симметрии. Уравнение в общем случае решается приближенно. Указанная поверхность может быть отнесена к составным поверхностям: она образована однопараметрическим семейством парабол, «подклеенных» своими вершинами к определенной линии  $G$  («гребневая линия») – она и определяется упомянутым дифференциальным уравнением.

Возникает вопрос о моделировании псевдоминимальной поверхности (хотя бы приближенно), при этом можно обойтись более скромными средствами: обычно это упрощает исследование. Именно, пусть «гребневая линия»  $G$  – заданная парабола и к её текущей точке «подклеивается» парабола, зависящая от точки прикрепления так, что условие (1) выполняется вдоль линии  $G$  (рис. 1). Вопрос в том, насколько точно при этом выполняется хотя бы ослабленное условие (1.6) уже вдоль поверхности.

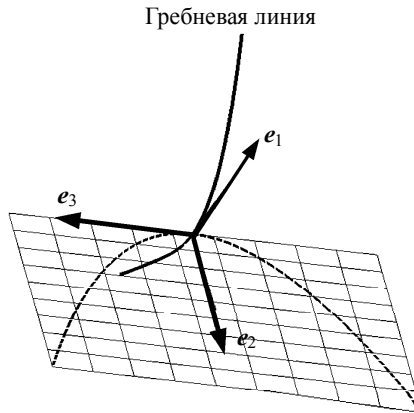


Рис. 1. Схема построения составной поверхности  
Fig. 1. Scheme of constructing the combined surface

Схема построения пояснена на рис. 1. Заштрихована часть нормальной плоскости гребневой линии. Векторы  $e_i$  составляют ортогональный репер. Пунктирная линия – «подклеенная парабола».

Гребневая линия пусть задана вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \{t, 0, at^2\}, \quad a = \text{const}, \quad a > 0.$$

Кривизна равна

$$k_g = \frac{2a}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}.$$

Базисные векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{e}_3 = \{0, 1, 0\}, \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$$

Радиус-вектор текущей точки присоединенной параболы

$$\mathbf{P}(t, u) = \mathbf{r}(t) - h(t)u^2 \mathbf{E}_2(t) + u \mathbf{E}_3(t).$$

Таким образом,

$$P(t, u) = \{t - 2au^2h(t), u, at^2 + u^2h(t)\}. \quad (3)$$

Условие (2), примененное вдоль гребневой линии, дает нам уравнение

$$L^2ha + ha + 4ha^3t^2 + Lh^2 + La^2 + 96Lh^2a^4t^4 + 256Lh^2a^6t^6 + \\ + 16Lh^2a^2t^2 + 256Lh^2a^8t^8 + 4L^2ha^3t^2 + 8Lha^3t^2 + 32Lha^5t^4 = 0. \quad (4)$$

Уравнение второй степени относительно  $h(t)$ . Дискриминант равен

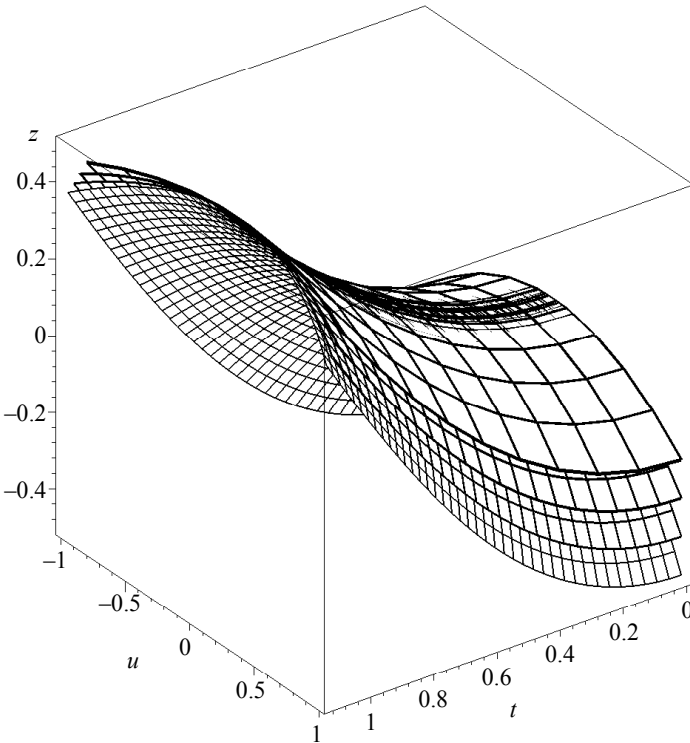
$$a^2(1 + 4a^2t^2)^2(L-1)^2(L^2 + 16La^2t^2 + 2L + 1).$$

Совпадение корней равносильно тому, что вдоль гребневой линии сумма главных кривизн равна нулю.

В качестве первого корня уравнения (4) примем

$$h(t) = \frac{(-8La^2t^2 - 1 - L^2 + \sqrt{16La^2t^2 + 16L^3a^2t^2 + 1 - 2L^2 + L^4 - 32a^2L^2t^2})a}{2L(1 + 8a^2t^2 + 16a^4t^4)(1 + 4a^2t^2)}.$$

Тогда при  $a = 1$  для различных значений  $L$  получаем поверхности (3), изображенные на рис. 2.



**Рис. 2.** Поверхности, приближенно псевдоминимальные при  $L = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 2.** Surfaces approximately pseudominimal at  $L = 0.4, 0.6, 0.8, \text{ and } 1.0$  (from top to bottom)

Вектор-функция (3) слишком сложна для дальнейшего анализа, и для неё строится дробно-рациональное приближение

$$\mathbf{P}_s = \{X_s, Y, Z_s\}. \quad (5)$$

Здесь

$$X_s = \frac{t \left( 12a^2 L^2 t^2 + 12La^2 t^2 + 48L^2 a^4 t^4 + 48La^4 t^4 + 64L^2 a^6 t^6 + 64La^6 t^6 + L^2 + L + 16a^4 u^2 Lt^2 + 2a^2 u^2 L + 2a^2 u^2 \right)}{(L+1)L(1+4a^2 t^2)^3},$$

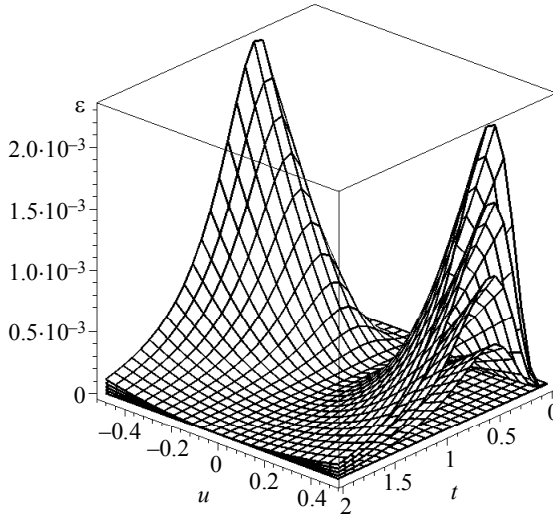
$$Y = u, \quad (6)$$

$$Z_s = \frac{a \left( 64L^2 t^8 a^6 + 64Lt^8 a^6 + 48L^2 t^6 a^4 + 48Lt^6 a^4 + 12L^2 t^4 a^2 + 12Lt^4 a^2 + L^2 t^2 + Lt^2 - 8u^2 La^2 t^2 - u^2 L - u^2 \right)}{(L+1)L(1+4a^2 t^2)^3}.$$

Относительная погрешность построенного приближения оценивается выражением

$$\varepsilon = \frac{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_s|}{|\mathbf{P}|}.$$

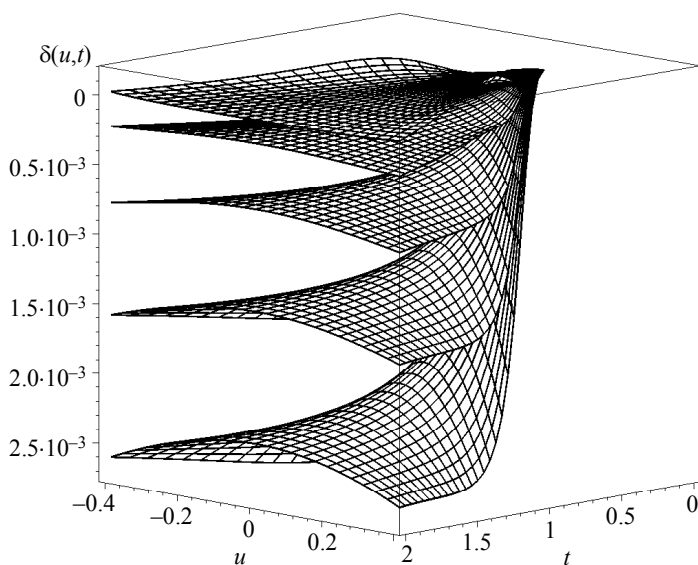
Значения погрешности при  $a = 1$  и  $L \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$  приведены на рис. 3.



**Рис. 3.** Относительная погрешность  $\varepsilon$  для  $L = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$  (очередность снизу вверх). Для  $L \in \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$  результат аналогичный

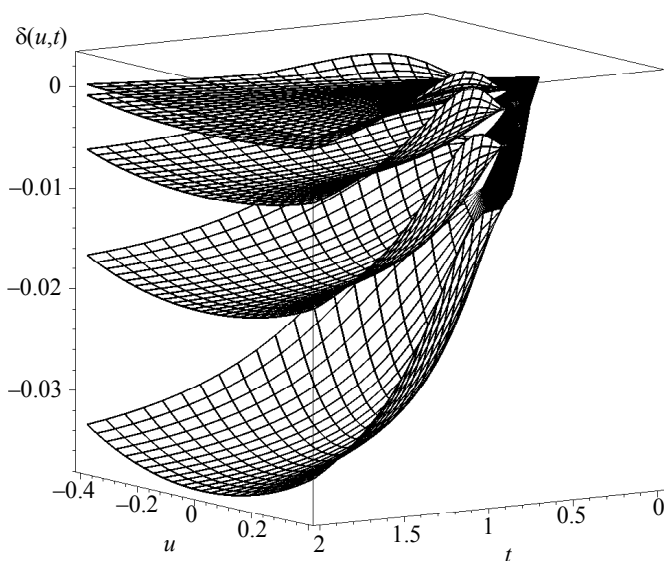
**Fig. 3.** Relative error  $\varepsilon$  for  $L = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9,$  and  $1.0$  (from bottom to top). For  $L = \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$ , the result is similar.

Безразмерный индекс псевдоминимальности для  $a = 1$  и  $L \in \{1.00, 1.05, 1.10, 1.15, 1.20\}$  представлен на рис. 4. Этот же индекс для  $a = 1$  и  $L \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$  приведен на рис. 5. Использование второго корня уравнения (4) в качестве функции  $h(t)$  принципиально картину не меняет.



**Рис. 4.** Безразмерный индекс псевдоминимальности для  $L = 1.00, 1.05, 1.10, 1.15, 1.20$  (очередность сверху вниз)

**Fig. 4.** Dimensionless index of pseudominimality for  $L = 1.00, 1.05, 1.10, 1.15,$  and  $1.20$  (from top to bottom)



**Рис. 5.** Безразмерный индекс псевдоминимальности для  $L = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00$  (очередность снизу вверх)

**Fig. 5.** Dimensionless index of pseudominimality for  $L = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95,$  and  $1.00$  (from bottom to top)

### 3. Задание поверхности явным уравнением

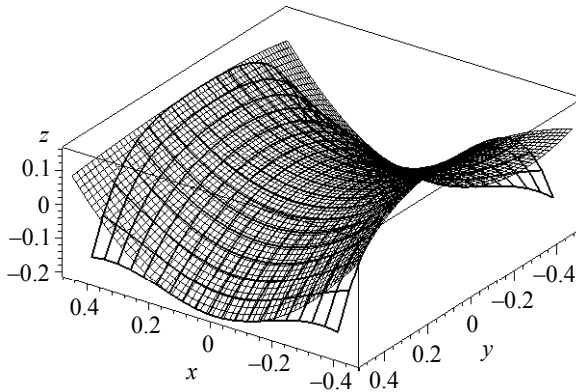
В некоторых случаях задание поверхности как годографа вектор-функции не столь удобно как использование уравнения вида

$$z = f(x, y). \quad (7)$$

Наличие уравнений (6) позволяет решить этот вопрос локально и приближенно. В окрестности начала координат приближенное разрешение первых двух уравнений приводит к соотношению

$$t \approx T = x - 2 \frac{a^2 xy^2}{L} + 8 \frac{a^4 (L+3)x^3 y^2}{L^2 + L} + 4 \frac{xa^4 y^4}{L^2} - 64 \frac{x^3 a^6 (L+3)y^4}{L^2 (L+1)}.$$

Уравнение вида (7) получаем, внося в третье из уравнений (6)  $T$  вместо  $t$  и  $y$  вместо  $u$ . Результат подстановки не приводим ввиду крайней громоздкости. Для  $a = 1$ ,  $L = \frac{6}{5}$  приводим изображение поверхности (5) и поверхности (7).



**Рис. 6.** Изображение поверхности (5) (крупная клетка) и поверхности (7) (мелкая клетка)

**Fig. 6.** Image of surface (5) (large squares) and surface (7) (small squares)

### 4. Заключение

Автор полагает, что предложенная работа (наряду с предшествующими) служит прояснению понятия псевдоминимальной поверхности, способов её аналитического построения (приближенно) и использования для моделирования формы поверхности упругого ортотропного материала.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39. № 1. С. 97–106.
2. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 5–17.
3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте пары поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24.

4. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
5. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(29). С. 5–14.
6. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 6(44). С. 5–17.
7. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.

Статья поступила 21.11.2016 г.

Bukhtyak M.S. (2017) A COMPOSITE SURFACE CLOSE TO PSEUDO-MINIMAL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 5–13

DOI 10.17223/19988621/46/1

This publication continues the series of the author's papers on simulation of a deformed petal of an axisymmetric parabolic reflector. V.M. Gryanik and V.I. Loman proposed a simulation scheme for the deformed petal shape of the metallic mesh axisymmetric parabolic reflector. The scheme was developed for an isotropic elastic material attached to parabolic hard edges and there seem to be no method to adapt it for an orthotropic metallic mesh with other methods of fixing. The author's papers of 2016 propose a shape simulation method for an orthotropic elastic material. The method is based on using a surface for which the ratio of principal curvatures is constant (expressed by the ratio of the stretching factors of the material in two orthogonal directions). Such a surface is called pseudo-minimal. The method is adapted in these papers to a specific situation described by Gryanik and Loman (metallic mesh petal of an axisymmetric reflector). The author has also solved more general problems. The existence theorem has been proven (the latitude of the class of pseudo-minimal surfaces is the same as for minimal surfaces, namely, two functions of one argument; basically, a pseudo-minimal surface with a specified weight is determined by the boundary line). The data about the latitude class data allow other interpretation: a composite pseudo-minimal surface can be (theoretically!) constructed by attaching a family of flat lines to one flat line. An example of such a surface (given by a vector function) is constructed in this paper. The same surface is constructed in an explicit form. This opens possibilities for simulating an orthotropic material surface when choosing different methods of fixing.

Keywords: smooth surface, principal curvatures, orthotropy, pseudomean curvature, plotting a surface by a family of generating curves, explicit surface plotting.

*БУХТЯК Mikhail Stepanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

#### REFERENCES

1. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical modeling of a metallic mesh deformation of the parabolic reflektor. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461. DOI: 10.1134/S2070048216040050.
2. Bukhtyak M.S. (2016) Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepestka setepolotna [Defect of mapping for deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/40/1.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i*



- mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axissymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
  5. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modelling of metallic mesh tailoring for axisymmetric refltor. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
  6. Bukhtyak M.S. (2017) Obobshchenie minimal'nykh poverkhnostey i modelirovanie formy konstruksii iz ortotropnogo materiala [Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotropic material construction]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24. DOI: 10.17223/19988621/45/1.
  7. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertivaemye zerkal'nye anteny zontichnogo tipa* [Deployable Mirror Umbrella-Type Antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.