УДК 519.872

А.А. НАЗАРОВ, Я.Е. ЧЕРНИКОВА**

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ RQ-СИСТЕМЫ $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ С R-НАСТОЙЧИВЫМ ВЫТЕСНЕНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЗАЯВОК[1]

В работе исследована RQ-система $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ с r-настойчивым вытеснением альтернативных заявок методом асимптотического анализа в условии большой задержки. Получено стационарное распределение вероятностей состояний прибора. Найдены значения асимптотических средних числа заявок в источниках повторных вызовов.

Ключевые слова: *r-настойчивое вытеснение, альтернативная заявка, частичная характеристическая функция, асимптотический анализ.*

ВВЕДЕНИЕ

В 70-ые годы в теории массового обслуживания интенсивно рассматриваются системы с повторными вызовами. Системы с повторными вызовами (или RQ-системы) являются адекватными моделями для описания телефонных систем, телекоммуникационных сетей и call-центров. В частности, системы с повторами используются в коммуникационных каналах, такие как телефоны, интернет, факс, мобильные устройства и др. Системам с повторными вызовами посвящено большое количество работ, одни из которых [1-4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим RQ-систему $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ (рис. 1).

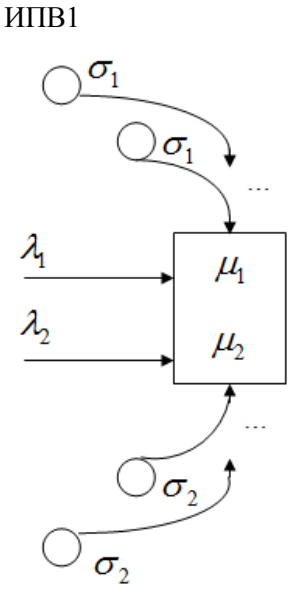


Рис. 1. RQ-система $M^{(2)}|M^{(2)}|1$.

На вход RQ-системы поступает два простейших потока заявок с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно. Если прибор свободен, то пришедшая заявка встает на обслуживание. Время обслуживания экспоненциальное с параметрами μ_1 и μ_2, соответственно.

Если в момент прихода заявка первого типа обнаруживает прибор занятым заявкой первого типа, то она уходит в ИПВ1 (источник повторных вызовов для заявок первого типа), где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром

[1] Работа выполнена в рамках государственного заказа No.~1.511.2014/K Министерства образования и науки Российской федерации.

σ_1. После случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если же в момент прихода заявка первого типа обнаруживает прибор занятым заявкой второго типа, то пришедшая заявка с вероятностью r_1 вытесняет заявку второго типа и встает на обслуживание сама, а с вероятностью $1-r_1$ уходит в ИПВ1, где осуществляет случайную задержку.

Если в момент прихода заявка второго типа обнаруживает прибор занятым заявкой первого типа, то пришедшая заявка с вероятностью r_2 вытесняет заявку первого типа и встает на обслуживание сама, и с вероятностью $1-r_2$ уходит в ИПВ2 (источник повторных вызовов для заявок второго типа), где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром σ_2. После случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

Таким образом, происходит r-настойчивое вытеснение альтернативных заявок.

Обозначим $i_1(t)$ – число заявок в ИПВ1, $i_2(t)$ – число заявок в ИПВ2, $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, & \text{если прибор свободен,}\\ 1, & \text{есди прибор занят заявкой первого типа,}\\ 2, & \text{если прибор занят заявкой второго типа.}\end{cases}$$

Ставится задача нахождения совместного распределения вероятностей числа заявок в ИПВ1, ИПВ2 и состояний прибора.

УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

Рассмотрим марковский процесс $\{k(t),i_1(t),i_2(t)\}$.

Обозначим $P\{k(t)=k,i_1(t)=i_1,i_2(t)=i_2\}=P_k(i_1,i_2,t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k, в ИПВ1 находится i_1 заявок, в ИПВ2 находится i_2 заявок.

Для распределения вероятностей $\{P_0(i_1,i_2,t),P_1(i_1,i_2,t),P_2(i_1,i_2,t)\}$ запишем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_0(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)P_0(i_1,i_2,t)+\mu_1P_1(i_1,i_2,t)+\mu_2P_2(i_1,i_2,t),\\
&\frac{\partial P_1(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+r_2i_2\sigma_2)P_1(i_1,i_2,t)+(1-r_2)\lambda_2P_1(i_1,i_2-1,t)+\\
&+\lambda_1P_0(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\sigma_1P_0(i_1+1,i_2,t)+\lambda_1P_1(i_1-1,i_2,t)+r_1\lambda_1P_2(i_1,i_2-1,t)+\\
&+r_1(i_1+1)\sigma_1P_2(i_1+1,i_2-1,t),\\
&\frac{\partial P_2(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+r_1i_1\sigma_1)P_2(i_1,i_2,t)+(1-r_1)\lambda_1P_2(i_1-1,i_2,t)+\\
&+\lambda_2P_0(i_1,i_2,t)+(i_2+1)\sigma_2P_0(i_1,i_2+1,t)+\lambda_2P_2(i_1,i_2-1,t)+r_2\lambda_2P_1(i_1-1,i_2,t)+\\
&+r_2(i_2+1)\sigma_2P_1(i_1-1,i_2+1,t).
\end{aligned}\qquad(1)$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Перейдем в системе (1) к частичным характеристическим функциям следующего вида:

$$H_k(u_1,u_2,t)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}e^{ju_1i_1}e^{ju_2i_2}P_k(i_1,i_2,t),\ \ k=0,1,2$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Запишем систему для частичных характеристических функций в стационарном режиме:

$$-(\lambda_1+\lambda_2)H_0(u_1,u_2)+j\sigma_1\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1}+j\sigma_2\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2}+$$
$$+\mu_1H_1(u_1,u_2)+\mu_2H_2(u_1,u_2)=0,$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)H_1(u_1,u_2)+j\sigma_2r_2\frac{\partial H_1(u_1,u_2)}{\partial u_2}-j\sigma_1e^{-ju_1}\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1}+$$
$$+(1-r_2)\lambda_2e^{ju_2}H_1(u_1,u_2)+\lambda_1H_0(u_1,u_2)+\lambda_1e^{ju_1}H_1(u_1,u_2)+$$
$$+r_1\lambda_1e^{ju_2}H_2(u_1,u_2)-jr_1\sigma_1e^{j(u_2-u_1)}\frac{\partial H_2(u_1,u_2)}{\partial u_1}=0,$$
$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)H_2(u_1,u_2)+j\sigma_1r_1\frac{\partial H_2(u_1,u_2)}{\partial u_1}-j\sigma_2e^{-ju_2}\frac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2}+$$
$$+(1-r_1)\lambda_1e^{ju_1}H_2(u_1,u_2)+\lambda_2H_0(u_1,u_2)+\lambda_2e^{ju_2}H_2(u_1,u_2)+$$
$$+r_2\lambda_2e^{ju_1}H_1(u_1,u_2)-jr_2\sigma_2e^{j(u_1-u_2)}\frac{\partial H_1(u_1,u_2)}{\partial u_2}=0. \qquad (2)$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа в условии большой задержки ($\sigma\to 0$).

АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В системе (2) сделаем замены

$$\sigma_m=\sigma\gamma_m;\ \ \sigma=\varepsilon;\ u_m=\varepsilon w_m, m=1,2;$$
$$H_k(u_1,u_2)=F_k(w_1,w_2,\varepsilon),\ k=0,1,2.$$

Система (2) перепишется следующим образом:

$$-(\lambda_1+\lambda_2)F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_1\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+j\gamma_2\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+$$
$$+\mu_1F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+\mu_2F_2(w_1,w_2,\varepsilon)=0,$$
$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_2r_2\frac{\partial F_1(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}-j\gamma_1e^{-j\varepsilon w_1}\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}+$$
$$+(1-r_2)\lambda_2e^{j\varepsilon w_2}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_1F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_1e^{j\varepsilon w_1}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)+$$
$$+r_1\lambda_1e^{j\varepsilon w_2}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)-jr_1\gamma_1e^{j\varepsilon(w_2-w_1)}\frac{\partial F_2(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}=0,$$
$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+j\gamma_1r_1\frac{\partial F_2(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}-j\gamma_2e^{-j\varepsilon w_2}\frac{\partial F_0(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}+$$
$$+(1-r_1)\lambda_1e^{j\varepsilon w_1}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_2F_0(w_1,w_2,\varepsilon)+\lambda_2e^{j\varepsilon w_2}F_2(w_1,w_2,\varepsilon)+$$
$$+r_2\lambda_2e^{j\varepsilon w_1}F_1(w_1,w_2,\varepsilon)-jr_2\gamma_2e^{j\varepsilon(w_1-w_2)}\frac{\partial F_1(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}=0. \qquad (3)$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Предельное (при $\varepsilon\to 0$) значение $\{F_k(w_1,w_2)\}$ решения $\{F_k(w_1,w_2,\varepsilon)\}$ системы уравнений (3) имеет вид

$$F_k(w_1,w_2)=R_ke^{jw_1x_1+jw_2x_2},$$

где величины R_0, R_1, R_2, x_1, x_2 являются решением системы уравнений

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)R_0+\mu_1R_1+\mu_2R_2=0,$$
$$(\lambda_1+\gamma_1x_1)R_0-(\lambda_2+\mu_1+r_2\gamma_2x_2-(1-r_2)\lambda_2)R_1+(r_1\lambda_1+r_1\gamma_1x_1)R_2=0,$$
$$(\lambda_2+\gamma_2x_2)R_0+(r_2\lambda_2+r_2\gamma_2x_2)R_1-(\lambda_1+\mu_2+r_1\gamma_1x_1-(1-r_1)\lambda_1)R_2=0,$$
$$-\gamma_1x_1R_0+(\lambda_1+r_2\lambda_2+r_2\gamma_2x_2)R_1+(r_1\gamma_1x_1+(1-r_1)\lambda_1)R_2=0,$$

$$-\gamma_2 x_2 R_0 + (r_2\gamma_2 x_2 + (1-r_2)\lambda_2)R_1 + (\lambda_1 + r_1\lambda_1 + r_1\gamma_1 x_1)R_2 = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована RQ-система $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ с r-настойчивым вытеснением альтернативных заявок методом асимптотического анализа в условии большой задержки. Получено стационарное распределение вероятностей состояний прибора. Найдены значения асимптотических средних числа заявок в источниках повторных вызовов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jaiswal, N. K. Priority Queues, Academic Press, New York. – 1968.
2. Madan, K. C. A Priority Queueing System with Service Interruptions // Statistica Neerlandica. –1973. –Vol. 27. –No. 3. – P. 115-123.
3. Simon, B. Priorty Queues with Feedback // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1984. – Vol. 31. – No. 1. – P. 134-149.
4. Choi, B. D. and Chang, Y. Single Server Retrial Queues with Priority Calls // Mathematical and Computer Modeling. – 1999. – Vol. 30. – No. 3-4. – P. 7-32.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Назаров Анатолий Андреевич, д.техн.н., профессор;
Черникова Яна Евгеньевна, магистрант

A.A. NAZAROV, Y.E. CHERNIKOVA

RESEARCH OF TWODEMENSION RETRIAL QUEUEING SYSTEM WITH R-PERSISTENT EXCLUSION OF ALTERNATIVE CUSTOMERS

In paper there is retrial queueing system with r-persistent exclusion of alternative customers by method asymptotic analysis under condition of long delay. Stationary probabilities distribution of server states is obtained. Values of asymptotic means of number of customers in the orbit are obtained.

Keywords: *r-persistent exclusion, alternative customer, partical characteristic function, asymptotic analysis*.

REFERENCES

1. Jaiswal, N. K. Priority Queues, *Academic Press, New York*. – 1968.
2. Madan, K. C. A Priority Queueing System with Service Interruptions // *Statistica Neerlandica*. –1973. –Vol. 27. –No. 3. – P. 115-123.
3. Simon, B. Priorty Queues with Feedback // *Journal of the Association for Computing Machinery*. – 1984. – Vol. 31. – No. 1. – P. 134-149.
4. Choi, B. D. and Chang, Y. Single Server Retrial Queues with Priority Calls // *Mathematical and Computer Modeling*. – 1999. – Vol. 30. – No. 3-4. – P. 7-32.