УДК 517.9

Е.А. ЛЕВЧЕНКО, А.Ю. ТРИФОНОВ*,**, А.В. ШАПОВАЛОВ*,***

АСИМПТОТИКИ МНОГОМЕРНОГО НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА – КОЛМОГОРОВА – ПЕТРОВСКОГО – ПИСКУНОВА ВБЛИЗИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ [1]

Построены асимптотические решения для многомерного нелокального уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова с функцией влияния, инвариантной относительно пространственного сдвига. Асимптотические решения представляют собой возмущения пространственно-однородного квазистационарного точного решения. Общие выражения проиллюстрированы примером для двумерного уравнения с начальным условием гауссова типа.

Ключевые слова: *многомерное нелокальное уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, квазистационарное решение, асимптотические решения.*

Введение

Нелинейная динамика ансамблей частиц с диффузией и дальнодействием [1, 2] описывается, в частности, обобщениями классической модели Фишера [3] и Колмогорова – Петровского – Пискунова [4] (модель Фишера – КПП). В этой модели могут возникать и эволюционировать пространственно неоднородные структуры [5, 6]. Следует отметить, что помимо динамики структур в нелокальных обобщениях модели Фишера – КПП существуют и другие динамические режимы.

Обобщенное уравнение Фишера – КПП в многомерном пространстве $\mathbb{R}^n$ запишем в виде

$$u_t = D\Delta u + au - \kappa u \int_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)u(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}, \quad u(\boldsymbol{x},t)|_{t=0} = \gamma(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Здесь вещественная гладкая функция $u(\boldsymbol{x},t)$ имеет смысл плотности ансамбля частиц в точке $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ в момент времени t; Δ – оператор Лапласа; D – постоянный коэффициент диффузии; постоянная a – темп роста плотности u; нелокальные потери описываются функцией влияния $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$; κ – параметр нелинейности. Уравнение (1) будем считать записанным в безразмерном виде.

Методы построения приближенных решений для уравнения вида (1) в аналитическом виде разрабатывались в ряде статей (см., например, [7–9] и цитированную там литературу) в основном в рамках квазиклассического приближения [10, 11], в котором в качестве асимптотического параметра выбирается коэффициент диффузии D, стоящий при старших производных. Отметим, что для некоторых видов функции $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ невязка квазиклассических асимптотик может быть ограничена или даже уменьшаться с течением времени [7], что свидетельствует о справедливости построенных квазиклассических решений на всем временном интервале.

Квазиклассическое приближение [9, 11] представляет собой разновидность сингулярной теории возмущений в специально выбранном классе функций. В работах [7–9] в качестве такого класса использовались траекторно-сосредоточенные функции. Существуют и другие подходы к построению приближенных решений, что позволяет исследовать различные свойства динамики ансамбля частиц. Для уравнения (1) при некотором выборе функции $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ удается найти частное точное решение, названное квазистационарным.

В данной работе построены асимптотические решения многомерного нелокального уравнения Фишера – КПП (1), представляющие собой возмущение квазистационарного точного решения. Общие выражения проиллюстрированы примером.

[1] Работа частично поддержана Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров; программой «Наука», контракт № 1.676.2014/ К; ФЦП ИР, контракт № 14.578.21.0082 (уникальный идентификатор прикладных научных исследований и экспериментальных разработок RFMEFI57814X0082).

1. Возмущения квазистационарного решения

Рассмотрим уравнение (1) с функцией влияния, удовлетворяющей следующим условиям:

$$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=b(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=B=\text{const},\quad |B|<\infty, \tag{2}$$

тогда уравнение (1) запишется в виде

$$u_t(\boldsymbol{x},t)=D\Delta u(\boldsymbol{x},t)+au(\boldsymbol{x},t)-\varkappa u(\boldsymbol{x},t)\int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}. \tag{3}$$

Функция $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ в (2) инвариантна относительно сдвига на один и тот же вектор по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, т.е. нелокальное взаимодействие во всех точках пространства одинаково.

В работах [12, 13] показано, что решения уравнения Фишера – КПП на больших временах сходятся к стационарному решению. Поэтому имеет смысл попытаться найти точное квазистационарное решение уравнения (3) и построить асимптотические решения в виде возмущений точного решения.

Уравнение (3) допускает, по крайней мере, два пространственно-однородных точных решения. Одно из них тривиальное $u(\boldsymbol{x},t)\equiv 0$, второе будем искать в виде

$$u(\boldsymbol{x},t)=u_0(\boldsymbol{x},t)=\beta(t),\quad u_0(\boldsymbol{x},t)|_{t=0}=\beta(t)|_{t=0}=\beta_0. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3), с учетом (2) получим логистическое уравнение для нахождения функции $\beta(t)$:

$$\dot{\beta}=a\beta-\varkappa B\beta^2. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$u_0(\boldsymbol{x},t)=\beta(t)=\frac{\beta_0 e^{at}}{1+\varkappa\dfrac{\beta_0}{a}B(e^{at}-1)}, \tag{6}$$

и существует предел

$$\lim_{t\to\infty}u_0(\boldsymbol{x},t)=\frac{a}{\varkappa B}=u_\infty. \tag{7}$$

Отметим, что решение вида (6) не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Решения уравнения (3) ищем в виде

$$u(\boldsymbol{x},t)=u_0(\boldsymbol{x},t)+\bar{u}(\boldsymbol{x},t), \tag{8}$$

где $\bar{u}(\boldsymbol{x},t)\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Решения вида (8) будем называть квазистационарными. Под квазистационарностью решения понимается стремление $u(\boldsymbol{x},t)$ к $u_0(\boldsymbol{x},t)$ на больших временах [14].

Подставив (8) в (3), получим

$$\begin{gathered}\bar{u}_t(\boldsymbol{x},t)-D\Delta\bar{u}(\boldsymbol{x},t)-[a-\varkappa B\beta(t)]\bar{u}(\boldsymbol{x},t)+\\ +\varkappa\beta(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\bar{u}(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}+\varkappa\bar{u}(\boldsymbol{x},t)\int_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\bar{u}(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Пусть начальное условие для функции $\bar{u}(\boldsymbol{x},t)$ имеет вид

$$\bar{u}(\boldsymbol{x},0)=\varepsilon\varphi(\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

где ε – малый параметр, а функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ принадлежат пространству Шварца. Задача Коши (9), (10) приводит к начальному условию

$$u|_{t=0}=\beta_0+\varepsilon\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

для уравнения (3), т.е. к задаче о малых возмущениях решения (6).

Асимптотические решения уравнения (9) будем искать в виде ряда теории возмущений в классе функций, регулярно зависящих от малого параметра ε, $\varepsilon\to 0$:

$$\bar{u}(\boldsymbol{x},t)=\bar{u}(\boldsymbol{x},t,\varepsilon)=\varepsilon\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon^2\bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{x},t)+\ldots. \tag{12}$$

Подставив (12) в (9) и приравняв слагаемые при одинаковых степенях ε, получим

$$\bar{u}_t^{(1)}(\boldsymbol{x},t) - D\Delta\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) - [a - \kappa B\beta(t)]\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) + \kappa\beta(t)\int_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} = 0; \tag{13}$$

$$\bar{u}_t^{(2)}(\boldsymbol{x},t) - D\Delta\bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{x},t) + \kappa\beta(t)\int_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} -$$

$$-[a - \kappa B\beta(t)]\bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{x},t) + \kappa\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)\int_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} = 0, \tag{14}$$

……

Из начального условия (10) следует

$$\bar{u}^{(1)}|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \bar{u}^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{2,\infty}. \tag{15}$$

Применив преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})e^{-i\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x}\rangle}d\boldsymbol{x}$$

к левой и правой частям уравнения (13), с учетом начального условия (15) найдем

$$\begin{gathered}\tilde{u}_t^{(1)}(\boldsymbol{p},t) + \left[D\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle - a + \kappa\left(B + \sqrt{(2\pi)^n}\,\tilde{b}(\boldsymbol{p})\right)\beta(t)\right]\tilde{u}^{(1)}(\boldsymbol{p},t) = 0,\\ \tilde{u}^{(1)}(\boldsymbol{p},t) = \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}).\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $\tilde{u}^{(1)}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{\varphi}$ – фурье-образы функций $\bar{u}^{(1)}$, b и φ соответственно. Из (16) получим

$$\tilde{u}^{(1)}(\boldsymbol{p},t) = \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p})\exp\left[-D\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle t + at - \kappa\left(B + \sqrt{(2\pi)^n}\,\tilde{b}(\boldsymbol{p})\right)\chi(t)\right], \tag{17}$$

где

$$\chi(t) = \int_0^t \beta(s)ds. \tag{18}$$

Применив обратное преобразование Фурье к функции $\tilde{u}^{(1)}(\boldsymbol{p},t)$ с учетом (15), запишем

$$\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} G^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,0)\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}, \tag{19}$$

где

$$G^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,s) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\langle\boldsymbol{p},(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle + a(t-s) - D\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle(t-s) -$$

$$-\kappa[B + \sqrt{(2\pi)^n}\,\tilde{b}(\boldsymbol{p})][\chi(t) - \chi(s)]\}d\boldsymbol{p}\,. \tag{20}$$

Здесь $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle$ – скалярное произведение векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}$. Подставив (20) в (19), имеем

$$\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{p}\exp[i\langle\boldsymbol{p},(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle - D\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle t + at - \kappa(B + \sqrt{(2\pi)^n}\,\tilde{b}(\boldsymbol{p}))\chi(t)]\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{p}\exp[i\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle - D\boldsymbol{p}^2 t + at - \kappa(B + \sqrt{(2\pi)^n}\,\tilde{b}(\boldsymbol{p}))\chi(t)]\tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}). \tag{21}$$

Аналогично из (14), (15) и (20) получим

$$\bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{x},t) = -\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^n} G^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,s)f(\boldsymbol{y},s)d\boldsymbol{y}. \tag{22}$$

Из (14) следует, что

$$f(\boldsymbol{y},t) = \kappa\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{y},t)\int_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{z},t)d\boldsymbol{z}. \tag{23}$$

Таким образом, выражения (8), (12), (21), (22) задают асимптотическое решение уравнения (3) с точностью $O(\varepsilon^3)$. Аналогично находятся функции $\bar{u}^{(k)}$, $k = 3,\ldots,\infty$.

2. Двумерное уравнения Фишера – КПП

В качестве примера рассмотрим двумерное уравнение вида (3) с начальным условием гауссова вида

$$u|_{t=0} = \beta_0 + \varepsilon\varphi(\boldsymbol{x}) = \beta_0 + \varepsilon\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2D}\right). \tag{24}$$

Такой вид начального условия выбран из соображений простоты вычисления членов асимптотического ряда. Функцию $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ также выберем в гауссовом виде:

$$\begin{gathered} b(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2\gamma^2}\right), \\ \int_{\mathbb{R}^n} b(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = B = 2\pi\gamma^2. \end{gathered} \tag{25}$$

В результате преобразования Фурье функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, $b(\boldsymbol{x})$ перейдут соответственно в

$$\begin{gathered} \varphi(\boldsymbol{x}) \to \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) = D\exp\left[-\frac{D}{2}\boldsymbol{p}^2\right], \\ b(\boldsymbol{x}) \to \tilde{b}(\boldsymbol{p}) = \gamma^2\exp\left[-\frac{\gamma^2}{2}\boldsymbol{p}^2\right]. \end{gathered} \tag{26}$$

Тогда для функции $\chi(t)$ вида (18) запишем

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi\gamma^2\kappa}\ln\left(1 + \frac{2\pi\gamma^2\kappa\beta_0}{a}(e^{at} - 1)\right) \tag{27}$$

и в соответствии с формулой (21) и с учетом (25) – (27) получим

$$\begin{aligned} \overline{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{D}{2\pi}e^{at}\left[1 + \frac{\kappa\beta_0 2\pi\gamma^2}{a}(e^{at} - 1)\right]^{-1} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\ln^n\left(1 + \frac{2\pi\gamma^2\kappa\beta_0}{a}(e^{at} - 1)\right)\int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{p}\exp\left[i\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle - D\boldsymbol{p}^2 t - \frac{D}{2}\boldsymbol{p}^2 - \frac{n\gamma^2}{2}\boldsymbol{p}^2\right] = \\ &= De^{at}\left[1 + \frac{\kappa\beta_0 2\pi\gamma^2}{a}(e^{at} - 1)\right]^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n\gamma^2 + D + 2Dt)} \times \\ &\times \ln^n\left(1 + \frac{2\pi\gamma^2\kappa\beta_0}{a}(e^{at} - 1)\right)\exp\left[-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2(n\gamma^2 + D + 2Dt)}\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Приближенное с точностью $O(\varepsilon^2)$ решение задачи Коши

$$u(\boldsymbol{x},t) = u_0(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon\overline{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)$$

дается выражением

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\beta_0 e^{at}}{1 + \kappa\dfrac{\beta_0}{a}B(e^{at} - 1)} + \varepsilon De^{at}\left[1 + \frac{\kappa\beta_0 2\pi\gamma^2}{a}(e^{at} - 1)\right]^{-1} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n\gamma^2 + D + 2Dt)}\ln^n\left(1 + \frac{2\pi\gamma^2\kappa\beta_0}{a}(e^{at} - 1)\right)\exp\left[-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2(n\gamma^2 + D + 2Dt)}\right], \end{aligned} \tag{29}$$

откуда видно, что пространственное распределение $u(\boldsymbol{x},t)$ имеет гауссов вид. Амплитуда и дисперсия распределения $u(\boldsymbol{x},t)$ изменяются во времени.

На рис. 1 проиллюстрировано асимптотическое решение $u(\boldsymbol{x},t)$ вида (29) при $t=10$ и следующих значениях параметров:

$$\kappa = 0.5,\quad D = 0.08,\quad a = 0.125,\quad \gamma = 0.2,\quad \beta_0 = 1,\quad \varepsilon = 0.2.$$

Из рис. 1 следует, что построенные асимптотические решения уравнения Фишера – КПП на бесконечной области пространства $\mathbb{R}^2$ не описывают образования структур в отличие от случая решений уравнения Фишера – КПП в ограниченной области с периодическими граничными условиями [14]. Отметим, что при $t\to\infty$ функция $\bar{u}(\boldsymbol{x},t)\to 0$ и соответственно $u(\boldsymbol{x},t)\to u_0(\boldsymbol{x},t)$.

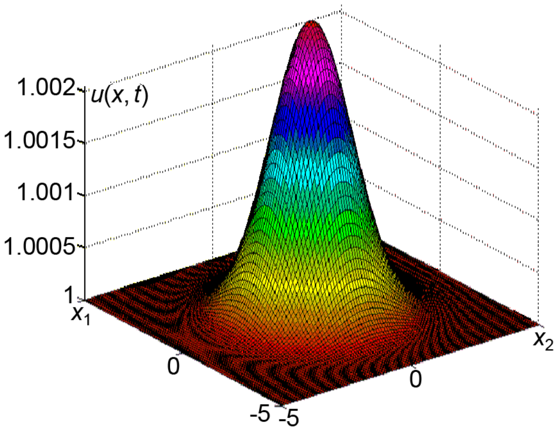

Рис. 1. Асимптотическое решение $u(\boldsymbol{x},t)$ вида (29) при $t = 10$

Заключение

В работе построены асимптотические решения задачи Коши для многомерного уравнения Фишера–КПП, представляющие собой возмущения точного пространственно-однородного квазистационарного решения. Общие выражения (8), (12), (21), (22) определяют приближенное решение с точностью $O(\varepsilon^3)$. В примере для двумерного случая выписано решение гауссова вида (формула (29)) с точностью $O(\varepsilon^2)$. Отметим, что решение (29) при $t\to\infty$ стремится к точному квазистационарному решению $u_0(\boldsymbol{x},t)$ вида (6). Асимптотика (29) оказывается справедливой и на больших временах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grindrod P. The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations: Patterns and Waves. – Second ed. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 275 p.
2. Murray J.D. Mathematical Biology: I. An Introduction. – 3 ed. – Berlin: Springer, 2001. – 551 p.
3. Fisher R.A. // Annu. Eugenics. – 1937. – V. 7. – P. 355–369.
4. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. – 1937. – Т. 1, 6. – С. 1–26.
5. Fuentes M.A., Kuperman M.N., and Kenkre V.M. // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 91. – P. 158104.
6. Da Cunha J.A.R., Penna A.L.A., Vainstein M.H., et al. // Phys. Lett. A. – 2009. – V. 373. – P. 661–667.
7. Левченко Е.А., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 12. – С. 47–53.
8. Levchenko E.A., Trifonov A.Y., and Shapovalov A.V. // J. Phys. A. – 2014. – V. 47. – 025209.
9. Shapovalov A.V. and Trifonov A.Yu. // arXiv:1409.3158. – 2014. – P. 1–35.
10. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
11. Белов В.В., Доброхотов С.Ю. // ТМФ. – 1988. – Т. 92. – № 2. – С. 215–254.
12. Комаров М.В. // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 1. – С. 66–72.
13. Комаров М.В., Шишмарёв И.А. // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 2. – С. 227–235.
14. Левченко Е.А., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5. – № 4. – С. 543–558.

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия
E-mail: levchenkoea@tpu.ru; atrifonov@tpu.ru
**Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: shpv@phys.tsu.ru

Поступила в редакцию 21.01.15.

Левченко Евгений Анатольевич, к.ф.-м.н., ассистент каф. высшей математики и математической физики ФТИ ТПУ;
Трифонов Андрей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. высшей математики и математической физики ФТИ ТПУ, ведущ. науч. сотр. ТГУ;
Шаповалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор ТПУ, зав. каф. теоретической физики ТГУ.