

УДК 519.2

К.С. КИМ*, В.И. СМАГИН*

УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О МОДЕЛИ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

В работе предлагается метод синтеза системы управления для дискретной системы с запаздыванием по управлению при неполной информации о модели аддитивных возмущений. Предложенный метод иллюстрируется примером.

Ключевые слова: дискретная система, неполная информация, запаздывание по управлению, квадратичный критерий.

Задачи синтеза систем управления для систем с запаздываниями при неполной информации о модели или состоянии рассматривались в работах [1–6] и др. В настоящей работе рассмотрено решение задачи оптимального управления для моделей объектов с запаздыванием в управлении для объектов с возмущениями, модели которых содержат неопределенные параметры. Для определения оптимального управления используется метод локально-оптимального слежения, выполненный с использованием калмановской фильтрации и экстраполяции с неизвестным входом [7–10]. Показано, что предложенный метод позволяет повысить точность слежения.

Модель объекта с запаздыванием по управлению описывается дискретным уравнением:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-h) + Fs(k), \\ x(0) &= x_0, u(j) = \psi(j), j = -h, -h+1, \dots, -1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояния; $u(k-h) \in R^m$ – вектор управления; h – количество тактов запаздывания; $s(k) \in R^{n_1}$ – вектор возмущений, x_0 и $\psi(j)$ ($j = -h, -h+1, \dots, -1$) – заданные векторы; A , B и F заданные постоянные матрицы.

Предполагается, что модель возмущений содержит неизвестные параметры и определяется следующим разностным уравнением:

$$s(k+1) = (R + \Delta R)s(k) + f + \Delta f + q(k), \quad s(0) = s_0, \quad (2)$$

где R – известная матрица, f – известный вектор (матрица R и вектор f – номинальные параметры модели возмущения), ΔR и Δf некоторые неизвестные матрицы и вектор, которые можно интерпретировать как ошибки определения параметров модели (2). Модель возмущений (2) можно интерпретировать как динамическую модель с неизвестным входом

$$s(k+1) = Rs(k) + f + r(k) + q(k), \quad s(0) = s_0, \quad (3)$$

где $r(k) = \Delta Rs(k) + \Delta f$ – неизвестный вход.

Предполагается также, что косвенные наблюдения за вектором возмущений описываются следующей моделью:

$$\omega(k) = \Phi s(k) + \tau(k). \quad (4)$$

Здесь $\omega(k) \in R^{m_1}$ – вектор наблюдений; Φ – $m_1 \times n$ -матрица; $\tau(k)$ – случайные ошибки наблюдений; в (2) s_0 – случайный вектор начальных условий, независимый $q(k)$, $\tau(k)$ ($M\{s_0\} = \bar{s}_0$, $M\{(s_0 - \bar{s}_0)(s_0 - \bar{s}_0)^T\} = P_0$); $q(k)$, $\tau(k)$ – независимые гауссовские случайные последовательности с характеристиками:

$$M\{q(k)\} = 0, M\{\tau(k)\} = 0, M\{q(k)q^T(j)\} = Q\delta_{kj}, M\{\tau(k)\tau^T(j)\} = T\delta_{kj}. \quad (5)$$

Будем также предполагать, вектор состояния объекта $x(k)$ полностью доступен измерению.

Требуется построить управление такое, чтобы вектор выхода системы $w(k) \in R^{n_2}$

$$w(k) = Hx(k),$$

отслеживал значение заданного вектора $z(k) \in R^n$.

¹ Работа выполнена в рамках программы повышения конкурентоспособности ТГУ и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-08-01015 А

Определим управление, отслеживающее заданный вектор z , на основе оптимизации следующего локального критерия:

$$I(k) = M\{(w(k+1) - z(k))^T C(w(k+1) - z(k)) + u^T(k-h)Du(k-h)/S_0^k, X_0^k\}, \quad (6)$$

где $C > 0$, $D \geq 0$ – весовые матрицы; $z(k)$ – заданный отслеживаемый вектор; $S_0^k = \{s(0), s(1), \dots, s(k)\}$ $X_0^k = \{x(0), x(1), \dots, x(k)\}$.

Сначала будем предполагать, что все компоненты вектора $x(k)$ и $s(k)$ измеряются точно.

Вычислим значения критерия (6)

$$I(k) = u^T(k-h)(B^T H^T CHB + D)u(k-h) + u^T(k-h)B^T H^T C(HAx(k) + HF s(k) - z(k)) + (HAx(k) + HF s(k) - z(k))^T CHBu(k-h). \quad (7)$$

Оптимальное управление определим из условия:

$$\frac{dI(k)}{du(k-h)} = 0. \quad (8)$$

Тогда, в силу (8), получим уравнение:

$$(B^T H^T CHB + D)u(k-h) + B^T H^T C(HAx(k) + HF s(k) - z(k)) = 0. \quad (9)$$

Выражая $u(k-h)$ из (9), управление будет следующим:

$$u(k-h) = -(B^T H^T CHB + D)^{-1} B^T H^T C(HAx(k) + HF s(k) - z(k)). \quad (10)$$

Далее, учитывая (1), имеем следующие равенства

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-h-1) + Fs(k-1), \\ x(k-1) &= Ax(k-2) + Bu(k-h-2) + Fs(k-2), \\ &\vdots \\ x(k-h+1) &= Ax(k-h) + Bu(k-2h) + Fs(k-h), \end{aligned} \quad (11)$$

тогда, учитывая (11), локально-оптимальное управление (10) представляется в виде

$$\begin{aligned} u(k-h) &= -(B^T H^T CHB + D)^{-1} B^T H^T C(HA^{h+1}x(k-h) + \\ &+ \sum_{i=1}^h HA^i Bu(k-h-i) + \sum_{i=0}^h HA^i Fs(k-i) - z(k)). \end{aligned} \quad (12)$$

Управление (12) формируется в момент времени $k-h$ и для его реализации необходимо знать состояние $x(k-h)$, возмущение $s(k-h)$ и прошлые значения управлений $u(k-h-i)$, а также необходимо осуществлять прогноз возмущений для моментов времени $k, k-1, \dots, k-h+1$.

Построим управление для случая неполной информации об аддитивном возмущении $s(k)$ (4). В этом случае оптимизируемый локальный критерий примет вид

$$I(k) = M\{(w(k+1) - z(k))^T C(w(k+1) - z(k)) + u^T(k-h)Du(k-h)/\Omega_0^k, X_0^k\}, \quad (13)$$

где $\Omega_0^k = \{\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(k)\}$, $X_0^k = \{x(0), x(1), \dots, x(k)\}$. Управление определим на основе принципа разделения, используя оценки и прогноз. Тогда получим

$$\begin{aligned} u(k-h) &= -(B^T H^T CHB + D)^{-1} B^T H^T C(HA^{h+1}\hat{x}(k-h) + \sum_{i=1}^h HA^i Bu(k-h-i) + \\ &+ HA^h F\hat{s}_f(k-h) + \sum_{i=0}^{h-1} HA^i F\hat{s}_p(k-i) - z(k)), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\hat{s}_f(k-h)$ – оценка фильтрации, которая определяется с помощью алгоритма оптимальной калмановской фильтрации:

$$\begin{aligned} \hat{s}_f(k-h) &= R\hat{s}_f(k-h-1) + f + \hat{r}(k-h-1) + K_f(k-h)[\omega(k-h) - \\ &- \Phi(R\hat{s}_f(k-h-1) + f + \hat{r}(k-h-1))], \hat{s}_f(0) = \bar{s}_0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$K_f(k-h) = P(k-h/k-h-1)\Phi^T(\Phi P(k-h/k-h-1)\Phi^T + T)^{-1}, \quad (16)$$

$$P(k-h/k-h-1) = RP(k-h-1)R^T + Q, \quad (17)$$

$$P(k-h) = (E_{n_1} - K_f(k-h)\Phi)P(k-h/k-h-1), P(0) = P_0. \quad (18)$$

Фильтр (15) использует информацию, поступившую из канала измерений в момент $k-h$. В (14) требуется вычислять также оценки и в моменты большие, чем $k-h$ (оценки прогноза),

поэтому здесь воспользуемся экстраполятором, который позволит вычислить оценку возмущения с прогнозом на 1 такт $\hat{s}_p(k-h+1)$:

$$\hat{s}_p(k-h+1) = R\hat{s}_p(k-h) + f + \hat{r}(k-h) + K_p(k-h)(\omega(k-h) - \Phi\hat{s}_p(k-h)), \quad \hat{s}_p(0) = \bar{s}_0, \quad (19)$$

$$K_p(k-h) = RP_{pr}(k-h)\Phi^T(\Phi P_{pr}(k-h)\Phi^T + T)^{-1}, \quad (20)$$

$$P_{pr}(k-h+1) = (R - K_p(k-h)\Phi)P_{pr}(k-h)(R - K_p(k-h)\Phi)^T + \\ + Q + K_p(k-h)TK_p^T(k-h), \quad P_{pr}(0) = P_0, \quad (21)$$

а оценки прогнозов $\hat{s}_p(k-h+j)$ для $j \geq 2$ определяются по формулам

$$\hat{s}_p(k-h+j) = R\hat{s}_p(k-h+j-1) + f + \hat{r}(k-h+j-1). \quad (22)$$

Отметим, что в (22) оценки $\hat{r}(k-h+j-1)$ для значений $j \geq 2$ могут быть вычислены с использованием методов прогнозирования временных рядов.

В (15) (19) оценка $\hat{r}$ вычисляется по методу наименьших квадратов на основе минимизации следующего критерия [7]:

$$J = \sum_{i=1}^k \left\{ \|\chi(i)\|_V^2 + \|r(i-1)\|_W^2 \right\}, \quad (23)$$

где $\chi(i) = \omega(i) - \Phi\tilde{x}(i)$ ($\tilde{x}(i) = R\hat{x}(i-1) + f$); $V > 0$, $W \geq 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей; $\|\chi(i)\|_V^2 = \chi^T(i)V\chi(i)$. В результате получим оценку:

$$\hat{r}(k) = [\Phi^TV\Phi + W]^{-1}\Phi^TV\{\omega(k+1) - \Phi[R\hat{s}(k) + f]\}, \quad (24)$$

которая учитывается при определении оценок $\hat{s}_f$ и $\hat{s}_p$, вычисляемых по формулам (15), (19).

Пример. Рассмотрим применение алгоритма управления (14) к объекту (1), (2) и каналу наблюдений (4) с параметрами

$$A = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 0.1 & 0.96 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad Q = \text{diag}\{0.1 \quad 0.05\}, \quad T = \text{diag}\{0.05 \quad 0.04\},$$

$$B = H = F = C = V = P_0 = E_2, \quad D = W = 0, \quad z = (10 \quad 15)^T, \quad f = (2.7 \quad 2.3)^T,$$

и для следующих отклонений от номинальных значений модели возмущений (2):

$$\Delta R = \begin{pmatrix} 0 & 0.02 \\ 0.05 & 0.06 \end{pmatrix}, \quad \Delta f_{1,k} = \begin{cases} -0.1, & \text{if } 0 \leq k < 10, \\ -1.3, & \text{if } 10 \leq k < 20, \\ 1.2, & \text{if } 20 \leq k \leq 30, \end{cases} \quad \Delta f_{2,k} = \begin{cases} 0.2 & \text{if } 0 \leq k < 10, \\ -0.8 & \text{if } 10 \leq k < 20, \\ 0.7 & \text{if } 20 \leq k \leq 30. \end{cases}$$

Предложенный алгоритм управления (14) сравнивался с алгоритмом управления по номинальной модели возмущений без учета оценок вектора r . Результаты этого сравнения приведены на рис. 1–2. На рис. 3 приведены реализации вектора r и его оценки $\hat{r}$.

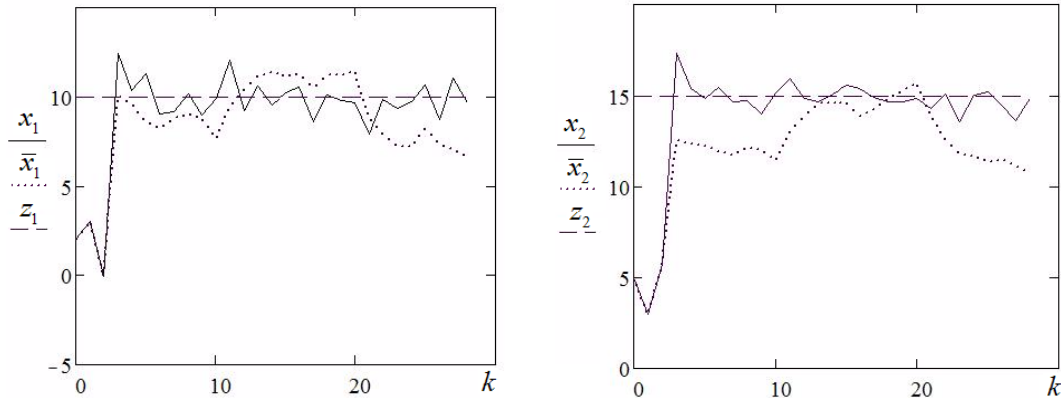


Рис. 1. Компоненты вектора состояния (x_i – при управлении (14), $\bar{x}_i$ – при управлении без учета оценок $\hat{r}$ (по номинальной модели возмущений), z_i – компоненты отслеживаемого вектора ($i = \overline{1,2}$))

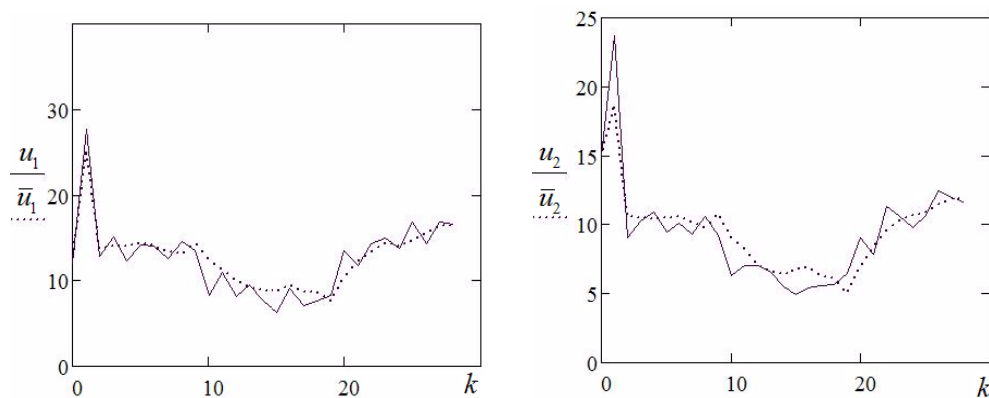


Рис. 2. Компоненты вектора управления (u_i – при управлении (14), $\bar{u}_i$ – при управлении без учета оценок $\hat{r}$ ($i = 1, 2$))

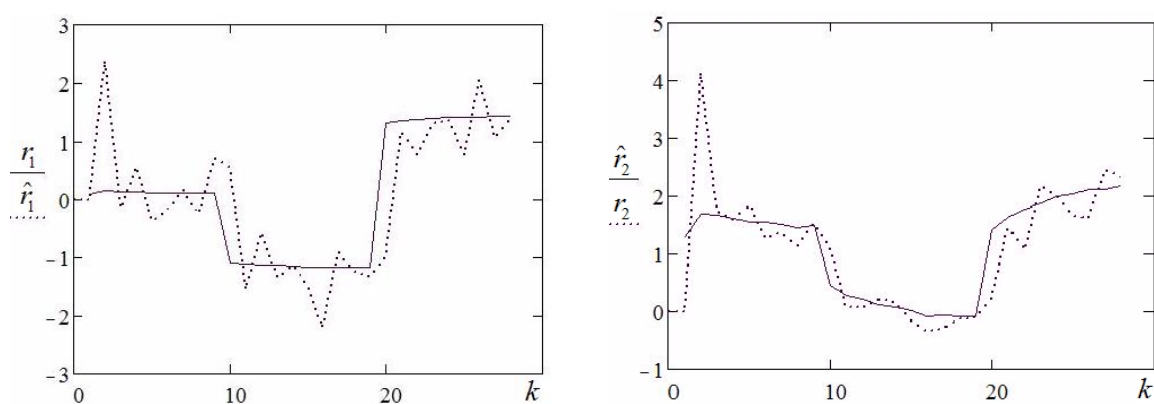


Рис. 3. Компоненты вектора r и его оценки $\hat{r}$

Ниже в таблице приведены среднеквадратические ошибки точности отслеживания заданного вектора z при управлении (14) и при управлении без учета оценок $\hat{r}$

$$\sigma_{x,i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (z_i - x_{k,i})^2}{N-1}}, \quad \sigma_{\bar{x},i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (z_i - \bar{x}_{k,i})^2}{N-1}}, \quad (i = \overline{1, 2}),$$

которые получены для $N = 30$. Усреднение осуществлялось по 50 реализациям.

Таблица 1.

Среднеквадратические ошибки отслеживания заданного вектора z

$\sigma_{x,1}$	$\sigma_{x,2}$	$\sigma_{\bar{x},1}$	$\sigma_{\bar{x},2}$
0.928	0.816	2.034	2.658

Результаты моделирования показали, что использование в алгоритме управления (14) фильтра и экстраполятора, учитывающих оценки и прогноз значений неизвестного входа по сравнению с алгоритмом, не учитывающего такие оценки, позволяет повысить точность отслеживания (табл 1) при незначительно отличающихся управлениях (см. рис. 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение. – 1974. – 328 с.
2. Yoneyama J., Uchida Y., Nishikawa S. Robust control design of uncertain discrete-time systems with delays. Discrete Time Systems (Ed. M.A.Jordán). – Chapter 11. InTech, – 2011. – P. 179–194.
3. Смагин В.И., Смагин С.В. Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – №3(4). – 2008. – С. 19–26.

4. Киселева М.Ю., Смагин В.И. Управление с прогнозирующей моделью с учетом запаздывания по управлению // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №2(11). – С.5-12.
5. Kiseleva M.Y., Smagin V.I. Model predictive control of discrete systems with state and input delays // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – №1(14). – С.5–12.
6. Мухина О.О., Смагин В.И. Локально-оптимальное управление запасами с учетом запаздываний в поставках и транспортных ограничений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – №2(19). – С. 42-50.
7. Janczak D., Grishin Y. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. – 2006. – V. 35. – No. 4. – P. 851–862.
8. Witczak M. “Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non- systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters”, Lecture Notes in Electrical Engineering, Springer International Publishing, Switzerland. 2014. – P. 19–56.
9. Смагин В.И. Оценивание состояний линейных дискретных систем при неизвестном входе с использованием компенсаций // Изв. вузов Физика. 2014. – Т. 57. – № 5. – С.104-110.
10. Koshkin G.M., Smagin V.I. Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms // Proc. 10th International Conference on Digital Technologies. Žilina, Slovakia. July 9–11, – 2014. – P. 120–124.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: vsm@mail.tsu.ru

E-mail: kks93@rambler.ru

Ким Константин Станиславович
Смагин Валерий Иванович, д.т.н., профессор;

K.S.KIM, V.I.SMAGIN

CONTROL OF DISCRETE DELAY SYSTEMS WITH INCOMPLETE INFORMATION ON THE MODEL PERTURBATIONS

In this paper proposes a method of synthesis of control systems for discrete systems with delayed control with incomplete information about the model of additive disturbances. The proposed method is illustrated by an example.

Keywords: *discrete system, incomplete information, delayed systems, square criterion.*

REFERENCES

1. Gorecki H. *Analysis and synthesis of time delay systems*. J. Wiley, 1989. 369 p.
2. Yoneyama J., Uchida Y., Nishikawa S. Robust control design of uncertain discrete-time systems with delays. *Discrete Time Systems* (Ed. M.A.Jordán). Chapter 11. InTech, 2011. pp. 179–194.
3. Smagin V.I., Smagin S.V. Adaptivnoe upravlenie zapasami s uchetom ogranichenij i transportny'x zapazdy'vanij [Adaptive inventory control with restrictions and transport delays] Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vy'chislitel'naya texnika i informatika. [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 2010, no. 3(4), pp. 19–26. (In Russian)
4. Kiseleva M.Yu., Smagin V.I. Upravlenie s prognoziruushhej model'yu s uchetom zapazdy'vaniya po upravleniyu [Model predictive control with time-delay in control input] Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vy'chislitel'naya texnika i informatika. [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 2010, no.2(11), pp. 5–12. (In Russian)
5. Kiseleva M.Y., Smagin V.I. Model predictive control of discrete systems with state and input delays. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vy'chislitel'naya texnika i informatika. [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 2011, no.1(14), pp.5–12.
6. Muhina O.O., Smagin V.I. Lokal'no-optimal'noe upravlenie zapasami s uchetom zapazdy'vanij v postavkax i transportny'x ogranichenij [Locally optimal inventory control with time delays in deliveries and transport restrictions]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vy'chislitel'naya texnika i informatika. [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 2012, no. 2(19), pp. 42–50. (In Russian)
7. Janczak D., Grishin Y. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 2006. vol. 35. no. 4. pp. 851–862.

8. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non- systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, Springer International Publ., Switzerland. 2014. pp. 19–56.
9. Smagin V.I. State estimation for linear discrete systems with unknown input using compensations. *Russian Physics Journal*. 2014, vol. 57, no. 5, pp. 682–690.
10. Koshkin G.M., Smagin V.I. Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms. *Proc. 10th International Conference on Digital Technologies*. Žilina, Slovakia. July 9–11, 2014. pp. 120–124.