Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET MÊCANIQUE A L'UNIVERSITÉ KOUYBYCHEFF DE TOMSK.

Vol. II. Fasc. II.

MITTEILUNGEN DES FORSCHUNGS-INSTITUTS FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK AN DER KUJBYSCHEW-UNIVERSITÄT TOMSK.

Bd. II. Heft II.

ИЗВЕСТИЯ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

им. КУЙБЫШЕВА В. В.

222902

Редакционная коллегия:
Ф. Э. Молин.
Н. П. Романов.
Ответств. ред.: Ф. Э. Молин.

Redaktions-Kommission
Comité de rédaction
Th. Molien.
N. Romanoff.
Verantw. Red. / Le réd. resp. } Th. Molien.

ТОМ ВТОРОЙ
ВЫПУСК ВТОРОЙ

ТОМСК Издательство «Красное Знамя» 1938

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ОТ РЕДАКЦИИ

Редакция обращается к авторам работ с просьбой присылать рукописи напечатанными, по возможности, на пишущей машинке и на одной стороне листа.

Работы могут быть написаны на русском, немецком, английском, французском или итальянском языках. Каждая работа должна сопровождаться резюме, делающим понятным сущность содержания работы для читателя, незнакомого с языком, на котором написана работа. Перевод резюме на русский или другой язык, в случае необходимости, берет на себя редакция.

Адрес: Научно-Исследовательский Институт Математики и Механики при Томском Гос. Университете им. Куйбышева, Томск, СССР.

DE LA REDACTION.

La rédaction prie les auteurs de vouloir bien envoyer leurs manuscrits écrits avec le dactylographe sur un côté de la feuille.

Les articles présentés peuvent étre rédigés en russe, allemand, anglais, français ou italien.

Chaque travail doit avoir un résumé écrit en termes clairs, qui donnent une idée nette. sur le sujet de ce travail même pour les lecteurs qui ne connaissent pas la langue du texte du travail.

La redaction se charge de la traduction du résumé en russe ou dans une autre langue

Adresse. Institut de mathématiques et de mécanique á l'Université Kouybycheff de Tomsk, L'U.R.S.S.

COMMUNICATIONS OF THE EDITORIAL STAFF.

The authors of treatises which shall be published in this journal, are asked to present their manuscripts, if possible, in type-writing, on sheets, written upon only on one side.

The treatises may be written in Russian, English French German, or Italian. A resumé, which makes it possible for the reader not acquainted with the original language to understand the essential contents, shall be added. If necessary, the editors will translate the résumé into Russian or other languges.

Address: Research Institute for Mathematics and Mechanics at the Kuibysheff State-University. Tomsk, Siberia.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

51+531

ПРОВЕРЕНО
1958 г.

В. А. Малеев

(1889 — 1938)

Томские вузы—университет, индустриальный институт, пединститут и томские математики понесли тяжелую утрату. Скончался один из старейших математиков Томска, профессор Всеволод Александрович Малеев. За 18 лет его работы в Томских вузах его успели оценить не только товарищи по работе, но и многочисленные студенты, которым он помогал в самый трудный период студенческой учебы, помогал им на первых курсах выработать математическое мышление, давал твердые математические установки. Блестящий лектор, он с крайней ясностью излагал свои мысли.

В течение целого ряда лет В. А. Малеев возглавлял математическую кафедру, сначала в университете, последнее время в индустриальном институте.

Из его научных трудов упомянем следующие:

1. О группах решений сравнения

$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} - 3x^n y^n z^n \equiv 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

2. О композициях решений сравнения (a)
3. О свойствах системы чисел, удовлетворяющих сравнению

$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} - 3x^n y^n z^n \equiv 0 \pmod{q^{km}}.$$

4. Об определении наименьшего показателя ω, при котором выражение $x^\omega - 1$ делится нацело на многочлен n-ой степени по простому модулю.
5. О вычислении производных сумм одинаковых степеней корней по коэфициентам алгебраических уравнений.
6. К теории уравнений 3-й степени.

Смерть слишком рано унесла В. А. Малеева и не дала закончить целый ряд задуманных им работ.

Бывшие слушатели В. А. Малеева всегда сохранят о нем благодарную память, а товарищи по работе скорбят о его преждевременной кончине.

222902

Библиотека при Томском Гос. Университете
ДЛЯ КНИГ

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ОБ УНИМОДАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

А. Я. Хинчин (Москва).

В дальнейшем мы будем называть функцию распределения $F(x)$ *унимодальной*, если существует по меньшей мере одно значение $x=\alpha$, такое, что функция $F'(x)$—неубывающая при $x<\alpha$ и невозрастающая при $x>\alpha$; при этом функция $F'(x)$ рассматривается лишь в тех точках, где она существует. Не ограничивая этим общности исследования, мы для простоты будем всегда полагать $\alpha=0$.

Из приведенного определения очевидно следует, что унимодальная функция распределения выпукла при $x<0$ и вогнута при $x>0$; очевидно, справедливо и обратное утверждение. Отсюда в частности следует, что всякая унимодальная функция распределения в каждой точке, кроме быть может $x=0$, имеет правую и левую производную; в дальнейшем мы под $F'(x)$ для определенности будем понимать правую производную функции $F(x)$; очевидно, что $F'(x)$ есть функция, определенная для всех $x\neq 0$, невозрастающая при $x>0$ и неубывающая при $x<0$. Унимодальная функция распределения имеет почти всюду вторую производную, суммируемую в любом интервале (α, β), где $0<\alpha<\beta$ или $\alpha<\beta<0$.

Примерами унимодальных распределений могут служить: 1) закон Гаусса $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$; 2) равномерное распределение в конечном интервале. Значительная часть встречаемых на практике распределений принадлежит к числу унимодальных, вследствие чего в теоретической статистике мы нередко встречаемся с таким положением, когда устанавливаются те или другие предложения при условии, что рассматриваемое распределение унимодально (причем иногда это условие вводится в целях упрощения доказательства, иногда же оказывается по существу необходимым).

В настоящей заметке я имею в виду исследовать вопрос о природе характеристических функций унимодальных распределений: при этом оказывается, что поставленная задача допускает очень простое и интересное решение, выражающееся следующим предложением.

ТЕОРЕМА.—Если $\varphi(t)$ есть характеристическая функция любого закона распределения, то

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$f(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du, \qquad f(0)=1, \tag{1}$$

есть характеристическая функция некоторой унимодальной функции распределения $F(x)$; обратно, характеристическая функция любого унимодального распределения может быть представлена в виде (1), *где $\varphi(t)$—некоторая характеристическая функция.*

Очевидно, это предложение можно еще формулировать так: *для того, чтобы функция $f(t)$ была характеристической функцией некоторого унимодального распределения, необходимо и достаточно, чтобы $f(0)=1$ и чтобы функция*

$$\varphi(t)=\frac{d}{dt}\{tf(t)\}$$

была характеристической функцией.

Прежде чем приступить к доказательству формулированной теоремы, мы сделаем несколько элементарных замечаний.

1°. Если $F(x)$—унимодальная функция распределения, то при $x\to+0$, при $x\to-0$, при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$

$$\lim x\,F'(x)=0.$$

В самом деле, при $x>0$ мы имеем

$$xF'(x)\leqslant 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} F'(u)\,du,$$

откуда при $x\to+\infty$

$$xF'(x)\leqslant 2\left\{1-F\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\to 0,$$

а при $x\to+0$

$$xF'(x)\leqslant 2\{F(x)-F(+0)\}\to 0;$$

подобным же образом доказывается утверждаемое соотношение при $x\to-0$ и $x\to-\infty$.

2°. Если $\Phi(x)$—произвольная функция распределения, то при $x\to+0$ и при $x\to+\infty$

$$\lim x\int_x^{\infty}\frac{d\Phi(u)}{u}=0,$$

а при $x\to-0$ и $x\to-\infty$

$$\lim x\int_{-\infty}^{x}\frac{d\Phi(u)}{u}=0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В самом деле, при $x \to +0$

$$x\int_x^{\infty}\frac{d\Phi(u)}{u} = x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{d\Phi(u)}{u} + x\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\frac{d\Phi(u)}{u} \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^{\sqrt{x}} d\Phi(u) + \sqrt{x}\int_{\sqrt{x}}^{\infty} d\Phi(u) \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(x) + \sqrt{x} \to 0,$$

а при $x \to +\infty$

$$x\int_x^{\infty}\frac{d\Phi(u)}{u} \leqslant 1 - \Phi(x) \to 0.$$

Подобным же образом доказывается и второе утверждение.

Мы переходим теперь к доказательству формулированной выше теоремы.

Пусть $\Phi(x)$—произвольный закон распределения и $\varphi(t)$—соответствующая характеристическая функция. Положим

$$f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du, \qquad f(0) = 1,$$

и покажем, что $f(t)$ есть характеристическая функция некоторого унимодального закона.

Положим

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= -\int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{u}\frac{d\Phi(v)}{v} && (x<0),\\ F(x) &= 1 - \int_x^{\infty} du \int_u^{\infty}\frac{d\Phi(v)}{v} && (x>0). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Определенная таким образом функция $F(x)$ есть функция распределения. В самом деле, она очевидно не убывает при $x<0$ и при $x>0$; далее, в силу 2°

$$F(+0) = 1 - \int_{+0}^{\infty} du \int_u^{\infty}\frac{d\Phi(v)}{v} =$$

$$= 1 - \int_{+0}^{\infty} u\int_u^{\infty}\frac{d\Phi(v)}{v} - \int_{+0}^{\infty} d\Phi(v) = \Phi(+0),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и аналогичным образом

$$F(-0)=\Phi(-0),$$

так что $F(x)$ нигде не убывает; наконец, та же интеграция по частям в силу 2° показывает, что

$$F(+\infty)=1, \quad F(-\infty)=0.$$

Диференцируя функцию $F(x)$, мы непосредственно убеждаемся, что $F'(x)$ не убывает при $x<0$ и не возрастает при $x>0$, то есть, что функция $F(x)$ унимодальна.

Наконец, убедимся, что закону $F(x)$ соответствует характеристическая функция $f(t)$, чем наше утверждение и будет окончательно доказано. Положим для краткости

$$\Phi(+0)-\Phi(-0)=F(+0)-F(-0)=\Delta. \tag{3}$$

Мы имеем при $t\neq 0$ в силу (2°)

$$\int_{+0}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)=\int_{+0}^{\infty} e^{itx}\left\{\int_{x}^{\infty}\frac{d\Phi(v)}{v}\right\}dx=$$

$$=\int_{+0}^{\infty}\frac{e^{itx}-1}{it}\,\frac{d\Phi(x)}{x}=\frac{1}{t}\int_{+0}^{\infty}\left\{\int_{0}^{t}e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x);$$

Подобным же образом

$$\int_{-\infty}^{-0} e^{itx}\,dF(x)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{-0}\left\{\int_{0}^{t}e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x).$$

Наконец, тривиальным образом

$$\Delta=\int_{-0}^{+0} e^{itx}\,dF(x)=\frac{1}{t}\int_{-0}^{+0}\left\{\int_{0}^{t}e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x);$$

таким образом, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF(x)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{0}^{t}e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x)=$$

$$=\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\varphi(u)\,du=f(t),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь обратно дана произвольная унимодальная функция распределения $F(x)$, и пусть $f(t)$—соответствующая характеристическая функция; покажем, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$f(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du,$$

где $\varphi(u)$— характеристическая функция некоторого закона распределения.

Положим для $x \neq 0$

$$F(x)-xF'(x)=\Phi(x). \tag{4}$$

$\Phi(x)$ есть функция распределения. В самом деле, при $h>0$

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=F(x+h)-F(x)-hF'(x+h)+$$
$$+x[F'(x)-F'(x+h)]=F(x+h)-F(x)-hF'(x)+$$
$$+(x+h)\,[F'(x)-F'(x+h)].$$

При $x>0$ первое, а при $x<x+h<0$ — второе из этих выражений показывают, что $\Phi(x+h)-\Phi(x)\geqslant 0$. С другой стороны в силу 1° мы очевидно имеем

$$\Phi(+0)=F(+0), \qquad \Phi(-0)=F(-0),$$
$$\Phi(+\infty)=F(+\infty)=1, \qquad \Phi(-\infty)=F(-\infty)=0.$$

Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию закона $\Phi(x)$ и сохраним обозначение (3). Тогда

$$f(t)=\Delta+\int_{+0}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)+\int_{-\infty}^{-0} e^{itx}\,dF(x).$$

В силу 1° при $t \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{itx}F'(x)\,dx=\left[F'(x)\,\frac{e^{itx}-1}{it}\right]_{\varepsilon}^{\infty}-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{itx}-1}{it}\,dF'(x)=$$

$$=\frac{1}{t}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{itx}-1}{ix}\,d\Phi(x)+o(1)=\frac{1}{t}\int_{+0}^{\infty}\left\{\int_0^t e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x)+o(1),$$

откуда

$$\int_{+0}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)=\frac{1}{t}\int_{+0}^{\infty}\left\{\int_0^t e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x).$$

Подобным же образом,

$$\int_{-\infty}^{-0} e^{itx}\,dF(x)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{-0}\left\{\int_0^t e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как, наконец, мы имеем тривиальным образом

$$\Delta = \frac{1}{t}\int\limits_{-0}^{+0}\left\{\int\limits_{0}^{t} e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x),$$

то

$$f(t) = \frac{1}{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{0}^{t} e^{iux}\,du\right\}d\Phi(x) = \frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\varphi(u)\,du,$$

что и требовалось доказать.

Заметим еще, что взаимно обратные соотношения (2) и (4) устанавливают очень простое взаимно однозначное соответствие между множеством всех функций распределения $\Phi(x)$ и множеством всех унимодальных функций распределения $F(x)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ÜBER UNIMODALE VERTEILUNGEN

A. Khintchin (*Moskau*).

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ heisst *unimodal*, wenn mindestens ein x-Wert α existiert von der Beschaffenheit, dass $F'(x)$ bei $x<\alpha$ nicht abnehmend und bei $x>\alpha$ nicht zunehmend ist; unbeschadet der Allgemeinheit kann $\alpha=0$ angenommen werden; die Ableitung $F'(x)$ wird nur da wo sie existiert betrachtet. Es gibt viele Untersuchungen in der theoretischen Statistik, die sich auf unimodale Verteilungen beschränken. Hier wird folgendes Kennzeichen für die Fouriertransformierten (charakteristischen Funktionen) unimodaler Verteilungen aufgestellt: Ist $f(t)$ die Fouriertransformierte einer unimodalen Verteilung, so ist

$$f(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du,$$

wo $\varphi(t)$ wiederum die Fouriertransformierte eines Verteilungsgesetzes ist; umgekehrt liefert (1) stets [d. h. für eine beliebige Fouriertransformierte $\varphi(u)$] die Fouriertransformierte einer unimodalen Verteilung.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ОДНА ТЕОРЕМА ИЗ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д. А. Райков (Москва).

Как известно, законами распределения называются неубывающие функции $F(x)$, определенные на всей прямой $-\infty < x < \infty$ и подчиненные условиям $F(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ и $F(x) \to 1$ при $x \to \infty$. Каждому закону распределения соответствует своя характеристическая функция $f(t)$, определенная для всех вещественных значений t формулой

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

За последнее время все больший интерес привлекает изучение так называемых безгранично делимых законов распределения. Характеристические функции этих законов даются (для вещественных t) следующей формулой А. Я. Хинчина [1]), являющейся модификацией формулы П. Леви [2]):

$$f(t) = exp\left\{ i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \right\}, \qquad (1)$$

где γ—произвольная вещественная постоянная и $G(u)$—произвольная неубывающая функция с ограниченным изменением на $(-\infty, \infty)$.

В связи с исследованиями по арифметике законов распределения выяснилась важность изучения аналитических характеристических функций. В моей работе „О разложении законов Гаусса и Пуассона [3])“ доказана, среди прочих, следующая теорема, которую можно рассматривать как одно из первых предложений теории аналитических характеристических функций:

ТЕОРЕМА 1. Если характеристическая функция $f(t)$, соответствующая закону распределения $F(x)$, регулярна в круге

---

[1]) А. Я. Хинчин, Новый вывод одной формулы П. Леви, Бюллетени МГУ, секция математики и механики, вып. 1 (1937).

[2]) P. Lévy, Sur les intégrales dont les éléments sont variables aléatoires indépendantes, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, vol. III (1934), стр. 337—367.

[3]) Известия Академии наук СССР, серия математическая, т. 2 (1938), вып. I.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$|t|<R$, то она регулярна во всей полосе $-R<\Im t<R$ и представляется в этой полосе интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)$.

В настоящей заметке доказывается аналогичная теорема для характеристических функций безгранично делимых законов распределения.

ТЕОРЕМА 2. Если характеристическая функция безгранично делимого закона распределения регулярна в круге $|t|<R$, то она регулярна в полосе $-R<\Im t<R$ и представляется во всей этой полосе формулой Леви-Хинчина (1).

Доказательство. Пусть $f(t)$—рассматриваемая характеристическая функция, и (1)—ее представление для вещественных t. В силу теоремы 1, $f(t)$ регулярна во всей полосе $-R<\Im t<R$. Так как $f(0)=1$, то во всяком случае существуют такие r, $0<r\leqslant R$, что $f(t)\neq 0$ в круге $|t|<r$. Покажем прежде всего, что для всякого такого r формула (1) справедлива во всей полосе $-r<\Im t<r$.

Рассмотрим ту ветвь функции $\ln f(t)$, которая для вещественных t дается равенством

$$\varphi(t)=\ln f(t)=i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u). \qquad (2)$$

Очевидно, $\varphi(t)$ будет регулярна в круге $|t|<r$. Покажем, что равенство (2) сохраняет силу во всей полосе $-r<\Im t<r$. Имеем (предполагая, что h пробегает вещественные значения)

$$\varphi''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)+\varphi(-h)-2\varphi(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)+\varphi(-h)}{h^2}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos hu}{(hu)^2/2}(1+u^2)\,dG(u).$$

В силу неотрицательности подинтегрального выражения, можно перейти к пределу под знаком интеграла, и мы получаем, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+u^2)\,dG(u)$$

существует и равен $-\varphi''(0)$. Отсюда, пока еще только для вещественных t,

$$-\varphi''(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}(1+u^2)\,dG(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}\,dH(u),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где

$$H(u)=\int_{-\infty}^{u}(1+v^2)\,dG(v).$$

Это показывает, что $-\varphi''(t)$ является, с точностью до постоянного множителя, характеристической функцией. Так как $-\varphi''(t)$, вместе с тем, регулярна в круге $|t|<r$, то в силу теоремы 1, интеграл $\int_{+\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)$ существует во всей полосе $-r<\Im t<r$. Но отсюда явствует существование (и регулярность) в этой полосе и интеграла стоящего в (2), что и влечет за собой справедливость равенства (2), а значит и (1), во всей полосе $-r<\Im t<r$.

Пусть теперь r имеет наибольшее такое значение ($\leqslant R$), что $f(t)\neq 0$ в круге $|t|<r$. Тогда либо $r=R$, и, в силу предыдущего, теорема доказана, либо $r<R$, и $f(t)$, очевидно, должна обращаться в нуль в точке $t=iv_0$, где $v_0=\pm r$. Покажем, что последнее ведет к противоречию. Рассмотрим значения $\varphi(t)$ при $t=iv$, где v вещественно и $|v|<r$. Если $f(iv_0)=0$, то $\varphi(iv)$ при $v\to v_0$ должно стремится к $-\infty$. Но из (2) явствует, что это невозможно. Действительно,

$$-\gamma v+\int_{-1}^{1}\left(e^{-vu}-1+\frac{vu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)$$

при $v\to v_0$ остается ограниченным, а

$$\int_{|u|>1}\left(e^{-vu}-1+\frac{vu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\geqslant$$

$$\geqslant-\int_{|u|>1}dG(u)-|v|\int_{|u|>1}\frac{1}{|u|}\,dG(u)\geqslant$$

$$\geqslant-(1+r)\int_{|u|>1}dG(u).$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Как из формулировки, так и из самого процесса доказательства теоремы 2 явствует, что *характеристическая функция безгранично делимого закона распределения, регулярная в круге* $|t|<R$, а значит, и в полосе $-R<\Im t<R$, *не имеет нулей в этой полосе*. В частности, *целые характеристические функции безгранично делимых законов распределения не имеют нулей*.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

A THEOREM FROM THE THEORY OF THE ANALYTIC CHARACTERISTIC FUNCTIONS

D. Raikov (Moscow).

In this note the following theorem is proved:

THEOREM. If the characteristic function $f(t)$ of the unboundedly divisible distribution law is regular in the circle $|t|<R$, it is regular in the whole strip $-R<\Im t<R$ and is represented in this strip by the Lévy—Khintchine formula

$$f(t)=\exp\left\{i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right\}. \qquad (1)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ИЗГИБ СТЕРЖНЯ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

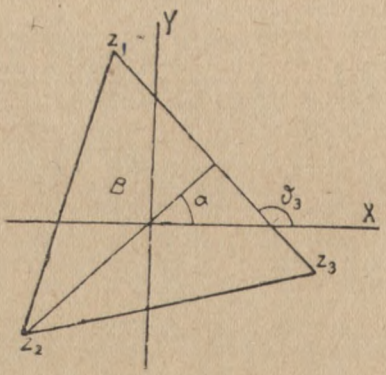
П. П. Куфарев (Томск).

В этой заметке дается решение задачи изгиба поперечной силой стержня, сечение которого — равносторонний треугольник. Функции, через которые выражаются напряжения и деформации в элементах стержня, представляются здесь через тригонометрические ряды, быстро сходящиеся.

§ 1. Параметрическое представление решения.

Пусть к одному из оснований стержня приложена система напряжений, статически эквивалентная одной силе W, перпендикулярной оси стержня и проходящей через центр инерции основания. Поместим, как обычно, начало координат в центр инерции другого основания стержня; ось Z направим по оси стержня, и ось X—параллельно направлению изгибающей силы. Рассмотрим произвольное сечение B стержня. Пусть стороны равностороннего треугольника, ограничивающего сечение, перенумерованные в порядке обхода, образуют с осью X углы ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, и высота, опущенная на третью сторону, образует с осью X угол α. Очевидно

$$\vartheta_k = \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} k\pi \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1}$$



Чертеж 1.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Обозначим далее длину стороны треугольника и высоту соответственно через L и H. Наконец, вводя комплексное переменное

$$z = x + iy,$$

обозначим аффикс вершины треугольника, находящейся при обходе в положительном направлении в начале k-той стороны, через

$$z_k = x_k + iy_k = L\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\left(\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)i}. \tag{2}$$

Известно, что решение задачи сводится к определению регулярной в области B функции комплексного переменного $F(z)$, удовлетворяющей на контуре сечения условиям:

$$\Im[F(z)] = -\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{y^3}{3} - \frac{\sigma}{2}x^2y + 2(1+\sigma)\int xy\,dx \tag{3}$$

(σ—коэффициент Пуассона) [1]).

Для рассматриваемого случая, выражая координаты x, y точки контура через длину дуги s_k, отсчитываемую на k-той стороне треугольника от ее начальной точки z_k,

$$x = x_k + s_k\cos\vartheta_k, \quad y = y_k + s_k\sin\vartheta_k,$$

можно представить эти условия в виде:

$$\Im[F(z)] = A_k s_k^3 + B_k s_k^2 + C_k s_k + D_k + C' \tag{4}$$

(на k-той стороне),
при чем

$$\left.\begin{aligned}
A_k &= \frac{1}{6}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\sin\vartheta_k - \frac{1}{4}\cos 3\alpha,\\
B_k &= \frac{L\sqrt{3}}{6}\left\{\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)\sin\left(\vartheta_k + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cos\vartheta_k + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{3}{2}\sin\left(3\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right\},\\
C_k &= \frac{L^2}{6}\left\{\frac{3}{2}\sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\vartheta_k + \frac{\pi}{6}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\sin\left(\vartheta_k + \frac{\pi}{3}\right)\right\},\\
D_k &= \frac{L^3\sqrt{3}}{54}\left\{\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\sin 3\alpha - \frac{3}{2}\sin\left(\vartheta_k + \frac{\pi}{6}\right)\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и C'—произвольная постоянная, которую можно принять равной нулю.

[1]) См., напр. Мусхелишвили: „Некоторые задачи теории упругости", стр. 312, 1-е издание.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как $\Im[F(z)]$ непрерывна на контуре, то между этими постоянными имеет место соотношение:

$$A_k L^3 + B_k L^2 + C_k L + D_k = D_{k+1}. \tag{6}$$

(Здесь и в дальнейшем будем считать, что индекс $k+3$ эквивалентен индексу k, так, что например, $D_4 = D_1$).

Заметим, что из последней формулы следует:

$$L^2 \sum_{k=1}^{3} A_k + L \sum_{k=1}^{3} B_k + \sum_{k=1}^{3} C_k = 0. \tag{7}$$

Диференцируя (4) по s_k, легко показать, что на k-той стороне контура производные функции $F(z)$ удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\Im[e^{im\vartheta_k} F^{(m)}(z)] = 0 \qquad \text{при} \quad m \geqslant 4, \\ &\Im[e^{3i\vartheta_k} F'''(z)] = \Im\left[e^{3i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} F'''(z)\right] = 6A_k. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Отобразим треугольную область B на верхнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного ζ посредством функции

$$z = z_1 + N e^{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)i} \int_{\infty}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)^{2/3}}. \tag{9}$$

При этом отображении точки z_1, z_2, z_3 переходят в

$$\zeta_1 = \infty, \qquad \zeta_2 = -1, \qquad \zeta_3 = 1.$$

Функция $\varphi(\zeta) = F'''(z)$ регулярна в верхней полуплоскости и удовлетворяет на вещественной оси условиям:

$$\Im\left[e^{3i\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)} \varphi(\zeta)\right] = 6A_k,$$

когда ζ находится в интервале (ζ_k, ζ_{k+1}).

Кроме того, можно показать, что точки ζ могут быть только полюсами или обыкновенными точками для $\varphi(\zeta)$ [1]. Отсюда следует [1], что $\varphi(\zeta)$ выражается так:

$$\varphi(\zeta) = F'''(z) = \frac{6}{\pi} e^{-3i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \Big\{ (A_2 - A_3) \log(\zeta - 1) + (A_1 - A_2) \log(\zeta + 1) + \pi A_3 i + \beta \Big\}. \tag{10}$$

[1]) См. мою работу „К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения", „Прикладная математика и механика", 1937 г., том 1, вып. 1, (новая серия), стр. 43.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Вещественную постоянную β, входящую в это выражение, пока нет надобности определять.

§ 2. Выражение решения через эллиптические функции.

Положим

$$\zeta = p'(u\,;\, g_2,\, g_3), \tag{11}$$

где $p(u;\, g_2,\, g_3)$—эллиптическая функция Вейерштраса, и

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -1.$$

Тогда

$$\zeta^2 = (p'u)^2 = 4(pu)^3 + 1, \qquad d\zeta = p''u\,du = 6(pu)^2\,du, \tag{12}$$

и, следовательно, по (9),

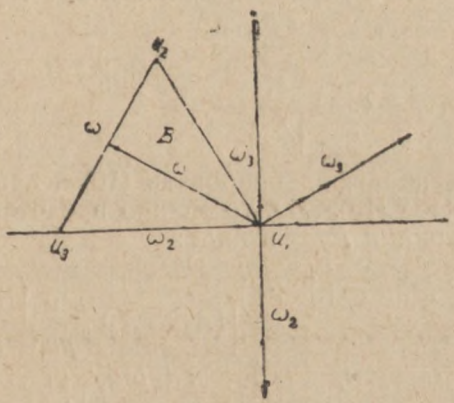
$$z - z_1 = cu, \tag{13}$$

где

$$c = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} - Ne^{\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)i} \tag{14}$$

Введем обозначения:

$$\frac{z_k - z_1}{c} = u_k. \tag{15}$$



Чертеж 2.

Функция $\zeta = p'u$ отображает верхнюю полуплоскость на равносторонний треугольник B' с вершинами u_1, u_2, u_3, при чем, этим вершинам соответствуют точки $\infty, -1, 1$. Следовательно,

$$p'u_3 = 1, \quad p'u_2 = -1, \tag{16}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и по (12)

$$pu_3 = pu_2 = 0, \tag{17}$$

Далее, из соображений симметрии легко видеть, что

$$p'\left(\frac{u_2+u_3}{2}\right)=0,$$

откуда следует, что

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(u_2+u_3) \tag{18}$$

равно половине периода функции pu. Пользуясь также принципом отражения, нетрудно найти другие периоды функции pu:

$$\omega_2 = \omega_1 e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad \omega_3 = -(\omega_1+\omega_2) = \omega_1 e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

Из формул (18), (15), (2) следует, что

$$\omega_k = h e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{2}{3}k\pi i}, (k=1,\ 2,\ 3), \tag{19}$$

где

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|u_3-u_1| = \frac{H}{|c|}. \tag{20}$$

При этом, если обозначим через e_k корни уравнения $4p^3+1=0$ имеем:

$$p\omega_k = e_k = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\, e^{-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi i}. \tag{21}$$

Если теперь продиференцировать (10) и использовать формулы (11), (12), (13), (16), (17), то можно представить четвертую производную функции $F(z)$ в виде:

$$F^{(4)}(z) = \frac{9}{c\pi}\, e^{-3i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\left[(A_2-A_3)\,\frac{p'u+p'u_3}{pu-pu_3}+\right.$$
$$\left.+(A_1-A_2)\,\frac{p'u+p'u_2}{pu-pu_2}\right].$$

Но

$$\frac{p'u+p'u_2}{pu-pu_2} = 2\,[\zeta(u-u_k)-\zeta u+\zeta u_k)\ ^1).$$

---

1) См. напр., Уиттекер и Ватсон, „Курс современного анализа", ч. II, стр. 284. В дальнейшем цитируется кратко У. В.).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следовательно,

$$F^{(4)}(z)=\frac{18}{c\pi}\,e^{-3i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}[(A_2-A_3)\zeta(u-u_3)+$$
$$+(A_1-A_2)\zeta(u-u_2)+(A_3-A_1)\zeta u+(A_2-A_3)\zeta u_3+$$
$$+(A_1-A_2)\zeta u_2].$$

Дифференцируя еще раз и подставляя значение постоянной c, получим

$$F^{(5)}(z)=\frac{2\sqrt[3]{4}}{\pi N^2}\,e^{-5i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\sum_{s=1}^{3}(A_s-A_{s-1})\,p(u-u_s). \qquad (22)$$

$$(A_{s\pm3}=A_s).$$

Имея в виду в дальнейшем разложить $F(z)$ в тригонометрические ряды, сходящиеся внутри треугольника, преобразуем еще это выражение, применяя формулы:

$$p(u-u_s)=e_s+\frac{(e_{s+1}-e_s)\,(e_{s+2}-e_s)}{p(u-u_s-\omega_s)-e_s}\,,\ ^{1})$$

$$pu-e_s=\frac{e_{s+1}-e_s}{\mathrm{sn}^2\left(u\sqrt{e_{s+1}-e_s}\,,\ k_s\right)}\,,\ ^{2})$$

где

$$k_s^2=\frac{e_{s+2}-e_s}{e_{s+1}-e_s}\,. \qquad (23)$$

Таким образом получим:

$$F^{(5)}(z)=\frac{2\sqrt[3]{4}}{\pi N^2}\,e^{-5i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\sum_{s=1}^{3}(A_s-A_{s-1})\times$$
$$\times(e_{s+2}-e_s)\,\mathrm{sn}^2\left[(u-w_s)\sqrt{e_{s+1}-e_s}\,,\ k_s\right]+C, \qquad (24)$$

где

$$w_s=u_s+\omega_s\,, \qquad (25)$$

и C—постоянная, значение которой нет необходимости выписывать.

Периоды $4K_s$, $2iK_s'$ функции sn, как известно, связаны с периодами функции Вейерштрасса соотношениями:

$$K_s=\sqrt{e_{s+1}-e_s}\ \omega_{s+1}\,,\qquad K_s'i=\sqrt{e_{s+1}-e_s}\ (\omega_{s+2}-\omega_{s+1}). \qquad (26)$$

[1]) У. В. ч. II, стр. 276.
[2]) У. В., ч. II, стр. 350.

Библиотека при Томском Гос.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

По сути дела эти периоды от s не зависят, как и модули k_s действительно, по (23) и (21) имеем для рассматриваемого случая

$$k_s^2 = e^{\frac{1}{3}\pi i}. \tag{27}$$

Поэтому и величина

$$q_s = exp\left(-\pi \frac{K_s'}{K_s}\right) = exp\left(-\pi \frac{\omega_{s+2} - \omega_{s+1}}{\omega_{s+1} i}\right) = i e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi} = q \tag{28}$$

также одинакова для всех s.

§ 3. Представление решения через тригонометрические ряды.

Разложим теперь функцию $F^{(5)}(z)$ в тригонометрический ряд. Для этого воспользуемся известным разложением [1])

$$\mathrm{sn}^2(v_s,\ k_s) = \frac{K_s - E_s}{k_s^2 K_s^2} - \frac{2\pi^2}{k_s^2 K_s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q_s^n}{1 - q_s^{2n}} \cos\left(n \frac{\pi v_s}{K_s}\right). \tag{29}$$

При $v_s = u - w_s$ ряд этот сходится в полосе

$$\left| \Im\left[\frac{u - w_s}{K_s}\right] \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{30}$$

Подставляя в (24) и имея в виду формулы (19), (21), (26), (27), (28), найдем:

$$F^{(5)}(z) = \frac{4\sqrt[3]{4}\,\pi}{N^2 h^2} e^{-5i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{\pi}{3} i} \sum_{s=1}^{3} (A_s - A_{s-1})\, e^{\frac{2}{3} s\pi i} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \cos n t_s + C, \tag{31}$$

где

$$t_s = \frac{\pi}{h}(u - w_s)\, e^{\frac{1}{6}\pi i - \frac{2}{3}\pi s i} \tag{32}$$

и C — постоянная.

Входящие в это выражение ряды сходятся в треугольнике B' (с вершинами u_1, u_2, u_3), так как он принадлежит в каждой из полос (30).

---

[1]) У. В. стр. 370.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Интегрируя, находим разложение для $F(z)$:

$$F(z)=\frac{27\sqrt{3}L^3}{2\pi^4}\sum_{s=1}^{3}(A_s-A_{s-1})f_s(z)+P(z), \tag{33}$$

где

$$f_s(z)=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n^4(1-q^{2n})}\sin nt_s, \tag{34}$$

и $P(z)$ — полином пятой степени:

$$P(z)=\sum_{m=0}^{m=5}a_m z^m. \tag{35}$$

Остается определить коэффициенты полинома $P(z)$. Для их определения следует, очевидно, использовать граничные условия (4). Коэффициенты a_m должны быть определены так, чтобы эти условия удовлетворились полностью.

По формулам (34), (32), (28), (25), (19), (15), вводя еще обозначение

$$\frac{u}{h}=\xi+i\eta, \tag{36}$$

получим, после вычислений, для мнимой части $f_1(z)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned}\Im[f_1(z)]=&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^4\operatorname{sh}(n\pi\sqrt{3})}\times\\ &\times\sin\left[2n\pi\left(\eta-\frac{1}{2}\right)\right]\operatorname{ch}\left[2n\pi\left(\xi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]+\\ &+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4\operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{3}\right)}\times\\ &\times\cos\left[(2n+1)\pi\left(\eta-\frac{1}{2}\right)\right]\operatorname{sh}\left[(2n+1)\pi\left(\xi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{37}$$

Используем далее уравнения сторон треугольника: на первой стороне имеем $\eta=-\xi\sqrt{3}$, на второй $\eta=\xi\sqrt{3}+2$, на третьей $\eta=0$. Заменяя в (37) η по этим формулам, после простых преобразований получим:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Im[f_1(z)] = -Q\left(\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{на первой стороне,}$$

$$\Im[f_1(z)] = Q\left(\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{на второй стороне,} \qquad (38)$$

$$\Im[f_1(z)] = 0 \quad \text{на третьей стороне,}$$

при чем

$$Q(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^4 \operatorname{sh}(n\pi\sqrt{3})} \sin(2n\pi\xi\sqrt{3}) \operatorname{ch}(2n\pi\xi) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{3}\right)} \times$$

$$\times \cos[(2n+1)\pi\xi\sqrt{3}] \operatorname{sh}[(2n+1)\pi\xi]. \qquad (39)$$

Но на первой стороне, по формулам (36), (15), (20)

$$\xi = -\frac{1}{2}\frac{|u-u_1|}{h} = -\frac{1}{2}\frac{|z-z_1|}{H} = -\frac{1}{2}\frac{s_1}{H}$$

см. чертеж 2); и также на второй стороне

$$\xi = -\left(\frac{1}{2}\frac{s_2}{H} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Поэтому формулы (38) можно записать в виде

$$\Im[f_1(z)] = -Q\left(\frac{\frac{3}{2}L - s_1}{2H}\right) \quad \text{на первой стороне,}$$

$$\Im[f_1(z)] = Q\left(\frac{\frac{1}{2}L - s_2}{2H}\right) \quad \text{на второй стороне.}$$

Аналогично определяются мнимые части функций $f_2(z)$, $f_3(z)$. Получается:

$$\Im[f_k(z)] = -Q\left(\frac{\frac{3}{2}L - s_k}{2H}\right) \quad \text{на } k\text{—той стороне,}$$

$$\Im[f_k(z)] = Q\left(\frac{\frac{1}{2}L - s_{k+1}}{2H}\right) \quad \text{на } k+1\text{—ой стороне,} \qquad (40)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\Im[f_k(z)]=0$ на $k+2$—ой стороне.
Следовательно, на k—той стороне

$$\Im[F(z)]=\frac{27\sqrt{3}L^3}{2\pi^4}\left[(A_{k-1}-A_{k-2})Q\left(\frac{\frac{1}{2}L-s_k}{2H}\right)-\right.$$

$$\left.-(A_k-A_{k-1})Q\left(\frac{\frac{3}{2}L-s_k}{2H}\right)\right]+\Im[P(z)]. \qquad (41)$$

Это выражение должно равняться полиному третьей степени от s_k (см. 4). Таким образом, очевидно, что для решения задачи необходимо суммировать ряд (39), представляющий функцию $Q(\xi)$.

§ 4. Тригонометрические тождества.

Для суммирования ряда (39), мы воспользуемся одним тригонометрическим тождеством. Вот оно:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{n\sin(n\pi\tau)}e^{\frac{n\pi ui}{\omega}}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{n\sin\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)}e^{\frac{n\pi ui}{\omega'}}=$$

$$=\frac{\pi u^2}{2\omega\omega'}-\frac{\pi}{6}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right).^{1}) \qquad (42)$$

Здесь ω и ω'— любые числа, отношение которых не вещественно, и $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$. Это тождество справедливо в параллелограмме с вершинами $\pm\omega, \pm\omega'$, внутри которого ряды, стоящие в левой части тождества, сходятся. Оно может быть проверено путем умножения на $e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}du$ и интегрирования от $-\omega$ до ω. При этом надо только использовать известную формулу:

$$\frac{1}{\sin u}=\frac{1}{u}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n\left[\frac{1}{u-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right].$$

---

[1]) Аналогичное тождество см., напр., У. В., стр. 392.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Перепишем тождество (42) в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sin(n\pi\tau)}\cos\frac{n\pi u}{\omega}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sin\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)}\cos\frac{n\pi u}{\omega'}=$$

$$=\frac{\pi u^2}{4\omega\omega'}-\frac{\pi}{12}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right),$$

и проинтегрируем от 0 до u три раза. Получим

$$\frac{\omega^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4\sin(n\pi\tau)}\sin\frac{n\pi u}{\omega}+\frac{\omega'^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4\sin\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)}\sin\frac{n\pi u}{\omega''}=$$

$$=\frac{\pi u^5}{240\,\omega\omega'}-\frac{\pi}{72}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)u^3+Mu. \qquad (43)$$

Для определения постоянной M положим здесь $u=\omega'$. Тогда имея в виду, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-\frac{7}{720}\pi^4,$$

найдем:

$$M=\frac{7}{720}\pi\left(\frac{\omega^3}{\omega'}+\frac{\omega'^3}{\omega}\right)+\frac{1}{72}\pi\omega\omega'. \qquad (44)$$

Положим в частности

$$\omega=-hi,\quad \omega'=he^{\frac{\pi}{6}i}\quad\left(\tau=e^{\frac{2\pi}{3}i}\right).$$

Тогда тождество (44) после элементарных вычислений представим в виде:

$$\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n^4(1-q^{2n})}\sin\frac{n\pi ui}{h}-$$

$$-\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{n^4(1-q^{2n})}\sin\left[\frac{n\pi u}{h}e^{-\frac{\pi}{6}i}\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{240}e^{\frac{1}{3}\pi i}\left(\frac{u}{h}\right)^5-\frac{\pi}{72}\left(\frac{u}{h}\right)^3-\frac{3\pi}{720}e^{-\frac{1}{3}\pi i}\frac{u}{h}. \qquad (45)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Наконец, полагая здесь

$$\frac{u}{h} = 2\xi e^{\frac{\pi}{3} i},$$

после простых преобразований получим:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{(2n)^4 \operatorname{sh}(n\pi\sqrt{3})}\sin(2n\pi\xi\sqrt{3})\operatorname{ch}(2n\pi\xi)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{3}\right)}\times$$

$$\times\cos[(2n+1)\pi\xi\sqrt{3}]\operatorname{sh}[(2n+1)\pi\xi]=$$

$$=\frac{\pi^4}{480}\xi-\frac{\pi^4}{36}\xi^3+\frac{\pi^4}{30}\xi^5.$$

Итак,

$$Q(\xi)=\frac{\pi^4}{6}\left(\frac{\xi}{80}-\frac{\xi^3}{6}+\frac{\xi^5}{5}\right). \tag{46}$$

§ 5. Определение коэффициентов полинома $P(z)$.

Из (4), (41) имеем уравнения:

$$\Im[P(z)]=-\frac{27\sqrt{3}L^3}{2\pi^4}\left[(A_{k-1}-A_{k-2})Q\left(\frac{\frac{1}{2}L-s_k}{2H}\right)-\right.$$

$$\left.-(A_k-A_{k-1})Q\left(\frac{\frac{3}{2}L-s_k}{2H}\right)\right]+$$

$$+A_k s^3{}_k+B_k s^2{}_k+C_k s_k+D_k \tag{47}$$

на k—той стороне треугольника.

Здесь следует функцию Q заменить ее выражением по формуле (46).

Выражая мнимую часть

$$P(z)=\sum_{m=0}^{m=5}a_m z^m$$

на k—той стороне через степени s_k и приравнивая в левой и правой части равенства (47) коэффициенты при одинаковых сте-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

пенях s_k, получим достаточное число совместных уравнений для определения a_m.

Нет необходимости приводить здесь элементарные вычисления, которые приходится проделать при составлении этих уравнений и решении их. Определенные из этих уравнений значения коэффициентов a_m таковы:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_5 &= \frac{1}{10L^2} e^{-5\alpha i} \sum_{k=1}^{3} A_k e^{\frac{2\pi}{3}(k+1)i}, \\
a_4 &= -\frac{i}{4L} e^{-4\alpha i} \sum_{k=1}^{3} A_k e^{-\frac{2}{3}\pi(k+1)i}, \\
a_3 &= e^{-3\alpha i}\left[-\frac{2}{3} e^{\frac{\pi}{3}i} \sum_{k=1}^{3} A_k - \frac{2\sqrt{3}}{9L} i \sum_{k=1}^{3} B_k\right], \\
a_2 &= e^{-2\alpha i}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{3}{4} i\right) L \sum_{k=1}^{3} A_k e^{\frac{2(k+1)}{3}\pi i} - \\
&\quad - \frac{2}{3} i e^{-2\alpha i} \sum_{k=1}^{3} B_k e^{\frac{2k\pi}{3} i}, \\
a_1 &= e^{-\alpha i}\left(\frac{7}{30} + \frac{5\sqrt{3}}{9} i\right) L^2 \sum_{k=1}^{3} A_k e^{-\frac{2}{3}(k+1)\pi i} + \\
&+ e^{-\alpha i} \frac{4\sqrt{3}}{9} iL \sum_{k=1}^{3} B_k e^{-\frac{2}{3}(k+1)\pi i} + \frac{2}{3} e^{-\alpha i} \sum_{k=1}^{3} C_k e^{-\frac{2}{3}k\pi i}, \\
a_0 &= C + \frac{i}{3} \sum_{=1}^{3} \quad - \frac{i}{9} L^3 \sum_{k=1}^{3} A_k - \frac{2i}{27} L^2 \sum_{k=1}^{3} B_k,
\end{aligned}
\right\} \quad (48)
$$

где C—произвольная вещественная постоянная. [При вычислении a_1 и a_0 следует иметь в виду условия (6) и (7)].

§ 6. Определение напряжений в стержне.

Подставляя в выражения коэффициентов a_m и в (33) значения величин A_k, B_k, C_k, D_k (по формулам (5)), найдем, что для рассматриваемого случая изгиба стержня поперечной силой

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P(z)=\sum_{m=0}^{m=5}a_m z^m=\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\left\{\frac{1}{40L^2}e^{-\left(6\alpha+\frac{\pi}{3}\right)i}z^5+\right.$$
$$+\frac{1}{16L}e^{-\left(3\alpha+\frac{\pi}{6}\right)i}z^4-\frac{17-5\sqrt{3}\,i}{96\sqrt{3}}Le^{-3\alpha i}z^2+$$
$$\left.+\frac{51+11\sqrt{3}\,i}{720}L^2z-\frac{\sqrt{3}}{54}e^{3\alpha i}L^3\right\}+$$
$$+\frac{1}{4}z^3+\frac{\sqrt{3}}{12}Le^{-3\alpha i}z^2-\frac{1}{6}L^2z+\frac{\sqrt{3}}{36}L^3e^{3\alpha i}+C, \qquad (49)$$

и функция $F(z)$ будет иметь вид:

$$F(z)=\frac{27L^3}{4\pi^4}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\sum_{s=1}^{3}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi s\right)f_s(z)+P(z). \qquad (50)$$

Формулы (49) и (50) дают точное решение задачи об изгибе стержня. Напряжения в каком либо сечении стержня и смещения элементов стержня могут быть теперь найдены по известным формулам теории упругости.

Выражения для компонентов тензора напряжения, например, имеют в общем случае вид:

$$X_z=\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)-\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma x^2+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right],$$
$$Y_z=\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}+(2+\sigma)xy\right]. \qquad (51)$$

(Относительно обозначений см., например, Мусхелишвили „Некоторые задачи теории упругости“, стр. стр. 309—314).

Первые члены выражений для X_z, Y_z соответствуют напряжениям, возникающим в результате закручивания стержня при изгибе. В силу симметрии сечения стержня следует ожидать, что в нашем случае закручивания стержня не будет, то есть, что коэффициент τ будет равен нулю. Мы покажем это также непосредственным вычислением.

Множитель τ находится, как известно, из условия, что главный момент относительно оси Z всех сил, действующих по какому либо сечению стержня, равен нулю:

$$\int_B (xY_z-yX_z)\,dS=0. \qquad (52)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставляя сюда выражения X_z, Y_z из (51), получаем

$$\mu\tau D - \frac{W}{2(1+\sigma)l} G = 0, \tag{53}$$

где

$$D = \int_B \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dS = \frac{L^4\sqrt{3}}{80} \text{ [1]} \tag{54}$$

и

$$G = \int_B \left[x\frac{\partial\chi}{\partial y} - y\frac{\partial\chi}{\partial x} + (2+\sigma)x^2 y - \frac{1}{2}\sigma x^2 y - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^3 \right] dS = -\Im\left[\int_B z F'(z)\, dS \right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)\Im \int_B z^3\, dS + 2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\int_B x^2 y\, dS. \tag{55}$$

Для вычисления G воспользуемся формулами

$$\int_B z^{2k} dS = \frac{L^{2k+2}}{(2k+2)(2k+1)3^{k+1}} e^{2k\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)i} \times$$

$$\times \left\{ (-1)\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{k\pi}{3} \right\},$$

$$\int_B z^{2k-1} dS = -\frac{L^{2k+1} i}{(2k+1)2k\, 3^k \sqrt{3}} e^{(2k-1)\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} \times$$

$$\times \left\{ (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{(2k-1)\pi}{6} \right\}. \tag{56}$$

Из этих формул в частности при $k=1, 2, 3$ получаем

$$\int_B z\, dS = \int_B z^2\, dS = \int_B z^4\, dS = \int_B z^5\, dS = 0. \tag{57}$$

$$\int_B z^3\, dS = -\frac{L^5}{120} e^{3\alpha i}. \tag{58}$$

---

[1]) См., например, Геккелер, „Статика упругого тела", стр. 24.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Элементарные соображения симметрии приводят к заключению, что

$$\int_B z f'_s(z)\,dS = U \tag{59}$$

не зависит от индекса s. Поэтому

$$\int_B z F'(z)\,dS = \frac{27L^3}{4\pi^4}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)U\sum_{s=1}^{3}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi s\right)+$$

$$+\int_B z P'(z)\,dS = \int_B z P'(z)\,dS,$$

или, согласно формул (49), (57), (58),

$$\int_B z F'(z)\,dS = -3a_3\frac{L^5}{120}e^{3\alpha i} = -\frac{L^5}{160}e^{3\alpha i}. \tag{60}$$

Имея еще в виду, что $\int_B x^2 y\,dS$, как показывают вычисления, равен:

$$\int_B x^2 y\,dS = -\frac{L^5}{480}\sin 3\alpha, \tag{61}$$

получаем для G выражение:

$$G = \Im\left[\frac{L^5}{160}e^{3\alpha i}-\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)\frac{L^5}{120}e^{3\alpha i}\right]-2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\frac{L^5}{480}\sin 3\alpha,$$

или

$$G = 0, \tag{62}$$

и, следовательно, по (53),

$$\tau = 0. \tag{63}$$

Имея в виду, что для равностороннего треугольника

$$I = \int x^2\,dS = \frac{L^4\sqrt{3}}{96},$$

получим окончательно для напряжений X_z, Y_z выражение:

$$X_z - iY_z = -\frac{48W}{(1+\sigma)L^4\sqrt{3}}\left\{F'(z)+\frac{1}{2}\sigma\bar{z}^2+y^2-2xyi\right\}. \tag{64}$$

Получаемый из (34) и (51) ряд для $F'(z)$, с которым придется иметь дело при вычислении, достаточно быстро сходится.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В заключение заметим, что метод, примененный здесь для решения задачи, может быть также применен для решения задачи об изгибе стержня, сечение которого — равнобедренный прямоугольный треугольник или треугольник с углами $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ [1].

FLEXION DE LA BARRE À SECTION ÉQUILATÉRALE TRIANGULAIRE

P. Koufareff (Tomsk).

Dans la note présent on considère le problème de la flexion d'une barre à section équilatérale triangulaire. On sait, que ce problème revient à la définition d'une fonction à variable complexe $F(z)$ satisfaisant sur le contour à la condition (3). On a obtenu l'expression de cette fonction par des séries trigonométriques rapidement convergentes [voir les formules (50), (49), (34)]. Le procédé employé pour la solution de ce problème peut être appliqué pour celle de la flexion d'une barre, dont la section est un triangle isoscèle rectangle ou le triangle aux angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$.

[1]) См. Форд: „Автоморфные функции", стр. 327.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ DENJOY О ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЯХ

Н. А. Селиванов (Москва).

1. Известно, что всякая производная функция $f(x)$ (от непрерывной функции) принимает в интервале (a, b) все значения, заключенные между $f(a)$ и $f(b)$. Denjoy заметил, что множество тех значений x, для которых $f(x)$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$, обязательно имеет меру больше нуля [1]). В настоящей заметке мы имеем ввиду дать доказательство этой теоремы, пользуясь только следующими общеизвестными свойствами производных функций:

a.—производная от непрерывной функции не может перейти от одного значения к другому, не пройдя через все промежуточные значения (Darboux).

b.—если $f(x)$ есть конечная на интервале (a, b) производная, то множества точек этого интервала, характеризуемые соответственно неравенствами $f(x)<\alpha$, $f(x)>\alpha$ или пусты, или-же имеют меру больше нуля (Lebesgue) [2]).

c.—всякая производная от непрерывной функции, будучи пределом последовательности непрерывных функций, точечно разрывна на всяком совершенном множестве согласно известной теореме Baire'a.

2. Теорема Denjoy, которую мы имеем в виду доказать, может быть высказана следующим образом:

Если $f(x)$—конечная производная и если $f(a)$ не равно $f(b)$, то множество всех тех значений x, для которых $f(x)$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$, имеет меру больше нуля.

Предположим для определенности, что $f(a)<f(b)$ и введем следующие обозначения;

$$E_* = E[f(x) \leqq f(a)],$$
$$E = E[f(a) < f(x) < f(b)],$$
$$E^* = E[f(b) \leqq f(x)] \text{ [1]}).$$

---

[1] Denjoy пользуется этим свойством в Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues (Journ. d. Math. pures et appl., 1915) в том месте, где доказывает невозможность существования во всех точках определенной плотности у множества положительной меры.

[2]) Лебег — Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934, стр. 76—77.

[3]) Все множества, рассматриваемые в дальнейшем, предполагаются расположенными на (a, b). Символ $E(\alpha<f<\beta)$ обозначает, как известно, множество тех значений x, для которых f удовлетворяет условию, указанному в скобках.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Множество E, очевидно, содержит точки (свойство А). Допустим, что мера множества E равна нулю. В таком случае E не может содержать никакого интервала, откуда, как легко видеть, следует существование на интервале (a, b) точек границ множества E_* и E^*, то есть таких точек, в произвольной окрестности каждой из которых лежат точки обоих множеств E_* и E^*. Обозначим через F множество всех этих точек; F, очевидно, замкнуто. Рассмотрим смежный к множеству F интервал δ. Очевидно, что внутри δ не могут лежать одновременно точки обоих множеств E_* и E^*, так как в этом случае внутри δ нашлись бы точки множества F. Пусть внутри δ нет точек множества E_*. Если бы множество E содержало точки, расположенные на δ, то эти точки образовали бы множество $E \cdot \delta$ меры нуль. Следовательно, множество точек x интервала δ, удовлетворяющих условию $f_*(x) < f(b)$ было-бы непустым и меры нуль, что противоречит свойству B. Итак, множество E не имеет точек в смежных к F интервалах, то есть E является частью множества F. В произвольной окрестности любой точки множества F, очевидно, находятся точки как множества E_*, так и множества E^*, а следовательно (согласно свойству А), и точки множества E, которые, как мы видели, содержатся в множестве F. Следовательно, F не имеет изолированных точек, то есть является совершенным множеством. Очевидно, что во всякой окрестности любой точки множества F можно найти точки множества E, в которых f как угодно мало отличается от $f(a)$ и точки множества E, в которых f как угодно мало отличается от $f(b)$; но так как E содержится в F, то колебание функции f относительно множества F в каждой его точке не равно нулю, то есть f разрывна в каждой точке множества F относительно этого множества, что противоречит свойству C. Это противоречие и доказывает теорему.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. A. DENJOY SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES.

N. A. Selivanov.

La présente note contient une démonstration du théorème suivant de M. Denjoy.

$f(x)$ étant une fonction dérivée finie et $f(a) \neq f(b)$, l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est de mesure non nulle.

La démonstration ne fait appel qu'aux propriétés bien connues des fonctions dérivées, que voici:

A.—Une dérivée ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires;

B. — Pour une dérivée finie f, les ensembles $E(f < \alpha)$ et $E(f > \alpha)$ ont une mesure non nulle, pourvu qu'ils soient non vides;

C.—Toute dérivée est une fonction de classe un.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ КРУГА

Я. А. Миндлин (Москва).

Рассмотрение простейших волновых процессов на плоскости связано, как известно, с решением соответственного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

где „a" есть скорость распространения рассматриваемых волн, которую мы будем считать постоянной.

Мы ставим себе задачей найти интеграл уравнения (1) во внутренности круга радиуса 1, если

$$u\Big|_{t=0}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\,, \tag{2}$$

а граничное условие имеет вид

$$u\Big|_{r=1}=\alpha_n(t)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}, \tag{3}$$

где r и θ полярные координаты точки, n целое число или нуль.

Для нахождения интеграла уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2) и (3) воспользуемся выражением, дающим решение уравнения (1) в виде определенного интеграла

$$u_n=\int_0^{2\pi} f_n(x\cos\lambda+y\sin\lambda+at)\begin{Bmatrix}\cos n\lambda\\ \sin n\lambda\end{Bmatrix}d\lambda. \tag{4}$$

Представление решения уравнения (1) в форме (4) было впервые дано Whittaker'ом [1].

Рассматривая интеграл, как предел суммы, мы видим, что физическая интерпретация равенства (4) состоит в том, что решение производится множеством плоских волн, причем элементарное возмущение дается выражением

$$f_n(x\cos\lambda+y\sin\lambda+at)\begin{Bmatrix}\cos n\lambda\\ \sin n\lambda\end{Bmatrix}\delta\lambda.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В полярных координатах выражение (4) примет вид:

$$u_n = \int_0^{\pi} A_n(r\cos\xi + at)\cos n\xi\, d\xi \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases}. \tag{5}$$

Удовлетворяя граничному условию (3), мы получаем интегральное уравнение для функции $A_n(\tau)$

$$\int_0^{\pi} A_n(\cos\xi + at)\cos n\xi\, d\xi = \alpha_n(t). \tag{6}$$

В силу непротиворечивости начальных и граничных условий имеем:

$$\alpha_n(0) = 0, \qquad \alpha_n'(0) = 0.$$

Из этого следует, что интегральное уравнение (6) при $t=0$ будет удовлетворено, если мы положим функцию

$$A_n(\tau) = 0, \qquad -1 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что при этом также будут удовлетворены условия (2) для u_n. Заменим в обеих частях уравнения (6) переменное t новым переменным x, определенным соотношением $x = 1 + at$, после чего в левой части уравнения (4) введем новую переменную интегрирования $y = \cos\xi + x - 1$, тогда при t, изменяющемся в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{a}$, что соответствует изменению x в промежутке $1 \leqslant x \leqslant 2$, в силу условий (7), имеем

$$\int_1^x \frac{A_n(y)\, T_n(y-x+1)\, dy}{\sqrt{1-(y-x+1)^2}} = \alpha_n\left(\frac{x-1}{a}\right). \tag{8}$$

Функция $T_n(x) = \cos(n \operatorname{arc}\cos x)$ есть n-ый полином Чебышева. Уравнениями типа (8), еще до появления общей теории интегральных уравнений, занимался в 1884 году Сонин [2]. Из общей теории интегральных уравнений 1-го рода типа Вольтерра [3] следует, что при $1 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2$ и существовании непрерывной производной у функции $\alpha_n\left(\frac{x-1}{a}\right)$ интегральное уравнение (8) имеет единственное решение. Будем искать решение уравнения (8) в виде:

$$A_n(y) = \int_1^y H_n(y-z)\frac{d}{dz}\alpha_n\left(\frac{z-1}{a}\right) dz. \tag{9}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что, взяв резольвенту $H_n(\tau)$, удовлетворяющую тождеству вида:

$$\int_z^x K_n(x-y)\,H_n(y-z)\,dy = 1, \tag{10}$$

где

$$K_n(\tau) = \frac{T_n(1-\tau)}{\sqrt{1-(\tau-1)^2}}, \tag{11}$$

мы действительно удовлетворим интегральному уравнению (8) соотношением (9).

Для нахождения резольвенты $H_n(\tau)$ применим преобразование Лапласа. С этой целью помножим определяющее резольвенту соотношение (10) при $x-z=v$ с обеих сторон на $e^{-sv}dv$ и проинтегрируем от 0 до ∞.

Имеем:

$$\int_0^\infty e^{-sz} H_n(z)\,dz = \frac{1}{s\,L_n(s)}, \tag{12}$$

где

$$L_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} K_n(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Из соотношения (12) с помощью формулы Риманна-Меллина получаем выражение для резольвенты $H_n(z)$:

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{sz}\frac{1}{s\,L_n(s)}\,ds. \tag{14}$$

В интегральном уравнении (8) аргумент $\tau = x-y$ ядра $K_n(\tau)$ изменяется в промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. В силу теоремы единственности для интегрального уравнения (8), мы можем продолжить ядро $K_n(\tau)$ вне указанного промежутка как угодно. Для вычисления интеграла выражения (13), определяющего $L_n(s)$, продолжим ядро для $1 \leqslant \tau \leqslant 2$ тем же самым аналитическим выражением, какое оно имело в промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, для других значений τ положим ядро равным нулю.

Таким образом, имеем

$$K_n(\tau) = \frac{T_n(1-\tau)}{\sqrt{1-(1-\tau)^2}}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2, \tag{15}$$

и $K_n(\tau) = 0$ вне промежутка $0 \leqslant \tau \leqslant 2$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В силу условий (15) выражение (13) для $L_n(s)$ примет вид:

$$L_n(s) = \int_0^2 \frac{e^{-s\tau}\, T_n(1-\tau)\, d\tau}{\sqrt{1-(1-\tau)^2}}. \tag{16}$$

Заменяя в подъинтегральном выражении (16) переменную интеграции $\tau = 1 - \cos\varphi$, имеем

$$L_n(s) = e^{-s} \int_0^{\pi} e^{s\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi = \pi e^{-s} I_n(s). \tag{17}$$

Функция

$$\left.\begin{aligned} I_n(x) &= e^{-\frac{1}{2}n\pi i} J_n\left(xe^{\frac{1}{2}\pi i}\right), && -\pi < \arg x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ I_n(x) &= e^{\frac{3}{2}n\pi i} J_n\left(xe^{-\frac{3}{2}\pi i}\right), && \frac{\pi}{2} < \arg x \leqslant \pi, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где символ $J_n(x)$ обозначает функцию Бесселя со значком n.

Окончательно имеем, что решение интегрального уравнения (8) имеет вид

$$A_n(y) = \int_1^y H_n(y-z) \frac{d}{dz} \alpha_n\left(\frac{z-1}{a}\right) dz, \tag{9}$$

где резольвента $H_n(z)$ $(z > 0)$ выражается формулой

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{sz} \frac{e^s}{sI_n(s)}\, ds, \tag{19}$$

где δ обозначает достаточно большое положительное число.

Таким образом, искомая функция $A_n(\tau)$ найдена нами в интервале $1 \leqslant \tau \leqslant 2$. Для определения ее при других значениях τ обратимся вновь к интегральному уравнению (6). Рассматривая изменение переменной t в интервале $\frac{1}{a} \leqslant t \leqslant \frac{2}{a}$, промежуток интегрирования $(-1+at,\ 1+at)$ соответственно разбиваем на $(-1+at,\ 2)$ и $(2,\ 1+at)$; тогда к заданному граничному условию добавится с левой стороны интегрального уравнения (6) известный член.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Обозначая

$$\beta_n(t)=\int_1^2 \frac{A_n(z)\,T_n(z-at)\,dz}{\sqrt{1-(z-at)^2}}, \tag{20}$$

имеем, что интегральное уравнение (6) примет вид:

$$\int_2^x \frac{A_n(y)\,T_n(y-x+1)\,dy}{\sqrt{1-(y-x+1)^2}} = \alpha_n\left(\frac{x-1}{a}\right)-\beta_n\left(\frac{x-1}{a}\right). \tag{21}$$

Нетрудно убедиться, что функция, находящаяся в правой части интегрального уравнения (19) при $x=2$ равна нулю. Резольвента уравнения (20) равна резольвенте уравнения (8). Таким образом, функция $A_n(\tau)$ для $2\leqslant\tau\leqslant 3$ будет определяться соотношением вида:

$$A_n(y)=\int_0^y H_n(y-z)\frac{d}{dz}\left[\alpha_n\left(\frac{z-1}{a}\right)-\beta_n\left(\frac{z-1}{a}\right)\right]dz, \tag{22}$$

где резольвента $H_n(z)$ определяется формулой (19).

Аналогично предыдущему поступаем и для следующих моментов времени.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Whittaker.—Mathemat. Annalen (1903 г.)
2. N. Sonine.—Acta Mathematica, 4, 171 (1884 г.)
3. V. Volterra.—Leçons sur les équations integrales, Paris (1913 г.).

LE PROBLÈME AUX LIMITES DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS LE CAS DU CERCLE

J. A. Mindlin (Moscou).

Dans ce travail on considère la solution de l'équation des ondes (1), avec les conditions initiales, qui sont égaux à zéro et avec la condition au limite (3). D'après le principe de superposition, établi par Whittaker, il est possible de reduire ce problème à la résolution de l'équation integrale (8) de Volterra de la première espèce avec le noyau singulier qui dépend de la différence des arguments.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

О ПРИБЛИЖЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ОБЛАСТЯХ, КОНВЕКСНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Е. Н. Аравийская (Томск).

Понятия о классе функций и о конвексной относительно заданного класса области были введены H.Cartan'ом и Thullen'ом, которые, пользуясь этими понятиями, построили теорию областей регулярности и областей равномерной сходимости последовательности функций. В частности, H. Cartan и Thullen показали, что данная область в четырехмерном пространстве двух комплексных переменных z_1 и z_2 тогда, и только тогда, будет областью регулярности, если она конвексна по отношению к классу всех регулярных в ней функций. Настоящая статья имеет целью, прежде всего, показать, что всякая конвексная относительно заданного класса функций область может быть исчерпана последовательностью областей, каждая из которых ограничена конечным числом аналитическех гиперповерхностей.

Второй вопрос, которым занимается настоящая работа, касается областей, конвексных относительно класса всех полиномов. Дается доказательство теоремы, высказанной A. Weyl'ем[1]), что всякая область B, оболочка регулярности которой конвексна относительно класса всех полиномов, обладает тем свойством, что всякая регулярная в B функция разлагается внутри B в равномерно-сходящийся ряд полиномов. H. Cartan и Thullen показали, что каждая область равномерной сходимости ряда полиномов конвексна относительно класса полиномов и обратно, каждая конвексная по отношению к классу полиномов область есть область равномерной сходимости некоторого ряда полиномов. Таким образом, если область B обладает тем свойством, что каждая регулярная в B функция разлагается внутри B в равномерно-сходящийся ряд полиномов, то оболочка регулярности области B совпадает с конвексной относительно полиномов оболочкой той же области. Таким образом, область B пространства двух комплексных переменных z_1, z_2 тогда и только тогда будет областью, в которой каждая регулярная в ней функция разлагается в равномерно-сходящийся в B ряд

---

[1]) C. R. 194 (1932), S. 1304—1305.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

полиномов, если оболочка регулярности B будет конвексна относительно класса всех полиномов [1]).

Классом функций, по H. Cartan'у и Thullen'у, называется множество K регулярных в заданной области B функций, обладающее следующим свойством: если $f(z_1, z_2)$ есть функция, принадлежащая к классу K, то этому же классу K принадлежат:

1) производные этой функции $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial z_2}$, а следовательно, и все производные высших порядков,

2) все функции Af^p, где A — произвольное комплексное и p—произвольное целое положительное число.

Область B H. Cartan и Thullen называют конвексной по отношению к заданному классу K функций, регулярных в B, если для нее выполняются следующие два условия:

1) B есть часть области, являющейся пересечением областей регулярности всех функций из класса K,

2) для каждой целиком внутри B находящейся области B_0, минимальное расстояние которой относительно B есть $r \neq 0$, и для каждой точки P, принадлежащей области B, расстояние которой от границы области B меньше, чем r, найдется по меньшей мере одна функция $f(z_1, z_2)$ из класса K такая, что

$$|f(P)| > \max |f(B_0)|.$$

ТЕОРЕМА. Всякую конвексную относительно заданного класса K регулярных в B функций область B можно исчерпать последовательностью входящих одна в другую областей, ограниченных конечным числом аналитических гиперповерхностей вида

$$|f_n(z_1, z_2)| \leqslant 1,$$

где $f_n(z_1, z_2)$ функция класса K.

Доказательство. Пусть K какой-либо класс регулярных в области B функций. Пусть область B конвексна относительно класса K. Пусть $\{B_n\}$ совокупность областей исчерпывающая B; причем $B_n \subset B_{n+1} \subset B$ и каждая область B_n является множеством точек, расстояние которых до границы области B не меньше $\frac{1}{n}$. В силу конвексности области B относительно класса K, для любой точки M_n, принадлежащей области B и не принадлежащей области B_n, существует такая функция $f_n(z_1, z_2)$ из класса K, что

$$|f_n(M_n)| > \max |f_n(B_n)|.$$

Из определения класса функций следует, что, не нарушая общности, можно положить

$$|f_n(M_n)| = 1.$$

[1]) Behnke und Thullen—Theorie der Funktionen mehrerer kompl. Veränd. 1934.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Таким образом, пространство $|f_n(z_1, z_2)| = 1$, которое можно представить, как аналитическую гиперповерхность

$$f_n(z_1, z_2) = e^{i\lambda_n} \quad (0 \leqslant \lambda_n \leqslant 2\pi),$$

проходит через точку M_n (которая может лежать как угодно близко к границе области B_n) и не имеет ни одной общей точки с областью B_n.

Рассматривая границу области B_n, как замкнутое множество, в силу леммы Heine-Borel'я, можно выбрать на границе области B_n конечное множество точек M_{m_n} так, чтобы, считая эти точки центрами гиперсфер S_{m_n} конечного радиуса r_{m_n}, поместить всю трехмерную границу области B_n внутри этих гиперсфер; причем расширенная присоединением к B_n этих гиперсфер область B'_n находилась бы еще внутри области B_{n+1}. Точки взятого таким образом на границе B_n множества, очевидно, можно располагать произвольно близко (на расстояниях отличных от нуля) одна от другой.

Обозначим через U_{m_n} часть гиперсферы S_{m_n}, не принадлежащую области B_n. Обозначим через S'_{m_n} гиперсферу с центром в точке M_n, радиус которой $r'_{m_n} < r_{m_n}$ выбран так, чтобы пересечение гиперсферы S'_{m_n} и границы области B_n состояло бы из точек, лежащих внутри соседних с S_{m_n} гиперсфер. И через U'_{m_n} обозначим часть гиперсферы S'_{m_n}, не принадлежащую области B_n.

В силу конвексности области B относительно класса функций K, через каждую точку области U_{m_n} проходит аналитическая гиперповерхность $|f(z_1, z_2)| = 1$, не имеющая ни одной общей точки с областью B_n. Такие гиперповерхности обладают, как известно, [1]) следующим свойством: каждой точке (z_1, z_2) гиперповерхности можно поставить в соответствие некоторую область $\mathfrak{Z}^4$, содержащую внутри себя точку (z_1, z_2), так что $\mathfrak{Z}^4$ делится лежащей в $\mathfrak{Z}^4$ частью гиперповерхности на две связные части. Отсюда следует, что каждая гиперповерхность $f(z_1, z_2)| = 1$, проведенная через какую-либо точку области U'_{m_n} вырезает из гиперсферы S_{m_n} по крайней мере еще одну связную часть. Допустим, что множество связных частей, вырезаемых из гиперсферы S_{m_n} гиперповерхностями $|f(z_1, z_2)| = 1$, проведенными через точки области U'_{m_n}, и не пренадлежащих области B_n, таково, что „объемы" этих частей имеют нижнюю границу, отличную от нуля. Тогда возможно выбрать конечное множество точек внутри каждой S'_n так, чтобы проходящие через них аналитические гиперсферы ограничивали бы некоторую область $\mathfrak{M}_n$; причем $B_n \subset \mathfrak{M}_n \subset B_{n+1}$. Что и доказывает теорему.

---

[1]) Bergmann. Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier k. Veränd. Math. Zeitsch. 39.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Частным случаем только что доказанной теоремы является

ТЕОРЕМА. Всякую область регулярности можно аппроксимировать изнутри последовательностью областей, ограниченных конечным числом аналитических гиперповерхностей.

Известно, что всякая функция, регулярная в закрытой области $\mathfrak{M}$, ограниченной конечным числом аналитических гиперповерхностей $\Phi_n(t_1, t_2, \lambda_n) = 0$, удовлетворяющих некоторым условиям [1]), может быть равномерно аппроксимирована внутри области $\mathfrak{M}$ при помощи функций вида [2])

$$B_{ks}\left(t_1, t_2, \lambda_k^{io}, \lambda_s^{jo}\right) \Psi_k(t_1, t_2, n, n', p, p', i)\, \Psi_s(t_1, t_2, m, m', q, q' j),$$

$$\Psi_k(t_1, t_2, n, n', p, p', i) \equiv$$

$$\equiv \frac{\prod_{l=0}^{l=2^n(2^\nu-1)} \left[\Phi_k\left(t_1, t_2, \lambda_k^{(il)}\right)\right]^{n'_l} \prod_{l=0}^{l=2^p-1} \left[g_k\left(t_1, t_2, \mu_k^{(l0)}\right)\right]^{p'_l}}{\left[g_k(t_1, t_2, N_k)\right]^{\alpha_{npi}}} \qquad (1)$$

$$\alpha_{npi} = \sum_{l=0}^{l=2^n(2^\nu-1)} n'_l + \sum_{l=0}^{l=2^p-1} p'_l + 1,$$

$$\lambda_k^{(il)} = \lambda_k^o + \frac{\lambda'_k - \lambda_k^o}{2^{n+\nu}} (2^\nu i + l);$$

$$\mu_k^{(lo)} = \mu_k^o + \frac{\mu'_k - \mu_k^o}{2^n} l$$

$$i, j = 0, 1, \ldots, 2^\nu;$$

$$\nu, n, n', p, p', m, m', q, q', = 0, 1, 2, \ldots; \; k = 1, 2, \ldots N,$$

где N число гиперповерхностей, ограничивающих $\mathfrak{M}$.

Допустим теперь, что область B конвексна относительно заданного класса K регулярных в B функций. Допустим, кроме того, что все функции $f_n(z_1, z_2)$, при помощи которых задаются области $\mathfrak{M}_n$, удовлетворяют вышеупомянутым условиям Bergmann'a. В этом случае в (1) нужно положить:

$$\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k) \equiv f_k(t_1, t_2) - e^{i\lambda_k},$$

$$g_k(t_1, t_2, \mu_k) \equiv f_k(t_1, t_2) - (1 + \mu_k)\, e^{i\lambda' k},$$

где λ'_k какое-либо значение параметра $\lambda_k (0 \leqslant \lambda'_k \leqslant 2\pi)$.

---

[1]) Bergmann. Über eine Integraldarstellung von Funktionen zweier kompl. Veränd., Мат. Сб. т. 1 (43); 6 (1936).

[2]) Аравийская. О построении полных систем ортогональных функций двух компл. переменных. Мат. сб. т. 2 (44): 4.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

N_k можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\left|\frac{f_n(t_1, t_2)}{1+N_k e^{i\lambda' k}}\right| < 1, \quad \text{если } (t_1, t_2) \in \mathfrak{M}_1 .$$

Кроме того, $B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ в этом случае будет иметь вид

$$f_s(t_1, t_2)\ P_s(t_1, t_2) - f_k(t_1, t_2)\ P_k(t_2, t_2),$$

где $P_s(t_1, t_2)$ и $P_k(t_1, t_2)$ полиномы относительно t_1 и t_2. Следовательно, в силу (1), всякую регулярную в конвексной относительно класса K области B функцию можно равномерно аппроксимировать в каждой внутри B находящейся области через функции вида

$$f_s(t_1, t_2)\, P_s(t_1, t_2)\, Q_s[f_k(t_1, t_2)] - f_k(t_1, t_2)\, P_k(t_1, t_2)\, Q_k[f_s(t_1 t_2)],$$

где $f_k(t_1, t_2)$ и $f_s(t_1, t_2)$ функции из класса K; P_s, Q_s, P_k, Q_k суть полиномы относительно своих аргументов.

Переходя теперь к рассмотрению областей, конвексных по отношению к классу всех полиномов, на основании предыдущих рассуждений почти непосредственно получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Если оболочка области B конвексна по отношению к классу K всех полиномов, то всякая регулярная в B функция разлагается в равномерно-сходящийся внутри B ряд по полиномам.

Действительно, в силу вышедоказанной теоремы, всякая конвексная относительно класса K всех полиномов область B может быть аппроксимирована последовательностью областей, ограниченных конечным числом аналитических гиперповерхностей вида

$$|P_n(z_1, z_2)| = 1,$$

где $P_n(z_1, z_2)$ есть полином относительно z_1 и z_2.
Полагая в (1)

$$\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k) \equiv P_k(t_1, t_2) - e^{i\lambda_k},$$

$$g_k(t_1, t_2, \mu_k) \equiv P_k(t_1, t_2) - (1+\mu_k) e^{i\lambda' k},$$

легко убеждаемся, что все выражение (1) можно равномерно аппроксимировать в каждой внутри B находящейся области через полиномы, что и доказывает теорему.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS, RÉGULIÈRES DANS UN DOMAINE CONVEXE RELATIVEMENT À CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS

E. Aravyskaya (*Tomsk*).

Le travail présent a pour but la démonstration des deux théorèmes suivants.

1. Tout domaine B convexe par rapport à une classe donnée $\{f_\nu(z_1, z_2)\}$ de fonctions régulières dans ce domaine peut être épuisé par une suite de domaines, dont chacun a pour bornes des hypersurfaces régulières en nombre fini.

2. L'autre question dont s'occupe ce travail concerne les domaines convexes par rapport à la classe de touts les polynomes.

On donne la démonstration d'un théorème énoncé par A. Weyl: tout domaine dont l'enveloppe de régularité est convexe par rapport à la classe de tous les polynomes, jouit la proprtété suivante. Toute fonction régulière dans B peut être décomposée en une série de polynomes uniformement convergente dans le voisinage d'un point quelconque du domaine.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ-СТИЛЬТЬЕСА.

И. И. Привалов (Москва) и Г. А. Бродский (Москва).

Условимся называть интегралом типа Коши-Стильтьеса выражение:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}, \qquad (1)$$

где $x=e^{i\theta}$, $z\neq x$, а $\Psi(\theta)=\Psi_1(\theta)+i\Psi_2(\theta)$, при чем Ψ_1 и Ψ_2 любые функции с ограниченными изменениями на сегменте $[0,\ 2\pi]$. Задачей настоящей работы мы ставим исследование предельных значений интеграла типа Коши-Стильтьеса. Мы докажем, что почти всюду на окружностп $C(|x|=1)$ существует конечный предел функции $F(z)$, когда точка z приближается к точке окружности, следуя любому некасательному пути. Эти предельные значения функции $F(z)$ изнутри окружности C и извне C представляются посредством значений интеграла типа Коши-Стильтьеса на окружности, выражаемых при помощи особого интеграла. Чтобы определить значение выражения (1) в точке $x_0=e^{i\theta_0}$ окружности C, выкинем из C дугу $(\theta_0-\varepsilon,\ \theta_0+\varepsilon)$ и оставшуюся часть окружности обозначим C_ε. Тогда по определению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{C_\varepsilon}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0},$$

если последний предел существует.
Наша задача установить формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}\ \to\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0}\pm\frac{1}{2}\Psi'(\theta_0), \qquad (2)$$

которая имеет место почти всюду на C при стремлении точки z по любому некасательному пути к точке x_0 окружности (знак $+$ для случая, когда z внутри C, $-$ когда z вне C). Интеграл правой части определен, как особый.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Считая z внутри C, покажем сначала существование конечных предельных значений интеграла типа Коши-Сильтьеса (1). С этой целью, представим $F(z)$ в виде:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Psi(\theta)}{1-\frac{z}{x}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Psi(\theta)}{x^n};$$

полагая $z=re^{i\varphi}$, $x=e^{i\theta}$, $\Psi(\theta)=\Psi_1(\theta)+i\Psi_2(\theta)$, находим:

$$\begin{aligned}F(z)=&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)+\\&+\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi)+\\&+\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a'_n\cos n\varphi+b'_n\sin n\varphi)-\\&-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n(-b'_n\cos n\varphi+a'_n\sin n\varphi),\end{aligned}\qquad(3)$$

где положено

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\,d\Psi_1(\theta),\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\theta\,d\Psi_1(\theta),$$

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\,d\Psi_2(\theta),\qquad b'_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\theta\,d\Psi_2(\theta).$$

Будем предполагать, что $\int_0^{2\pi}d\Psi(\theta)=0$ (в конце мы освободимся от этого ограничения). Обозначая через $P(r,\varphi)$ и $P'(r,\varphi)$ интегралы Пуассона-Стильтьеса для функций Ψ_1 и Ψ_2, а через $Q(r,\varphi)$ и $Q'(r,\varphi)$ им сопряженные гармонические функции, перепишем формулу (3) в виде:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}=\frac{1}{2}\,[P(r,\varphi)+iQ(r,\varphi)]+$$

$$+\frac{i}{2}\,[P'(r,\varphi)+iQ'(r,\varphi)]. \qquad (4)$$

Так как гармонические функции P и P', будучи интегралами Пуассона-Стильтьеса, имеют почти всюду на окружности конечные предельные значения по всем некасательным путям, то тем же свойством обладают им сопряженные функции Q и Q' [1]). Следовательно, из формулы (4) заключаем, что $F(z)$ имеет почти всюду на окружности C конечные предельные значения, когда точка z стремится к точке $e^{i\theta_0}$ окружности, следуя по любому некасательному пути. Чтобы найти эти предельные значения, будем точку $z=re^{i\theta_0}$ приближать к точке $e^{i\theta_0}$ окружности C по радиусу. Так как

$$\lim_{r\to 1}P(r,\theta_0)=\Psi'_1(\theta_0), \qquad \lim_{r\to 1}P'(r,\theta_0)=\Psi_2'(\theta_0),$$

то из формулы (4) заключаем:

$$\lim_{r\to 1}F(z)=\frac{1}{2}\,\Psi'(\theta_0)+\frac{i}{2}\lim_{r\to 1}Q(r,\theta_0)-\frac{1}{2}\lim_{r\to 1}Q'(r,\theta_0), \qquad (5)$$

где положено:

$$Q(r,\theta_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\sin(\theta_0-\theta)}{1-2r\cos(\theta_0-\theta)+r^2}\,d\Psi_1(\theta), \qquad (6)$$

$$Q'(r,\theta_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\sin(\theta_0-\theta)}{1-2r\cos(\theta_0-\theta)+r^2}\,d\Psi_2(\theta). \qquad (7)$$

Рассмотрим сначала $\lim_{r\to 1}Q(r,\theta_0)$, для чего преобразуем $Q(r,\theta_0)$ к виду:

$$Q(r,\theta_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_1(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin(\theta-\theta_0)}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}\right)d\theta=$$

$$=\frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_1(\theta)\frac{(1+r^2)\cos(\theta-\theta_0)-2r}{[1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2]^2}\,d\theta.$$

[1] См. И. И. Привалов, Интеграл Cauchy, Изв. Сар. Ун-та, 1918.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Полагая $\theta - \theta_0 = t$, разбивая промежуток интеграции на части $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$ и меняя в первом интеграле t на $-t$, получим

$$Q(r, \theta_0) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} [\Psi_1(\theta_0 + t) + \Psi_1(\theta_0 - t)] \frac{(1+r^2)\cos t - 2r}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt$$

или, что то же:

$$Q(r, \theta_0) =$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} [\Psi_1(\theta_0 + t) + \Psi_1(\theta_0 - t) - 2\Psi_1(\theta_0)] \frac{(1+r^2)\cos t - 2r}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt. \quad (8)$$

Полагая $r = \frac{1 - \sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}$, разобьем промежуток интеграции в последнем интеграле на части $(0, \varepsilon)$ и (ε, π), найдем

$$Q(r, \theta_0) =$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_0^{\varepsilon} [\Psi_1(\theta_0 + t) + \Psi_1(\theta_0 - t) - 2\Psi_1(\theta_0)] \frac{(1+r^2)\cos t - 2r}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt +$$

$$+ \frac{r}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \ldots . \quad = J_1 + J_2. \quad (9)$$

Применяя к J_1 вторую теорему о среднем значении, получим

$$J_1 = \frac{\cos\varepsilon}{2\pi(1 - \cos\varepsilon)} \int_0^{\xi} [\Psi_1(\theta_0 + t) + \Psi_1(\theta_0 - t) - 2\Psi_1(\theta_0)]\, dt,$$

где $0 < \xi < \varepsilon$.

Вспомнив, что $\lim\limits_{t \to 1} \frac{\Psi_1(\theta_0 + t) + \Psi_1(\theta_0 - t) - 2\Psi_1(\theta_0)}{t} = 0$,

найдем: $\lim\limits_{r \to 0} J_1 = 0$. Итак, доказано, что

$$\lim_{r \to 1} Q(r, \theta_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} J_2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} [\Psi_1(\theta_0 + t) + \Psi_1(\theta_0 - t) - 2\Psi_1(\theta_0)] \times$$

$$\times \frac{\cos\varepsilon(\cos t - \cos\varepsilon)}{(1 - \cos\varepsilon\cos t)^2}\, dt. \quad (10)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Покажем, что последний предел не изменится, если под интегралом заменим ε через 0, то есть:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} [\Psi_1(\theta_0+t)+\Psi_1(\theta_0-t)-2\Psi_1(\theta_0)] \times$$

$$\times \frac{\cos\varepsilon(\cos t-\cos\varepsilon)}{(1-\cos\varepsilon\cos t)^2}\,dt =$$

$$=\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} [\Psi_1(\theta_0+t)+\Psi_1(\theta_0-t)-2\Psi_1(\theta_0)] \frac{dt}{1-\cos t}. \qquad (11)$$

Так как левый предел есть конечное число, то вопрос приводится к доказательству того факта, что

$$D(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi} [\Psi_1(\theta_0+t)+\Psi_1(\theta_0-t)-2\Psi_1(\theta_0)] \times$$

$$\times \left[\frac{\cos\varepsilon(\cos t-\cos\varepsilon)}{(1-\cos\varepsilon\cos t)^2}+\frac{1}{1-\cos t}\right] dt$$

есть величина бесконечно малая вместе с ε.
Обозначим

$$f(t) = \frac{\Psi_1(\theta_0+t)+\Psi_1(\theta_0-t)-2\Psi_1(\theta_0)}{\sin t},$$

и заметим, что $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$.
Записав $D(\varepsilon)$ в виде:

$$D(\varepsilon) = (1-\cos\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t \times$$

$$\times \frac{1+\cos\varepsilon-\cos\varepsilon\cos t-\cos\varepsilon\cos^2 t}{(1-\cos t)(1-\cos\varepsilon\cos t)^2}\,dt +$$

$$+(1-\cos\varepsilon) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\Psi_1(\theta_0+t)+\Psi_1(\theta_0-t)-2\Psi_1(\theta_0)] \times$$

$$\times \frac{1+\cos\varepsilon-\cos\varepsilon\cos t-\cos\varepsilon\cos^2 t}{(1-\cos t)(1-\cos\varepsilon\cos t)^2}\,dt = J_1' + J_2',$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

заключаем, что $\lim_{\varepsilon \to 0} J_2' = 0$, так как множитель перед интегралом стремится к нулю, а подъитнегральная функция ограничена, если t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до π.

Остается доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_1' = 0.$$

С этой целью, полагая $\xi = arc\cos(1-\varepsilon)$, представим I_1' в виде:

$$J_1' = (1-\cos\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{\xi} f(t)\sin t \times$$

$$\times \frac{1+\cos\varepsilon-\cos\varepsilon\cos t-\cos\varepsilon\cos^2 t}{(1-\cos t)\ (1-\cos\varepsilon\cos t)^2}\,dt + (1-\cos\varepsilon)\int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}} \ldots$$

откуда

$$|J_1'| \leqslant (1-\cos\varepsilon)\lim_{\varepsilon \leqslant t \leqslant \xi} \operatorname{Sup} |f(t)| \int_{\varepsilon}^{\xi} \sin t \times$$

$$\frac{1+\cos\varepsilon-\cos\varepsilon\cos t-\cos\varepsilon\cos^2 t}{(1-\cos t)\ (1-\cos\varepsilon\cos t)^2}\,dt + (1-\cos\varepsilon)\lim_{\xi \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}} \operatorname{Sup} |f(t)| \int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}} \ldots$$

Произведя интегрирование, найдем:

$$|J_1'| \leqslant \lim_{\varepsilon \leqslant t \leqslant \xi} \operatorname{Sup} |f(t)| \left[\ln(1-\cos t) - \frac{1}{\cos\varepsilon}\ln(1-\cos\varepsilon\cos t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\cos^2\varepsilon}{\cos\varepsilon(1-\cos\varepsilon\cos t)}\right]_{\varepsilon}^{\xi} \lim_{\xi \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}} \operatorname{Sup} |f(t)| \left[\ \ldots\ \right]_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Первое слагаемое правой части последнего неравенства есть величина бесконечно малая вместе с ε, вследствие того, что $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$; второе слагаемое тоже, потому что результат подстановки есть бесконечно малая величина.

Итак, сравнивая (10) и (11), находим:

$$\lim_{r \to 1} Q(r, \theta_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} [\Psi_1(\theta_0+t)+\Psi_1(\theta_0-t)-2\Psi_1(\theta_0)]\,\frac{dt}{1-\cos t} \quad (12).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Аналогично получим:

$$\lim_{r\to 1} Q'(r, \theta_0) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} [\Psi_2(\theta_0+t)+\Psi_2(\theta_0-t)-2\Psi_2(\theta_0)]\,\frac{dt}{1-\cos t}. \qquad (13)$$

Внося эти формулы в равенство (5), получим:

$$\lim_{r\to 1} F(z) = \frac{1}{2}\Psi'(\theta_0) -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{i}{4\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} [\Psi(\theta_0+t)+\Psi(\theta_0-t)-2\Psi(\theta_0)]\,\frac{dt}{1-\cos t}. \qquad (14)$$

Остается лишь преобразовать особый интеграл правой части формулы (14) к виду $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0}$, чтобы обнаружить справедливость формулы (2). Итак, покажем, что

$$-\frac{i}{8\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Psi(\theta_0+t)+\Psi(\theta_0-t)-2\Psi(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(t)}{x-x_0}, \qquad (15)$$

где $x = e^{it}$, $x_0 = e^{i\theta_0}$.

Очевидно, имеем:

$$-\frac{i}{8\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Psi(\theta_0+t)+\Psi(\theta_0-t)-2\Psi(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= -\frac{i}{4\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,d[\Psi(\theta_0+t)+\Psi(\theta_0-t)] =$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,d\Psi(\theta_0+t). \qquad (16)$$

Мы воспользовались тем, что в рассматриваемой точке функция Ψ имеет конечную производную.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

С другой стороны, находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(t)}{x-x_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(t-\theta_0)-i\sin(t-\theta_0)}{2-2\cos(t-\theta_0)}\,d\Psi(t),$$

то есть,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(t)}{x-x_0}=-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(t-\theta_0)}{1-\cos(t-\theta_0)}\,d\Psi(t),$$

так как $\int_0^{2\pi} d\Psi(t)=0.$

Последняя формула может быть записана в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(t)}{x-x_0}=-\frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{1-\cos t}\,d\Psi(\theta_0+t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,d\Psi(\theta_0+t). \qquad (17)$$

Сравнивая (16) и (17), убеждаемся в справедливости (15). Итак, формула (2) установлена для случая, когда точка z остается внутри окружности C. Мы убедимся в справедливости формулы (2) в случае внешней точки z, если применим доказанный результат к легко устанавливаемому равенству:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z^*}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\,d\Psi(\theta)}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2},$$

где z^* точка симметричная с точкой $z=re^{i\theta_0}$ относительно единичной окружности.

Наконец, от ограничения $\int_0^{2\pi} d\Psi(\theta)=0$ освободимся, если положим

$$\Psi(\theta)=\Psi(\theta)-a\theta, \text{ где } \int_0^{2\pi} d\Psi(\theta)=2\pi a.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда по доказанному будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z} \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0} \pm \frac{1}{2}\Psi'(\theta),$$

когда $z \to x_0 = e^{i\theta_0}$ по любому некасательному пути почти для всех точек x_0.
С другой стороны, очевидно имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,a\,d\theta}{x-z} \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,a\,d\theta}{x-x_0} \pm \frac{a}{2}.$$

Складывая последние два предельные равенства, найдем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z} \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0} \pm \frac{1}{2}\Psi'(\theta_0),$$

что и требовалось доказать.

ON THE LIMIT VALUES OF A CAUCHY-STIELTJES INTEGRAL

I. Privalov and G. Brodsky (Moscow).

We call a Cauchy-Stieltjes integral the expression $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}$, where $x = e^{i\theta}$, $z \neq x$, $\Psi(\theta) = \Psi_1(\theta) + i\Psi_2(\theta)$; Ψ_1 and Ψ_2 are functions of limited variation on the segment $[0, 2\pi]$. On this paper is proved that nearly on the whole circumference $C(|x|=1)$ exists a finite limit of the function $F(z)$, if the point z approaches a point of circumference along a nontangent way. The limit values of the function $F(z)$ inside and outside of the circumference C are represented by values of a Cauchy-Stieltjes integral on the circumference, expressed by the singular integral

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}\longrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0}+\frac{1}{2}\Psi'(\theta_0).$$

This expression is true nearly on the whole C, if the point z approaches to the point $x_0=e^{i\theta_0}$ of the circumference along any nontangent way (the sign is to take when z is inside of C and minus when it is outside of C). The integral on the right hand side is determined as a singular one.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ON GRAVITATIONAL WAVES.

BY

A. Einstein and N. Rosen (Princeton).

(Reprnted from the Journal of the Franklin Institute, Vol. 22, No 1, January, 1937 at desire of the authors).

Abstract.

The rigorous solution for cylindrical gravitational waves is given. For the convenience of the reader the theory of gravitational waves and their production, already known in principle, is given in the first part of this paper. After encountering relationships which cast doubt on the existence of *rigorous* solutions for undulatory gravitational fields, we investigate rigorously the case of cylindrical gravitational waves. It turns out that rigorous solutions exist and that the problem reduces to the usual cylindrical waves in euclidean space.

I. Approximate solution of the problem of plane waves and the production of gravitational waves.

It is well known that the approximate method of integration of the gravitational equations of the general relativity theory leads to the existence of gravitational waves. The method used is as follows: We start with the equations

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

We consider that the $g_{\mu\nu}$ are replaced by the expressions

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{2}$$

where

$$\delta_{\mu\nu} = 1 \quad \text{if} \quad \mu = \nu,$$

$$= 0 \quad \text{if} \quad \mu \neq \nu,$$

provided we take the time coördinate imaginary, as was done by Minkowski. It is assumed that the $\gamma_{\mu\nu}$ are small, i. e. that the gravitational field is weak. In the equations the $\gamma_{\mu\nu}$ and their derivatives will occur in various powers. If the $\gamma_{\mu\nu}$ are everywhere sufficiently small compared to unity one obtains a first-approximation solution of the equations by neglecting in (1) the higher powers of the $\gamma_{\mu\nu}$ (and their derivatives) compared with the lower ones. If one introduces further the $\gamma_{\mu\nu}$ instead of the $\gamma_{\mu\nu}$ by the relations

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\alpha},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

then (1) assumes the form

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu,\ \alpha\alpha} - \bar{\gamma}_{\mu\nu,\ \alpha\nu} - \bar{\gamma}_{\nu\alpha,\ \alpha\mu} + \bar{\gamma}_{\alpha\alpha,\ \mu\nu} = -2T_{\mu\nu}. \tag{3}$$

The specialization contained in (2) is conserved if one performs an infinitesimal transformation on the coördinates:

$$x_\mu' = x_\mu + \xi^\mu, \tag{4}$$

where the ξ^μ are infinitely small but otherwise arbitrary functions. One can therefore prescribe four of the $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ or four conditions which the $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ must satisfy besides the equations (3); this amounts to a specialization of the coördinate system chosen to describe the field. We choose the coordinate system in the usual way by demanding that

$$\bar{\gamma}_{\mu\alpha,\ \alpha} = 0. \tag{5}$$

It is readily verified that these four conditions are compatible with the approximate gravitational equations provided the divergence $T_{\mu\alpha,\ \alpha}$ of $T_{\mu\nu}$ vanishes, which must be assumed according to the special theory of relativity.

It turns out however that these conditions do not completely fix the coördinate system. If $\gamma_{\mu\nu}$ are solutions of (2) and (5), then the $\gamma_{\mu\nu}'$ after a transformation of the type (4)

$$\gamma_{\mu\nu}' = \gamma_{\mu\nu} + \xi^\mu{}_{,\nu} + \xi^\nu{}_{,\mu} \tag{6}$$

are also solutions, provided the ξ^μ satisfy the conditions

$$\left[\xi^\mu{}_{,\nu} + \xi^\nu{}_{,\mu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\left(\xi^\alpha{}_{,\alpha} + \xi^\alpha{}_{,\alpha}\right)\right]_{,\nu} = 0,$$

or

$$\xi^\mu{}_{,\alpha\alpha} = 0. \tag{7}$$

If a γ-field can be made to vanish by the addition of terms like those in (6), i. e., by means of an infinitesimal transformation, then the gravitational field being described is only an apparent field.

With reference to (2), the gravitational equations for empty space can be written in the form

$$\left.\begin{aligned}\bar{\gamma}_{\mu\nu,\ \alpha\alpha} &= 0.\\ \gamma_{\mu\alpha,\ \alpha\alpha} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

One obtains plane gravitational waves which move in the direction

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

of the positive x_1-axis by taking the $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ of the form $\varphi(x_1+ix_4)$ $(=\varphi(x_1-t))$, where these $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ must further satisfy the conditions

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}_{11}+i\bar{\gamma}_{14}&=0,\\ \bar{\gamma}_{41}+i\bar{\gamma}_{44}&=0,\\ \bar{\gamma}_{21}+i\bar{\gamma}_{24}&=0,\\ \bar{\gamma}_{31}+i\bar{\gamma}_{34}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

One can accordingly subdivide the most general (progressing) plane gravitational waves into three types:

(*a*) pure longitudinal waves,

only $\bar{\gamma}_{11}$, $\bar{\gamma}_{14}$, $\bar{\gamma}_{44}$ different from zero,

(*b*) half longitudinal, half transverse waves,

only $\bar{\gamma}_{21}$ and $\bar{\gamma}_{24}$, or only $\bar{\gamma}_{31}$ and $\bar{\gamma}_{34}$ different from zero,

(*c*) pure transverse waves,

only $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ are different from zero.

On the basis of the previous remarks it can next be shown that every wave of type (*a*) or of type (*b*) is an apparent field, that is, it can be obtained by an infinitesimal transformation from the euclidean field $(\bar{\gamma}_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}=0)$.

We carry out the proof in the example of a wave of type (*a*). According to (9) one must set, if φ is a suitable function of the argument x_1+ix_4,

$$\bar{\gamma}_{11}=\varphi, \qquad \bar{\gamma}_{14}=i\varphi, \qquad \bar{\gamma}_{44}=-\varphi,$$

hence also

$$\gamma_{11}=\varphi, \qquad \gamma_{14}=i\varphi, \qquad \gamma_{44}=-\varphi.$$

If one now chooses ξ' and ξ^4 (with $\xi^2=\xi^3=0$) so that

$$\xi^1=\chi(x_1+ix_4), \qquad \xi^4=i\chi(x_1+ix_4),$$

then one has

$$\xi^1{}_{,1}+\xi'_{,1}=2\chi', \qquad \xi^1{}_{,4}+\xi^4{}_{,1}=2i\chi', \qquad \xi^4{}_{,4}+\xi^4{}_{,4}=-2\chi'.$$

These agree with the values given above for γ_{11}, γ_{14}, γ_{44} if one chooses $\chi'=\frac{1}{2}\varphi$. Hence it is shown that these waves are apparent. An analogous proof can be carried out for the waves of type (*b*).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Furthermore we wish to show that also type (c) contains apparent fields, namely, those in which $\bar{\gamma}_{22} = \bar{\gamma}_{33} \neq 0$, $\bar{\gamma}_{23} = 0$. The corresponding $\gamma_{\mu\nu}$ are $\gamma_{11} = \gamma_{44} \neq 0$, all others vanishing. Such a wave can be obtained by taking $\xi' = \chi$, $\xi^4 = -i\chi$, i.e. by an infinitesimal transformation from the euclidean space. Accordingly there remain as real waves only the two pure transverse types, the non-vanishing components of which are

$$\gamma_{22} = -\gamma_{33}, \tag{c_1}$$

or

$$\gamma_{23}. \tag{c_2}$$

It follows however from the transformation law for tensors that these two types can be transformed into each other by a spatial rotation of the coördinate system about the x_1-axis through the angle $\pi/4$. They represent merely the decomposition into components of the pure transverse wave (the only one which has a real significance). Type c_1 is characterized by the fact that its components do not change under the transformations

$$x_2' = -x_2, \quad x_1' = x_1, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4,$$

or

$$x_3' = -x_3, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_4' = x_4,$$

in contrast to c_2, i.e. c_1 is symmetrical with respect to the $x_1 - x_2$-plane and the $x_1 - x_3$-plane.

We now investigate the generation of waves, as it follows from the approximate (linearized) gravitational equations. The system of the equations to be integrated is

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu,\,\alpha\alpha} &= -2T_{\mu\nu}, \\ \bar{\gamma}_{\mu\alpha,\,\alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Let us suppose that a physical system described by $T_{\mu\nu}$ is found in the neighborhood of the origin of coördinates. The γ-field is then determined mathematically in a similar way to that in which an electromagnetic field is determined through an electrical current system. The usual solution is the one given by retarded potentials

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{[T_{\mu\nu}]_{(t-r)}}{r}\, dv. \tag{11}$$

Here r signifies the spatial distance of the point in question from a volume-element, $t = x_4/i$, the time in question.

If one considers the material system as being in a volume having dimensions small compared to r_0, the distance of our point from the origin, and also small compared to the wavelengths of the radiation produced, then r can be replaced by r_0, and one obtains

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0}\int [T_{\mu\nu}]_{(t-r_0)}\, dv,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

or

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0}\left[\int T_{\mu\nu}\, dv\right]_{(t-r_0)}. \tag{12}$$

The $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ are more and more closely approximated by a plane wave the greater one takes r_0. If one chooses the point in question in the neighborhood of the x_1-axis, the wave normal is parallel to the x_1 direction and only the components $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ correspond to an actual gravitational wave according to the preceding. The corresponding integrals (12) for a system producing the wave and consisting of masses in motion relative to one another have directly no simple significance. We notice however that T_{44} denotes the (negatively taken) energy density which in the case of slow motion is practically equal to the mass density in the sense of ordinary mechanics. As will be shown, the above integrals can be expressed through this quantity. This can be done because of the existence of the energy—momentum equations of the physical system:

$$T_{\mu\alpha,\,\alpha} = 0. \tag{13}$$

If one multiplies the second of these with x_2 and the fourth with $\frac{1}{2}x_2^2$ and integrates over the whole system, one obtains two integral relations, which on being combined yield

$$\int T_{22} dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_2^2\, T_{44}\, dv. \tag{13a}$$

Analogously one obtains

$$\int T_{33} dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_3^2\, T_{44}\, dv,$$

$$\int T_{23} dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_2 x_3\, T_{44}\, dv.$$

One sees from this that the time-derivatives of the moments of inertia determine the emission of the gravitational waves, provided the whole method of application of the approximation-equations is really justified. In particular one also sees that the case of waves symmetrical with respect to the $x_1 - x_2$ and $x_1 - x_3$ planes could be realized by means of elastic oscillations of a material system which has the same symmetry properties. For example, one might have two equal masses which are joined by an elastic spring and oscillate toward each other in a direction parallel to the x_3-axis.

From consideration of energy relationship it has been concluded that such a system, in sending out gravitational waves, must send out energy which reacts by damping the motion. Nevertheless, one can think of the case of vibration free from damping if one imagines that, besides the waves emitted by the system, there is present a cseond concentric wave-field which is propagated inward and brings

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

to the system as much energy as the outgoing waves remove. This leads to an undamped mechanical process which is imbedded in a system of standing waves.

Mathematically this is connected with the following considerations, clearly pointed out in past years by Ritz and Tetrode. The integration of the wave-equation

$$\Box\varphi = -4\pi\rho$$

by the *retarded* potential

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t-r)}}{r}\, dv$$

is mathematically not the only possibility. One can also do it with

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t+r)}}{r}\, dv,$$

i.e. by means ot the „advanced" potential, or by a mixture of the two, for example,

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{[\rho]_{(t+r)} + [\rho]_{(t-r)}}{r}\, dv.$$

The last possibility corresponds to the case without damping, in which a standing wave is present.

It is to be remarked that one can think of waves generated as discribed above which approximate plane waves as closely as desired. One can obtain them, for example, through a limit-process by considering the wave-source to be removed further and further from the point in question and at the same time the oscillating moment of inertia of the former increased in proportion.

II. Rigorous solution for cylindrical waves.

We choose the coördinates x_1, x_2 in the meridian plane in such a way that $x_1 = 0$ is the axis of rotation and x_2 runs from 0 to infinity. Let x_3 be an angle coördinate specifying the position of the meridian plane. Also, let the field be symmetrical about every plane x_2=const. and about every meridian plane. The required symmetry leads to the vanishing of all components $g_{\mu\nu}$ which contain one and only one index 2; the same holds for the index 3. In such a gravitational field only

$$g_{11},\ g_{22},\ g_{33},\ g_{44},\ g_{14}$$

can be different from zero. For convenience we now take all the coördinates real. One can further transform the coördinates x_1, x_4 so that two conditions are satisfied. As such we take

$$\left.\begin{aligned} g_{14} &= 0, \\ g_{11} &= -g_{44}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

It can be easily shown that this can be done without introducing any singularities.

We now write

$$\left.\begin{aligned} -g_{11} &= g_{44} = A, \\ -g_{22} &= B, \\ -g_{33} &= C, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

where $A, B, C > 0$. In terms of these quantities one calculates that

$$\left.\begin{aligned}
2\left(R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}R\right) &= \frac{B_{44}}{B}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_4^2}{B^2}+\frac{C_4^2}{C^2}\right. \\
&\quad -\frac{B_4C_4}{BC}+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right) \\
&\quad \left.+\frac{B_1C_1}{BC}+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)\right], \\
\frac{2A}{B}\left(R_{22}-\frac{1}{2}g_{22}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{C_{11}}{C} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[\frac{C_1^2}{C^2}-\frac{C_4^2}{C^2}\right. \\
&\quad \left.+\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}\right], \\
\frac{2A}{C}\left(R_{33}-\frac{1}{2}g_{33}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{B_{44}}{B}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{B_{11}}{B} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}\right. \\
&\quad \left.+\frac{B_1^2}{B^2}-\frac{B_4^2}{B^2}\right], \\
2\left(R_{44}-\frac{1}{2}g_{44}R\right) &= \frac{B_{11}}{B}+\frac{C_{11}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_1^2}{B^2}+\frac{C_1^2}{C^2}\right. \\
&\quad -\frac{B_1C_1}{BC}+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right) \\
&\quad \left.+\frac{B_4C_4}{BC}+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\right], \\
2R_{14} &= \frac{B_{14}}{B}+\frac{C_{14}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_1B_4}{B^2}+\frac{C_1C_4}{C^2}\right. \\
&\quad +\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right) \\
&\quad \left.+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

where subscripts in the right-hand members denote differentiation. If we take as field equations these expressions set equal to zero, replace the second and third by their sum and difference, and introduce as new variables

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \log A,\\ \beta &= \tfrac{1}{2}\log (B/C),\\ \gamma &= \tfrac{1}{2}\log (BC),\end{aligned}\right\} \tag{15a}$$

we get

$$2\gamma_{44} + \tfrac{1}{2}[\beta_4^2 + 3\gamma_4^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 - 2\alpha_1\gamma_1 - 2\alpha_4\gamma_4] = 0, \tag{17}$$

$$2(\alpha_{11} - \alpha_{44}) + 2\gamma_{11} - 2\gamma_{44} + [\beta_1^2 + \gamma_1^2 - \beta_4^2 - \gamma_4^2] = 0, \tag{18}$$

$$\beta_{11} - \beta_{44} + [\beta_1\gamma_1 - \beta_4\gamma_4] = 0, \tag{19}$$

$$2\gamma_{11} + \tfrac{1}{2}[\beta_1^2 + 3\gamma_1^2 + \beta_4^2 - \gamma_4^2 - 2\alpha_1\gamma_1 - 2\alpha_4\gamma_4] = 0, \tag{20}$$

$$2\gamma_{14} + [\beta_1\beta_4 + \gamma_1\gamma_4 - 2\alpha_4\gamma_1 - 2\alpha_1\gamma_4] = 0. \tag{21}$$

The first and fourth equations of this group give

$$\gamma_{11} - \gamma_{44} + (\gamma_1^2 - \gamma_4^2) = 0. \tag{22}$$

The substitution

$$\gamma = \log\sigma, \qquad \sigma = (BC)^{1/2}, \tag{23}$$

leads to the wave equation

$$\sigma_{11} - \sigma_{44} = 0, \tag{24}$$

which has the solution

$$\sigma = f(x_1 + x_4) + g(x_1 - x_4), \tag{25}$$

where f and g are arbitrary functions. Eq. (18) reduces to

$$\alpha_{11} - \alpha_{44} + \tfrac{1}{2}(\beta_1^2 - \beta_4^2 + \gamma_4^2 - \gamma_1^2) = 0. \tag{18a}$$

Equation (17) then shows that γ cannot vanish everywhere.

We must now see whether there exist undulatory processes for which γ does not vanish. We note that such an undulatory process is represented, in the first approximation, by an undulatory β, that is by a β-function which, so far as its dependence on x_1 and also its dependence on x_4 is concerned, possesses maxima and minima; we must expect this also for a rigorous solution. We know about γ that $e^\gamma = \sigma$ satisfies the wave equation (24) and therefore takes the form (25). From this, however, the undulatory nature of this quantity does not necessarily follow. We shall in fact show that γ can have no minima.

Such a minimum would imply that the functions f and g in (25) have minima. At a point (x_1, x_4) where this were the case we should have $\gamma_1 = \gamma_4 = 0$, $\gamma_{11} \geqq 0$, $\gamma_{44} \geqq 0$. But by (17) and (20) this is impossible. Therefore γ has no minima, that is it is not undulatory but behaves, at least in a region of space arbitrarily extended in

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

one direction, monotonically. We shall now consider such a region of space.

It is useful to see what sort of transformations of x_1 and x_4 leave our system of equations (14) invariant. For this invariance it is necessary and sufficient that the transformation satisfy the equations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4} &= \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Thus we may arbitrarily choose $\bar{x}_1(x_1, x_4)$ to satisfy the equation

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \bar{x}_1}{\partial x_4^2} = 0 \tag{26a}$$

and then (26) will determine the corresponding $\bar{x}_4$. Since e^{γ} is invariant under this transformation and also satisfies the wave equation, there exists a transformation where $\bar{x}_1$ is respectively equa or proportional to e^{γ}. In the *new* coördinate system we have

$$e^{\gamma} = a\bar{x}_1$$

or

$$\gamma = \log a + \log \bar{x}_1. \tag{27}$$

If we insert this expression for γ in (17)—(27) the equations reduce to the equivalent system

$$\beta_{11} - \beta_{44} + \frac{1}{x_1}\beta_1 = 0, \tag{28}$$

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2} x_1 (\beta_1^2 + \beta_4^2) - \frac{1}{2x_1}, \tag{29}$$

and

$$\alpha_4 = x_1 \beta_1 \beta_4. \tag{30}$$

Equation (28) is the equation for cylindrical waves in a threedimensional space, if x_1 denotes the distance from the axis of rotation. The equations (29) and (30) determine, for given β, the function α up to an (arbitrary) additive constant, while, by (27), γ is already determined.

In order that the waves may be regarded as waves in a euclidean space these equations must be satisfied by the euclidean space when the field is independent of x_4. This field is represented by

$$A = 1; \qquad B = 1; \qquad C = x_1^2,$$

if we denote the angle about the axis of rotation by x_3. These

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

relaitons correspond to

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -\log x_1, \qquad \gamma = \log x_1,$$

and from this we see that the equations (27)—(30) are in fact satisfied.

We have still to investigate whether *stationary* waves exist, that is waves which are periodic in the time.

For β it is at once clear that such solutions exist. Although it is not essential, we shall now consider the case where the variation of β with time is sinusoidal. Here β has the form

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4 + X_2 \cos \omega x_4,$$

where X_0, X_1, X_2 are functions of x_1 alone. From (30) it then follows that α is periodic if and only if the integral

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4$$

taken over a whole number of periods vanishes.

In the case of a stationary oscillation. which is represented by

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4,$$

this condition is actually fulfilled since

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4 = \int (X_0' + X_1' \sin \omega x_4)\, \omega X_1 \cos \omega x_4 dx_4 = 0.$$

On the other hand, in the general case, which includes the case of progressive waves, we obtain for this integral the value

$$\tfrac{1}{2}(X_1 X_2' - X_2 X_1')\, \omega T,$$

where T is the interval of time over which the integral is taken. This does not vanish, in general. At distances x_1 from $x_1 = 0$ great compared with the wave-lengths, a progressive wave can be represented with good approximation in a domain containing many waves by

$$\beta = X_0 + a \sin \omega (x_4 - x_1),$$

where a is a constant (which, to be sure, is a substitute for a function depending weakly on x_1). In this case $X_1 = a \cos \omega x_1$, $X_2 = -a \sin \omega x_1$, so that the integral can be (approximately) represented by $-\frac{1}{2} a \omega^2 T$, and thus cannot vanish and always has the same sign. Progressive waves therefore produce a secular change in the metric.

This is related to the fact that the waves transport energy, which is bound up with a systematic change in time of a gravitating mass localized in the axis $x = 0$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

О ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ

А. Эйнштейн и Н. Розен (Принстон).

(Перепечатано из Journal of the Franklin Institute, Vol. 223, No 1, January, 1937 по желанию авторов).

Дано строгое решение для цилиндрических гравитационных волн. Для удобства читателя, теория гравитационных волн и их получение, в принципе уже известное, дано в первой части этой работы. После нахождения свойств, которые вызывают сомнение в существовании *строгих* решений для волнообразных гравитационных полей, мы строго исследуем случай цилиндрических гравитационных волн. Оказывается, что строгие решения существуют и что проблема сводится к обычным цилиндрическим волнам в пространстве Эвклида.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА-СТИЛЬТЬЕСА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ С ДВУМЯ ДОБАВОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ЕГО СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ МЕРЫ ПОВЕРХНОСТИ.

А. С. Кованько (Баку).

ВВЕДЕНИЕ

Первые попытки обобщения интеграла Стильтьеса в смысле перенесения понятия его в область двух и бо́льшего числа переменных принадлежат Fréchet [1]) и Radon [2]). Позднее Гюнтер [3]) предпринял общее изучение интеграла Стильтьеса для многомерных пространств с полной теорией аддитивных функций.

Наше определение основано на конкретизации этих аддитивных функций помощью пары функций двух действительных переменных. Эти две функции мы назовем добавочными в определении интеграла Стильтьеса. Подобное обобщение может быть распространено и в многомерное пространство с числом добавочных функций, равным числу измерений пространства.

ГЛАВА I.

ФУНКЦИИ ОБЛАСТИ.

§ 1. О гомеоморфном соответствии двух плоских областей.

Пусть нам даны две односвязные двухмерные области $Q(x, y)$ и $S(\xi, \eta)$, которые находятся между собой в гомеоморфном соответствии.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) \\ \eta &= \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

два равенства, устанавливающие это гомеоморфное соответствие. φ и ψ непрерывные функции x и y.

---

[1]) Fréchet „Extension aux cas des intégrales multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes" (Nouv. Ann. t. 10, 1910).

[2]) Radon „Theorie und Anwendung der Absolut-Additiven Mengenfunktionen" (Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien 1913).

[3]) Günther „Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la Physique Mathématique (A. H. C. C. C. P. 1932).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Мы предположим, что Q и S квадрируемы.

В силу известной теоремы Hausdorf'a каждому замкнутому множеству $E \subset Q(x, y)$ соответствует замкнутое множество $\varepsilon \subset S(\xi, \eta)$ и обратно. Следовательно, открытому множеству будет соответствовать открытое и обратно. Обозначим через $|E|$ и $|\varepsilon|$ соответственно меры множеств E и ε.

Мы можем рассматривать $|\varepsilon|$ как функцию E.

Очевидно, что это положительная и аддитивная функция множества E. Обозначим ее через $J(E)$.

Итак, если $E_1 . E_2 = 0$,

то

$$J(E_1) + J(E_2) = J(E_1 + E_2).$$

Потребуем еще, чтобы соответствие между Q и S было бы прямое, то есть, чтобы два соответственных замкнутых контура в Q и S описывались в одинаковом направлении (соответственными точками), то есть, по или против часовой стрелки.

В дальнейшем мы ограничим класс множеств E, рассматривая следующие замкнутые множества, класс их обозначим через $K_{\varphi,\psi}$.

1) $K_{\varphi,\psi}$ содержит все односвязные замкнутые области, которые квадрируемы и образы которых в S квадрируемы и которые ограничены кривыми Жордана.

2) $Q(x, y)$ принадлежит к $K_{\varphi,\psi}$.

3) Если Q_1 и Q_2 принадлежат к $K_{\varphi,\psi}$, то $Q_1 + Q_2$ также принадлежит к $K_{\varphi,\psi}$, если Q_1 и Q_2 не имеют общих точек, исключая границ.

4) Если $Q_1 \supset Q_2$, а Q_1 и Q_2 принадлежат к $K_{\varphi,\psi}$, то $Q_1 - Q_2$ также принадлежит к $K_{\varphi,\psi}$, причем границы, выпавшие при вычитании, мы восстанавливаем в $Q_1 - Q_2$.

Образы указанных областей в S будут топологически одинаковыми с их праобразами в Q.

Каждой внутренней точке $\Omega \subset Q$ будет соответствовать внутренняя точка ее образа $S^* \subset S$ [1]).

Отметим следующее важное предложение, позволяющее использовать области класса $K_{\varphi,\psi}$ для областей, фигурирующих в теореме Vitali.

Именно, каждая точка области Q может быть покрыта бесконечным множеством областей класса $K_{\varphi,\psi}$, сколь угодно малых диаметров.

Рассмотрим в $Q(x, y)$ семейство (T) кривых Жордана $\Phi(x, y) = C(\underline{C}_1 < C < \overline{C}_2)$ без двойных точек. Этому семейству

[1]) См. Schönflies. Fundam. Math. t. II „Sur la correspondance entre les points de deux espaces" (§ 12).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

соответствует в $S(\xi, \eta)$ семейство $(\bar{T})$, топологически одинаковое с семейством (T). Линии семейства T мы будем считать квадрируемыми.

ТЕОРЕМА. Множество значений C в интервале $\underline{C} < C < \bar{C}$ для которых кривые семейства $\bar{T}$ неквадрируемы, есть множество счетное или конечное.

Доказательство. Обозначим через A_c поверхностную меру кривой семейства $\bar{T}$, соответствующей значению C в области S.

Рассмотрим счетную последовательность величин:

$$|S|, \frac{1}{2}|S|, \quad \frac{1}{4}|S|, \ldots\ldots$$

Очевидно, что множество таких значений C, для которых $\frac{|S|}{2^n} \leqslant A_c \leqslant \frac{|S|}{2^{n-1}}$, есть множество конечное, поскольку величина площадей всех A_c не больше, чем $|S|$.

Поэтому, давая n значения 1, 2, 3,..., мы видим, что множество всех C, для которых $A_c > 0$, есть, максимум, счетное Теорема доказана.

Такие значения C, для которых $A_c > 0$, мы назовем особыми, остальные—обыкновенными.

Присоединим к семейству $\Phi(x, y) = C$ еще другое, аналогичное семейство $\Psi(x, y) = C'$ $(C' < C' \leqslant \bar{C}')$. Тогда мы получим криволинейную сетку (R_n), если дадим C обыкновенные значения $C_1 < C_2 < C_3 \ldots\ldots < C_n$, а C' обыкновенные значения $C_1' < C_2' < \ldots\ldots C_n'$.

Таким образом, мы сможем построить ряд сеток, состоящих из обыкновенных линий и включающих каждая последующую ей сетку. Тем самым становится ясным, что любую точку области Q можно покрыть безконечной системой кадров последовательности сеток сколь угодно малых диаметров.

В силу сказанного в отношении аддитивных функций $J(\Omega), \Omega \subset Q$, можно развернуть всю теорию этих функций в классе $K_{\varphi,\psi}$.

Величину $S^* = J(\Omega)$ мы обозначим через $[\varphi, \psi]_\Omega$.

§ 2. Свойства функций $[\varphi, \psi]_\Omega$.

Пусть нам дано два гомеоморфных соответствия

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (T_1), \qquad \begin{cases} \xi = \varphi_2(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (T_2),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и рассмотрим третье соответствие

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (T_3).$$

Предположим, что оно также гомеоморфное.

Пусть S_1^*, S_2^* и S_3^* области, соответствующие области $\Omega(x, y)$, одновременно класса $K_{\varphi_1, \psi}$, $K_{\varphi_2, \psi}$ и $K_{\varphi_1+\varphi_2, \psi}$ соответственно трем преобразованиям (T_1), (T_2) и (T_3).

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= \Phi(t) \\ y &= \Psi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T) \tag{1}$$

есть граница области $\Omega(x, y)$, которую мы предполагаем односвязной.

Разобьем $(t_0, t_0 + T)$ на „n“ мелких интервалов точками $t_0, t_1, t_2, \ldots . t_{n-1}, t_n = t_0 + T$.

Пусть

$$\begin{cases} x_i = \Phi(t_i) \\ y_i = \Psi(t_i), \end{cases} \tag{2}$$

также

$$\begin{cases} \xi_i' = \varphi_1(x_i, y_i) \\ \xi_i'' = \varphi_2(x_i, y_i) \\ \eta_i = \psi(x_i, y_i). \end{cases}$$

Имеем, очевидно, в силу квадрируемости S_1^* S_2^* и S_3^*

$$\begin{cases} S_1^* = \lim \sum_1^n \xi_i'(\eta_i - \eta_{i-1}) \\ S_2^* = \lim \sum_1^n \xi_i''(\eta_i - \eta_{i-1}) \\ S_3^* = \lim \sum_1^n \xi_i (\eta_i - \eta_{i-1}) \end{cases} \tag{3}$$

при $\begin{cases} n \to \infty, \\ t_i - t_{i-1}, \to 0. \end{cases}$

Отсюда видно, что $S_1^* + S_2^* = S_3^*$.

Следовательно, возвращаясь к нашим обозначениям, имеем

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_\Omega = [\varphi_1, \psi]_\Omega + [\varphi_2, \psi]_\Omega. \tag{4}$$

Равенство (4) выражает весьма важное свойство символа $[\varphi_1, \psi]_\Omega$, которым нам удается воспользоваться для распространения его на случай негомеоморфного соответствия.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Перечислим ряд свойств символа $[\varphi, \psi]_\Omega$.

1) $[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_\Omega = [\varphi_1, \psi]_\Omega + [\varphi_2, \psi]_\Omega$;

2) $[\varphi, \psi]_{\Omega_1} + [\varphi, \psi]_{\Omega_2} = [\varphi, \psi]_{\Omega_1 + \Omega_2}$, если $\Omega_1 \cdot \Omega_2 = 0$;

3) $[x, y]_\Omega = |\Omega|$;

4) $[a\varphi, b\psi]_\Omega = ab\,[\varphi, \psi]_\Omega$ (a и b const);

5) $[\varphi, \psi]_\Omega = -[\psi, \varphi]_\Omega$;

6) $[\varphi, \psi]_\Omega \to 0$, если диаметр Ω стремится к нулю;

7) если $\Omega_1 \subset \Omega$ и если Ω_1 стремится к слиянию с Ω, то $[\varphi, \psi]_{\Omega_1} \to [\varphi, \psi]_\Omega$;

8) $[\varphi, \psi]_\Omega$ есть ограниченная функция Ω, то есть, существует такое постоянное число $M > 0$, что $|[\varphi, \psi]_\Omega| < M$. (Мы ставим знак модуля, так как по свойству (5) мы придаем $[\varphi, \psi]_\Omega$ иногда и отрицательное значение);

9) $\dfrac{[\varphi, \psi]_\Omega}{|\Omega|}$ имеет почти в каждой точке Ω предел, когда Ω стягивается в данную точку.

Этот предел называется производной от $[\varphi, \psi]_\Omega$ и записывается так: $\dfrac{D[\varphi, \psi]_\Omega}{D[x, y]_\Omega}$ или короче $\dfrac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}$.

Свойства 2)—8) мы считаем очевидными. Свойство 1) нами доказано, а свойство 9) вытекает из общей теории аддитивных и ограниченных функций, и на выводе его мы не останавливаемся.

§ 3. Расширение символа $[\varphi, \psi]_\Omega$.

Сохраняя обозначения § 2, предположим, что (T_3) негомеоморфное соответствие, тогда смысл символа $[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_\Omega$ будет устанавливаться по прежнему равенством (4). Поэтому свойства 1)—9) легко переносятся на этот обобщенный символ.

Согласно этому обобщению, если

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sum_1^n a_i \varphi_i \\ \psi &= \sum_1^m b_j \psi_j \end{aligned}\right\}, \quad \text{где } a_i \text{ и } b_j \text{ постоянные и } (\varphi_i, \psi_j) \text{ гомеоморфные пары,} \tag{1}$$

то

$$[\varphi, \psi]_\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j [\varphi_i, \psi_j]_\Omega. \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Свойства 1)—7) и 9) очевидны для обобщенного символа, причем

$$\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{j=m} a_i b_j \frac{D[\varphi_i, \psi_j]}{D[x, y]}. \qquad (3)$$

Для вывода 8) обозначаем через M наибольший из модулей величин $[\varphi_i, \psi_j]_Q$, а через A наибольший из модулей a_i и b_j; тогда из (2) очевидно, что $|[\varphi, \psi]_Q| \leqslant mn A^2 M$.

Кроме свойств 1)—9) мы можем еще указать два свойства могущие иметь место для обобщенного символа $[\varphi, \psi]_Q$.

10) $[\varphi, \varphi]_Q = 0$,

11) $[\varphi, c]_Q = 0$, (c—постоянное).

Введем понятие полной вариации $[\varphi, \psi]_Q$.

Обозначим через $\bar{V}[\varphi, \psi]_Q$ точную верхнюю границу $[\varphi, \psi]_\Omega$ для $\Omega \subset Q$. Назовем ее положительной вариацией $[\varphi, \psi]_Q$.

Точно также обозначим через $\underline{V}[\varphi, \psi]_Q$ точную нижнюю границу $[\varphi, \psi]_\Omega$ при $\Omega \subset Q$ и назовем ее отрицательной вариацией $[\varphi, \psi]_Q$.

Совершенно очевидно, что $\bar{V}[\varphi, \psi]_Q > 0$, а $\underline{V}[\varphi, \psi]_Q \leqslant 0$.

Полной вариацией $[\varphi, \psi]_Q$ мы назовем величину

$$V[\varphi, \psi]_Q = \bar{V}[\varphi, \psi]_Q + \underline{V}[\varphi, \psi]_Q.$$

Для $\bar{V}$, $\underline{V}$ и V мы можем высказать следующие свойства.

12) $\bar{V}$, $\underline{V}$ и V являются аддитивными функциями области Ω, удовлетворяющими условиям 6), 7), 8), 9).

13) $V[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_Q \leqslant V[\varphi_1, \psi]_Q + V[\varphi_2, \psi]_Q$.

14) Если $|[\varphi, \psi]_Q| < M$, то $V[\varphi, \psi]_Q \leqslant 2M$.

15) $\left|\frac{D\underline{V}[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\right| = \left|\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\right|$ почти всюду в Q.

16) Если разбить Q на области $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ (класса $K_{\varphi,\psi}$), то

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n |[\varphi, \psi]|_{Q_k} = V[\varphi, \psi]_Q,$$

диаметр $Q_k \to 0$,
в остальном выбор областей Q_n безразличен.

Свойства 11), 13) и 14) очевидны.

Свойства 12) и 16) мы докажем в следующем параграфе, дабы не прерывать цельности изложения вопроса об обобщении символа $[\varphi, \psi]_Q$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Остановим наше внимание на одном весьма важном обстоятельстве. Если бы φ и ψ могли быть представлены другими равенствами того же типа, что и (1),

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \sum_{1}^{\bar{n}} \bar{a}_i \varphi_i \\ \psi &= \sum_{1}^{\bar{m}} \bar{b}_j \psi_j\end{aligned}\right\}, \qquad (1')$$

то не пришли ли бы мы к различным значениям символа $[\varphi, \psi]_\Omega$, и тогда наше обобщение не имело бы никакой ценности?

Легко видеть, что $[\varphi, \psi]_\Omega$ определяется вполне однозначно, поскольку во всех случаях

$$[\varphi, \psi]_\Omega = \lim_{\substack{x_{i+1} - x_i \to 0 \\ y_{i+1} - y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} \varphi(x_i, y_i)\,[\psi(x_{i+1}, y_{i+1}) - \psi(x_i, y_i)], \qquad (4)$$

где (x_i, y_i) имеют смысл, указанный в § 2.

Итак, (4) является основной формулой, определяющей смысл символа $[\varphi, \psi]_\Omega$, если предел существует.

Мы уже рассмотрели два случая (гомеоморфное соответствие и его обобщение), для которых предел (4) существует.

Отметим еще один весьма широкий случай, когда $[\varphi, \psi]_\Omega$ существует.

Пусть φ и ψ соответственно пределы последовательностей функций $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которых $[\varphi_n, \psi_n]_\Omega$ имеет смысл и пусть эти последовательности сходятся равномерно. Кроме того, пусть $[\varphi_n, \psi_n]_\Omega$ сходятся равномерно к $[\varphi, \psi]_\Omega$ в отношении Ω.

Можно легко убедиться (методом равномерного приближения), что все свойства 1)—16), справедливые для $[\varphi_n, \psi_n]_\Omega$, остаются таковыми для $[\varphi, \psi]_\Omega$.

Таким образом, мы пришли к довольно широкому классу пар функций φ и ψ, которым мы дадим название *взаимно-ограниченных* пар.

Если в частности $[\varphi, \psi]_\Omega$ есть абсолютно непрерывная функция Ω, то мы скажем, что (φ, ψ) *абсолютно-непрерывная* пара.

В этом случае, очевидно, что:

$$[\varphi, \psi]_\Omega = \iint_\Omega \frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\, dx\, dy,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и можно легко доказать, что

$$V[\varphi, \psi]_\Omega = \iint_\Omega \left| \frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]} \right| dx\, dy.$$

§ 4. Доказательство некоторых теорем.

1) Доказательство свойства 12) § (3).

Ради сокращения записи, введем следующие обозначения: $[\varphi, \psi]_\Omega = J_\Omega$, а полную, положительную и отрицательную вариации $[\varphi, \psi]_\Omega$ обозначим соответственно через V_Ω, $\bar{V}_\Omega$ и $\underline{V}_\Omega$.

Возьмем какую нибудь область $Q_1 + Q_2$ ($Q_1 . Q_2 = 0$). Тогда, как бы мало не было $\varepsilon > 0$, мы определим две такие области $Q_1' \subset Q_1$ и $Q_2' \subset Q_2$, что

$$\left.\begin{aligned} J_{Q_1'} &\geqslant \bar{V}_{Q_1} - \varepsilon \\ J_{Q_2'} &\geqslant \bar{V}_{Q_2} - \varepsilon \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Складывая неравенства (1), находим, что

$$J_{Q_1'+Q_2'} \geqslant \bar{V}_{Q_1} + \bar{V}_{Q_2} - 2\varepsilon, \tag{2}$$

откуда заключаем, что

$$\bar{V}_{Q_1+Q_2} \geqslant \bar{V}_{Q_1} + \bar{V}_{Q_2} - 2\varepsilon, \tag{3}$$

но с другой стороны, в силу того, что

$$J_{Q_1} + J_{Q_2} = J_{Q_1+Q_2},$$

мы заключаем, что

$$\bar{V}_{Q_1} + \bar{V}_{Q_2} \geqslant \bar{V}_{Q_1+Q_2}. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4) и принимая во внимание, что ε сколь угодно мало, заключаем, что

$$\bar{V}_{Q_1+Q_2} = \bar{V}_{Q_1} + \bar{V}_{Q_2}. \tag{5}$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\underline{V}_{Q_1+Q_2} = \underline{V}_{Q_1} + \underline{V}_{Q_2}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$V_{Q_1+Q_2} = V_{Q_1} + V_{Q_2}, \tag{7}$$

и тем самым свойство 12) доказано.

2) Доказательство свойства 16) (§ 3).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Зададим $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, тогда по определению величин $\overline{V}_Q$ и $\underline{V}_Q$ следует, что можно выбрать такую область Q' и дополнительную ей Q'' (в классе $K_{\varphi,\psi}$), что

$$J(Q') > 0, \qquad J(Q'') \leqslant 0 \tag{8}$$

и что, кроме того,

$$\overline{V}_Q - \varepsilon < J_{Q'} \leqslant \overline{V}_Q,$$

$$\underline{V}_Q - \varepsilon < |J_{Q''}| \leqslant \underline{V}_Q. \tag{9}$$

Легко видет, что оба равенства (9) обуславливают друг друга, что следует из равенства

$$J_Q = \overline{V}_Q - \underline{V}_Q.$$

Разобьем Q' на мелкие области (класса $K_{\varphi,\psi}$)

$$Q_1', Q_2', \ldots, Q_p',$$

а Q'' на таковые же

$$Q_1'', Q_2'', \ldots, Q_q''.$$

Ради простоты мы их выберем односвязными.

Тогда (9) перепишутся так:

$$\begin{cases} \overline{V}_Q - \varepsilon < \sum_1^p J_{Q'_k} \leqslant \overline{V}_Q, \\ \underline{V}_Q - \varepsilon < \left| \sum_1^q J_{Q''_k} \right| \leqslant \underline{V}_Q. \end{cases} \tag{9'}$$

Выкинув отрицательные члены в сумме $\sum_1^p J_{Q'_k}$ и прибавив их к $\sum_1^q J_{Q''_k}$ и наоборот, мы тем самым, очевидно, не нарушим неравенств (9'). Измененные таким образом суммы перепишутся соответственно так:

$$\sum_1^r J_{\overline{Q}'_k} \quad \text{и} \quad \sum_1^s J_{\overline{Q}''_k} \qquad (p+q=r+s),$$

Неравенства (9') в усиленной форме перепишутся так:

$$\begin{cases} \overline{V}_Q - \varepsilon < \sum_1^r |J_{\overline{Q}'_k}| \leqslant \overline{V}_Q, \\ \underline{V}_Q - \varepsilon < \sum_1^s |J_{\overline{Q}''_k}| \leqslant \underline{V}_Q. \end{cases} \tag{9''}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Складывая неравенства (9″) и изменяя обозначение областей Q'_k и Q''_k через Q_k $(k=1, 2, \ldots, N)$ получим:

$$V_Q - 2\varepsilon < \sum_{k=1}^{k=N} |J_{Q_k}| \leqslant V_Q. \tag{10}$$

$$\left(\sum_{1}^{N} Q_k = Q\right)$$

Итак, мы пришли к заключению существования такой системы областей $Q_1, Q_2, .., Q_N$, для которых выполняется неравенство (10).

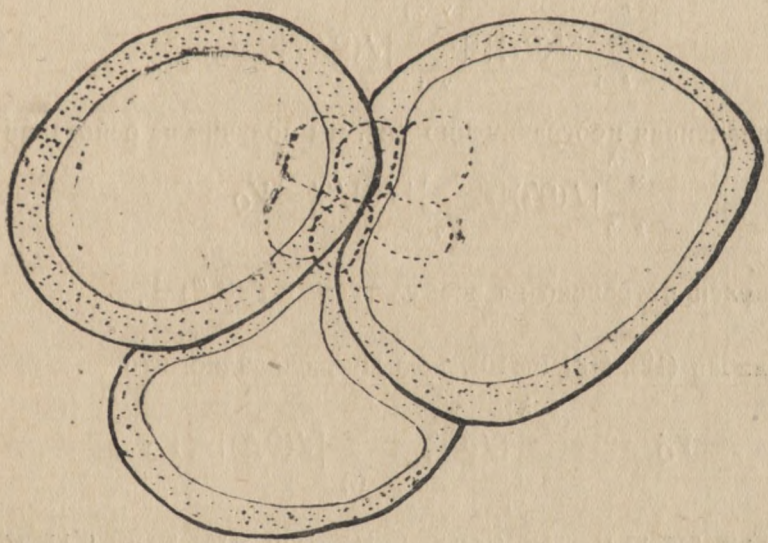
В силу свойств 7), 12) и 14) мы заключаем, что можно поместить внутри каждой области Q_k такую односвязную область Q°_k (класса $K_{\varphi,\psi}$) без общих граничных точек с Q_k, чтобы

$$V_{Q_k - Q^\circ_k} < \frac{\varepsilon}{2N}. \tag{11}$$

Выберем теперь совершенно произвольную систему областей класса $K_{\varphi,\psi}$) $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, не имеющих попарно общих точек и столь мелких диаметров, чтобы те из них, которые засекаются границами областей Q_k, лежали целиком внутри областей

$$(Q_k - Q^\circ_k), \quad k=1, 2, 3, \ldots, N.$$

На прилагаемом чертеже области $Q_k - Q_k^\circ$ изображены пунк-



Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

тирной штриховкой. Границы областей Q_k—жирными полосами, границы Q_k°—тонкими полосами, а границы Ω_k—пунктиром. Мы отнесем все области $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ к двум классам.

К первому принадлежат те области $\Omega_1', \ldots \Omega_\lambda'$, которые не засекаются границами областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, ко второй—все остальные:

$$\Omega_1'', \Omega_2'', \ldots \Omega_\eta'' \qquad (\lambda + \eta = N).$$

Рассмотрим теперь новые области $\Omega_1''', \Omega_2''', \ldots \Omega_\nu''', \ldots$, на которые рассекутся области $\Omega_1'', \Omega_2'', \ldots \Omega_\eta''$ границами областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$.

Их множество может оказаться конечным или счетным, но все они принадлежат, очевидно, классу $K_{\varphi,\psi}$ [1]).

Рассмотрим теперь систему областей $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_\lambda', \Omega_1''', \Omega_\nu''', \ldots$, на которые разбилась область Q.

Эта система областей получилась дроблением системы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ на более мелкие области, а потому мы должны иметь

$$\sum_{k=1}^{k=N} |J(Q_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{k=\lambda} |J(\Omega'_k)| + \sum_{(\nu)} |J(\Omega_k''')| \text{ [2])}. \tag{12}$$

Кроме того, выделив произвольное конечное число областей $\Omega_1''', \Omega_2''', \ldots, \Omega_\nu''', \ldots$, например: $\Omega_1''', \Omega_2''', \ldots, \Omega_{\nu_n}'''$ (если множество их счетно) мы имеем очевидное неравенство:

$$\sum_{k=1}^{k=\lambda} |J(\Omega_k')| + \sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_n} |J(\Omega_\nu''')| \leqslant V_Q. \tag{13}$$

Увеличивая неограниченно „n“, мы получим на основании (13)

$$\sum_{k=k}^{k=\lambda} |J(\Omega'_k)| + \sum_{\nu} |J(\Omega_\nu''')| \leqslant V_Q \tag{14}$$

$\left\{\sum_{(\nu)}\right.$ распространено на все слагаемые $J(\Omega_\nu''')$ $\left.\right\}$.

Сравнивая (12), (14) и (10), находим, очевидно, что

$$V_Q - 2\varepsilon < \sum_{k=1}^{k=\lambda} |J(\Omega_k')| + \sum_{(\nu)} |J(\Omega_\nu''')| \leqslant V_Q. \tag{15}$$

---

[1]) Так как их границы состоят из конечного числа частей обыкновенных линий.

[2]) Так как $|J(\overline{\Omega})| + |J(\overline{\overline{\Omega}})| \geqslant |J(\overline{\Omega}) + J(\overline{\overline{\Omega}})|$ (при $\overline{\Omega} \cdot \overline{\overline{\Omega}} = 0$).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Имеем также на основании (11)

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_n} |J(Q_\nu''')| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_n} V_{Q_\nu'''} \leqslant \sum_{1}^{N} V_{Q_k - Q_k^\circ} < \frac{\varepsilon}{2N}.N = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (16)$$

откуда при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{(\nu)} |J(Q_\nu''')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \quad (17)$$

Совершенно так же, в силу того же соотношения (11), имеем

$$\sum_{1}^{n} |J(Q_\nu'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \quad (18)$$

Неравенство (15) можно переписать так:

$$V_Q - 2\varepsilon < \left\{ \sum_{k=1}^{k=\lambda} |J(Q_k')| + \sum_{k=1}^{k=\gamma_1} |J(Q_k'')| \right\} +$$

$$+ \sum_{(\nu)} |J(\Omega_k''')| - \sum_{k=1}^{k=\gamma_1} |J(\Omega_k')|$$

или короче:

$$V_Q - 2\varepsilon < \sum_{k=1}^{k=n} |J(\Omega_k)| + \sum_{(\nu)} |J(Q_\nu''')| - \sum_{k=1}^{k=\gamma_1} |J(\Omega_k'')|. \quad (19)$$

На основании (17), (18) и (19) имеем

$$V_Q - 2\varepsilon < \sum_{k=1}^{k=n} |J(\Omega_k)| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^{k=n} |J(\Omega_k)| > V_Q - 2\varepsilon. \quad (20)$$

Неравенство (20) доказывает нам предложение (16), поскольку ε сколь угодно мало.

Остановимся еще на доказательстве одной теоремы, которая будет иметь для нас значение в дальнейшем.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТЕОРЕМА. Какова бы ни была взаимно-ограниченная пара $(\varphi\ \psi)$, *и как бы мало ни было положительное число* ε *и приводимое множество* E *в области* Q, *его можно заключить в конечную систему односвязных областей (класса* $K_{\varphi,\psi}$), *не имеющих попарно общих точек и таких, что*

$$V[\varphi,\ \psi]_{Q_1+Q_2+\ldots+Q_n} < \varepsilon.$$

1) Сперва мы рассмотрим случай гомеоморфной пары. Совершенно очевидно, что E перейдет в E_1 при этом гомеоморфном преобразовании и E_1 будет опять приводимым.

По известному свойству приводимых множеств, мы можем заключить E_1 в систему таких областей $S_1,\ S_2,\ldots S_n$ без общих точек, что $|S_1|+|S_2|+\ldots|S_n|<\varepsilon$ и у которых соответственные прообразы $Q_1,\ Q_2,\ldots,\ Q_n$ принадлежат классу $K_{\varphi,\psi}$.

Но $\quad |S_k| = |[\varphi,\ \psi]_{Q_k}| = V[\varphi,\ \psi]_{Q_k}$,

$Q_1+Q_2+\ldots+Q_n$) заключает в себе все точки E, и мы имеем:

$$V_{Q_1}+V_{Q_2}+\ldots V_{Q_n}=V_{Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}<\varepsilon.$$

2) Перейдем теперь к первому обобщению, когда

$$\varphi=\sum_1^p a_k\varphi_k, \qquad \psi=\sum^q b_k\psi_k,$$

где $\varphi_i,\ \psi_j$ гомеоморфные пары.

Обозначим через V_Q^{ij} полную вариацию функции $[\varphi_i,\ \psi_j]_Q$.

В силу случая 1) мы можем заключить E в такую систему областей $Q_1,\ Q_2,\ldots,\ Q_n$, чтобы имели место неравенства:

$$V^{ij}_{Q_1+\ldots+Q_n}<\frac{\varepsilon}{|a_i|\ |b_j|\ m.n} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2\ldots n \\ j=1,\ 2\ldots m \end{pmatrix},$$

откуда следует, очевидно, что

$$\sum_{i=1\ j=1}^{mn} |a_i|\,|b_j|\ V^{ij}_{Q_1+\ldots+Q_n}<\varepsilon. \tag{21}$$

Но в силу свойства 5) мы заключаем, что

$$V[\varphi,\ \psi]_Q \leqslant \sum_{ij} |a_i|.|b_j|\,V[\varphi_i,\ \psi_j]_Q = \sum_{ij}|a_i|\,|b_j|\,V_Q^{ij}. \tag{22}$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$V[\varphi,\ \psi]_{Q_1+\ldots+Q_n}<\varepsilon. \tag{23}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3) Перейдем теперь к тому случаю, когда φ и ψ являются пределами двух последовательностей $\{\varphi_m\}$ и $\{\psi_m\}$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ предыдущего типа, для которых $[\varphi_m, \psi_m]_\Omega$ равномерно стремится к $[\varphi, \psi]_\Omega$.

Итак, мы можем заключить E в конечную систему областей (класса $K_{\varphi,\psi}$) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, таких, что

$$|[\varphi_m, \psi_m]_{\Omega_1+\ldots+\Omega_n}| \leqslant V[\varphi_m, \psi_m]_{Q_1+\ldots+Q_n} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{24}$$

где $\Omega_k \subset Q_k$.

В силу равномерного приближения мы можем выбрать m_0 столь большим, что

$$|[\varphi, \psi]_{\Omega_1+\ldots+\Omega_n} - [\varphi_m, \psi_m]_{\Omega_1+\ldots+\Omega_n}| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{25}$$

при $m > m_0$
и $\Omega_k \subset Q_k$.

В силу (24) и (25) заключаем, что

$$|[\varphi, \psi]_{\Omega_1+\ldots+\Omega_n}| \leqslant |[\varphi_m, \psi_n]_{\Omega_1+\ldots+\Omega_n}| +$$
$$+|[\varphi, \psi]_{\Omega_1+\ldots+\Omega_n} - [\varphi_m, \psi_m]_{\Omega_1+\ldots+\Omega_n}| < \frac{\varepsilon}{2}; \tag{26}$$

отсюда, поскольку Ω_k любая область класса $K_{\varphi,\psi}$, входящая в Q_k, и в силу свойства (14) следует, что

$$V[\varphi, \psi]_{Q_1+\ldots+Q_n} < \varepsilon, \tag{27}$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Примеры взаимно-ограниченных пар.

1) Предположим, что φ и ψ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ в области Ω.

Докажем, что они составляют взаимно-ограниченную и даже абсолютно непрерывную пару.

Мы для этого воспользуемся следующей теоремой: [1])

„Если в некоторой области Q имеется непрерывная функция $f(x, y)$ с непрерывными частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, то существует последовательность полиномов $P_n(x, y)$ $(n=1, 2, \ldots)$, которая равномерно сходится к $f(x, y)$, а $\frac{\partial P_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial P_n}{\partial y}$ равномер-

[1]) См. Валле Пуссен „Курс анализа б. м." т. II, стр. 121 (русск. перев).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

но сходятся соответственно к $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Рассматривая, ради удобства, область Q в первой координатной четверти (не нарушая общности), возьмем полиномиальные приближения для φ и ψ, согласно цитированной теоремы. Пусть это будут соответственно φ_N и ψ_N.

Возьмем по одному члену этих полиномов

$$\begin{cases} \xi = x^m y^n, \\ \eta = x^p y^q. \end{cases} \tag{1}$$

Докажем, что (ξ, η) гомеоморфная пара, если только

$$mq - np \neq 0.$$

В самом деле, разрешая (1) относительно x и y, получим:

$$\begin{cases} x = \xi^{\frac{b}{mq-np}} \cdot \eta^{\frac{n}{np-mq}}, \\ y = \xi^{\frac{p}{nq-mp}} \cdot \eta^{\frac{m}{mp-nq}}. \end{cases} \tag{2}$$

Мы видим, что для положительных x и y, а следовательно, и для положительных ξ и η равенства (1) и (2) устанавливают гомеоморфное соответствие между (x, y) и (ξ, η). Если $mq-np=0$ или $nq-mp=0$, то мы имеем, очевидно, $[\xi, \eta]_Q = 0$, то есть вырождающуюся пару.

Итак, мы приходим к заключению, что все члены полиномов φ_N и ψ_N представляют попарно гомеоморфные или вырождающиеся пары, поэтому пара (φ_N, ψ_N) есть взаимноограниченная.

Покажем, что $[\varphi_N, \psi_N]_Q$ стремится равномерно к пределу при $n \to \infty$ и что этот предел есть $[\varphi, \psi]_Q$.

Пусть Q, будучи $(n+1)$ связной, ограничена спрямляемой системой контуров C (внешняя граница) и контурами C_k $(k = 1, 2, \ldots)$, тогда, в силу теоремы Грина, мы имеем

$$\int_C \varphi_N \, d\psi_N - \sum_1^{n-1} \int_{C_k} \varphi_N \, d\psi_N = \iint_Q \frac{D(\varphi_N, \psi_N)}{D(x, y)} \, dx \, dy. \tag{3}$$

Отсюда, принимая во внимание, что φ_N, ψ_N, $\frac{\partial \varphi_N}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_N}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi_N}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi_N}{\partial y}$ стремятся равномерно соответственно к φ, ψ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, получим, переходя к пределу,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\int_C \varphi\, d\psi - \sum_1^{n-1} \int_{C_k} \varphi\, d\psi = \iint_\Omega \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\, dx\, dy \tag{4}$$

или

$$[\varphi, \psi]_\Omega = \iint_\Omega \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\, dx\, dy. \tag{5}$$

Из (5) видно, что $[\varphi, \psi]_\Omega$ есть абсолютно непрерывная функция Ω, и потому непрерывной деформацией Ω мы распространяем формулу (5) на случай любой квадрируемой области Ω. Здесь класс $K_{\varphi,\psi}$ состоит из всех квадрируемых областей.

Из (5) еще следует, что

$$\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}. \tag{6}$$

2) Рассмотрим теперь такой пример:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sum_1^\infty a_k \varphi_k \\ \psi &= \sum_1^\infty b_k \psi_k \end{aligned}\right\} \quad \text{в области } Q, \tag{7}$$

где (φ_i, ψ_j) гомеоморфные или вырождающиеся пары, а $\sum_1^\infty a_k$ и $\sum_1^\infty b_k$ сходящиеся ряды.

Кроме того, предположим, что $|[\varphi_i, \psi_j]|_\Omega < 1 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ для всякого $\Omega \subset Q$ (Ω область класса $K_{\varphi,\psi}$).

Докажем существование $[\varphi, \psi]_Q$, а также, что

$$[\varphi, \psi]_\Omega = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=m} a_i b_j [\varphi_i, \psi_j]_\Omega = \sum_1^\infty \sum_1^\infty a_i b_j [\varphi_i, \psi_j]_\Omega.$$

Рассмотрим для этого разность:

$$[\varphi, \psi]_\Omega - \sum_1^n \sum_1^m a_i b_j [\varphi_i, \psi_j]_\Omega = [\varphi, \psi]_\Omega -$$

$$- \left[\sum_1^n a_i \varphi_i, \sum_1^m b_j \psi_j\right]_\Omega. \tag{8}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Ее можно представить так:

$$\left[\sum_{n+1}^{\infty} a_i \varphi_i,\ \sum_{1}^{\infty} b_j \psi_j\right]_\Omega + \left[\sum_{1}^{\infty} a_i \varphi_i,\ \sum_{m+1}^{\infty} b_j \psi_j\right]_\Omega + \left[\sum_{n+1}^{\infty} a_i \varphi_i,\ \sum_{m+1}^{\infty} b_j \psi_j\right]_\Omega. \tag{9}$$

Каждое из трех слагаемых (9) стремится к 0 при $n \to \infty$ и $m \to \infty$. Принцип доказательства для каждой из этих сумм один и тот же, а потому применим его к первому слагаемому.

Рассмотрим вместо него следующую величину:

$\left[\sum_{n+1}^{n+p} a_i \varphi_i,\ \sum_{1}^{m+q} b_j \psi_j\right]_\Omega$, где p и q любые сколь угодно большие индексы. Докажем, что она безконечно мала.

$$\left|\left[\sum_{n+1}^{n+p} a_i \varphi_i,\ \sum_{1}^{m+q} b_j \psi_j\right]_\Omega\right| = \left|\sum_{n+1}^{n+p}\sum_{1}^{m+q} a_i b_j [\varphi_i, \psi_j]_\Omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n+1}^{n+p}\sum_{1}^{m+q} |a_i|\,|b_j|\,|[\varphi_i, \psi_j]_\Omega| \leqslant \sum_{n+1}^{n+p}\sum_{1}^{m+q} |a_i|\,|b_j| =$$

$$= \sum_{n+1}^{n+p} |a_i| \cdot \sum_{1}^{n+q} |b_j|.$$

Это величина сколь угодно малая при $p \to \infty$ и $q \to \infty$ (в силу сходимости $\sum_1^\infty |a_i|$ и $\sum_1^\infty |b_j|$), поэтому мы можем ее сделать $< \varepsilon$, где ε сколь угодно мало.

Итак, имеем $\left|\left[\sum_{n+1}^{n+p} a_i \varphi_i,\ \sum_{1}^{m+q} b_j \psi_j\right]_\Omega\right| < \varepsilon.$

Увеличивая неограниченно p и q, получим

$$\left|\left[\sum_{n+1}^{\infty} a_i \varphi_i,\ \sum_{1}^{\infty} b_j \psi_j\right]_\Omega\right| < \varepsilon,$$

откуда следует, что при $n \to \infty$ первое слагаемое (9) стремится к 0.

Итак, мы имеем $[\varphi, \psi]_\Omega = \sum_1^\infty \sum_1^\infty a_i b_i [\varphi_i, \psi_j]_\Omega$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Легко видеть, что все свойства символа 1)--16) (§§ 2, 3) в данном примере имеют место. Мы на этом не останавливаемся.

3) Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\begin{cases} \xi = f(x, y), \\ \eta = \Phi(y), \end{cases} \tag{10}$$

где $f(x, y)$ непрерывная возрастающая функция x при всяком y, а $\Phi(y)$ непрерывная возрастающая функция y. Ясно, что мы имеем гомеоморфную пару. Ввиду того, что выбор сетки разбиения области безразличен (в классе $K_{f,\Phi}$), мы выберем сетку прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

В качестве основной области считаем прямоугольник с вершинами (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2).

Легко видеть, что всякая прямая, параллельная OX или OY, принадлежит к классу $K_{f,\Phi}$.

Возьмем прямоугольник Ω с вершинами (x_0, y_0), (x_0, y_1) (x_1, y_0), (x_1, y_1), тогда получим, очевидно:

$$[f, \Phi]_\Omega = \int_{y_0}^{y_1} f(x_1, y)\, d\Phi + \int_{y_1}^{y_0} f(x_0, y)\, d\Phi =$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} [f(x_1, y) - f(x_0, y)]\, d\Phi. \tag{11}$$

Предположим более общий случай: $f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ возрастающие функции x при всяком y, тогда, очевидно, согласно нашего общего метода обобщения, мы должны иметь:

$$[f, \Phi]_\Omega = [f_1, \Phi]_\Omega - [f_2, \Phi]_\Omega, \tag{12}$$

то есть, опять $[f, \Phi]_\Omega$ выражается формулой (11).

К тому же случаю сводятся все те случаи, когда f есть сумма возрастающих и убывающих функций x, а Φ таковая для y.

Предположим теперь, что $V_{a_1}^{a_2}(x) f$ есть полная вариация f по переменному x на интервале $(a \leqslant x \leqslant b)$ и пусть $V_{a_1}^{a_2}(x) f$ есть почти всюду конечная функция y.

Кроме того, $\int_{b_1}^{b_2} V_{a_1}^{a_2}(x) f . d V_{b_1}^{y} \Phi$ существует.

$V_b^y \Phi$ есть вариация Φ на интервале (b, y) $(b_1 \leqslant y \leqslant b_2)$.

Разобьем (a_1, a_2) на мелкие интервалы:

$$x_0 = a, \quad x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}, \mathbf{x}_n = a_2,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а (b_1, b_2) на интервалы:

$$y_0 = b_1, \quad y_1, y_2 \ldots, y_{m-1}, \quad y_m = b_2$$

и составим следующую сумму:

$$J_{n,m} = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=m} \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} [f(x_j, y) - f(x_{j-1}, y)]\, d\Phi \right|. \tag{13}$$

Легко видеть, что

$$J_{n,m} \leqslant \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=m} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x_j, y) - f(x_{i-1}, y)|\, dV_{b_1}^{y}\, \Phi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i=m} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \sum_{j=1}^{j=n} |f(x_j, y) - f(x_{j-1}, y)|\, dV_{b_1}^{y}\, \Phi \leqslant$$

$$\leqslant \int_{b_1}^{b_2} V_{a_1}^{a_2}(x) f.d V_{b_1}^{y}\, \Phi. \tag{14}$$

Следовательно, на основании (14), мы можем заключить, что

$$V[f, \Phi]_Q \leqslant \int_{b_1}^{b_2} V_{a_1}^{a_2}(x) f.dV_{b_1}^{y}\, \Phi,$$

в частности, при $\Phi = y$ имеем:

$$V[f, y]_Q \leqslant \int_{b_1}^{b} V_{a_1}^{a_2}(x) f.dy.$$

§ 6. Построение одной аддитивной функции области и определение меры поверхности.

Пусть в области $Q(x, y)$ определены три функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $\chi(x, y)$, которые попарно взаимно ограничены.

Тогда мы возьмем область Ω, принадлежащую одновременно к классам $K_{\psi,\chi}$, $K_{\chi,\varphi}$, $K_{\varphi,\psi}$.

Мы имеем тогда три аддитивных функции области:

$$[\psi, \chi]_\Omega, \quad [\chi, \varphi]_\Omega \quad \text{и} \quad [\varphi, \psi]_\Omega.$$

Построим следующий вектор:

$$\bar{R}_\Omega = [\chi, \psi]_\Omega \bar{i} + [\chi, \varphi]_\Omega \bar{j} + [\varphi, \psi]_\Omega \bar{k}. \tag{1}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Рассматривая φ, ψ и χ как координаты прямоугольной системы, совершим преобразование координат по формулам:

$$\begin{cases} \varphi' = \alpha_1\varphi + \beta_1\psi + \gamma_1\chi, \\ \psi' = \alpha_2\varphi + \beta_2\psi + \gamma_2\chi, \\ \chi' = \alpha_3\varphi + \beta_3\psi + \gamma_3\chi. \end{cases} \tag{2}$$

Покажем, что вектор $\bar{R}'_\Omega = [\psi', \chi']_\Omega \bar{i}' + [\chi', \varphi']_\Omega \bar{j}' + [\varphi', \psi']_\Omega \bar{k}'$ (где $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ и $\bar{k}'$ орты новой системы) имеет то же значение, что и $\bar{R}_\Omega$.

Другими словами, вектор $\bar{R}_\Omega$ сохраняет свое выражение независимо от системы координат.

В самом деле,

$$[\psi', \chi']_\Omega = [\alpha_2\varphi + \beta_2\psi + \gamma_2\chi,\ \alpha_3\varphi + \beta_3\psi + \gamma_3\chi]_\Omega =$$
$$= \alpha_2\alpha_3[\varphi, \varphi]_\Omega + \beta_2\alpha_3[\psi, \varphi]_\Omega + \gamma_2\alpha_3[\chi, \varphi]_\Omega + \alpha_2\beta_3[\varphi, \psi]_\Omega +$$
$$+ \beta_2\beta_3[\psi, \psi]_\Omega + \gamma_2\beta_3[\chi, \psi]_\Omega + \alpha_2\gamma_3[\varphi, \psi]_\Omega + \beta_2\gamma_3[\psi, \chi]_\Omega +$$
$$+ \gamma_2\gamma_3[\chi, \chi]_\Omega = (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3)[\psi, \chi]_\Omega + (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3)[\chi, \varphi]_\Omega +$$
$$+ (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)[\varphi, \psi]_\Omega.$$

Но

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3, \quad \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3, \quad \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3.$$

Поэтому

$$[\psi', \chi']_\Omega = \alpha_1[\psi, \chi]_\Omega + \beta_1[\chi, \varphi]_\Omega + \gamma_1[\varphi, \psi]_\Omega.$$

Совершенно аналогично вычисляются $[\chi', \varphi']_\Omega$ и $[\varphi', \psi']_\Omega$, и мы приходим к следующим равенствам:

$$\begin{cases} [\psi', \chi']_\Omega = \alpha_1[\psi, \chi]_\Omega + \beta_1[\chi, \varphi]_\Omega + \gamma_1[\varphi, \psi]_\Omega, \\ [\chi', \varphi']_\Omega = \alpha_2[\psi, \chi]_\Omega + \beta_2[\chi, \varphi]_\Omega + \gamma_2[\varphi, \psi]_\Omega, \\ [\varphi', \psi']_\Omega = \alpha_3[\psi, \chi]_\Omega + \beta_3[\chi, \varphi]_\Omega + \gamma_3[\varphi, \psi]_\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Помножая равенства (4) последовательно на орты $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ и $\bar{k}'$ и складывая, получим:

$$[\psi', \chi']_\Omega \bar{i}' + [\chi', \varphi']_\Omega \bar{j}' + [\varphi', \psi']_\Omega \bar{k}' = (\alpha_1\bar{i}' + \alpha_2\bar{j}' + \alpha_3\bar{k}')[\psi, \chi]_\Omega +$$
$$+ (\beta_1\bar{i}' + \beta_2\bar{j}' + \beta_3\bar{k}')[\chi, \varphi]_\Omega + (\gamma_1\bar{i}' + \gamma_2\bar{j}' + \gamma_3\bar{k}')[\varphi, \psi]_\Omega. \tag{5}$$

Но

$$\begin{cases} \alpha_1\bar{i}' + \alpha_2\bar{j}' + \alpha_3\bar{k}' = \bar{i}, \\ \beta_1\bar{i}' + \beta_2\bar{j}' + \beta_3\bar{k}' = \bar{j}, \\ \gamma_1\bar{i}' + \gamma_2\bar{j}' + \gamma_3\bar{k}' = \bar{k}. \end{cases} \tag{6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Поэтому (5) перепишется так:

$$[\psi', \chi']_\Omega \bar{i}' + [\chi', \varphi']_\Omega \bar{j}' + [\varphi', \psi']_\Omega \bar{k}' = [\psi, \chi]_\Omega \bar{i} + [\chi, \varphi]_\Omega \bar{j}' + [\varphi, \psi]_\Omega \bar{k}, \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь величину $|\bar{R}_\Omega| = F_\Omega$.

Имеем, очевидно:

$$F_\Omega = +\sqrt{[\psi, \chi]_\Omega^2 + [\chi, \varphi]_\Omega^2 + [\varphi, \psi]_\Omega^2}. \tag{8}$$

Легко проверить следующие свойства:

1) $F_{\Omega_1+\Omega_2} \leqslant F_{\Omega_1} + F_{\Omega_2}$.

2) $\left.\begin{matrix} |[\psi, \chi]_\Omega| \\ |[\chi, \varphi]_\Omega| \\ |[\varphi, \psi]_\Omega| \end{matrix}\right\} \leqslant F_\Omega \leqslant |[\psi, \chi]_\Omega| + |[\chi, \varphi]_\Omega| + |[\varphi, \psi]_\Omega|.$ (9)

3) F_Ω стремится к нулю, когда диаметр Ω стремится к нулю.

4) Если $\Omega_1 \supset \Omega$ и если Ω_1 стремится к слиянию с Ω, причем и Ω и Ω_1 принадлежат к классам $K_{\chi,\psi}$, $K_{\chi,\varphi}$ и $K_{\varphi,\psi}$, то F_{Ω_1} стремится к F_Ω.

5) F_Ω есть функция ограниченная, то есть, существует такое положительное число $M > 0$, что $F_\Omega < M$, где $\Omega \subset Q$.

6) $\dfrac{F_\Omega}{|\Omega|}$ имеет почти в каждой точке Q предел, когда Ω стягивается в эту точку. Этот предел назовем производной от F_Ω в этой точке и обозначим его так: $\dfrac{DF}{D[x, y]}$.

Определение. Полной вариацией F_Ω в области Q мы называем верхнюю границу W_Q суммы $\sum_1^n F_{Q_k}$ при всевозможных способах разбиения Q на области $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, принадлежащие одновременно к классам $K_{\chi,\psi}$, $K_{\chi,\varphi}$, $K_{\varphi,\psi}$.

7) W_Q достигается как предел величины $\sum_1^n F_{Q_k}$, когда $n \to \infty$ и минимум диаметров Q_k стремится к нулю.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

8) W_Ω есть аддитивная функция области Ω.

9) $\dfrac{DW}{D[x, y]} = \dfrac{DF}{D[x, y]}$ почти всюду в Q.

Свойства 1) проверяется непосредственным возведением величин $F_{\Omega_1+\Omega_2}$ и $F_{\Omega_1}+F_{\Omega_2}$ в квадрат.

2) очевидно, 3), 4) и 5) вытекает из 2), 6) вытекает из непосредственного вычисления величины $\dfrac{DF}{D[x, y]}$ на основе формулы (8).

7) доказывается почти также, как доказывается свойство 16) (см. § 4) для символа $V[\varphi, \psi]_\Omega$. Поэтому мы не останавливаемся на его доказательстве.

Остается доказать 8) и 9).

Докажем 8). Очевидно, что по самому определению W_Ω, каковы бы ни были области Ω_1 и Ω_2 (классов $K_{\psi,\chi}$, $K_{\chi,\varphi}$ и $K_{\varphi,\psi}$) ($Q_1 \cdot Q_2 = 0$), мы их можем разбить соответственно на столь мелкие области: $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{n_1}'$ и $\delta_1'', \delta_2'' \ldots \delta_{n_2}''$ классов $K_{\psi,\chi}$, $K_{\chi,\varphi}$, $K_{\varphi,\psi}$, что

$$\left.\begin{aligned} W_{\Omega_1+\Omega_2} - \left(\sum_1^{n_1} F_{\delta' k} + \sum_1^{n_2} F_{\delta'' k}\right) &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ W_{\Omega_1} - \sum_1^{n_1} F_{\delta' k} &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ W_{\Omega_2} - \sum_1^{n_2} F_{\delta'' k} &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где ε заранее заданное произвольно малое число >0.

Складывая неравенства (10), получим:

$$W_{\Omega_1+\Omega_2} - (W_{\Omega_1}+W_{\Omega_2}) \leqslant \left| W_{\Omega_1+\Omega_2} - \left(\sum_1^{n_1} F_{\delta' k} + \sum_1^{n_2} F_{\delta'' k}\right)\right| +$$

$$+ \left| W_{\Omega_1} - \sum_1^{n_1} F_{\delta' k}\right| + \left| W_{\Omega_2} - \sum_1^{n_2} F_{\delta'' k}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.3 = \varepsilon. \qquad (11)$$

Из (11), в силу произвольной малости ε, вытекает, что

$$W_{\Omega_1+\Omega_2} = W_{\Omega_1} + W_{\Omega_2}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следовательно, W_Ω есть аддитивная функция области.

Докажем теперь 9).

Пусть E_n множество таких точек „P“ области Q, для которых

$$\frac{W_\Omega}{|\Omega|} > \frac{F_\Omega}{|\Omega|} + \frac{1}{n} \qquad \text{при} \quad P \subset \Omega \tag{12}$$

$$\left(\text{диаметр } \Omega < \frac{1}{n}\right).$$

Мы предполагаем, что в P существует $\frac{DW}{D[x, y]}$ [1]).

Перепишем (12) так:

$$W_\Omega > F_\Omega + \frac{|\Omega|}{n}. \tag{13}$$

Пусть $E = \sum_1^\infty E_n$. Совершенно очевидно, что E есть множество всех тех точек, в которых

$$\lim \begin{pmatrix} \inf \\ \sup \end{pmatrix} \frac{F_\Omega}{|\Omega|} \leqslant \frac{DW}{D[x, y]} \tag{14}$$

там, где $\frac{DW}{D[x, y]}$ существует. Вне множества E мы видим, что

$$\lim \frac{F_\Omega}{|Q|} = \frac{DW}{D[x, y]} \tag{15}$$

опять там, где $\frac{DW}{D(x, y)}$ существует.

Это вытекает из того, что $F_\Omega \leqslant W_\Omega$.

По определению W_Q, мы можем разбить Q на столь мелкие области $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ классов $(K_{\psi,\chi}, K_{\chi,\varphi}, K_{\varphi,\psi})$ диаметров $< \frac{1}{n}$, что

$$\sum_1^N \{W_{Q_k} - F_{Q_k}\} < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{16}$$

Оставим в левой части (16) только те члены, которые относятся к тем областям Q_k, которые включают в себе точки множества E_n.

---

[1]) Если бы ни в одной точке $P \subset E_n$ этого не было, то множество E_n имело бы меру нуль—что мы и стремимся доказать дальше.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда (16) усилится, так как все члены суммы неотрицательны, и мы получим:

$$\sum_{(E_n)} \{W_{Q_k} - F_{Q_k}\} < \frac{\varepsilon}{n}, \tag{17}$$

но, в силу (13),

$$\sum_{(E_n)} \{W_{Q_k} - F_{Q_k}\} > \frac{1}{n} \sum_{(E_n)} |Q_k|. \tag{18}$$

Сопоставляя (17) и (18), находим:

$$\sum_{(E_n)} |Q_k| < \varepsilon. \tag{19}$$

Отсюда следует, что mes $E_n = 0$.

Следовательно, mes $E = \sum_1^\infty$ mes $E_n = 0$.

Этим доказывается наше предложение, так как почти всюду вне E имеет место (15).

Из общей теории аддитивных функций известно [1]), что W_Q распадается на сумму двух функций—абсолютно-непрерывную W^*_Q и функцию $\overline{W}_Q$, для которой почти всюду в Q

$$\frac{D\overline{W}}{D[x, y]} = 0. \tag{1}$$

В силу известных свойств абсолютно непрерывных функций мы имеем:

$$W^*_Q = \iint_Q \frac{DW^*}{D[x, y]}\, dxdy. \tag{2}$$

Следовательно,

$$W_Q = \iint_Q \frac{DW^*}{D[x, y]}\, dxdy + \overline{W}_Q. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что

$$\frac{DW}{D[x, y]} = \frac{DW^*}{D[x, y]}, \tag{4}$$

но так как $\frac{DW}{D[x, y]} = \frac{DF}{D[x, y]}$, (9), то, следовательно,

[1]) см. Saks, Théorie de l'intégrale.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{DW^*}{D[x, y]} = \frac{DF}{D[x, y]}. \tag{5}$$

Интегрируя обе части (5) по области Ω, имеем:

$$W^*_\Omega = \iint_\Omega \sqrt{\left\{\frac{D[\psi, \chi]}{D[x, v]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\chi, \varphi]}{D[x, y]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\right\}^2}\, dx\, dv,$$

откуда (3) перепишется так:

$$W_\Omega = \iint_\Omega \sqrt{\left\{\frac{D[\psi, \chi]}{D[x, y]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\chi, \varphi]}{D[x, y]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\right\}^2}\, dxdy + \overline{W}_\Omega. \tag{6}$$

Величину (6) мы условимся называть площадью поверхности, выраженной уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} X &= \varphi(x, y), \\ Y &= \psi(x, y), \\ Z &= \chi(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(в области Ω).

Предположим, в частности, что φ, ψ и χ попарно взаимно ограничены и абсолютно непрерывны. Тогда, в силу (8) § 6, имеем, что и W^*_Ω абсолютно непрерывная функция области Ω, и тогда $\overline{W}_\Omega = 0$, а в силу (6) § 5, будет:

$$\frac{D[\psi, \chi]}{D[x, y]} = \frac{D(\psi, \chi)}{D(x, y)}; \quad \frac{D[\chi, \varphi]}{D[x, y]} = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(x, y)}; \quad \frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}.$$

И тогда (6) превращается в известную формулу классического анализа, выражающую площадь поверхности.

§ 7. Некоторые принципиальные замечания.

При построении величины $[\varphi, \psi]_Q$ из двух данных функций, мы исключаем области Ω с особыми границами, оставляя класс $K_{\varphi, \psi}$. Если мы исключим, вдобавок к ним, еще счетное множество каких-либо областей класса $K_{\varphi, \psi}$, то тем самым мы не нарушим величины $\underline{V}[\varphi, \psi]_Q$, $\overline{V}[\varphi, \psi]_Q$ и, следовательно, $V[\varphi, \psi]_Q$ (то есть, их не уменьшим). При определении символа $[\varphi, \psi]_Q$, как результата сложения таких же символов, мы в качестве особых областей получаем только, может быть, те, которые были таковыми для слагаемых символов. Правда, некоторые из них могут совершенно исчезнуть.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Во всяком случае, если область Q_0 есть обыкновенная для $[\varphi_1, \psi]_\Omega$ и $[\varphi_2, \psi]_\Omega$, то она остается таковой для $[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_\Omega$. Это достаточно очевидный факт, на котором мы не останавливаемся.

В силу сказанного, складывая символы $[\varphi, \psi]_\Omega$, мы выключаем для некоторых из них обыкновенные области, которые в отношении их суммы уже становятся особыми.

Заметим еще, что мы могли бы расширить класс областей $\Omega \subset Q$, присоединив к ним те области, которые состоят из счетного множества односвязных областей класса $K_{\varphi,\psi}$ (без общих точек) и притом так, чтобы множество граничных точек полученной области равнялось сумме множеств граничных точек отдельных областей (то есть, чтобы не прибавилось лишних точек или дополнительных областей), не нарушая величин $\underline{V}_Q$ и $\overline{V}_Q$.

ГЛАВА II.

ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА.

§ 1. Определение и построение интеграла.

Пусть внутри данной области $Q(x, y)$ определена ограниченная функция $f(x, y)$ и пусть M и m соответственно ее верхняя и нижняя границы в Q.

Возьмем взаимно-ограниченную пару функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в области Q.

Разобьем Q на n областей класса $K_{\varphi,\psi}$ соответственно $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ и обозначим через M_k и m_k соответственно верхнюю и нижнюю границы $f(x, y)$ в области Q_k.

Обозначим сокращенно через $+\overline{V}_\Omega$, $-\underline{V}_\Omega$ и V_Ω соответственно положительную, отрицательную и полную вариации $[\varphi, \psi]_\Omega$ в $\Omega \subset Q$.

Рассмотрим следующие величины

$$\sum_1^n M_k \overline{V}_{Q_k}, \quad \sum_1^n m_k \overline{V}_{Q_k}, \quad \sum_1^n M_k \underline{V}_{Q_k} \text{ и } \sum_1^n m_k \underline{V}_{Q_k}. \tag{1}$$

Совершенно очевидно, что если мы разобьем области $\{Q_k\}$ на более мелкие области и составим для них выражения (1), то в новых обозначениях эти величины таковы, что первая и третья не увеличиваются, а вторая и четвертая не уменьшаются. Будем выбирать различными способами области Q_k в области Q, меняя их и их число. В этих предположениях рассмотрим следующие величины

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\begin{cases} L_1 = \text{н. гр.} \sum_1^n M_k \bar{V}_{Q_k}, & L_2 = \text{н. гр.} \sum_1^n M_k \underline{V}_{Q_k}, \\ l_1 = \text{в. гр.} \sum_1^n m_k \bar{V}_{Q_k}, & l_2 = \text{в. гр.} \sum_1^n M_k \underline{V}_{Q_k}. \end{cases} \tag{2}$$

Мы их назовем интегральными компонентами $f(x, y)$ по (φ, ψ). Совершенно очевидно, что $l_1 \leqslant L_1$ и $l_2 \leqslant L_2$.

В самом деле, очевидно, что можно всегда выбрать такую конечную или счетную систему областей разбиения, для которой одновременно были бы выполнены неравенства:

$$\begin{cases} \sum_{(k)} M_k \bar{V}_{Q_k} < L_1 + \varepsilon, \\ \sum_{(k)} m_k \bar{V}_{Q_k} > l_1 - \varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

[1]

где $\varepsilon > 0$ задано заранее (сколь угодно малым).

Откуда, вычитая из первого второе, получаем:

$$\sum_{(k)} (M_k - m_k) \bar{V}_{Q_k} > L_1 - l_1 + 2\varepsilon, \tag{4}$$

но так как левая часть (4) неотрицательна, то мы заключаем, что $L_1 - l_1 + \varepsilon > 0$, откуда $L_1 - l_1 \geqslant 0$.

Совершенно также доказывается, что $L_2 - l_2 \geqslant 0$.

Возьмем в Q_k произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Мы имеем, очевидно,

$$m_k \leqslant f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \leqslant M_k. \tag{5}$$

Умножая все части (5) один раз на $\bar{V}_{Q_k}$, а другой раз на $\underline{V}_{Q_k}$ и суммируя по k, получим соответственно неравенства:

$$\sum_1^n m_k \bar{V}_{Q_k} \leqslant \sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \bar{V}_{Q_k} \leqslant \sum_1^n M_k \bar{V}_{Q_k}, \tag{6}$$

$$\sum_1^n m_k \underline{V}_{Q_k} \leqslant \sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \underline{V}_{Q_k} \leqslant \sum_1^n M_k \underline{V}_{Q_k}. \tag{7}$$

---

[1]) Если системы областей различны, то наложением одной системы на другую мы получаем ту общую систему, о которой нами упомянуто.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Вычитая (7) из (8), находим:

$$\sum_1^n m_k \bar{V}_{Q_k} - \sum_1^n M_k \underline{V}_{Q_k} \leqslant \sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,[\varphi, \psi]_{Q_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^n M_k \bar{V}_{Q_k} - \sum_1^n m_k \underline{V}_{Q_k}. \tag{8}$$

Выбирая систему областей Q_k так, чтобы кроме неравенства (3) выполнялись еще неравенства:

$$\begin{cases} \sum_1^n M_k \underline{V}_{Q_k} < L_2 + \varepsilon, \\ \sum_1^n m_k \underline{V}_{Q_k} > l_2 - \varepsilon, \end{cases} \tag{9}$$

получим:

$$l_1 - L_2 - 2\varepsilon \leqslant \sum^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,[\varphi, \psi]_{Q_k} \leqslant L_1 - l_1 + 2\varepsilon. \tag{10}$$

Если

$$l_1 - L_2 = L_1 - l_2, \tag{11}$$

то мы скажем, что $f(x, y)$ интегрируема в Q по двум добавочным функциям φ и ψ или, короче, $f(x, y)$ интегрируемая $S_{\varphi,\psi}$. Величину (11) мы назовем интегралом от $f(x, y)$.

Выведем одно следствие из (11). Его можно переписать так: $L_1 - l_1 = l_2 - L_2$, но так как $L_1 - l_1 \geqslant 0$, а $l_2 - L_2 \leqslant 0$, то, следовательно, $L_1 - l_1 = 0$, $L_2 - l_2 = 0$, то есть,

$$L_1 = l_1 \quad \text{и} \quad L_2 = l_2.$$

Это есть необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x, y)$. Для обозначения интеграла введем следующий символ

$$\iint_Q f(x, y)\, D[\varphi, \psi].$$

(10) можно переписать так:

$$\iint_Q f\, D[\varphi, \psi] - 2\varepsilon \leqslant \sum^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,[\varphi, \psi]_{Q_k} \leqslant$$

$$\leqslant \iint_Q f\, D[\varphi, \psi] + 2\varepsilon. \tag{12}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В среднем члене (12) мы имеем вполне определенную систему областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ класса $K_{\varphi,\psi}$.

Нетрудно убедиться, что вместо этих областей можно взять любые области класса $K_{\varphi,\psi}$, лишь бы число их было достаточно велико и максимум диаметров был бы достаточно мал.

Итак, выберем совершенно произвольную систему областей класса $K_{\varphi,\psi}$: $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_n$, составляющих в сумме область Q. Пусть δ есть максимум их диаметров. Мы выбираем δ столь малым, чтобы области Q_k не содержали бы в себе целиком областей Q_k. Рассмотрим среди областей $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_n$ те из них, которые попадают целиком в области $\{Q_k\}$. Мы их обозначим через $\{Q_k'\}$. Остальные мы обозначим через $\{Q_k''\}$. Эти последние засекаются границами областей Q_k. Возьмем число $\varepsilon > 0$, которым мы пользовались выше. Мы можем, очевидно, выбрать $\delta > 0$ столь малым, чтобы было $\overline{V}_{\Sigma Q''_k} < \frac{\varepsilon}{2M}$ (см. Глава 1, § 2, ствойства (7)).

В пересечении $\{Q''_k\}$ с $\{Q_k\}$ эти первые разбиваются на более мелкие области $\{Q_k'''\}$, число которых счетное или конечное.

Соответственно указанным системам, введем следующие обозначения верхних границ $f(x, y)$. Это $\overline{M}_k$, $\overline{M}'_k$, $\overline{M}_k''$ и $\overline{M}_k'''$. Тогда:

$$\sum_1^n \overline{M}_k . \overline{V}_{\overline{Q}_k} = \sum{}' \overline{M}_{k'} \overline{V}_{Q'_k} + \sum{}'' \overline{M}_k'' \overline{V}_{\overline{Q}''_k} =$$

$$= \sum{}' \overline{M}_{k'} \overline{V}_{Q'_k} + \sum{}''' \overline{M}_k''' \overline{V}_{Q_k} + \left\{ \sum{}'' \overline{M}_k'' \overline{V}_{Q''_k} - \right.$$

$$\left. - \sum{}''' \overline{M}_k \overline{V}_{Q'''_k} \right\}. \qquad (12)$$

Мы усилим, очевидно, первое из соотношений (3), переписав его в следующем виде:

$$\sum{}' \overline{M}_{k'} \overline{V}_{Q_{k'}} + \sum{}''' \overline{M}_k''' \overline{V}_{Q'''_k} < L_1 + \varepsilon. \qquad (13)$$

Кроме этого, мы имеем, очевидно,

$$\left| \sum{}'' \overline{M}_{k'} \overline{V}_{Q''_k} - \sum{}''' \overline{M}_k \overline{V}_{Q'''_k} \right| \leqslant M \left\{ V_{Q''_k} + V_{Q'''_k} \right\} <$$

$$< M \left(2 \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon. \qquad (14)$$

Поэтому, принимая во внимание (12), (13) и (14), можем написать:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{1}^{\overline{n}} \overline{M}_k \, \overline{V}_{\overline{Q}_k} < L_1 + 2\varepsilon. \tag{15}$$

Так как ε произвольно мало, то, следовательно, из (15) вытекает, что нижняя граница первой из величин (1) будет достигнута произвольной системой областей $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_{\overline{n}}$ класса $K_{\varphi,\psi}$.

Аналогично это предложение доказывается для остальных из величин (1). Мы на этом не останавливаемся.

Возвращаясь к (11), мы видим, что интеграл может быть получен как

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d(Q_k)\to 0}} \sum_{1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\, [\varphi, \psi]_{Q_k}.$$

Итак,

$$\iint_Q f(x, y)\, D[\varphi, \psi] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(Q_k)\to 0}} \sum_{1}^{n} f(x_k, y_k)\, [\varphi, \psi]_{Q_k}. \tag{16}$$

Факт достижения величинами (1) своих границ произвольными системами областей разбиения не зависит от того, интегрируема ли функция $f(x, y)$ или нет.

Беря тот общий случай, когда $f(x, y)$ неинтегрируема, введем следующие обозначения:

$$L_1 = \overline{\iint_Q} f.D\,\overline{V}, \quad l_1 = \underline{\iint_Q} f.D\,\overline{V};$$

$$L_2 = \overline{\iint_Q} f D\,\underline{V}, \quad l_2 = \underline{\iint_Q} f D\,\underline{V}.$$

Если $L_1 = l_1$, то их общее значение мы запишем так:

$$\iint_Q f D\,\overline{V} \qquad \text{или} \qquad \iint_Q f\,\overline{D}\,[\varphi, \psi]. \tag{17}$$

Аналогично, общее значение L_2 и l_2, если они равны, запишем так:

$$\iint_Q f D\,\underline{V} \quad \text{или} \quad \iint_Q f\underline{D}\,[\varphi, \psi]. \tag{18}$$

Существование величин (17) и (18) есть, очевидно, необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x, y)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Кроме этого, мы имеем, очевидно:

$$\iint_Q f.D[\varphi, \psi] = \iint_Q f\overline{D}[\varphi, \psi] - \iint_Q f\underline{D}[\varphi, \psi]. \quad (19)$$

Все теоремы, касающиеся (19), очевидно, будут в силе для (17) и (18).

Мы еще введем понятие интеграла по вариации:

$$\iint_Q fDV = \iint_Q f\overline{D}[\varphi, \psi] + \iint_Q f\underline{D}[\varphi, \psi]. \quad (20)$$

§ 2. Свойства интеграла $S_{\varphi,\psi}$.

Рассмотрим теперь ряд свойств интеграла $S_{\varphi,\psi}$, вытекающих из его определения.

I-е свойство. Если $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы $S_{\varphi,\psi}$ то и f_1+f_2 интегрируемы $S_{\varphi,\psi}$, и

$$\iint_Q (f_1+f_2).D[\varphi, \psi] = \iint_Q f_1.D[\varphi, \psi] + \iint_Q f_2.D[\varphi, \psi]. \quad (1)$$

Доказательство: Разбив область Q на систему областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ достаточно мелких диаметров, принадлежащих классу $K_{\varphi,\psi}$, мы обозначим через (L_1', l_1', L_2', l_2'), $(L_1'', l_1'', L_2'', l_2'')$ и (L_1, l_1, L_2, l_2) интегральные компоненты соответственно для функций f_1, f_2 и f_1+f_2, а через M_k', M_k'', M_k, m_k', m_k'', m_k соответственно их верхние и нижние границы Q_k.

Из интегрируемости f_1 и f_2 следует, что

$$L_1'=l_1', \; L_2'=l_2', \; L_1''=l_1'', \; L_2''=l_2''. \quad (2)$$

Умножая очевидное соотношение $M_k \leqslant M'+M_k''$ на $\overline{V}_{Q_k}$ и суммируя по „k“, находим:

$$\sum^{n} M_k \overline{V}_{Q_k} \leqslant \sum^{n} M_k' \overline{V}_{Q_k} + \sum_{1}^{n} M_k'' \overline{V}_{Q_k},$$

откуда следует, что

$$L_1 \leqslant L_1'+L_1''. \quad (3)$$

Совершенно также, мы убеждаемся, что

$$L_2 \leqslant L_2'+L_2''. \quad (4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Из неравенства $m_k \geqslant m_k' + m_k''$ мы таким же образом получаем, что

$$l_1 \geqslant l_1' + l_1'', \tag{5}$$

$$l_2 \geqslant l_2' + l_2''. \tag{6}$$

Принимая во внимание (2), (3) и (5), заключаем, что $L_1 \leqslant l_1$, но мы видели, что $l_1 \leqslant L_1$, откуда следует, что $L_1 = l_1$.

Совершенно также, на основе (2), (4) и (6), убеждаемся, что $l_2 = L_2$; следовательно, $f(x, y)$ интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

Имеем, очевидно, что $L_1 = L_1' + L_1''$ и $L_2 = L_2' + L_2''$, откуда $L_1 - L_2 = (L_1' - L_2') + (L_1'' - L_2'')$, т. е. мы пришли к равенству (1), что и требовалось доказать.

II-е свойство. Если $f(x, y)$ есть функция интегрируемая $S_{\varphi,\psi}$, то $|f(x, y)|$ также функция интегрируемая $S_{\varphi,\psi}$.

Доказательство: Возьмем ту же систему областей, что и при выводе свойства (1). Обозначим через $\overline{M}_k$ и $\overline{m}_k$ соответственно верхнюю и нижнюю границы $|f|$ на Q_k, а через M_k и m_k таковые для f. Обозначим интегральные компоненты $|f|$ через $(\overline{L}_1, \overline{l}_1, \overline{L}_2, \overline{l}_2)$, а через (L_1, l_1, L_2, l_2) таковые для f.

Возьмем очевидное соотношение $\overline{M}_k - \overline{m}_k \leqslant M_k - m_k$. Умножив его сперва на $\overline{V}_{Q_k}$, а затем на $\underline{V}_{Q_k}$ и суммируя, получим соответственно:

$$\sum_1^n (\overline{M}_k - \overline{m}_k)\,\overline{V}_{Q_k} \leqslant \sum_1^n (M_k - m_k)\,\overline{V}_{Q_k}, \tag{7}$$

$$\sum_1^n (\overline{M}_k - \overline{m})\,\underline{V}_{Q_k} \leqslant \sum_1^n (M_k - m_k)\,\underline{V}_{Q_k}, \tag{8}$$

откуда, очевидно,

$$\overline{L}_1 - \overline{l}_1 \leqslant L_1 - l_1 \tag{9}$$

и

$$\overline{L}_2 - \overline{l}_2 \leqslant L_2 - l_2, \tag{10}$$

но, в силу интегрируемости $f(x, y)$, мы заключаем, что правые, а следовательно, и левые части (9) и (10) равны нулю. Следовательно, $\overline{L}_1 = \overline{l}_1$ и $\overline{L}_2 = \overline{l}_2$, т. е. $|f(x, y)|$ интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

III-е свойство. Если $f(x, y)$ интегрируема $S_{\varphi,\psi}$, то $f^2(x, y)$ также интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

Доказательство: Сохраняя прежние обозначения (см. вывод свойства II), имеем, очевидно,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_1^n (M_k^2 - m_k^2)\,\overline{V}_{Q_k} \leqslant 2M \sum_1 (M_k - m_k)\,\overline{V}_{Q_k}, \qquad (11)$$

где M есть верхняя граница $|f|$ в области Q.
Пусть $(L_1^*, l_1^*, L^*_2, l_2^*)$ интегральные компоненты $f^2(x, y)$.
Тогда (11) даст нам в пределе:

$$L_1^* - l_1^* \leqslant 2M(\overline{L}_1 - \overline{l}_1),$$

но так как $\overline{L}_1 = \overline{l}_1$ (в силу свойства II), то $L_1^* = l_1^*$.

Совершенно также мы доказываем, что $L^*_2 = l^*_2$, что и требовалось доказать.

IV-е свойство.

$$\int\int_Q Af.D[\varphi, \psi] = A \int\int_Q f.D[\varphi, \psi] \qquad (12)$$

(где A постоянное).

Ввиду очевидности, мы на выводе не останавливаемся.

V-е свойство. Если f_1 и f_2 интегрируемы $S_{\varphi,\psi}$, то $f_1 f_2$ интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

Это следует из свойства I, III и IV и использования равенства

$$f_1 f_2 = \frac{(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2}{4}.$$

Следствие I-ое. Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$, интегрируемы $S_{\varphi,\psi}$) то $(f_1, f_2 \ldots . f_n)$ интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

Следствие II. Если f интегрируема $S_{\varphi,\psi}$, то f^n (n целое) интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

VI-ое свойство. Если f интегрируема $S_{\varphi,\psi}$ и если $f > a > 0$, то $\frac{1}{f}$ также интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

Доказательство: Пусть $(\overline{L}_1, \overline{l}_1, \overline{L}_2, \overline{l}_2)$ интегральные компоненты для $\frac{1}{f}$ $\left(\frac{1}{f}\right.$ ограничена$\left.\right)$.

Сохраняя прежние обозначения, имеем, очевидно.

$$\frac{1}{m_k} - \frac{1}{M_k} = \frac{M_k - m_k}{M_k m_k} \leqslant \frac{M_k - m_k}{a^2},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

откуда следует, что

$$\sum_1^n \frac{1}{m_k}\overline{V}_{Q_k} - \sum_1^n \frac{1}{M_k}\overline{V}_{Q_k} \leqslant \frac{1}{a^2}\sum_1^n (M_k - m_k).\overline{V}_{Q_k}.$$

Отсюда, переходя к пределу, заключаем, что
$\overline{\overline{L}}_1 - \overline{\overline{l}}_1 \leqslant \frac{1}{a^2}(L_1 - l_1)$, но так как $L_1 = l_1$, то $\overline{\overline{L}}_1 = \overline{\overline{l}}_1$.

Аналогично имеем: $\overline{\overline{L}}_2 = \overline{\overline{l}}_2$, что требовалось доказать.

VII-е свойство.

$$\int\int_Q D[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]_Q, \tag{13}$$

$$\int\int_Q \overline{D}[\varphi, \psi] = \overline{V}_Q, \tag{13'}$$

$$\int\int_Q \underline{D}[\varphi, \psi] = \underline{V}_Q. \tag{13''}$$

(очевидно).

VIII-е свойство. (Формула среднего значения)

Сохраняя прежние обозначения имеем, очевидно, что

$$m\,\overline{V}_Q \leqslant \int\int_Q f\overline{D}[\varphi, \psi] \leqslant M.\overline{V}_Q, \tag{14}$$

$$m\,\underline{V}_Q \leqslant \int\int_Q f\underline{D}[\varphi, \psi] \leqslant M.\underline{V}_Q. \tag{15}$$

Вычитая (15) из (14), получаем:

$$\overline{V}_Q m - \underline{V}_Q M \leqslant \int\int_Q fD[\varphi, \psi] \leqslant \overline{V}_Q M - \underline{V}_Q m, \tag{16}$$

или иначе:

$$m[\varphi, \psi]_Q - \underline{V}_Q(M-m) \leqslant \int\int_Q fD[\varphi, \psi] \leqslant$$

$$\leqslant M[\varphi, \psi]_Q + \underline{V}_Q(M-m), \tag{17}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

или еще иначе:

$$M[\varphi, \psi]_Q - \overline{V}_Q(M-m) \leqslant \int\int_Q f D[\varphi, \psi] \leqslant m[\varphi, \psi]_Q + \\ + \overline{V}_Q(M-m). \tag{18}$$

Имеем также из (14) и (15):

$$\left| \int\int_Q f D[\varphi, \psi] \right| = \left| \int\int_Q f \overline{D}[\varphi, \psi] - \int\int_Q f \underline{D}[\varphi, \psi] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\int_Q f \overline{D}[\varphi, \psi] \right| + \left| \int\int_Q f \underline{D}[\varphi, \psi] \right| \leqslant M \overline{V}_Q + M \underline{V}_Q = M V_Q.$$

Итак, мы приходим еще к такому неравенству:

$$\left| \int\int f . D[\varphi, \psi] \right| \leqslant M . V_Q. \tag{19}$$

Свойство IX-е. Если $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$,... последовательность функций интегрируемых $S_{\varphi, \psi}$ в Q и если она сходится равномерно к $f(x, y)$, то $f(x, y)$ также интегрируема $S_{\varphi, \psi}$ и

$$\lim_{n \to \infty} \int\int_Q f_n D[\varphi, \psi] = \int\int_Q f D[\varphi, \psi]. \tag{20}$$

Доказательство: Это следует непосредственно из (19). В самом деле, задав произвольно малое число $\varepsilon > 0$, мы можем выбрать N столь большим, что

$$|f(x, y) - f_n(x, y)| < \frac{\varepsilon}{V_Q},$$

при всяком $n > N$.
Отсюда заключаем об интегрируемости f поскольку ее интегральные компоненты отличаются от соответственных интегральных компонентов f_n не больше чем на ε. Имеем далее:

$$\left| \int\int_Q f D[\varphi, \psi] - \int\int_Q f_n D[\varphi, \psi] \right| =$$

$$= \left| \int\int_Q [f - f_n] D[\varphi, \psi] \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{V_Q} . V_Q = \varepsilon.$$

Отсюда, видимо, вытекает (20).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 3. Условия интегрируемости функций в смысле $S_{\varphi,\psi}$ и дальнейшие свойства интеграла Стильтьеса.

Сохраняя предыдущие обозначения, рассмотрим необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(x, y)$, чтобы она была интегрируемой $S_{\varphi,\psi}$.

Из равенств $L_1 = l_1$ и $L_2 = l_2$ вытекает, очевидно, следующее неравенство.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно малое число, тогда существует такая система областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ $(Q_1 + Q_2 + \ldots Q_n = Q)$ класса $K_{\varphi,\psi}$, что

$$\sum_1^n (M_k - m_k)\, \overline{V}_{Q_k} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

$$\sum_1^n (M_k - m_k)\, \underline{V}_{Q_k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Сложив их, находим:

$$\sum_1^n (M_k - m_k)\, V_{Q_k} < \varepsilon. \tag{3}$$

Легко убедиться, что (1) и (2) равносильны (3).

Отнесем области Q_k к двум категориям. К первой из них мы причислим те, для которых

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2V_Q},$$

а ко второй все остальные.

Предположим, что f обладает тем свойством, что при „n“ достаточно большом можно сделать области второй категории столь малыми, чтобы сумма второй категории была бы сколь угодно малой величиной.

Тогда, выбрав ее $< \frac{\varepsilon}{4M}$, сможем удовлетворить неравенству (3). В самом деле, обозначая соответственно через $\sum'$ и $\sum''$ суммы, отнесенные к областям первой и второй категорий, получим:

$$\sum_1^n (M_k - m_k) V_{Q_k} \leqslant \sum{}' (M_k - m_k) V_{Q_k} + \sum{}'' (M_k - m_k) V_{Q_k} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2V_Q} \cdot \sum{}' V_{Q_k} + 2M \cdot \sum{}'' V_{Q_k} < \frac{\varepsilon}{2V_Q} \cdot V_Q + 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Покажем теперь обратное, а именно, что из существования (3) следует произвольная малость суммы вариаций функции $[\varphi, \psi]_Q$ по областям второй категории.

Выберем в качестве областей первой категории столь малые по диаметру области, чтобы для них $M_k - m_k < \sqrt{\varepsilon}$. Тогда для областей второй категории мы будем иметь

$$M_k - m_k > \sqrt{\varepsilon},$$

а потому из (3) мы заключаем, что

$$\varepsilon > \sum'' (M_k - m_k) V_{Q_k} \geqslant \sqrt{\varepsilon} \sum'' V_{Q_k}.$$

Следовательно,

$$\sum'' V_{Q_k} < \sqrt{\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

Итак, мы пришли к следующему необходимому и достаточному условию интегрируемости $f(x, y)$ по $S_{\varphi,\psi}$. „Необходимые и достаточные условия, чтобы $f(x, y)$ была бы интегрируемой $S_{\varphi,\psi}$ в области Q, состоят в том, что каковы бы ни были числа ε и δ, сколь угодно малые, можно разбить Q на достаточно мелкие области класса $K_{\varphi,\psi}$ так, что те из них $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ внутри которых колебание $f(x, y)$ превосходит ε, обладают тем свойством, что $V[\varphi, \psi]_{Q_1+Q_2+\ldots+Q_Q} < \delta$".

Следствие 1-ое. Если $f(x, y)$ непрерывна в Q, то она интегрируема $S_{\varphi,\psi}$.

Следствие II-ое. Если $f(x, y)$ имеет приводимое множество точек разрыва в области Q, то она интегрируема $S_{\varphi,\psi}$ (это следует из теоремы, см. § 4).

На основании полученного необходимого и достаточного условия интегрируемости $f(x, y)$ (по $S_{\varphi,\psi}$) мы можем доказать еще некоторые свойства интеграла. (Их можно было бы доказать и непосредственно).

X-ое свойство. Если $f(x, y)$ интегрируема в Q_1 и Q_2 то она интегрируема в $Q_1 + Q_2$, причем, если $Q_1 . Q_2 = 0$, то

$$\iint_Q f.D[\varphi, \psi] = \iint_{Q_1} f.D[\varphi, \psi] + \iint_{Q_2} f.D[\varphi, \psi]. \qquad (4)$$

Доказательство: Выбрав $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ произвольно малыми, можем разбить $Q_1 + Q_2$ на достаточно мелкие области класса $K_{\varphi,\psi}$ соответственно на $Q_1^{(1)}, \ldots, Q_1^{(r)}$ и $Q_2^{(1)} \ldots, Q_2^{(s)}$. Выберем те из них, в которых колебание $f(x, y)$ превосходит ε.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Пусть это будут соответственно:

$$Q_1^{(n_1)},\ Q_1^{(n_2)},\ldots,\ Q_1^{(n_p)}$$

и

$$Q_2^{(m_1)},\ Q_2^{(m_2)},\ldots\ Q_2^{(m_q)}.$$

В силу условия интегрируемости можно эти области выбрать так, что

$$V_{Q_1^{(n_1)}}+\ldots+Q_1^{(n_p)}<\frac{\delta}{2}\ \text{и}\ V_{Q_2^{(m_1)}}+\ldots+Q_2^{(m_q)}<\frac{\delta}{2}.$$

Отсюда заключаем, что

$$V_{Q_1^{(n_1)}}+\ldots+Q_1^{(n_p)}+Q_2^{(m_1)}+\ldots+Q_2^{(m_q)}<\delta.$$

А это есть условие интегрируемости $f(x, y)$ во всей области Q.

Равенство (4) выводится так.

Мы имеем величину

$$\sum_{k=1}^{k=p} f(\bar{x}_k^{(1)},\ \bar{y}_k^{(1)})\ [\varphi,\ \psi]_{Q_1^{(k)}}+\sum_{k=1}^{k=q} f(\bar{x}_k^{(2)},\ \bar{y}_k^{(2)})\ [\varphi,\ \psi]_{Q^{(k)}},\qquad (5)$$

где $(\bar{x}_k^{(i)},\ \bar{y}_k^{(i)})$ $(i=1,\ 2)$ некоторые средние значения x и y в области $Q_i^{(k)}$.

Вся величина (5) имеет своим пределом величину левой части (4), а каждая из сумм величины (5) имеет пределом соответственно интегралы правой части (4), чем и доказывается справедливость (4).

XI-е свойство. Если $f(x, y)$ интегрируема по $S_{\varphi_1,\psi}$ и по $S_{\varphi_2,\psi}$ в области Q, то она интегрируема по $S_{\varphi_1+\varphi_2,\psi}$, причем

$$\iint_Q f D\,[\varphi_1+\varphi_2,\ \psi]=\iint_Q f D\,[\varphi_1,\ \psi]+\iint_Q f D\,[\varphi_2,\ \psi].\qquad (6)$$

Доказательство: Обозначим через $V_Q^{(1)}$ и $V_Q^{(2)}$ соответственно полные вариации $[\varphi_1, \psi]_Q$ и $[\varphi_2, \psi]_Q$, а через V_Q вариацию функции $[\varphi_1+\varphi_2, \psi]_Q$.

Совершенно ясно, что $V_Q\leqslant V_Q^{(1)}+V_Q^{(2)}$, а потому, если $Q_{n_1},\ldots,Q_{n_m}$ те области, в которых колебание $f(x, y)$ больше ε, то, предположив интегрируемость f по $S_{\varphi_1,\psi}$ и $S_{\varphi_2,\psi}$, мы можем удовлетворить неравенствам

$$V_{Q_{n_1}}^{(1)}+\ldots+Q_{n_m}<\frac{\delta}{2},\quad V_{Q_{n_1}}^{(2)}+\ldots+Q_{n_m}<\frac{\delta}{2},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где $\delta > 0$ выбрано заранее, откуда следует, что $V_{Q_{n_1}+\ldots+Q_{n_m}} < \varepsilon$.

Следовательно, $f(x, y)$ интегрируема по $S_{\varphi,\psi}$.

Справедливость (6) вытекает из равенства

$$\sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,[\varphi_1+\varphi_2, \psi]_{Q_k} = \sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,[\varphi_1, \psi]_{Q_k} + \sum_1^n f(x_k, y_k)\,[\varphi_2, \psi]_{Q_k}$$

при переходе к пределу.

Следствие:

$$\iint_Q f.D\left[\sum_1^p a_k \varphi_k, \sum_1^q b_k \psi_k\right] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_i b_j \iint_Q f D[\varphi_i\, \psi_j].$$

XII-е свойство. Если имеются две последовательности функций $\varphi_N(x, y)$ и $\psi_N(x, y)$ в области Q, которые равномерно стремятся соответственно к $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, причем (φ_N, ψ_N) взаимно-ограниченная пара, а также $V\{[\varphi, \psi]_\Omega - [\varphi_N, \psi_N]_\Omega\}$ стремится к нулю равномерно в Ω при $N \to \infty$, тогда

$$\lim_{N\to\infty} \iint_Q f.D[\varphi_N, \psi_N] = \iint_Q f D[\varphi, \psi]. \qquad (7)$$

Доказательство: Имеем, очевидно, (сохраняя прежние обозначения):

$$\left|\sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,[\varphi, \psi]_{Q_k} - \sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,[\varphi_N, \psi_N]_{Q_k}\right| =$$

$$= \left|\sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,\{[\varphi, \psi]_{Q_k} - [\varphi_N, \psi_N]_{Q_k}\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^n |f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)|.|[\varphi, \psi]_{Q_k} - [\varphi_N, \psi_N]_{Q_k}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^n |f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)|.V\{[\varphi, \psi]_{Q_k} - [\varphi_N, \psi_N]_{Q_k}\} \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_1^n V\{[\varphi, \psi]_{Q_k} - [\varphi_N, \psi_N]_{Q_k}\} = M.V\{[\varphi, \psi]_Q - [\varphi_N, \psi_N]_Q\}. \qquad (8)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как по условию $V\{[\varphi, \psi]_Q - [\varphi_N, \psi_N]_Q\}$ стремится к нулю при $N \to \infty$, то мы можем подобрать N столь большим, чтобы

$$V\{[\varphi, \psi]_Q - [\varphi_N, \psi_N]_Q\} < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{9}$$

Тогда из (8) получим

$$\left| \sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, [\varphi, \psi]_{Q_k} - \sum_1^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, [\varphi_N, \psi_N]_{Q_k} \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Отсюда, переходя к пределу сперва при $n \to \infty$, а затем при $N \to \infty$, мы придем к равенству (7).

Следствие: Если $\sum_1^\infty |a_k|$, $\sum_1^\infty |b_k|$ сходящиеся, и если (φ_i, ψ_j) взаимно-ограниченные пары и $V[\varphi_i, \psi_j]_Q \leqslant 1$ $(\Omega \subset Q)$, то

$$\iint_Q f.D\left[\sum_1^\infty a_k \varphi_k, \sum_1^\infty b_k \psi_k\right] = \sum_{i=1}^\infty \sum_{i=}^\infty a_i b_j \iint_Q f D[\varphi_i, \psi_j]. \tag{11}$$

XIII-е свойство.

$$\frac{D}{D[x, y]} \iint f D[\varphi, \psi] = f(x, y) \frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]} \tag{12}$$

почти во всех точках непрерывности $f(x, y)$.

Доказательство: Возьмем соотношение (18) § 2 и разделим обе его части на $|\Omega|$, тогда получим:

$$M \frac{[\varphi, \psi]_\Omega}{|\Omega|} - \frac{\overline{V}_\Omega}{|\Omega|}(M - m) \leqslant \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega f D[\varphi, \psi] \leqslant$$

$$\leqslant m \frac{[\varphi, \psi]_\Omega}{|\Omega|} + \frac{\overline{V}_\Omega}{|\Omega|}(M - m). \tag{13}$$

Пусть Ω стягивается в точку (x_0, y_0), в которой мы предполагаем $f(x, y)$ непрерывной и в которой $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}$ и $\frac{DV}{D[x, y]}$ существуют, конечны и равны между собой.

Тогда очевидно, что крайние члены (13) превратятся в пределе в

$$f(x_0, y_0) \frac{D[\varphi, \psi]}{D(x_0, y_0)}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следовательно, таковым будет и средний член (13), а это будет иметь место почти всюду в множестве точек, где $f(x, y)$ непрерывна.

XIV-е свойство. Если (φ, ψ) абсолютно непрерывная пара и $f(x, y)$ почти всюду непрерывна в области Q, то

$$\iint_Q fD[\varphi, \psi] = \iint_Q f \frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\, dx\, dy. \tag{14}$$

Доказательство: Так как $[\varphi, \psi]_\Omega$ абсолютно непрерывная функция Ω, то из неравенства (19) § 2 будет следовать, что $\iint_\Omega fD]\varphi, \psi]$ абсолютно непрерывная функция Ω.

В самом деле, задав $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, мы можем выбрать $\delta > 0$ столь малым, что при $|\Omega| < \delta$ мы имеем неравенство

$$V_\Omega[\varphi, \psi] < \frac{\varepsilon}{M},$$

откуда

$$\left| \iint_\Omega fD[\varphi,\psi] \right| \leqslant M.V_\Omega < M.\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

А если $\iint_\Omega f.D[\varphi, \psi]$ абсолютно непрерывная функция Ω, то он есть интеграл Лебега от своей производной, то есть, от $f.\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}$, каковая существует почти всюду в Q, поскольку $f(x, y)$ непрерывна почти всюду.
Следовательно:

$$\iint_Q fD[\varphi, \psi] = \iint_Q f \frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\, dx\, dy, \tag{15}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если φ и ψ имеют непрерывные частные производные по x и y и $f(x, y)$ почти всюду непрерывна, то

$$\iint_Q fD[\varphi, \psi] = \iint_Q f \frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\, dx\, dy. \tag{16}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 4. Интеграл Стильтьеса поверхностного типа.

Пусть нам даны три функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ в области Q, из коих каждые две представляют собой взаимно-ограниченные пары.

Пусть в Q также задана ограниченная функция $f(x, y)$. Разобьем Q на n областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ одновременно классов $K_{x,\psi}$ $K_{\varphi,x}$ и $K_{\varphi,\psi}$ и обозначим, как и выше, через M_k и m_k верхнюю и нижнюю границы $f(x, y)$ в области Q_k.

Вернемся к обозначениям § 6 главы 1-ой.

Составим следующие две суммы

$$\sum_1^n M_k W_{Q_k} \quad \text{и} \quad \sum_1^n m_k W_Q \tag{1}$$

Совершенно так же, как мы доказывали в § 1-м настоящей главы, мы можем теперь доказать, что первая из величин (1) достигает своей нижней, а вторая из величин (1) своей верхней границы в области Q при неограниченном увеличении „n“ и неограниченном уменьшении диаметров Q_k в классах $(K_{\psi,x} K_{\varphi,x} K_{\varphi,\psi})$.

Обозначим эти величины (в. и н. границы) соответственно через:

$$\overline{\iint}_Q f(x, y) \sqrt{\{D[\psi, \chi]\}^2 + \{D[\chi, \varphi]\}^2 + \{D[\varphi, \psi]\}^2}, \tag{2}$$

$$\underline{\iint}_Q f(x, y) \sqrt{\{D[\psi, \chi]\}^2 + \{D[\chi, \varphi]\}^2 + \{D[\varphi, \psi]\}^2}. \tag{3}$$

Если величины (2) и (3) совпадают, то их общее значение мы обозначим через:

$$\iint_Q f(x, y) \sqrt{\{D[\psi, \chi]\}^2 + \{D[\chi, \varphi]\}^2 + \{D[\varphi, \psi]\}^2}. \tag{4}$$

Это и есть искомое определение интеграла.

Если он существует, мы скажем, что $f(x\,y)$ интегрируема $S_{(\varphi,\psi,\chi)}$ в области Q.

Легко убедиться, что (4) может быть получен как общий предел сумм:

$$\sum_1^n M_k F_{Q_k} \quad \text{и} \quad \sum_1^n m_k F_{Q_k}, \tag{5},$$

где

$$F_{Q_1} = \sqrt{[\psi, \chi]^2_Q + [\chi, \varphi]^2_Q + [\varphi, \psi]^2_Q} \tag{6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

(см. гл. 1, § 6), при соблюдении тех же ограничительных условий, что и для (1).

В самом деле

$$\sum_1^n M_k W_{Q_k} - \sum_1^n M_k F_{Q_k} = \sum_1^n M_k \{W_{Q_k} - F_{Q_k}\} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_1^n (W_{Q_k} - F_{Q_k}), \tag{7}$$

где $(M = в.\ г.\ |f|)$,
но

$$\sum_1^n (W_{Q_k} - F_{Q_k}) = W_Q - \sum_1^n F_{Q_k}. \tag{8}$$

Но величина (8) сколь угодно мала при n достаточно большом, по определению W_Q. Следовательно, на основании (7), первая из величин (5) сколь угодно мало отличается от первой из величин (1), а потому эти две величины совпадают в пределе. Аналогично доказывается равенство пределов вторых из величин (1) и (5).

Рассмотрим теперь условие интегрируемости $f(x, y)$ по $S_{\varphi, \psi}$.

Из неравенства (9) § 6, Гл. 1 мы имеем, очевидно, что

$$\left.\begin{matrix} V[\psi, \chi]_Q \\ V[\chi, \varphi]_Q \\ V[\varphi, \psi]_Q \end{matrix}\right\} \leqslant W_Q \leqslant V[\psi, \chi]_Q + V[\chi, \varphi]_Q + V[\varphi, \psi]_Q. \tag{9}$$

Совершенно так же, как и в § 3, мы выводим необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x, y)$ по $S_{(\varphi, \psi, \chi)}$. Оно состоит в следующем.

Как бы малы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ сколь угодно малые, можно разбить Q на достаточно мелкие области класса $K_{\varphi, \psi}$ так, что те из них $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, внутри которых колебание $f(x, y)$ превосходит ε, обладают тем свойством, что

$$W_{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_m} < \delta.$$

Сравнивая это условие с ранее полученным в § 3 и принимая во внимание (9), заключаем, что необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x, y)$ по $S_{(\varphi, \psi, \chi)}$ состоит в том, что $f(x, y)$ интегрируема по $S_{x, \psi}$, $S_{x, \varphi}$ и $S_{\varphi, \psi}$.

В частности, если $f(x, y) = 1$, то интеграл (4) превращается в величину поверхности S_Q (см. § 6 гл. 1).

И мы имеем:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$S_Q = \iint \sqrt{\{D[\psi, \chi]\}^2 + \{D[\chi, \varphi]\}^2 + \{D[\varphi, \psi]\}^2}. \qquad (10)$$

Сравнивая (10) с (6) § 6, Гл. 1, заключаем, что

$$\overline{w}_Q = \iint_Q \sqrt{\{D[\psi, \chi]\}^2 + \{D[\chi, \varphi]\}^2 + \{D[\varphi, \psi]\}^2} -$$

$$- \iint_Q \sqrt{\left\{\frac{D[\psi, \chi]}{D[x, y]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\chi, \varphi]}{D[x, y]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\varphi, \psi]}{D[x, y]}\right\}^2}\, dx\, dy. \qquad (11)$$

Définiton de l'intégrale de Riemann-Stieltjes d'une fonction à deux variables avec deux fonctions adjointes et son application à la théorie de la mésure d'une surface.

A. S. Kovanko (Bacou).

Au moyen d'une paire de fonctions continues $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ qui jouit d'une propriété speciale l'auteur construit une fonction $[\varphi, \psi]_Q$ de domaine quarrable Q, qui possède les propriétés suivantes:

1) $[\varphi, \psi]_{Q_1} + [\varphi, \psi]_{Q_2} = [\varphi, \psi]_{Q_1 + Q^2}$ pour $Q_1 . Q_2 = 0$,

2) $[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_Q = [\varphi_1, \psi]_Q + [\varphi_2, \psi]_Q$,

3) $[x, y]_Q = Q$.

Soit $f(x, y)$ une fonction définie sur le domaine Q.

En divisant Q en des domaines: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de diamètres assez petits l'auteur définit l'intégrale de Stieltjes comme la limite de la somme $\sum_1^n f(x_k\ y_k)\ [\varphi, \psi]_{Q_k}$, quand les diamètres de Q_k tendent vers 0, $(x_k, y_k) \subset Q_k$.

Je lui donne la signification suivante $\int\int_Q f D[\varphi, \psi]$.

Soit ensuite

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

une surface. Alors l'intégrale de Stieltjes se défini d'une autre manière comme la limite de la somme:

$$\sum_1^n f(x_k, y_k) \sqrt{[\psi, \varphi]^2_{Q_k} + [\chi, \varphi]^2_{Q_k} + [\varphi, \psi]^2_{Q_k}}.$$

Le cas particulier où $f(x, y) = 1$ donne la mesure de notre surface.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

О СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЛАХ.

Я. А. Трайнин (Новосибирск).

Как известно, число N называется совершенным, если оно равно сумме своих правильных делителей. Для такого числа должно соблюдаться равенство

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}=2N,$$

где

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$$

есть каноническое разложение числа N.

Еще Евклидом доказана теорема о том, что всякое четное совершенное число имеет вид $2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 числа простые, и обратно, всякое число вида $2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 простые, есть совершенное число.

Что касается нечетных совершенных чисел, то до сих пор не найдено ни одного такого числа, но и не доказано, что таких чисел не существует.

Задачей настоящей работы является доказательство того, что не существует нечетных совершенных чисел, каноническое разложение которых содержит два или три простых числа.

1. Случай канонического разложения $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$.

1. Предположим, что нечетное число $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ является совершенным.
Тогда должно удовлетворятся равенство

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$$

или

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})\ (1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}. \quad (1)$$

Отсюда видно, что один из множителей слева должен делиться на 2, а другой должен быть нечетным. Так как все слагаемые обоих многочленов, стоящих в скобках в левой части (1), нечетные, то заключаем, что α_1+1 будет четным, α_2+1 нечетным, или наоборот. Для определенности будем считать первый многочлен четным числом. Тогда

$$\alpha_1 - \textit{нечетное число}, \quad \alpha_2 - \textit{четное число}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2. Поскольку количество членов в многочлене $1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1}$, равное α_1+1, является четным, то группируя в нем члены по два, получим

$$1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1}=(1+p_1)\left(1+p_1^2+p_1^4+p_1^6+\ldots+p_1^{\alpha_1-1}\right).$$

Замечая далее, что этот многочлен не может делиться на p_1, а многочлен $1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2}$ не может делиться на p_2, из равенства (1) заключаем, что

$$(1+p_1)\left(1+p_1^2+p_1^4+p_1^6+\ldots+p_1^{\alpha_1-1}\right)=2p_2^{\alpha_2} \tag{2}$$

$$1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2}=p_1^{\alpha_1}. \tag{3}$$

3. В равенстве (2) слева только один множитель может быть четным. Очевидно, что это будет $1+p_1$. Следовательно, его каноническое разложение имеет вид

$$1+p_1=2p_1^r, \quad \text{где} \quad 1\leqslant r\leqslant\alpha_2$$

откуда

$$p_1=2p_2^r-1$$

Следовательно,

$$p_1\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,p_2) \tag{4}$$

Возвышая (4) в степень α_1, имеем

$$p_1^{\alpha_1}\equiv(-1)^{\alpha_1}=-1(\mathrm{mod}\,p_2), \tag{5}$$

ибо, согласно п. 1, показатель α_1 нечетный. Но с другой стороны, из равенства (3) следует, что

$$p_1^{\alpha_1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p_2). \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), получаем явное противоречие, что и указываст на невозможность равенства (1).

2. Случай канонического разложения $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$.

1. Предположим, что нечетное число $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$ является совершенным. т. е. удовлетворяется равенство

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\frac{p_3^{\alpha_3+1}-1}{p_3-1}=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3} \tag{1}$$

или

$$\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+p_3+p_3^2+\ldots+p_3^{\alpha_3}\right)=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}. \tag{2}$$

Рассуждая так же, как и в случае 1, найдем, что

1) α_1 нечетное число, α_2 и α_3 четные числа,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$2)\ 1+p_1+p_2{}^2+\ldots+p_1{}^{\alpha_1}=(1+p_1)\cdot$$
$$\cdot(1+p_1{}^2+p_1{}^4+p_1{}^6+\ldots+p_1{}^{\alpha_1-1}),$$

где

$$1+p_1{}^2+p_1{}^4+p_1{}^6+\ldots+p_1{}^{\alpha_1-1}$$

есть число нечетное.

В левой части равенства (2) первый множитель не делится на p_1, второй не делится на p_2, третий не делится на p_3. Поэтому, мы должны, вообще, положить, что

$$\left.\begin{array}{l} 1+p_1=2p_2{}^{s_1}\,p_3{}^{t_1} \\ 1+p_1{}^2+p_1{}^4+p_1{}^6+\ldots+p_1{}^{\alpha_1-1}=p_2{}^{s_2}\,p_3{}^{t_2} \\ 1+p_2+p_2{}^2+\ldots+p_2{}^{\alpha_2}=p_1{}^{r_1}\,p_3{}^{t_3} \\ 1+p_3+p_3{}^2+\ldots+p_3{}^{\alpha_3}=p_1{}^{r_2}\,p_3{}^{s_3} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

где

$$r_1+r_2=\alpha_1,\ s_1+s_2+s_3=\alpha_2,\quad t_1+t_2+t_3=\alpha_3$$

2. Рассмотрим первые два равенства в системе (3). Здесь мыслимы следующие случаи

A) $\alpha_1>1$

$$\begin{array}{lcccccc} & & a & & b & c & d & e \\ 1+p_1 & = & 2p_2{}^{s_1}p_3{}^{t_1} & 2p_2{}^{s_1} & 2p_2{}^{s_1} & 2p_2{}^{s_1} & 2p_2{}^{s_1}p_3{}^{t_1} \\ 1+p_1{}^2+p_1{}^4+\ldots+p_1{}^{\alpha_1-1} & = & p_2{}^{s_2}\,p_3{}^{t_2} & p_3{}^{t_2} & p_2{}^{s_2}p_3{}^{t_2} & p_2{}^{s_2} & p_2{}^{s_2} \end{array} \qquad (4)$$

B) $\alpha_1=1$

$$\text{а)}\ 1+p_1=2p_2{}^{s_1},\quad \text{в)}\ 1+p_1=2p_2{}^{s_1}\,p_3{}^{t_1}. \qquad (5)$$

3. Лемма. Если h и g два взаимно-простые числа, то числа

$$1+p+p_2+\ldots+p^{h-1}\quad \text{и}\quad 1+p+p^2\ldots+p^{g-1}$$

также взаимно-простые, где p простое число.

Предположим противное, что указанные две суммы имеют общий делитель $d\neq 1$. Очевидно, что $(p,\,d)=1$. Тогда можно написать

$$1+p+p^2+\ldots+p^{h-1}=\frac{p^h-1}{p-1}=k_1.d$$

$$1+p+p^2+\ldots+p^{g-1}=\frac{p^g-1}{p-1}=k_2.d.$$

Отсюда

$$p^h-1=k_1\,d(p-1),\quad p^g-1=k_2\,d(p-1).$$

Следовательно,

$$p^h\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,d),\quad p^g\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,d). \qquad (6)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Если предположить, что $p \not\equiv 1 \pmod{d}$, то p принадлежит некоторому показателю $f > 1$ по модулю d, т. е.

$$p^f \equiv 1 \pmod{d}$$

Тогда h и g должны делиться на f, что невозможно.

Пусть теперь $p \equiv 1 \pmod{d}$. Тогда

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{h-1} \equiv h \equiv 0 \pmod{d}$$
$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{g-1} \equiv g \equiv 0 \pmod{d}$$

Следовательно, h и g делятся на $d > 1$, что невозможно. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\alpha + 1 = h.g$, *где* $(h.g) = 1$, *то каноническое разложение числа*

$$1 + p^h + p^{2h} + \ldots + p^{\alpha+1-h}$$

должно иметь в своем составе хотя бы одно простое число, не входящее в состав канонического разложения числа

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{h-1}.$$

В самом деле, составим сумму, имеющую $\alpha + 1$ членов

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{\alpha}.$$

Тогда группировкой можно ее разложить на два множителя

$$(1 + p + p^2 + \ldots + p^{h-1})(1 + p^h + p^{2h} + \ldots + p^{\alpha+1-h}). \qquad (7)$$

С другой стороны, группируя ту же сумму по g членой, получим

$$(1 + p + p^2 + \ldots + p^{g-1})(1 + p^g + p^{2g} + \ldots + p^{\alpha+1-g}). \qquad (8)$$

В силу доказанной леммы, первые множители выражений (7) и (8) взаимно просты, т. е. их канонические разложения не имеют одинаковых простых множителей. Так как (7) и (8) выражают одно и то же число, то из сказанного заключаем, что первый множитель выражения (8) целиком входит во второй множитель (7). Следовательно, второй множитель выражения (7) в своем каноническом разложении должен иметь хотя бы одно простое число, не имеющееся в каноническом разложении первого множителя в (7), чем и доказано следствие.

4. Обратимся теперь к исследованию систем (4), когда $\alpha_1 > 1$. Рассматривая выражение

$$1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1} = (1 + p_1)(1 + p_1^2 + p_1^4 + \ldots + p_1^{\alpha_1 - 1}), \qquad (9)$$

мы уже заметили, что второй множитель должен быть нечетным, что возможно лишь при $\alpha_1 - 1 = 4k$ или $\alpha_1 = 4k + 1$.

Отсюда

$$\alpha_1 + 1 = 2(2k + 1).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как $(2, 2k+1)=1$, то положив $h=2$, $g=2k+1$ и применяя следствие из леммы к множителям выражения (9), убеждаемся, что второй множитель в своем каноническом разложении должен иметь хотя бы одно простое число, не входящее в состав канонического разложения первого множителя. Отсюда непосредственно ясно, что в системах (4) случаи a), d) и e) невозможны.

5. Докажем, что невозможны так же случаи b) и c) систем (4). Предположим, что имеет место система

$$\left.\begin{aligned} 1+p_1 &= 2p_2^{s_1} \\ 1+p_1^2+p_1^4+p_1^6+\ldots+p_1^{\alpha_1-1} &= p_3^{t_2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

т. е.

$$1+p_1+p_1^2+p_1^3+\ldots+p_1^{\alpha_1}=2p_2^{s_1}p_3^{t_2}. \tag{11}$$

Группируя левую часть (11) по $\frac{\alpha_1+1}{2}$ слагаемых, получим

$$\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\frac{\alpha_1-1}{2}}\right)\left(1+p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\right)=2p_2^{s_1}p_3^{t_2}. \tag{12}$$

Так как $\alpha_1=4k+1$, то первый множитель в левой части (12) имеет нечетное число членов и, след., на основании леммы, он взаимно-прост с числом $1+p_1$. Поэтому его каноническое разложение не имеет множителя p_2. Отсюда

$$1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\frac{\alpha_1-1}{2}}=p_3^{l}, \text{ где } 0<l<t_2 \tag{13}$$

$$1+p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}=2p_2^{s_1}p_3^{t_2-l}. \tag{14}$$

Неравенство $l<t_2$ следует из того, что, если бы было $t_2=l$ то в (14) было бы $1+p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}=2p_2^{s_1}=1+p_1$, откуда следовало бы $\alpha_1=1$, между тем мы рассматриваем случай $\alpha_1>1$. Так как (13) можно переписать в виде

$$p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}-1=p_3^{l}(p_1-1),$$

то из (13) вытекает, что

$$p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\equiv 1 \pmod{p_3}. \tag{15}$$

С другой стороны из (14) имеем

$$p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\equiv -1 \pmod{p_3}. \tag{16}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как p_3 нечетное простое число, то (15) и (16) противоречат друг другу, т. е. система (10) невозможна.

Предположим, наконец, что

$$\left.\begin{aligned} &1+p_1=2p_2^{s_1}\\ &1+p_1^2+p_1^4+\ldots+p_1^{\alpha_1-1}=p_2^{s_2}p_2^{t_2}\end{aligned}\right\}, \text{ где } s_2>0. \tag{10a}$$

Тогда аналогичными, как и выше, выкладками приведем к равенствам

$$1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\frac{\alpha_1-1}{2}}=p_3^l, \quad \text{где } 0<l\leqslant t_2 \tag{13a}$$

$$1+p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}=2p_2^{s_1+s_2}p_3^{t_2-l}. \tag{14a}$$

Если предположить что $l<t_2$, то совершенно аналогично придем опять к противоречивым сравнениям (15) и (16). Следовательно, $l=t_2$ и 1-е равенство системы (10a) и равенство (14a) получат вид

$$1+p_1=2p_2^{s_1} \tag{15a}$$

$$1+p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}=2p_2^{s_1+s_2} \tag{16a}$$

Замечая, что $m=\dfrac{\alpha_1+1}{2}=\dfrac{4k+2}{2}=2k+1$ есть число нечетное, разделим (16a) на (15a):

$$\frac{1+p_1^m}{1+p_1}=1-p_1+p_1^2-p_1^3+\ldots-p_1^{m-2}+p_1^{m-1}=p_2^{s_2}. \tag{17a}$$

Но $p_1\equiv -1 \pmod{p_2}$, поэтому подставляя это в (17a), получим, что $m=\dfrac{\alpha_1+1}{2}\equiv 0 \pmod{p_2}$. т. е. $m=fp_2$, где f нечетное число

Отсюда (16a) может быть представлено в виде

$$1+p_1^m=(1+p_1^{p_2})(1-p_1^{p_2}+p_1^{2p_2}-\ldots+p_1^{m-p_2})=2p_2^{s_1+s_2}.$$

Из полученного равенства очевидно, что $1+p_1^{p_2}=2p_2^l$, где $l<s_1+s_2$. Подставляя сюда на основании (15a) $p_1=2p_2^{s_1}-1$, получим

$$(2p_2^{s_1}-1)^{p_2}+1=2p_2^l. \tag{18a}$$

Из равенства (18a) ясно, что в силу $2p_2^{s_1}-1>p_2^{s_1}$, будем иметь

$$p_2^{s_1p_2}<2p_2^l<p_2^{l+1}.$$

Следовательно, $s_1p_2<l+1$, или $l>s_1p_2-1\geqslant 3s_1-1\geqslant s_1+1$. ибо $p_2\geqslant 3$, $s_1\geqslant 1$. Таким образом, $l>s_1+1$. Раскрывая (18a),

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

имеем:

$$2p_2{}^l = 2^{p_2}\, p_2{}^{s_1 p_2} - p_2 \cdot 2^{p_2-1}\, p_2{}^{s_1(p_2-1)} + \binom{p_2}{2} 2^{p_2-2}\, p_2{}^{s_1(p_2-2)} - \ldots -$$
$$- \binom{p_2}{2} \cdot 2^2 p_2{}^{2s_1} + p_2 \cdot 2 p_2{}^{s_1}.$$

Замечая, что все члены равенства делятся на $2p_2{}^{s_1+1}$ (мы видели уже, что $l > s_1 + 1$), производим сокращение на $2p_2{}^{s_1+1}$

$$p_2{}^{l-s_1-1} = 2^{p_2-1} p_2{}^{s_1 p_2 - s_1 - 1} - p_2 \cdot 2^{p_2-2} p_2{}^{s_1(p_2-1)-s_1-1} +$$
$$+ \ldots\ldots - \binom{p_2}{2} 2 p_2{}^{s_1-1} + 1. \qquad (19a)$$

Так как $l > s_1 + 1$ и все биномиальные коэффициенты, в силу простоты показателя p_2, делятся на p_2, то заключаем, что левая часть равенства (19а) и все члены правой части, кроме последнего (единицы), делятся на p_2. Следовательно, равенство (19а) невозможно, а это значит, что система равенств (15а) и (16а) противоречива. Этим доказана окончательно невозможность случая *c*).

6. Перейдем к исследованию случая $\alpha_1 = 1$. Предположим сперва, что $1 + p_1 = 2p_2{}^{s_1}$. Тогда система (3) получит вид

а)
$$\left.\begin{array}{c} 1 + p_1 = 2p_2{}^{s_1} \\ 1 + p_2 + p_2{}^2 + \ldots + p_2{}^{\alpha_2} = p_1 p_3{}^{\alpha_3} \\ 1 + p_3 + p_3{}^2 + \ldots + p_3{}^{\alpha_3} = p_2{}^{s_3} \\ s_1 + s_3 = \alpha_2 \end{array}\right\} \text{ или}$$

б)
$$\left.\begin{array}{c} 1 + p_1 = 2p_2{}^{s_1} \\ 1 + p_2 + p_2{}^2 + \ldots p_2{}^{\alpha_2} = p_3{}^{\alpha_3} \\ 1 + p_3 + p_3{}^2 + \ldots p_3{}^{\alpha_3} = p_1 p_2{}^{s_3} \\ s_1 + s_3 = \alpha_2 \end{array}\right\}.$$

В случае системы а) из 1-го равенства имеем $p_1 \equiv -1 \pmod{p_2}$, из 2-го равенства $p_1 p_3{}^{\alpha_3} \equiv 1 \pmod{p_2}$, следовательно,

$$p_3{}^{\alpha_3} \equiv -1 \pmod{p_2} \qquad (17)$$

С другой стороны, т. к. третье равенство равносильно равенству

$$p_3{}^{\alpha_3+1} - 1 = p_2{}^{s_3}(p_3 - 1),$$

то $p_3{}^{\alpha_3+1} \equiv 1 \pmod{p_2}$. Значит, в силу (17),

$$p_3 \equiv -1 \pmod{p_2}. \qquad (18)$$

Возвышая (18) в четную степень α_3, получим

$$p_3{}^{\alpha_3} \equiv (-1)^{\alpha_3} = 1 \pmod{p_2}. \qquad (19)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Противоречие сравнений (17) и (19) и доказывает невозможность системы *a*).

7. Для исследования системы b) рассмотрим структуру показателя α_3. Из 2-го равенства системы b) видим, что $p_3^{\alpha_3} \equiv 1 (\mathrm{mod} p_2)$. Из 3-го равенства системы b) легко заключить, что $p_3^{\alpha_3+1} \equiv 1 (\mathrm{mod} p_2)$. Отсюда ясно, что

$$p_3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod} p_2). \tag{20}$$

Подставляя этот результат в 3-е равенство, видим, что

$$\alpha_3 + 1 \equiv p_1 p_2^{s_2} \equiv 0 \ (\mathrm{mod} p_2).$$

Следовательно,
$$\alpha_3 + 1 = fp_2. \tag{21}$$

Более того, мы сейчас покажем, что должно иметь место равенство

$$\alpha_3 + 1 = p_2^{\beta}, \quad \text{где } \beta \geqslant 1. \tag{22}$$

Для этого заметим предварительно, что невозможно сравнение $p_1 \equiv 1 (\mathrm{mod} p_3)$. Действительно, если бы было $p_1 \equiv 1 (\mathrm{mod} p_3)$, то из 3-го равенства системы b) следовало бы, что $p_2^{s_2} \equiv 1 (\mathrm{mod} p_3)$, из 1-го равенства вытекало бы, что $2p_2^{s_1} \equiv 2 (\mathrm{mod} p_3)$, т. е. $p_2^{s_1} \equiv 1 (\mathrm{mod} p_3)$. Тогда умножением полученных сравнений получили бы

$$p_2^{\alpha_2} \equiv 1 \ (mod p_3). \tag{23}$$

Далее, из 2-го равенства системы b) легко вывести, что $p_2^{\alpha_2+1} \equiv 1 (\mathrm{mod} p_3)$. Сравнивая это с (23), заключили бы, что

$$p_2 \equiv 1 \ (mod p_3). \tag{24}$$

Отсюда, очевидно, вытекало бы, что $p_2 > p_3$, так как $p_2 \neq 1$. Но из (20) видим, что $p_3 > p_2$. Полученное противоречие и доказывает, что сравнение $p_1 \equiv 1 (\mathrm{mod} p_3)$ невозможно.

Предположим, что каноническое разложение числа $\alpha_3 + 1$ имеет вид $\alpha_3 + 1 = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_s^{\beta_3}$. Тогда в многочлене $1 + p_3 + p_3^2 + \ldots + p_3^{\alpha_3}$ могут быть группировкой выделены множители вида

$$1 + p_3 + p_3^2 + \ldots + p_3^{q_i} \quad (i = 1, 2_1 \ldots s). \tag{25}$$

На основании леммы все они попарно взаимно-простые. Поэтому, если $s > 2$, каноническое разложение числа $1 + p_3 + p_3^2 + \ldots + p_3^{\alpha_3}$ должно содержать более двух простых чисел, между тем, как видно из 3-го равенства системы b), оно содержит только два простых числа p_1 и p_2. Следовательно, $s \leqslant 2$, и $\alpha_3 + 1 = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2}$.

Таким образом, в (25) $i = 1, 2$. Но, замечая, что предположить

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$1+p_3+p_3^2+\ldots+p_3^{q_1}=p_1$$

нельзя, в силу того, что, как мы видели, $p\not\equiv 1 \pmod{p_3}$, а предположить, что $1+p_3+p_3^2+\ldots+p_3^{q_1}=p_1p_2^{l}$, где $l<s_3$ также нельзя, ибо $1+p_3+p_3^2+\ldots+p_3^{q_1}$, как взаимно-простое с предыдущим, должно содержать в каноническом разложении простое число, отличное от p_1 и p_2, заключаем, что $\beta_2=0$ и $\alpha_3+1=q_1^{\beta_1}$.

Итак, $\alpha_3+1=q^{\beta}$. С другой стороны, согласно (21), $\alpha_3+1=fp_2$. Следовательно, $q^{\beta}=fp_2$, откуда $q=p_2$, и

$$\alpha_3+1=p_2^{\beta}. \tag{22}$$

8. Из 3-го равенства системы b) легко заключить, что

$$p_3^{\alpha_1+1}\equiv 1 \pmod{p_1}. \tag{26}$$

Предположить, что $p_3\equiv 1 \pmod{p_1}$ нельзя, так как тогда из 3-го равенства вытекало бы, что $\alpha_3+1\equiv 0 \pmod{p_1}$, что невозможно ибо $\alpha_3+1=p_2^{\beta}$ на основании (22). Следовательно, $p_3\not\equiv 1 \pmod{p_1}$. Но тогда p_3 принадлежит некоторому показателю δ по модулю p_1, где δ делитель числа p_1-1. Поэтому из (26) будет вытекать, что $\alpha_3+1=p_2^{\beta}=\kappa\delta$. Следовательно,

$$\delta=p_2^{\gamma}, \text{ где } \gamma\leqslant\beta.$$

Отсюда следует, что p_1-1 делится на p_2^{γ}, т. е.

$$p_1\equiv 1 \pmod{p_2}.$$

Но из 1-го равенства системы b) следует, что $p_1\equiv -1 \pmod{p_2}$. Полученное противоречие указывает на невозможность системы b).

9. Остается рассмотреть последний случай при $\alpha_1=1$, когда система (3) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} 1+p_1&=2p_2^{s_1}p_3^{t_1}\\ 1+P_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2}&=p_1p_3^{t_3}\\ 1+p_3+p_3^2+p_3^{\alpha_3}&=p_2^{s_3}\\ s_1+s_3=\alpha_2,\ t_1+t_3&=\alpha_3 \end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Заметим предварительно, что $t_3\neq 0$, ибо, если предположить, что $t_3=0$, то из 2-го равенства имели бы $p_1\equiv 1 \pmod{p_2}$ а из 1-го равенства

$$p_1\equiv -1 \pmod{p_2}. \tag{28}$$

В силу (28), из 2-го равенства имеем

$$p_3^{t_3}\equiv -1 \pmod{p_2}, \tag{29}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

что свидетельствует о том, что $p_3 \not\equiv 1 \pmod{p_2}$.

Далее из 3-го равенства легко получить

$$p_3^{\alpha_3+1} \equiv 1 \pmod{p_2}. \tag{30}$$

Так как $p_3 \not\equiv 1 \pmod{p_2}$, то p_3 принадлежит некоторому показателю δ по модулю p_2, где $\delta > 1$. Поэтому, из (30) заключаем, что $\alpha_3 + 1$ делится на δ, а так как $\alpha_3 + 1$ нечетное, то и δ нечетное. Далее, из (29) имеем

$$p_2^{2t_3} \equiv 1 \pmod{p_2}.$$

Следовательно, $2t_3$ делится на δ, но δ нечетное, следовательно, t_3 делится на δ. Но тогда $p_3^{t_3} \equiv 1 \pmod{p_2}$, что находится в противоречии с сравнением (29). Таким образом, система (27) невозможна.

Мы рассмотрели все случаи, на которые распадается система (3) при $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_1 = 1$. Этим доказано, что нечетных совершенных чисел вида $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_2^{\alpha_3}$ не существует.

Думается, что примененные рассуждения могут быть распространены на какие угодно нечетные числа, чем было бы доказано несуществование нечетных совершенных чисел вообще.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

UBER VOLLKOMMENE ZAHLEN.

J. L. Trainin (*Nowosibirsk*).

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage nach der Existenz ungerader vollkommener Zahlen gestellt, deren Primzahlzerlegung von der Form $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ und $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$, wo p_1, p_2, p_3 ungerade Primzahlen sind.

Es handelt sich um die Möglichkeit der Gleichungen von der Form (1) und (2)

$$(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})\ (1+p_2+\ldots p_2^{\alpha_2}) = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}, \tag{1}$$

$$(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})\ (1+p_2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\ (1+p_3+\ldots+p_3^{\alpha_3}) = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}. \tag{2}$$

Hieraus folgen die weiteren Formeln

$$\begin{cases} 1+p_1 = 2p_1^{r} \quad (1 \leqslant r \leqslant \alpha_2) \\ 1+p_2+\ldots+p_2^{\alpha_2} = p^{\alpha_1} \end{cases}$$ im Falle der Gleichung (1),

und das System

$$\begin{aligned} 1+p_1 &= 2p_2^{s_1}p_3^{t_1} \\ 1+p_1^2+p_1^4+\ldots+p_1^{\alpha_1-1} &= p_2^{s_2}p_3^{t_2} \\ 1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2} &= p_1^{r_1}p_3^{t_3} \\ 1+p_3+p_3^2+\ldots+p_3^{\alpha_3} &= p_1^{r_2}p_2^{s_3} \end{aligned}$$ im Fall der Gleichung (2),

wo $r_1+r_2=\alpha_1$, $s_1+s_2+s_3=\alpha_2$, $t_1+t_2+t_3=\alpha_3$ sind.

Es zeigt sich, dass in allen diesen Fällen Widersprüche auf Grund der Theorie der Kongruenzen auftreten. Daraus folgt, dass ungerade vollkommene Zahlen von den oben angenommenen Formen nicht vorhanden sind.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА И КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ ЖОРДАНА.

А. С. Джанумянц (Томск).

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Взаимосвязь криволинейного интеграла с интегралом Стильтьеса уже рассматривалась Хефтер в статье „Kurven—und Stieltjes—Integral" (Math. Zeitsch. Bd.40, S.608, 1935) и в книге проф. Г. М. Фихтенгольца и И. П. Натансона „Криволинейные и кратные интегралы".

Однако, в этих работах авторы ограничиваются лишь рассмотрением криволинейных интегралов по спрямляемым кривым.

Вопрос об определении интеграла по неспрямляемой кривой рассматривался впервые проф. А. С. Кованько в работе: „Криволинейные интегралы по неспрямляемым квадрируемым кривым" (Изв. Азербайдж. Ун-та за 1927 г. т. 6 и за 1930 г. т. 9), методом, основанном на формуле Грина.

В настоящей работе я задаюсь целью определить криволинейный интеграл по неспрямляемой кривой Жордана, используя при этом теорию интеграла Стильтьеса.

Прежде чем приступить к изложению основных вопросов моей темы, я даю определение интеграла Стильтьеса, рассматриваю его основные свойства и показываю, что криволинейный интеграл по спрямляемой кривой C по существу является интегралом Стильтьеса.

Далее, я определяю криволинейный интеграл вида $\int_C Pdx + Qdy$ по любой неспрямляемой кривой C Жордана при помощи интегралов Стильтьеса, но при условии, что функции P и Q являются не только непрерывными, но имеют и ограниченную вариацию.

Наконец, введение понятия о „несобственном интеграле Стильтьеса" позволяет мне сделать дальнейшее обобщение—определить интеграл по неспрямляемой кривой, в предположении, что функции P и Q только непрерывные, методом, аналогичным процессу тотализации Данжуа.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Интеграл Стильтьеса (S).

Прежде чем приступить к обоснованию криволинейного интеграла по неспрямляемой кривой, рассмотрим классическое определение интеграла Стильтьеса.

Пусть на данном интервале (a, b) заданы две функции:

1. непрерывная функция $f(x)$ и

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2. функция ограниченной вариации $\varphi(x)$.
Тогда интегралом Стильтьеса от функции $f(x)$ по отношению к $\varphi(x)$ будет называться следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left[\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)\right],$$

где $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, а $\max |x_{i+1}-x_i| \to 0$ при $i \to \infty$.

Предел этот, при сделанных предположениях относительно функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, всегда существует, не зависит ни от способа разбиения интервала (a, b) значениями x_i, ни от выбора промежуточных значений ξ_i и обозначается символом:

$$(S)\int_a^b f(x)d\varphi(x) \quad \text{или просто} \quad \int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

Функция, по отношению к которой берется интеграл (в данном случае $\varphi(x)$), называется добавочной или определяющей функцией.

Свойства интеграла (S).

Из самого определения интеграла Стильтьеса непосредственно выводятся следующие его свойства:

I. $$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = -\int_b^a f(x)d\varphi(x).$$

II. $$\int_a^c f(x)d\varphi(x) + \int_c^b f(x)d\varphi(x) = \int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

III. $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)d\varphi(x) + \int_a^b g(x)d\varphi(x).$$

IV. $$\int_a^b f(x)d[\varphi(x)+\psi(x)] = \int_a^b f(x)d\varphi(x) + \int_a^b f(x)d\psi(x).$$

V. Если $\varphi(x)$ есть функция **абсолютно-непрерывная**, то $\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

VI. Если $f(x)=A=\text{const}$, то

$$\int_a^b A\,d\varphi(x)=A\int_a^b d\varphi(x)=A\,[\varphi(b)-\varphi(a)]\,.$$

VII. Первая теорема о среднем для интеграла (S)

Если $|f(x)|\leqslant K$, а $V_a^b\varphi$ есть полная вариация функции $\varphi(x)$ на $a,\ b)$, то $\left|\int_a^b f(x)d\varphi(x)\right|\leqslant KV_a^b\varphi$.

Подробные выводы всех этих свойств можно найти в книгах: Лебег—„Интегрирование и отыскание примитивных", Гливенко—„Интеграл Стильтьеса", Фихтенгольц и Натансон—„Криволинейные и кратные интегралы".

VIII. Обобщение первой теоремы о среднем для интеграла (S).

Если M и m суть верхняя и нижняя границы непрерывной функции $f(x)$, а $\underline{V}_a^b$ и $\overline{V}_a^b$ суть, соответственно, отрицательная и положительная вариации функции $\varphi(x)$ на $(a,\ b)$, то имеет место следующее соотношение:

$$m\overline{V}_a^b\varphi-M\underline{V}_a^b\varphi\leqslant\int_a^b f(x)d\varphi(x)\leqslant M\overline{V}_a^b\varphi-m\underline{V}_a^b\varphi. \qquad (1)$$

Доказательство:

Напишем два очевидных неравенства:

$$a)\ m\overline{V}_a^b\varphi\leqslant\int_a^b f(x)d\overline{V}_a^x\varphi\leqslant M\overline{V}_a^b\varphi$$

$$b)\ m\underline{V}_a^b\leqslant\int_a^b f(x)d\underline{V}_x^a\varphi\leqslant M\underline{V}_a^b\varphi.$$

Вычитая из неравенства $a)$ неравенство $b)$ и принимая во внимание, что $\overline{V}_a^x-\underline{V}_a^x=\varphi(x)-\varphi(a)$, получим искомое соотношение:

$$m\overline{V}_a^b\varphi-M\underline{V}_a^b\varphi\leqslant\int_a^b f(x)d\varphi(x)\leqslant M\overline{V}_a^b\varphi-m\underline{V}_a^b\varphi.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следствия:

Из найденного соотношения легко получаются формулы о среднем для интеграла (S), выраженные соответственно только через положительную или только отрицательную вариации. Действительно, из неравенства

$$m\overline{V}_a^b\varphi - M\underline{V}_a^b\varphi - m\underline{V}_a^b\varphi + m\underline{V}_a^b\varphi \leqslant \int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant M\overline{V}_a^b\varphi - m\underline{V}_a^b\varphi - M\underline{V}_a^b\varphi + M\underline{V}_a^b\varphi$$

получаем:

$$m[\varphi(b) - \varphi(a)] - (M-m)\underline{V}_a^b\varphi \leqslant \int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant M[\varphi(b) - \varphi(a)] + (M-m)\underline{V}_a^b\varphi. \quad (2)$$

Аналогично получаем и формулу о среднем через положительную вариацию, которая имеет вид:

$$M[\varphi(b) - \varphi(a)] - (M-m)\overline{V}_a^b\varphi \leqslant \int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant m[\varphi(b) - \varphi(a)] + (M-m)\overline{V}_a^b\varphi. \quad (3)$$

IX. Вторая теорема о среднем для интеграла (S).

Если в интеграле (S) $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ на интервале (a, b) функция $f(x)$ является не только непрерывной, но и монотонной функцией, а $\varphi(x)$ не только функцией ограниченной вариации, но и непрерывной, то существует число c, заключенное между a и b $(a \leqslant c \leqslant b)$, для которого справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = f(a)[\varphi(c) - \varphi(a)] + f(b)[\varphi(b) - \varphi(c)]. \quad (1)$$

Доказательство:

Предположим сначала, что $f(x)$ положительная убывающая функция.

Если обозначить через M^i и m_i верхнюю и нижнюю границы функции $f(x)$ на интервале (x_i, x_{i+1}), то интеграл Стильтьеса от

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

функции $f(x)$ по отношению к $\varphi(x)$ на (a, b) будет содержаться между пределами следующих сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)] \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)].$$

В силу существования интеграла Стильтьеса, эти две суммы имеют общий предел J, где

$$J = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_i [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)], \qquad m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i.$$

Так как, согласно нашего предположения относительно функции $f(x)$, числа $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... убывают, оставаясь положительными, то из леммы Абеля следует, что значение J содержится между величинами $Af(a)$ и $Bf(a)$, где A и B обозначают минимум и максимум интеграла $\int_a^{\xi} d\varphi(x)$, когда ξ изменяется от a до b.

Следовательно: $Af(a) \leqslant \int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant Bf(a)$.

Но так как интеграл $\int_a^{\xi} d\varphi(x)$ есть непрерывная функция от ξ, а ξ изменяется непрерывно между a и b, то найдется для ξ такое значение c, заключенное между a и b $(a \leqslant c \leqslant b)$, при котором

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = f(a)\int_a^c d\varphi(x)$$

или

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = f(a)[\varphi(c) - \varphi(a)]. \qquad (A)$$

Если же функция $f(x)$ убывает, не оставаясь, однако, положительной между a и b, то полагая, $f(x) = f(b) + F(x)$, где $F(x)$ положительна и убывает, мы можем применить формулу (A) к функции $F(x)$, что приведет нас к следующему равенству:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\int_a^b F(x)d\varphi(x) = \int_a^b [f(x)-f(b)]\,d\varphi(x) = [f(a)-f(b)]\,[\varphi(c)-\varphi(a)],$$

откуда:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \int_a^b [f(b)+F(x)]d\varphi(x) = \int_a^b f(b)d\varphi(x) + \int_a^b F(x)d\varphi(x) =$$

$$= f(b)[\varphi(b)-\varphi(a)] + [f(a)-f(b)]\,[\varphi(c)-\varphi(a)]$$

или

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = f(a)[\varphi(c)-\varphi(a)] + f(b)[\varphi(b)-\varphi(c)].$$

Эту формулу можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) + [f(a)-f(b)]\,\varphi(c). \qquad (2)$$

Если же предположить $f(x)$ функцией возрастающей, то применение последней формулы к убывающей функции—$f(x)$ повлечет за собой изменение знака одновременно в обеих частях этого равенства, а, следовательно, наша формула останется в силе и для возрастающей функци $f(x)$.

Таким образом, формула (2) справедлива для случая, когда $f(x)$ любая монотонно-непрерывная функция, а $\varphi(x)$ непрерывная функция ограниченной вариации, т. е. вторая теорема о среднем для интеграла (S) доказана.

X. Производная интеграла (S).

Если интеграл Стильтьеса имеет переменный верхний предел x, то рассматривая его как функцию верхнего предела, мы можем высказать следующую теорему:

Если $f(t)$ непрерывная функция, $\varphi(t)$ непрерывная функция ограниченной вариации, а E есть множество значений x, при которых производная $\varphi'(x)$ существует и не равна нулю, кроме того, Δx пробегает любую из таких последовательностей значений, при которых соответствующие приращения $\Delta\varphi$ не равны нулю, то производная интеграла $F(x) = \int_a^x f(t)d\varphi(t)$ по отношению к $\varphi(x)$, т. е. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta\varphi} \int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)$, равна $f(x)$ почти всюду на E,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а производная этого же интеграла по верхнему пределу x равна $f(x)\,\varphi'(x)$ почти всюду.

Доказательство:

Проведем доказательство высказанной теоремы сначала для частного случая, предполагая еще функцию $\varphi(t)$ возрастающей.

Назовем производной интеграла $F(x)=\int_a^x f(t)d\varphi(t)$ по отношению к $\varphi(x)$ следующий предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta\varphi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta\varphi}\int_x^{x+\Delta x}f(t)d\varphi(t)\quad\begin{pmatrix}\text{здесь }\Delta\varphi\neq 0\\ \text{при }\Delta x\neq 0\end{pmatrix},$$

где $\Delta\varphi=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$.

Этот предел будем обозначать символом $D_\varphi\int_a^x f(t)d\varphi(t)$.

Итак, рассмотрим интеграл $F(x)=\int_a^x f(t)d\varphi(t)$.

Введя новую переменную $u=\varphi(t)$ и производя соответствующую замену в пределах интеграла, получим:

$$\int_a^x f(t)d\varphi(t)=\int_{u_0}^{u} f[\bar{\varphi}(u)]du,\ \text{где}\ \bar{\varphi}(u)=t.$$

Следовательно,

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\int_u^{u+\Delta u} f[\bar{\varphi}(u)]\,du.$$

Деля обе части последнего равенства на $\Delta\varphi$, получим:

$$\frac{1}{\Delta\varphi}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\frac{1}{\Delta u}\int_u^{u+\Delta u} f[\bar{\varphi}(u)]du;$$

откуда, переходя к пределу, будем иметь:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta\varphi}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{\Delta u}\int_u^{u+\Delta u} f[\bar{\varphi}(u)]\,du=f[\bar{\varphi}(u)]=f(x)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

почти всюду, т. к. интеграл $\int_{u_0}^{u} f[\varphi(u)]du$, являясь функцией ограниченной вариации, имеет производную, в рассматриваемом интервале, почти всюду.

Таким образом, $D_\varphi \int_a^x f(t)d\varphi(t) = f(x)$ почти всюду. (α)

Для рассматриваемого частного случая остается еще определить производную интеграла (S) по верхнему пределу.

Производной интеграла $F(x) = \int_a^x f(t)d\varphi(t)$ по верхнему пределу x будем называть следующий предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t),$$

который будем обозначать символом: $D_x \int_a^x f(t)d\varphi(t)$.

Для нахождения этой производной напишем следующее очевидное равенство:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta\varphi} \int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t).$$

По теореме Лебега предел отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ существует почти всюду и равен $\varphi'(x)$, когда функция $\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию.

Следовательно, переходя к пределу и принимая во внимание формулу (α), получим

$$D_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = \varphi'(x).f(x) \text{ почти всюду.} \quad (\beta)$$

Перейдем теперь к общему случаю.

Пусть $\varphi(x)$ есть любая непрерывная функция ограниченной вариации.

В силу известного свойства функций с ограниченной вариацией, $\varphi(x)$ можно представить в виде разности двух возрастающих функций.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Поэтому, полагая $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть возрастающие функции, будем иметь

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi_1(t)-\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi_2(t).$$

Деля обе части этого равенства на Δx, мы получим

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi_1(t)-\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi_2(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и принимая во внимание, формулу (β) находим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\varphi_1'(x)f(x)-\varphi_2'(x)f(x)=[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]'f(x)$$

почти всюду, т. е. $D_x\int_a^x f(t)d\varphi(t)=\varphi'(x).f(x)$ почти всюду. (γ)

Определим теперь $D_\varphi\int_a^x f(t)d\varphi(t)$ на E, как мы уже говорили как предел выражения

$$\frac{1}{\Delta\varphi}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\frac{\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)}{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}$$ когда $\Delta x\to 0$ и $\Delta\varphi\neq 0$.

Вычисляя этот предел при $\Delta x\to 0$ и ссылаясь на формулу (γ), получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta\varphi}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)=\frac{f(x)\varphi'(x)}{\varphi'(x)}=f(x)$$ почти всюду на E,

т. е.

$$D_\varphi\int_a^x f(t)d\varphi(t)=f(x)$$ почти всюду на E.[1]) (δ)

Теорема доказана полностью.

[1]) Эту формулу можно было бы также получить, применяя обобщенную 1-ую теорему о среднем.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 2. Интеграл Стильтьеса (S_1).

Покажем теперь, что интеграл Стильтьеса существует и в том случае, когда добавочная функция $\varphi(x)$ является только непрерывной, а основная функция $f(x)$—любой функцией ограниченной вариации, т. е. что свойства основной и добавочной функции инвертируются.

Для этого, прежде всего выясним смысл формулы интегрирования по частям для интеграла Стильтьеса $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$.

Если на (a, b) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются обе непрерывными и ограниченной вариации, то, как легко видеть, имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - \int_a^b \varphi(x)df(x). \qquad (1)$$

Это равенство и выражает формулу интегрирования по частям для интегралов Стильтьеса.

Предположим теперь, что на интервале (a, b) функция $\varphi(x)$ является только непрерывной, а $f(x)$—любой функцией ограниченной вариации.

В основу определения интеграла $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ кладем формулу (1), которая обуславливает сосуществование двух интегралов

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) \quad \text{и} \quad \int_a^b \varphi(x)df(x),$$

поскольку правая часть формулы (1), для этого случая, имеет определенный смысл.

Итак, в случае, когда $f(x)$ является функцией ограниченной вариации, а $\varphi(x)$—функцией непрерывной, то интеграл Стильтьеса $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ будем определять как разность:

$$[f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - \int_a^b \varphi(x)df(x).$$

Этот интеграл, в отличие от ранее расмотренного интеграла, будем обозначать символом

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x) \text{ или просто } \int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

Таким образом, имеем

$$(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x) = [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - (S)\int_a^b \varphi(x)df(x).^{1}) \qquad (2)$$

Свойства интеграла (S_1).

Из принятого нами определения для интеграла (S_1) (формула 2) легко выводятся следующие его свойства:

I. $$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = -\int_b^a f(x)d\varphi(x)$$

II. $$\int_a^c f(x)d\varphi(x) + \int_c^b f(x)d\varphi(x) = \int_a^b f(x)d\varphi(x),$$

III. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]d\varphi(x) = \int_a^b f(x)d\varphi(x) + \int_a^b g(x)d\varphi(x),$$

IV. $$\int_a^b f(x)d[\varphi(x) + \psi(x)] = \int_a^b f(x)d\varphi(x) + \int_a^b f(x)d\psi(x).$$

V. Если $f(x) = A = \text{const}$, то $$\int_a^b Ad\varphi(x) = A\int_a^b d\varphi(x) = A[\varphi(b) - \varphi(a)].$$

Перечисленные нами первые пять свойств интеграла (S_1) выводятся чрезвычайно просто, а поэтому мы их приводим без доказательств.

VI. Первая теорема о среднем для интеграла (S_1).

Если $|\varphi(x)| \leqslant K$, $V_a^b f$ есть полная вариация функции $f(x)$ на интервале (a, b), то

[1]) Установленное нами соотношение между интегралами S и S_1 подробно разбирается в книге проф. Фихтенгольца и Натансона: „Криволинейные и кратные интегралы".

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\left|\int_a^b f(x)d\varphi(x)\right| \leqslant \left|f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)\right| + KV_a^b f.$$

Доказательство:

Мы знаем, что $(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x) =$

$$= f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-(S)\int_a^b \varphi(x)df(x),$$

откуда $\left|(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x)\right| \leqslant \left|f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)\right| + \left|(S)\int_a^b \varphi(x)df(x)\right|;$

но т. к. $\left|(S)\int_a^b \varphi(x)df(x)\right| \leqslant KV_a^b f,$

то $\left|(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x)\right| \leqslant \left|f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)\right| + KV_a^b f.$

Теорема доказана.

VII. Обобщение первой теоремы о среднем для интеграла (S).

Если M и m суть верхняя и нижняя границы непрерывной функции $\varphi(x)$, а $\underline{V}_a^b f$ и $\overline{V}_a^b f$ суть, соответственно, отрицательная и положительная вариации функции $f(x)$ на (a, b), то имеет место следующее соотношение

$$[f(x)\varphi(x)]_a^b + M\overline{V}_a^b - m\underline{V}_b^a f \leqslant (S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant [f(x)\varphi(x)]_a^b + m\overline{V}_a^b f - M\underline{V}_a^b f, \quad (1)$$

где

$$[f(x)\varphi(x)]_a^b = f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a).$$

Доказательство:

Применяя формулу VIII (1) из § 1 к интегралу $-\int_a^b \varphi(x)df(x)$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

находим

$$M\overline{V}_a^b f - m\underline{V}_a^b f \leqslant -\int_a^b \varphi(x)df(x) \leqslant m\overline{V}_a^b f - M\underline{V}_a^b f.$$

Прибавляя ко всем частям этого неравенства величину, $[f(x)\varphi(x)]_a^b$, получаем формулу о среднем уже для интеграла (S_1) в виде

$$[f(x)\varphi(x)]_a^b + M\overline{V}_a^b f - m\underline{V}_a^b f \leqslant (S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant [f(x)\varphi(x)]_a^b +$$

$$+ m\overline{V}_a^b f - M\underline{V}_a^b f,$$ что и требовалось доказать.

Следствие:

Из полученной формулы или из формул VIII (2) и VIII (3) § 1 легко находятся и формулы о среднем для интеграла (S_1), выраженные, соответственно, или через положительную или через отрицательную вариации.

Они имеют, соответственно, вид:

$$f(b)[\varphi(b) - m] - f(a)[\varphi(a) - m] - (M - m)\overline{V}_a^b f \leqslant \int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant$$

$$\leqslant f(b)[\varphi(b) - M] - f(a)[\varphi(a) - M] + (M - m)\overline{V}_a^b f \qquad (2)$$

и

$$f(b)[\varphi(b) - M] - f(a)[\varphi(a) - M] - (M - m)\underline{V}_a^b f \leqslant \int_a^b f(x)d\varphi(x) \leqslant$$

$$\leqslant f(b)[\varphi(b) - m] - f(a)[\varphi(a) - m] + (M - m)\underline{V}_a^b f. \qquad (3)$$

VIII. Вторая теорема о среднем для интеграла (S_1).

Если на интервале (a, b) функция ограниченной вариации $f(x)$ является еще и непрерывной, а непрерывная функция $\varphi(x)$ — монотонной, то найдется такое число c, заключенное между a и b $(a \leqslant c \leqslant b)$, для которого справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = f(c)[\varphi(b) - \varphi(a)].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство:

Предположим $\varphi(x)$ функцией убывающей.
Мы знаем, что

$$(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x)=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-(S)\int_a^b \varphi(x)df(x).$$

Тогда, применяя „вторую теорему о среднем“ из § 1 к интегралу $(S)\int_a^b \varphi(x)df(x)$, получаем

$$(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x)=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-\Big\{f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)+$$

$$+[\varphi(a)-\varphi(b)]f(c)\Big\},$$

т. е.

$$(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x)=f(c)[\varphi(b)-\varphi(a)].$$

Легко видеть, что полученная формула остается верной и для возрастающей функции $\varphi(x)$.
Теорема доказана.

IX. Производная интеграла (S_1).

Если функция $f(t)$ не только имеет ограниченную вариацию, но и является непрерывной, а $\varphi(t)$ функция только непрерывная, и если E есть множество значений x, при которых производные числа (нижнее и верхнее) $\lambda\varphi(x)$ и $\Lambda\varphi(x)$ не равны нулю[1]), производная же $f'(x)$ существует и не равна нулю, а Δx пробегает любую из таких последовательностей значений, при которых соответствующие приращения $\Delta\varphi$ и Δf не равны нулю, то

$$D_\varphi\int_a^x f(t)d\varphi(t)=f(x) \quad \text{почти всюду на } E, \tag{1}$$

$$\lambda_x\int_a^x f(t)d\varphi(t)=\begin{cases}f(x)\lambda\varphi(x) & \text{при } f(x)>0\\ f(x)\Lambda\varphi(x) & \text{при } f(x)<0\end{cases} \text{ почти всюду.} \tag{2}$$

[1]) Здесь под $\lambda\varphi(x)$ и $\Lambda\varphi(x)$ подразумеваются как правые, так и левые производные числа функции $\varphi(x)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Lambda_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = \begin{cases} f(x)\Lambda\varphi(x) & \text{при } f(x)>0 \\ f(x)\lambda\varphi(x) & \text{при } f(x)<0 \end{cases} \quad \text{почти всюду.}$$

и (3) $D_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = f(x)\varphi'(x)$ почти всюду там, где $\varphi'(x)$ существует.

Доказательство:

В самом деле, мы знаем, что

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t) = [f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x)] - \int_x^{x+\Delta x} \varphi(t)df(t);$$

откуда на E

$$\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t)}{\Delta\varphi} = \frac{f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x)}{\Delta\varphi} - \frac{\Delta f}{\Delta\varphi}\,\frac{\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t)df(t)}{\Delta f}$$

(где $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$)

или

$$\frac{1}{\Delta\varphi}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t) = \frac{f(x+\Delta x)[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]+\varphi(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta\varphi} -$$

$$-\frac{\Delta f}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t)df(t)}{\Delta f} = f(x+\Delta x) + \frac{\Delta f}{\Delta\varphi}\cdot\varphi(x) - \frac{\Delta f}{\Delta\varphi}\cdot\frac{1}{\Delta f}\int_x^{x+\Delta_x}\varphi(t)df(t) =$$

$$= f(x+x\Delta) + \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}}{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}\left[\varphi(x) - \frac{1}{\Delta f}\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t)df(t)\right].$$

Выражение в квадратных скобках в пределе обращается в нуль, так как в силу формулы X (δ) из § 1 имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta f}\int_x^{x+\Delta x}\varphi(t)df(t) = \varphi(x) \quad \text{почти всюду на } E.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следовательно, переходя к пределу и принимая во внимание, что по условию теоремы $f'(x)$ существует на E, а производные числа $\lambda\varphi$ и $\Lambda\varphi$ не обращаются в нуль на E, находим

$$D_\varphi \int_a^x f(t)d\varphi(t) = f(x) \quad \text{почти всюду на } E, \text{ так как}$$

$$\lambda_\varphi \int_a^x f(t)d\varphi(t) = \Lambda_\varphi \int_a^x f(t)d\varphi(t) = f(x) \quad \text{почти всюду на } E\ ^1).$$

Найдем теперь $D_x \int_a^x f(t)d\varphi(t)$.

Деля все члены равенства

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t) = f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x) - \int_x^{x+\Delta x} \varphi(t)df(t)$$

на Δx, получим

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)d\varphi(t) = \frac{1}{\Delta x}[f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x)] - \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \varphi(t)df(t) =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] + \varphi(x)\,[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} -$$

$$- \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \varphi(t)df(t) = f(x+\Delta x)\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \varphi(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x\pm\Delta x} \varphi(t)df(t);$$

откуда, принимая во внимание формулу X (γ) из § 1, в пределе будем иметь

$$\lambda_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = \begin{cases} f(x)\lambda\varphi(x) & \text{при } f > 0 \\ f(x)\Lambda\varphi(x) & \text{при } f < 0 \end{cases} \text{ почти всюду.}$$

---

[1]) Интересно отметить, что при $\lambda\varphi \neq 0$ и $\Lambda\varphi \neq 0$ обыкновенная производная интеграла $\int_a^x f(t)d\varphi(t)$ по отношению к $\varphi(x)$ существует даже тогда, когда $\varphi'(x)$ не существует.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Lambda_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = \begin{cases} f(x)\Lambda\varphi(x) & \text{при } f>0 \\ f(x)\lambda\varphi(x) & \text{при } f<0 \end{cases} \text{ почти всюду,}$$

а там, где $\varphi'(x)$ существует, имеем

$$D_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = f(x)\varphi'(x) \text{ почти всюду,}$$

так как в этом случае

$$\lambda\varphi(x) = \Lambda\varphi(x) = \varphi'(x)$$

и, следовательно,

$$\lambda_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = \Lambda_x \int_a^x f(t)d\varphi(t) = D_x \int_a^x f(t)d\varphi(t).$$

ГЛАВА I.

§ 1. Криволинейный интеграл по спрямляемой кривой Жордана.

Во введении мы определили интеграл Стильтьеса и его основные свойства.

Определим теперь криволинейный интеграл по спрямляемой кривой Жордана и покажем, что он, по существу, является интегралом Стильтьеса.

Пусть в плоскости XY задана кривая C, определенная уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где φ и ψ суть непрерывные функции переменного параметра t.

Предположим, что при изменении параметра t от α до β точка (x, y) описывает дугу C_{AB} т. е. дугу, заключенную между точками A и B на кривой C.

Разобьем промежуток (α, β) на части значениями $t_1, t_2, \ldots t_n$. Пусть какому-нибудь значению t_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ соответствует на дуге C_{AB} точка с координатами $x_i=\varphi(t_i)$, $y_i=\psi(t_i)$.

Рассмотрим некоторую функцию $P(x, y)$ непрерывную на на дуге C_{AB}. Пусть λ_i некоторое значение t, заключенное между значениями t_i и t_{i+1}, и пусть (ξ_i, η_i) есть точка дуги C_{AB}, соответствующая значению λ_i.

Криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги C_{AB}, будем называть предел следующей суммы:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \text{при } n \to \infty,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_{C_{AB}} P(x, y)dx.$$

Покажем, что в случае спрямляемости кривой C, т. е. в случае, когда $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются функциями ограниченной вариации, этот предел всегда существует и не зависит ни от способа разбиения дуги C_{AB} точками (x_i, y_i), ни от выбора промежуточных значений ξ_i, η_i.

В самом деле, т. к. на кривой C $P(x, y) = P[\varphi(t), \psi(t)]$, то, обозначая $P[\varphi(t), \psi(t)]$ через $\Phi(t)$, получаем, что

$$P(\xi_i, \eta_i) = P[\varphi(\lambda_i), \psi(\lambda_i)] = \Phi(\lambda_i).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\lambda_i)[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)].$$

Отсюда непосредственно видно, что в случае спрямляемости кривой C, сумма, входящая в правую часть последнего равенства, в пределе дает интеграл Стильтьеса (S). Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) \text{ существует}$$

и по существу является интегралом Стильтьеса от функции $\Phi(t)$ по отношению к $\varphi(t)$.

Таким образом,

$$\int_{C_{AB}} P(x, y)dx = (S)\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t)d\varphi(t).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Свойства криволинейного интеграла $\int_C P(x, y)dx$ по спрямляемой кривой C.

Из самого определения криволинейного интеграла по спрямляемой кривой вытекают следующие его свойства:

I. $\int_{C_{AB}} P(x, y)dx = -\int_{C_{BA}} P(x, y)dx.$

II. $\int_{C_{AB}} P(x, y)dx + \int_{C_{BД}} P(x, y)dx = \int_{C_{AД}} P(x, y)dx.$

III. $\int_{C_{AB}} KP(x, y)dx = K\int_{C_{AB}} P(x, y)dx$, где $K = \text{const}$.

IV. При $P = 1$ имеем $\int_{C_{AB}} dx = a_2 - a_1$, где a_1 и a_2 суть абсциссы точек A и B.

V. $\int_{C_{AB}} 0.dx = 0.$

Доказательства этих пяти свойств, вследствие их очевидности, мы не приводим.

VI. Производная по верхнему пределу от криволинейного интеграла по спрямляемой кривой.

Предположим теперь, что криволинейный интеграл, взятый вдоль спрямляемой кривой C, заданной уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеет переменный верхний предел x.

Тогда его можно рассматривать как функцию верхнего предела. Докажем следующую теорему;

Если $P(x,y)$ есть непрерывная функция x и y, $\varphi(t)$—непрерывная функция ограниченной вариации, E есть множество значений t, при которых $\varphi'(t)$ существует и не равна нулю, а Δt пробегает только такие последовательности значений, при которых соответствующие приращения $\Delta\varphi = \Delta x$ не равны нулю, то производная криволинейного интеграла $\int_{C_{AX}} P(x,y)dx$ по верхнему пределу равна функции $P(x,y)$ почти всюду на E.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство:

Прежде всего введем понятие о производной криволинейного интеграла $\int_{C_{AX}} P(x,y)dx$ по верхнему пределу x, где x есть абсцисса переменной точки X.

Рассмотрим два значения параметра: t и $t+\Delta t$, соответствующие значениям x и $x+\Delta x$.

При переходе от значения x к значению $x+\Delta x$, точка X, очевидно, передвинется в положение точки X'.

Производной криволинейного интеграла $F(x)=\int_{C_{AX}} P(x,y)dx$ по верхнему пределу x на E будем называть следующий предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}{}^{*}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}{}^{*}\frac{1}{\Delta x}\int_{C_{XX'}} P(x,y)dx, \qquad (1)$$

где $\lim^{*}$ означает предел, при условии исключения тех значений $\Delta t\neq 0$, при которых $\Delta x=0$[1]).

Этот предел мы будем обозначать символом $D_x\int_{C_{AX}} P(x,y)dx$.

Итак, рассмотрим интеграл $\int_{C_{AX}} P(x,y)dx$.

Выразив его через интеграл Стильтьеса, будем иметь

$$\int_{C_{AX}} P(x,y)dx=\int^{\beta}\Phi(t)d\varphi(t), \text{ где } \Phi(t)=P[\varphi(t),\ \psi(t)],$$

откуда

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{C_{XX'}} P(x,y)dx=\frac{1}{\Delta\varphi}\int_{t}^{t+\Delta t}\Phi(t)d\varphi(t), \text{ где } \Delta\varphi=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t).$$

---

[1]) Чтобы избежать обращения в нуль знаменателя, а следовательно, чтобы выражение (1) имело смысл, мы распространяем наш предел $\lim^{*}$ лишь на такие последовательности значений Δt, где $\Delta x\neq 0$ при $\Delta t\neq 0$. Совершенно очевидно, что если функция $\varphi(x)$ является возрастающей, то данное ограничение отпадает, т. к. в этом случае Δx обращается в нуль только при $\Delta t=0$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следовательно, переходя к пределу и принимая во внимание формулу X (δ) из § 1 „Введения", будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0}{}^{*} \frac{1}{\Delta x} \int_{C_{XX'}} P(x, y)dx = \Phi(t) = P(x, y) \text{ почти всюду на E,}$$

т. е.

$$D_x \int_{C_{AX}} P(x, y)dx = P(x, y) \text{ почти всюду на E.}$$

Теорема доказана.

Аналогично можно было бы определить криволинейный интеграл $\int_C Q(x, y)dy$ или криволинейный интеграл более общего вида $\int_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy]$.

§ 2. О композициях функций с ограниченной вариацией.

При построении криволинейного интеграла в двухмерном трехмерном и вообще в n-мерном пространствах, мы пользуемся композицией функций; поэтому укажем на следующие свойства композиций.

Теорема 1.

Если $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \ldots,$ $x_n = \varphi_n(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ суть функции ограниченной вариации, то для того, чтобы функция $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$ была ограниченной вариации, достаточно, чтобы функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяла условию Липшица.

Доказательство:

В самом деле, если функция F удовлетворяет условию Липшица т. е. если имеем:

$$|F[\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \ldots, \varphi_n(t_i)] - F[\varphi_1(t_{i+1}), \varphi_2(t_{i+1}), \ldots, \ldots, \varphi_n(t_{i+1})]| \leqslant$$
$$\leqslant A|\varphi_1(t_{i+1}) - \varphi_1(t_i)| + B|\varphi_2(t_{i+1}) - \varphi_2(t_i)| + \ldots + L|\varphi_n(t_{i+1}) - \varphi_n(t_i)|,$$

где A, B, ..., L суть некоторые постоянные числа, а $i = 1, 2, \ldots, m$ $(t_1 = \alpha, t_m = \beta)$, то суммируя эти неравенства получим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{i=1}^{m}\left|F[\varphi_1(t_{i+1}),\ \varphi_2(t_{i+1}),\ldots,\ \varphi_n(t_{i+1})-F[\varphi_1(t_i),\varphi_2(t_i)\ldots,\ \varphi_n(t_i)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant A\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_1(t_{i+1})-\varphi_1(t_i)\right|+B\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_2(t_{i+1})-\varphi_2(t_i)\right|+\ldots+$$

$$+L\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)\right|\leqslant AM_1+BM_2+\ldots+LM_n=C=\text{const},$$

где M_1, $M_2,\ldots,$ M_n суть постоянные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_1(t_{i+1})-\varphi_1(t_i)\right|\leqslant M_1$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_2(t_{i+1})-\varphi_2(t_i)\right|\leqslant M_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)\right|\leqslant M_n,$$

которые имеют место в силу ограниченности вариаций функций

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n.$$

Таким образом мы получили, что

$$\sum_{i=1}^{m}\left|F[\varphi_1(t_{i+1}),\ \varphi_2(t_{i+1}),\ldots,\varphi_n(t_{i+1})]-F[\varphi_1(t_i),\ \varphi_2(t_i),\ldots,\ \varphi_n(t_i)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant C=\text{const},$$

т. е. функция $F[\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\ \varphi_n(t)]$ имеет ограниченную вариацию. Теорема доказана.

Следствие.

Если все функции φ_i являются функциями абсолютно-непрерывными, то и функция $F[\varphi_1(t),\ldots,\ \varphi_n(t)]$ будет абсолютно непрерывной.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Покажем на примере, что высказанное условие является достаточным, но не необходимым. В самом деле, пусть имеем $F(x) = \sqrt{x}$.

Эта функция, как легко видеть, не удовлетворяет условию Липшица.

Пусть далее $x = t^2 \sin^2 \frac{1}{t}$, т. е. x является функцией ограниченной вариации.

Тогда функция

$$F\left(t^2 \sin^2 \frac{1}{t}\right) = \sqrt{t^2 \sin^2 \frac{1}{t}} = \pm t \sin \frac{1}{t}$$

оказывается функцией неограниченной вариации.

Но, однако, если взять функцию ограниченной вариации в виде

$$x = t^4 \sin^4 \frac{1}{t},$$

то функция

$$F\left(t^4 \sin^4 \frac{1}{t}\right) = \sqrt{t^4 \sin^4 \frac{1}{t}} = \pm t^2 \sin^2 \frac{1}{t}$$

имеет ограниченную вариацию, хотя $F(x)$ и не удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2.

Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть неубывающая функция n переменных, т. е. если $F(x_1', x_2', \ldots, x_n') \geqslant F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, когда

$$x_1' \geqslant x_1,\ x_2' \geqslant x_2, \ldots, x_n' \geqslant x_n,$$

то для того, чтобы $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$ $(l \leqslant t \leqslant m)$, была функцией ограниченной вариации, достаточно, чтобы функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ имели конечное число интервалов возрастания и убывания, причем эти интервалы одни и те же для всех функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$.

Доказательство.

Обозначим для краткости $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$ через $\Theta(t)$.

Пусть (α, β) есть интервал возрастания для функций

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t);$$

тогда в интервале (α, β) функция $\Theta(t)$ будет иметь ограниченную вариацию, т. к.

$$V_\alpha^\beta \Theta(t) = F[\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta)] - F[\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)] \leqslant$$
$$\leqslant K = \text{const}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Здесь $V_\alpha^\beta \Theta$ означает полную вариацию функции $\Theta(t)$ на интервале (α, β).

Если бы (α, β) был интервалом убывания, то мы имели бы

$$V_\alpha^\beta \Theta(t) = \left| F[\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta)] - F[\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)] \right| \leqslant K = \text{const.}$$

Возьмем теперь весь интервал (l, m) изменения параметра t. Выберем две функции F_1 и F_2, обладающие на (l, m) следующими свойствами:

$$F_1 = \begin{cases} F \text{ там, где } \varphi_i \text{ не убывают} \\ 0 \text{ там, где } \varphi_i \text{ убывают} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$F_2 = \begin{cases} F \text{ там, где } \varphi_i \text{ убывают} \\ 0 \text{ там, где } \varphi_i \text{ не убывают;} \end{cases}$$

тогда получим $F = F_1 + F_2$, где F_1 и F_2 суть функции ограниченной вариации на (l, m), а следовательно, и F является функцией ограниченной вариации на (l, m). Теорема доказана.

Теорема 3.

Если $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t) \begin{pmatrix} \alpha \leqslant t \leqslant \beta \\ a_1 \leqslant x \leqslant a_2 \end{pmatrix}$ являются функциями непрерывными, а

$$x_{m+1} = \varphi_{m+1}(t), x_{m+2} = \varphi_{m+2}(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$$

—функциями ограниченной вариации, то для того, чтобы существовал интеграл

$$\int_{C_{AB}} \{ P_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n)\, dx_1 + P_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)\, dx_2 + \ldots + P_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) dx_m \}$$

(здесь C_{AB} есть дуга, координаты концов которой суть a_1, b_1 и a_2, b_2), достаточно, чтобы функции $P_1, P_2, \ldots, P_m$ удовлетворяли условию Липшица.

Доказательство:

Пусть функции $P_1, P_2, \ldots, P_m$ удовлетворяют условию Липшица; тогда по теореме 1 функции

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$P_1[\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_n], P_2[\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_n], \ldots, P_m[\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_n]$ имеют ограниченную вариацию, а так как

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t) \text{ непрерывны,}$$

то интеграл

$$\int_{C_{AB}} \Big\{ P_1[x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n]\, dx_1 + P_2[x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n]\, dx_2 + \ldots + P_m[x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n]\, dx_m \Big\},$$

являясь по существу интегралом Стильтьеса (S_1) (см. § 2 „Введения"), существует. Теорема доказана.

ГЛАВА II.

§ 1. Криволинейный интеграл по неспрямляемой кривой Жордана.

Пусть в области R двух переменных x и y дана кривая C определенная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где φ и ψ суть функции только непрерывные.

Пусть, далее, параметр t изменяется от α до β $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ когда точка (x, y) описывает дугу C_{AB} на кривой C.

Обозначим координаты точек A и B, соответственно, через

$$a_1,\ b_1 \text{ и } a_2,\ b_2;$$

Тогда будем иметь:

$$\varphi(t_0) = \varphi(\alpha) = x_0 = a_1,$$
$$\varphi(t_n) = \varphi(\beta) = x_n = a_2,$$
$$\psi(t_0) = \psi(\alpha) = y_0 = b_1,$$
$$\psi(t_n) = \psi(\beta) = y_n = b_2.$$

Выберем две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, которые вдоль рассматриваемой дуги C_{AB} имеют ограниченную вариацию.

Криволинейный интеграл $\int_{C_{AB}} P\,dx + Q\,dy$, взятый вдоль дуги C_{AB}, определим, как предел суммы

$$\sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i],$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

когда $n \to \infty$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \to 0$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} \to 0$, т. е.

$$\int_{C_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{ P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i \right\}. \qquad (1)$$

Покажем, что предел этой суммы существует.
Преобразуем, для этого, эту сумму следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} [P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i] = \sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i)\, x_i - \sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i)x_{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} Q(x_i,y_i)y_i - \sum_{i=1}^{n} Q(x_i,y_i)y_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i)\, x_i - \sum_{i=0}^{n-1} P(x_{i+1},y_{i+1})x_i +$$

$$+ \sum^{n-1} Q(x_i,y_i)y_i - \sum_{=0}^{n-1} Q(x_{i+1},y_{i+1})y_i$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} [\, P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i\,] = P(x_n,y_n)\, x_n - P(x_1,y_1)\, x_0 +$$

$$+ Q(x_n,y_n)\, y_n - Q(x_1,y_1)\, y_o - \sum_{i=1}^{n-1} [\, P(x_{i+1},y_{i+1}) - P(x_i,y_i)\,]\, x_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} [\, Q(x_{i+1},y_{i+1}) - Q(x_i,y_i)\,]\, y_i;$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} [\, P(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\,\Delta y_i\,] = P(x_n,y_n)\, x_n - P(x_1,y_1)\, x_0 +$$

$$+ Q(x_n,y_n)\, y_n - Q(x_1,y_1)\, y_0 - \sum_{i=1}^{n-1} [\, \Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)\,]\, \varphi(t_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} [\, \Psi(t_{i+1}) - \Psi(t_i)\,]\, \psi(t_i),$$

где

$$\Phi(t_i) = P[\varphi(t_i),\ \psi(t_i)] \quad \text{и} \quad \Psi(t_i) = Q[\varphi(t_i),\ \psi(t_i)].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Переходя к пределу и принимая во внимание, что последние две суммы в пределе дают интегралы Стильтьеса, будем иметь

$$\int_{C_{AB}} Pdx+Qdy=[P(a_2,\ b_2)\,a_2-P(a_1,\ b_1)a_1]+[Q(a_2,\ b_2)b_2-$$

$$-\ Q(a_1,\ b_1)\,b_1]-\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)d\Phi(t)-\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)d\Psi(t). \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\int_{C_{AB}} Pdx+Qdy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i] \text{ существует.}$$

Таким образом, мы определили криволинейный интеграл по любой неспрямляемой кривой Жордана, при условии, что вдоль рассматриваемой дуги, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются непрерывными функциями ограниченной вариации.

§ 2. Свойства криволинейного интеграла $\int_C Pdx+Qdy$ по неспрямляемой кривой Жордана.

I. $$\int_{C_{AB}} Pdx+Qdy=-\int_{C_{BA}} Pdx+Qdy.$$

II. $$\int_{C_{AB}} Pdx+Qdy+\int_{C_{BД}} Pdx+Qdy=\int_{C_{AД}} Pdx+Qdy.$$

III. $$\int_{C_{AB}} LPdx+NQdy=L\int_{C_{AB}} Pdx+N\int_{C_{AB}} Qdy,$$

если L и N суть постоянные числа.

IV. $$\int_{C_{AB}} dx+dy=(a_2+b_2)-(a_1+b_1),$$ где a_1, b_1 и a_2, b_2 суть координаты точек A и B.

V. $$\int_{C_{AB}}(P_1+P_2)dx+(Q_1+Q_2)dy=\int_{C_{AB}} P_1dx+Q_1dy+$$

$$+\int_{C_{AB}} P_2dx+Q_2dy.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

VI. $\int\limits_{C_{AB}} 0.dx + 0.dy = 0.$

Все эти свойства легко выводится из формулы (2).
В самом деле, возьмем свойство 1. В силу формулы (2) мы имеем:

$$\int\limits_{C_{BA}} Pdx + Qdy = [P(a_1, b_1)a_1 - P(a_2, b_2)a_2] + [Q(a_1, b_1)b_1 -$$

$$- Q(a_2, b_2)b_2] - \int\limits_{\beta}^{\alpha} \varphi(t)d\Phi(t) - \int\limits_{\beta}^{\alpha} \psi(t)d\Psi(t).$$

А отсюда и следует, что:

$$\int\limits_{C_{AB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{C_{BA}} Pdx + Qdy.$$

Возьмем теперь свойство II.
В силу той же формулы (2) имеем:

$$\int\limits_{C_{BД}} Pdx + Qdy = [P(a_3, b_3)a_3 - P(a_2, b_2)a_2] + [Q(a_3, b_3)b_3 -$$

$$- Q(a_2, b_2)b_2] - \int\limits_{\beta}^{\gamma} \varphi(t)d\Phi(t) - \int\limits_{\beta}^{\gamma} \psi(t)d\Psi(t).$$

Здесь a_3, b_3 суть координаты точки $Д$, а β и γ суть границы изменения параметра t, когда точка (x, y) описывает дугу $C_{BД}$, т. е. $\beta \leqslant t \leqslant \gamma$. Следовательно, после небольшого преобразования мы будем иметь:

$$\int\limits_{C_{AB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{C_{BД}} Pdx + Qdy = [P(a_3, b_3)a_3 - P(a_1, b_1)a_1] +$$

$$+ [Q(a_3, b_3)b_3 - Q(a_1, b_1)b_1] - \int\limits_{\alpha}^{\gamma} \varphi(t)d\Phi(t) - \int\limits_{\alpha}^{\gamma} \psi(t)d\Psi(t),$$

т. е. получим, что

$$\int\limits_{C_{AB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{C_{BД}} Pdx + Qdy = \int\limits_{C_{AД}} Pdx + Qdy.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Аналогично, пользуясь формулами (2) и (I), выводятся и все остальные свойства.

VII. Производная по верхнему пределу от криволинейного интеграла по неспрямляемой кривой Жордана.

Если $P(x, y)=P[\varphi(t), \psi(t)]$ есть непрерывная функция ограниченной вариации, $\varphi(t)$ функция только непрерывная, и если E есть множество тех значений t, при которых производные числа $\lambda\varphi$ и $\Lambda\varphi$ справа и слева не равны нулю, производная же $\Phi'(t)=P'[\varphi(t), \psi(t)]$ существует и не равна нулю, а приращения Δt пробегают лишь такие последовательности значений, при которых соответствующие приращения $\Delta\varphi=\Delta x$ не равны нулю, то производная

$$D_x \int_{C_{AX}} P(x, y)dx = P(x, y) \text{ почти всюду на E.}$$

Доказательство:

$$\text{Пусть } F(x)=\int_{C_{AX}} P(x, y)dx.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}{}^{*} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}{}^{*} \dfrac{1}{\Delta x} \int_{C_{XX'}} P(x, y)dx$ (см. гл. I),

где X' есть точка, соответствующая абсциссе $x+\Delta x$.

Выразив интеграл $\int_{C_{XX'}} P(x, y)dx$ через интеграл Стильтьеса (S_1),

будем иметь

$$\int_{C_{XX'}} P(x, y)dx = \int_{t}^{t+\Delta t} \Phi(t)d\varphi(t), \text{ где } P(x, y)=P[\varphi(t), \psi(t)], \text{ а } P[\varphi(t), \psi(t)]$$

обозначаем через $\Phi(t)$; отсюда, в силу формулы VIII (1) из § 2 „Введения", получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0}{}^{*} \frac{1}{\Delta x} \int_{C_{XX'}} Pdx = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta\varphi} \int_{t}^{t+\Delta t} \Phi(t)d\varphi(t) = \Phi(t) \text{ почти всюду на E,}$$

т. е.

$$D_x \int_{C_{AX}} P(x, y)dx = P(x, y) \text{ почти всюду на E.}$$

Теорема доказана.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 3. Криволинейный интеграл по замкнутому множеству.

Пусть на дуге C_{AB} кривой C Жордана расположено некоторое замкнутое множество E. Обозначая через $\{\delta_n\}$ смежные к E интегралы на C_{AB}, интеграл по множеству E определяем следующей формулой:

$$\int_E Pdx + Qdy = \int_{C_{AB}} Pdx + Qdy - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n} Pdx + Qdy, \qquad (1)$$

если только сумма, входящая в правую часть формулы, абсолютно сходится.

В случае спрямляемости кривой C эта сумма, как легко видеть, всегда абсолютно сходится; причем в этом случае функции P и Q, согласно § 1 главы I, могут быть, вообще говоря, только непрерывными

Если же кривая неспрямляема, то функции P и Q согласно § 1 главы II должны быть выбраны не голько непрерывными, но и с ограниченной вариацией.

В этом случае абсолютная сходимость сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n} Pdx + Qdy$ эквивалентна абсолютной сходимости сумм:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P[\varphi(\beta_n), \psi(\beta_n)]\, \varphi(\beta_n) - P[\varphi(\alpha_n), \psi(\alpha_n)]\, \varphi(\alpha_n) \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ Q[\varphi(\beta_n), \psi(\beta_n)]\, \psi(\beta_n) - Q[\varphi(\alpha_n), \psi(\alpha_n)]\, \psi(\alpha_n) \right\}.$$

В самом деле, применяя формулу (2) из § 1 главы II, сначала ко всей дуге C_{AB}, а затем ко всем смежным к E интервалам на C_{AB} и вычитая из первого результата второй, получим

$$\int_E Pdx + Qdy = [P(a_2, b_2)\, a_2 - P(a_1, b_1)\, a_1] + [Q(a_2, b_2)\, b_2 -$$

$$- Q(a_1, b_1)\, b_1] - \int_E \varphi(t) d\Phi(t) - \int_E \psi(t) d\Psi(t) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P[\varphi(\beta_n), \psi(\beta_n)]\, \varphi(\beta_n) - P[\varphi(\alpha_n), \psi(\alpha_n)]\, \varphi(\alpha_n) \right\} -$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ Q\left[\varphi(\beta_n), \psi(\beta_n)\right]\psi(\beta_n) - Q\left[\varphi(\alpha_n), \psi(\alpha_n)\right]\psi(\alpha_n)\right\}, \qquad (2)$$

где $\Phi(t)=P[\varphi(t), \psi(t)]$ и $\Psi(t)=Q[\varphi(t), \psi(t)]$, а $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ суть интервалы изменения параметра t, соответствующие интервалам $\{\delta_n\}$ дуги C_{AB}.

Из полученной формулы (2) следует, что интеграл $\int\limits_E Pdx + Qdy$ существует только в том случае, если суммы, входящие в правую часть абсолютно сходятся, откуда и следует нужное нам утверждение.

Из этой формулы (2) видно, что интеграл $\int\limits_E Pdx + Qdy$ не зависит от кривой C, на которой расположено множество E, а зависит лишь от самого множества E, т. к. в правой части формулы (2) фигурируют только множество E и концы смежных к E интервалов на C, но которые также являются точками E в силу замкнутости множества E.

Пример непрерывной функции ограниченной вариации $P(x, y)$ на неспрямляемой кривой.

Пусть неспрямляемая кривая C задана уравнениями:

$$x = t \sin\frac{1}{t},\quad y = (t-1)\sin\frac{1}{t-1}.$$

Тогда за $P(x, y)$ можно, например, принять функцию

$$P(x, y) = x^2 + y^2,$$

ибо на кривой C функция

$$P(x, y) = P[\varphi(t), \psi(t)] = t^2 \sin^2\frac{1}{t} + (t-1)^2 \sin^2\frac{1}{t-1}$$

имеет ограниченную вариацию.

ГЛАВА III.

ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПО НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ ЖОРДАНА.

Определим теперь криволинейный интеграл $\int\limits_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по неспрямляемой кривой C Жордана, заданной

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и вдоль которой функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются только непрерывными.

Сохраняя предыдущие обозначения, мы замечаем, что рассмотренные нами интегралы Стильтьеса (S) и (S_1) не могут уже охватить этот вид криволинейного интеграла, т. к. в данном случае обе функции $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ (а также $\Psi(t)$ и $\psi(t)$) являются только непрерывными.

Поэтому, прежде чем приступить к рассмотрению такого вида криволинейного интеграла, мы введем понятие о „несобственном интеграле Стильтьеса".

Предварительно остановимся на следующих понятиях:

Вариация в точке.

Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ имеет в точке l неограниченную вариацию, если в интервале $(l-\delta, l+\delta)$, как бы мало δ ни было, функция $\varphi(t)$ имеет неограниченную вариацию.

Если же при достаточно малом δ, в интервале $(l-\delta, l+\delta)$ функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию, то будем говорить, что функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию в точке l.

Неспрямляемость в точке.

Точку M будем называть точкой неспрямляемости кривой C, если в сколь-угодно малом, окружающем точку M интервале, кривая C не будет спрямляемой.

В противном случае M будет называться точкой спрямляемости.

Заметим, что множество точек неспрямляемости кривой C является всегда множеством замкнутым.

В самом деле, пусть на кривой C имеется бесконечное множество точек неспрямляемости E. Пусть далее A есть предельная точка этого множества E.

Если взять произвольно малый интервал, содержащий точку A, то в этом интервале найдется бесконечное множество точек неспрямляемости, т. к. A есть предельная точка для множества E. Следовательно, точка A будет точкой неспрямляемости, а значит множество E замкнуто.

Спрямляемость множества.

Множество точек E, лежащее на кривой C называется спрямляемым, если можно провести такую спрямляемую кривую $\overline{C}$, на которой лежали бы все точки множества E.

Таким образом, множество E, расположенное на кривой C, будет спрямляемо, если:

1) C спрямляема.

2) C неспрямляема, но проводя прямые отрезки (хорды) по

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

интервалам δ_i на C, смежным к E, получаем спрямляемую кривую $\bar{C}$.

Итак $\bar{C}$ составляется из точек E и из прямых хорд, смежных к E и опирающихся на смежные к E интервалы по кривой C.

Ясно, что если C спрямляема, то и $\bar{C}$ будет спрямляема, так как mes $\bar{C} \leqslant$ mes C.

Несобственный интеграл Стильтьеса.

Если в интеграле $(S)\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ добавочная функция $\varphi(x)$ является непрерывной и имеет в одной точке c $(a \leqslant c \leqslant b)$ неограниченную вариацию, то интеграл Стильтьеса может быть определен следующим равенством:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)d\varphi(x) + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)d\varphi(x) \right], \tag{1}$$

если только этот предел существует.

В случае же, когда $\varphi(x)$ имеет неограниченную вариацию только в концах интервала, т. е. в точках a и b, то интеграл (S) будет определяться так:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{a+\delta_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)d\varphi(x) = \lim_{\substack{\alpha \to a \\ \beta \to b}} \int_\alpha^\beta f(x)d\varphi(x), \tag{2}$$

если только этот предел существует.

Этот предел существует, например, когда основная функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на достаточно малых интервалах $(a,\ a+\delta_1)$ и $(b-\delta_2,\ b)$.

В самом деле, заменяя интеграл $\int_a^b$ через $\int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} + \int_a^{a+\delta_1} + \int_{b-\delta_2}^b$, будем иметь

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)d\varphi(x) + \int_a^{a+\delta_1} f(x)d\varphi(x) + \int_{b-\delta_2}^b f(x)d\varphi(x) \tag{3}$$

или

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)d\varphi(x) + [f(a+\delta_1)\varphi(a+\delta_1) - f(a)\varphi(a)] + [f(b)\varphi(b) -$$

$$-f(b-\delta_2)\varphi(b-\delta_2)] - \int_a^{a+\delta_1} \varphi(x)df(x) - \int_{b-\delta_2}^{b} \varphi(x)df(x). \qquad (3')$$

Из этих формул и вытекает существование интеграла $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$, если функции $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на интервалах $(a, a+\delta_1)$ и $(b-\delta_2, b)$, в силу того, что интегралы, входящие в правые части формул (3) и (3′) в этом случае существуют, как интегралы Стильтьеса.

Если же функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на всем интервале (a, b), то существование интеграла $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ очевидно, т. к. он становится интегралом Стильтьеса (S_1) и при этом формула (3′) принимает вид соотношения, определяющего интеграл (S_1).

В самом деле, записав формулу (3′) в виде:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - \int_a^{a+\delta_1} \varphi(x)df(x) - \int_{b-\delta_2}^{b} \varphi(x)df(x) -$$

$$-\left\{ [f(b-\delta_2)\varphi(b-\delta_2) - f(a+\delta_1)\varphi(a+\delta_1)] - \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)d\varphi(x) \right\},$$

получаем:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - \int_a^{a+\delta_1} \varphi(x)df(x) - \int_{b-\delta_2}^{b} \varphi(x)df(x) -$$

$$-\int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} \varphi(x)df(x).$$

Полагая в последней формуле $\delta_1 = \delta_2 = 0$, находим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$(S_1)\int_a^b f(x)d\varphi(x) = [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - (S)\int_a^b \varphi(x)df(x).$$

Легко видеть, что рассмотренные нами случаи несобственных интегралов можно обобщить и на случай, когда в интервале (a, b) функция $\varphi(x)$ имеет любое конечное множество точек неограниченной вариации, при условии, что $\varphi(x)$ непрерывна.

Обобщение криволинейного интеграла по неспрямляемой кривой Жордана.

Рассмотрим теперь неспрямляемую кривую C Жордана, заданную уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, и предположим, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, взятые вдоль этой кривой, являются только непрерывными.

Обозначим через $\{\delta_n\}$ интервалы смежные к множеству E точек неспрямляемости кривой C на дуге C_{AB}, а через K_i высшую грань абсолютных величин интегралов, вычисленных в интервалах $\{\delta_n'\}$, внутренних к интервалу δ_i.

Допустим, что удовлетворяются следующие условия.

I. Если интегралы вычислены для всякого интервала δ_i', внутреннего к интервалу δ_i, и если (α_i, β_i) и (α_i', β_i') суть интервалы изменения параметра t, соответствующие интервалам δ_i и δ_i' на дуге C_{AB}, то непременно существуют пределы

$$\lim_{\substack{\alpha_n' \to \alpha_n \\ \beta_n' \to \beta_n}} \int_{\alpha_n'}^{\beta_n'} \Phi(t)d\varphi(t) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{\alpha_n' \to \alpha_n \\ \beta_n' \to \beta_n}} \int_{\alpha_n'}^{\beta_n'} \Psi(t)d\psi(t),$$

соответственно равные интегралам

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \Phi(t)d\varphi(t) \quad \text{и} \quad \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \Psi(t)\psi(t),$$

где через $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ попрежнему обозначены, соответственно, функции $P[\varphi(t), \psi(t)]$ и $Q[\varphi(t), \psi(t)]$.

II. Каково бы ни было замкнутое множество E (плотное или нет), во всяком интервале Δ на дуге C_{AB} всегда найдется такой интервал Δ', что часть множества E, содержащаяся на Δ'—спрямляема, т. е. функции $\Phi(t)$ интегрируема по отношению к $\varphi(t)$, а $\Psi(t)$ по отношению к $\psi(t)$ на всей части e множества E, содержащейся в Δ'.

III. Каково бы ни было замкнутое множество E, во всяком

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

интервале Δ на дуге C_{AB} найдется всегда другой интервал Δ', на котором

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n$$

абсолютно сходится.

Покажем, каким образом при выполнении введенных условий вычисляется криволинейный интеграл по неспрямляемой кривой C.

Рассмотрим два случая:

а) Множество E точек неспрямляемости дуги C_{AB}—спрямляемо и имеет меру, вообще говоря, отличную от нуля [1]).

В этом случае вычисляем сначала интегралы по всем смежным к E интервалам на дуге C_{AB},

т. е. $$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} Pdx + Qdy,$$

предполагая, что эта сумма абсолютно сходится.

Далее проводим вспомогательную спрямляемую кривую C′, на которой лежат все точки множества E (что возможно в силу спрямляемости множества E), и вычисляем интеграл по множеству E следующим образом:

$$\int_E Pdx + Qdy = \int_{C'} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\sigma_i} Pdx + Qdy,$$

где $\{\sigma_i\}$ суть смежные к E интервалы на C′.

В силу спрямляемости кривой C′ интеграл $\int_{C'} Pdx + Qdy$ существует, а сумма $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\sigma_i} Pdx + Qdy$ абсолютно сходится.

Таким образом мы получаем интеграл по множеству E. Прибавив к нему сумму интегралов по смежным к E интервалам

[1]) Кривые, имеющие спрямляемые или неспрямляемые множества точек неспрямляемости, рассматривались также в работах проф. А. С. Кованько „Криволинейные интегралы по неспрямляемым квадрируемым кривым" и в работе проф. Вениаминова, касающейся формы неспрямляемых кривых, „Sur une propriété métrique des courbes de M. Jordan".

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

на C_{AB}, мы находим интеграл по дуге C_{AB} в виде формулы:

$$\int_{C_{AB}} Pdx + Qdy = \int_{E} Pdx + Qdy + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} Pdx + Qdy.$$

б) Множество E точек неспрямляемости—неспрямляемо.

В силу условия II во всяком интервале Δ_i на C_{AB} можно найти такой интервал Δ_i', где часть множества E, содержащаяся в Δ_i', спрямляема.

Возьмем один из таких интервалов Δ_s', причем этот интервал выберем таким, чтобы на нем удовлетворялось и условие III. Проведем вспомогательную кривую C′, проходящую через все точки множества e_s (e_s означает часть множества E, содержащуюся в Δ_s'), что возможно в силу спрямляемости множества e_s.

Тогда интеграл по множеству e_s определится так:

$$\int_{e_s} Pdx + Qdy = \int_{C'} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy,$$

где γ_i суть интервалы смежные к множеству e_s по вспомогательной спрямляемой кривой C′.

Здесь $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy$ абсолютно сходится, так как кривая C′ спрямляема.

Далее, так как $\int_{\Delta_s'} Pdx + Qdy = \int_{e_s} Pdx + Qdy + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} Pdx + Qdy$,

то покажем, что на Δ_i' сумма $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} Pdx + Qdy$ абсолютно сходится.

В самом деле, в силу условия I имеем

$$\lim_{\delta_i' \to \delta_i} \int_{\delta_i'} Pdx + Qdy = \int_{\delta_i} Pdx + Qdy.$$

С другой стороны, согласно нашим предположениям,

$$\lim_{\delta_i' \to \delta_i} \operatorname{Sup} \left| \int_{\delta_i'} Pdx + Qdy \right| = K_i,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

откуда, суммируя, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\delta_i' \to \delta_i} \operatorname{Sup} \left| \int_{\delta_i'} Pdx + Qdy \right| = \sum_{i=1}^{\infty} K_i$$

или

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\delta_i' \to \delta_i} \left| \int_{\delta_i'} Pdx + Qdy \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{\delta_i} Pdx + Qdy \right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} K_i.$$

А следовательно, принимая во внимание условия III, заключаем, что сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i} Pdx + Qdy \text{ абсолютно сходится.}$$

Взяв интегралы по всем таким интервалам Δ_s', мы найдем криволинейный интеграл по дуге C_{AB} за исключением некоторого замкнутого множества точек $\mathfrak{E}$ (которые не попали внутрь взятых нами интервалов Δ_s'), нигде не плотного на C_{AB}, т. е. найдем интегралы по всем смежным к $\mathfrak{E}$ интервалам на дуге C_{AB}.

Таким образом, если мы определим интеграл по множеству $\mathfrak{E}$ то интеграл по дуге C_{AB} будет полностью вычислен.

В силу условия II во всяком интервале Δ_i на дуге C_{AB}, содержащем точки из $\mathfrak{E}$, можно найти другой интервал Δ_i', тоже содержащий точки из $\mathfrak{E}$, образующие спрямляемое множество e_i'.

Взяв тогда интегралы по всем таким множествам e_i', мы найдем интеграл в более широких интервалах, смежных к некоторому замкнутому множеству $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}$, нигде не плотному на $\mathfrak{E}$. Обозначим $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_1$ через H_1.

Поступая с $\mathfrak{E}_1$ так же как и с $\mathfrak{E}$, мы найдем интеграл в еще более широких интервалах, смежных к некоторому замкнутому множеству $\mathfrak{E}_2 \subset \mathfrak{E}_1$, нигде не плотному на $\mathfrak{E}_1$.

Обозначим $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$ через H_2.

Продолжая дальше наш процесс, мы замечаем, что

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + H_1,\ \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 + H_2,\ \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3 + H_3, \ldots,\ \mathfrak{E}_{n-1} = \mathfrak{E}_n + H_n.$$

Откуда следует, что

$$\mathfrak{E} = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots\ldots + H_n + \mathfrak{E}_n.$$

Но так как

$$\mathfrak{E}_1 \supset \mathfrak{E}_2 \supset \mathfrak{E}_3 \supset \ldots\ldots$$

и кроме того, принимая во внимание наши условия, мы заключаем, что после конечного или счетного (опираясь на свойства

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

символов 2-го класса, также как и при тотализации Данжуа) числа таких операций это множество $\mathfrak{E}_n$ (препятствующее в вычислению интеграла по всей дуге C_{AB}) исчезнет и мы получим, что:

$$\mathfrak{E} = H_1 + H_2 + H_3 + \dots$$

а отсюда

$$\int_{H_1} + \int_{H_2} + \int_{H_3} + \dots = \int_{\mathfrak{E}}.$$

Прибавив к этому интегралу $\int_{\mathfrak{E}}$ сумму интегралов по смежным к $\mathfrak{E}$ интервалам на C_{AB} т. е. $\sum_{s=1}^{\infty} \int_{\Delta'_s} P\,dx + Q\,dy$ (предполагая эту сумму абсолютно сходящейся) мы найдем интеграл по всей дуге C_{AB} в виде формулы

$$\int_{C_{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\mathfrak{E}} P\,dx + Q\,dy + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{\Delta'_s} P\,dx + Q\,dy.$$

Пример неспрямляемой кривой $y = f(x)$, которая спрямляема на множестве точек неспрямляемости.

Построим на интервале (a, b) совершенное множество Кантора P и определим на (a, b) функцию $y = f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ на множестве } P. \\ (x-\alpha_n)\ \sin\dfrac{1}{x-\alpha_n} + (x-\beta_n)\ \sin\dfrac{1}{x-\beta_n} \text{ на смежных к } P \text{ интервалах } (\alpha_n, \beta_n) \text{ на } (a, b). \end{cases}$$

Так как функция $f(x)$ равна нулю на P, то, следовательно, кривая $y = f(x)$ будет спрямляема на P.

Концы же всех смежных к P интервалов (α_n, β_n) будут точками неспрямляемости, т. к. в этих точках функция $y = f(x)$ имеет неограниченную вариацию.

Таким образом мы получили, что кривая $y = f(x)$ спрямляема на P, в то время как P состоит из точек неспрямляемости, т. е. получили кривую $y = f(x)$, спрямляемую на множестве точек неспрямляемости.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ГЛАВА IV.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПО НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ.

В своей работе „Криволинейные интегралы по неспрямляемым квадрируемым кривым", проф. А. С. Кованько определяет интеграл по неспрямляемой кривой при помощи формулы Грина.

Чтобы установить смысл интеграла по незамкнутому контуру, формула Грина записывается в этой работе следующим образом:

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \iint_{s},$$

где C_1 и C_2 незамкнутые контуры, но в сумме составляющие замкнутый контур C ($C_1 + C_2 = C$).

Далее, устанавливается смысл интеграла по неспрямляемой квадрируемой кривой. Для этого берутся две точки A и B и соединяются двумя кривыми: одной C квадрируемой, а другой $\overline{C}$— спрямляемой; тогда получается замкнутый контур $(C\overline{C})$, и, применяя формулу Грина, находится, что:

$$\int_{C_{AB}} + \int_{\overline{C}_{BA}} = \iint_{(C\overline{C})}$$

или

$$\int_{C_{AB}} = \iint_{(C\overline{C})} + \int_{\overline{C}_{AB}}. \qquad (1)$$

Таким образом, если имеем неспрямляемую квадрируемую кривую C_{AB}, то мы замыкаем ее, соединяя точки A и B спрямляемой кривой $\overline{C}_{BA}$, и к полученному замкнутому контуру $C + \overline{C}$ применяем формулу (1). Причем доказывается, что значение интеграла по неспрямляемой кривой C_{AB} не зависит от выбора вспомогательной кривой $\overline{C}_{BA}$.

Этот метод применяется сначала в тех случаях, когда неспрямляемая кривая C является регулярной, т. е. когда любые ее две точки можно соединить спрямляемой кривой, но затем обобщается и на случай, когда кривая C имеет конечное или даже приводимое множество иррегулярных точек.

Формула

$$\int_{C_{AB}} = \iint_{(C\overline{C})} + \int_{\overline{C}_{AB}}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

применяется к любому контуру, ограниченному любой спрямляемой кривой, а также к квадрируемой односвязной области, ограниченной неспрямляемой кривой.

Функции P и Q предполагаются при этом непрерывными и обладающими непрерывными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Переходя к частным видам контуров, проф. А. С. Кованько рассматривает кривые, заданные уравнением вида $x=\varphi(y)$, причем эти кривые предполагаются, вообще говоря, иррегулярными и могущими иметь не только конечное, но и любое, нигде не плотное, совершенное множество точек неспрямляемости.

Функция $\varphi(y)$ предполагается только непрерывной, а функция $P=F(y)$, взятая вдоль этой кривой, непрерывной и имеющей непрерывную производную $F'(y)$.

Ясно, что $F(y)$ является функцией ограниченной вариации.

В этом случае интеграл по неспрямляемой кривой получает новый, более простой вид, не содержащий двухкратного интеграла, а именно:

$$\int_C F(y)dx = -\int_{y_0}^{y} F'(\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha + [F(y)\varphi(y) - F(y_0)\varphi(y_0)]. \qquad (1)$$

Сравним эту формулу (1) с формулой (2) главы II моей работы и покажем, что формула (2) является более общей и содержит в себе как частный случай формулу (1).

В самом деле, для интеграла $\int_C F(y)dx$ формула (2) запишется в виде:

$$\int_C F(y)dx = [F(y)\varphi(y) - F(y_0)\varphi(y_0)] - \int_{y_0}^{y} \varphi(\alpha)dF(\alpha).$$

Здесь $\varphi(\alpha)$ есть функция только непрерывная, а $F(\alpha)$ непрерывная функция ограниченной вариации.

Полагая в последней формуле, что функция $F(\alpha)$ еще обладает непрерывной производной $F'(\alpha)$, получим формулу (1).

Но с другой стороны метод проф. А. С. Кованько выходит за пределы кривых Жордана, в то время как в моей работе я ограничиваюсь лишь кривыми Жордана.

Проблема единства.

Пусть даны функции $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, $Q_1(x, y)$ и $Q_2(x, y)$, причем известно, что вдоль кривой C справедливы равенства:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P_1(x, y) = P_2(x, y)$$

$$Q_1(x, y) = Q_2(x, y).$$

Спрашивается, будет ли справедливо равенство

$$\int_C P_1 dx + Q_1 dy = \int_C P_2 dx + Q_2 dy.$$

Другими словами, если $P = Q = 0$ на C, то будет ли

$$\int_C P dx + Q dy = 0?$$

В этом состоит проблема единства определения интеграла по данной кривой C.

В работе проф. А. С. Кованько эта проблема находит положительный ответ в случае, когда кривая C спрямляема. В случае же неспрямляемости кривой C проблема единства разрешается им пока лишь в частных случаях.

В самом деле, в случае, когда кривая C неспрямляема, функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют неограниченную вариацию, а следовательно, если $P = Q = 0$, отсюда еще не вытекает, что

$$\int_C P dx + Q dy = 0.$$

Поэтому проблема единства в работе А. С. Кованько для случая неспрямляемой кривой не доказывается в общем виде, а доказывается лишь для частных случаев, когда имеются дополнительные условия. Например, проблема единства разрешается в положительном смысле для уже рассмотренного нами частного вида контуров, в результате которого получена формула (1), а также для случая, когда кривая C выражена уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ есть функция только непрерывная, а $\psi(t)$ непрерывная функция ограниченной вариации, и кроме того, когда непрерывная функция $P(x, y) = F(t)$ допускает непрерывную производную $\frac{\partial P}{\partial y}$. Последняя имеет место, когда $F'(t)$ непрерывна.

Что же касается моего метода определения интеграла по неспрямляемой кривой, то проблема единства разрашается сразу для общего случая.

В самом деле, возьмем опять формулу (2)

$$\int_{C_{AB}} P dx + Q dy = [P(a_2, b_2)a_2 - P(a_1, b_1)a_1] + [Q(a_2, b_2)b_2 -$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$- Q(a_1, b_1)b_1] - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)d\Phi(t) - \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)d\Psi(t). \qquad (2)$$

Так как функции φ и ψ непрерывны, а $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ непрерывные функции ограниченной вариации, то ясно, что интегралы Стильтьеса (S), входящие в правую часть этой формулы (2) при $\Phi(t) = \Psi(t) = 0$, обращаются в нуль, а следовательно, равна нулю и левая часть.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

L'INTÉGRALE DE STIELTIES ET LES INTÉGRALES CURVILIGNES LE LONG DES COURBES NON RECTIFIABLES.

A. S. Djanoumiantz (Tomsk).

Dans le travall présent on traite l'intégrale curviligne le long d'une courbe non rectifiable de Jordan, en appliquant la théorie de Stielties.

1. A l'aide de la théorie de l'intégrale de Stielties, l'existence de l'intégrale curviligne $\int P dx + Q dy$ le long d'une courbe non rectifiable de Jordan est déterminée à condition que les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ le long de l'arc de la courbe soient non seulement continues, mais à variation bornée.

Les propriétés essentielles de cette intégrale y sont également déduites.

2. Grâce à l'introduction de l'idée de l'intégrale curviligne le long d'une multiplicité fermée et de l'intégrale impropre de Stielties l'intégrale curviligne le long d'une courbe non rectifiable de Jordan est déterminée également quand les fonctions $P(x. y)$ et $Q(x, y)$ sont seulement continues.

Dans ce cas la méthode analogue au procès de la totalisation de Denjoy y est appliquée.

ЛИТЕРАТУРА.

Книги:

1. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin—Leipzig 1935).
2. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных ф-ций (Москва—Ленинград 1934 г.).
3. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions (Paris 1928).
4. Saks, Théorie de l'intégrale (Warszawa 1935).
5 Vallée—Poussin, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire (Paris 1928).
6. Гливенко, Интеграл Стильтьеса (Москва—Ленинград 1936 г.).
7. Kamke, Das Lebesguesche Integral (Berlin—Leipzig 1923).
8. Фихтенгольц и Натансон, Криволинейные и кратные интегралы (Москва—Ленинград 1937 г.).

Журналы:

1. Кованько А. С., Криволинейные интегралы по неспрямляемым квадрируемым кривым (Изв. Азербайдж. Ун-та т. 6, 1927 г.).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2. Weniaminoff, Sur une propriété métrique des courbes de M. Jordan (Мат. сборн. т. 31, 3–4, 1924 г.).
3. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд (Мат. сборн. т. XXX, I, 1916 г.).
4. Лузин, К основной теореме интегрального исчисления (Мат. сборн. XXVIII, 2, 1912 г.).
5. Хинчин, Исследование о строении измеримых функций (Мат. сборн. XXXI, 3–4, 1934 г.).
6. Фихтенгольц, Об абсолютно непрерывных функциях (Мат. сборн. XXXI, 2, 1923 г.).
7. Хинчин, О процессе интегрирования Данжуа (Мат. сборн. т. XXX, 4, 1918 г.).
8. Меньшов, Взаимоотношения между определениями интеграла Бореля и Данжуа (Мат. сборн. т. XXX, 2, 1916 г,).
9. Hefftter, Kurven–und Stieltjes–Integral (Math. Zeitschr, Bd. 40, 1935).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ МЕРОМОРФНЫХ В ЕДИНИЧНОМ БИЦИЛИНДРЕ.

Г. А. Бюлер (Томск).

§ 1. Задачей настоящей работы является обобщение некоторых понятий и теорем, характеризующих асимптотическое поведение функции $f(z)$, $(z=x+iy)$ мероморфной в единичном круге $|z|\leqq 1$, на случай функции $f(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных z_1 и z_2, где $z_1=x_1+iy_1$; $z_2=x_2+iy_2$, мероморфной в единичном бицилиндре

$$\mathfrak{B}=\mathrm{E}[|z_k|<1]^{1}), \qquad (k=1,\ 2).$$

Во всем нижеследующем мы будем опираться на результаты работы Ст. Бергмана:—„Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes I“ [2]) и будем пользоваться введенными им понятиями и обозначеннями, о которых я коротко скажу в настоящем параграфе. В вышеуказанной работе изучаются свойства функции $f(z_1, z_2)$ мероморфной в четырехмерном пространстве $\mathfrak{B}=\mathrm{E}[|z_k|<\infty]$, а в качестве апроксимирующих областей рассматривается простейший класс областей, обладающих исключительной граничной поверхностью (Ausgezeichnete Randfläche)[3]), а именно бицилиндры $\mathfrak{B}=\mathrm{E}[|z_1|\leqq r_1,\ |z_2|\leqslant Ar^{\alpha}]$, ($A$ и α—const) с исключительной граничной поверхностью

$$F^2(r)=\mathrm{E}[|z_1|=r_1,\ |z_2|=Ar^{\alpha}], \quad (\alpha>0, \quad A>0). \qquad (1.1)$$

Так же, как в случае одного комплексного переменного, совокупность $\sum_{r=0}^{\infty} C(r)$, где $C(r)=\mathrm{E}[|z|\leqq r]$, покрывает всю плоскость, так и совокупность

---

[1]) $\mathrm{E}[|z_k|<1]$ означает множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z_k|<1$.

[2]) Compositio mathematica, vol. 3, fasc. 2, 1936.

[3]) Эта поверхность для известного класса функций $f(z_1, z_2)$ играет роль, аналогичную границе плоской области для ф-ий $f(z)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{r=0}^{\infty} F^2(r) = S^3 \tag{1.2}$$

покрывает трехмерное многообразие S^3.

Соответственно этому, естественно рассматривать рост мероморфной функции $f(z_1, z_2)$ на гиперповерхности S^3 и определить порядок роста величиной

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T[F^2(r), f]}{\log r}, \tag{1.3}$$

где $T[F^2(r), f]$ характеристическая функция, определяемая аналогично случаю функций 1 к. п, (одного комплексного переменного)

$$T[F^2(r), f] = m[F^2(r), f] + N[F^2(r), f], \tag{1.4}$$

где

$$m[F^2(r), f] = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}[f(z_1, z_2)]\, d\varphi_1 d\varphi_2, \ (|z_k| = r_k, k = 1, 2), \tag{1.5}$$

$$N[F^2(r), f] = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log[f(z_1, z_2)]\, d\varphi_1 d\varphi_2 - \log[f(0,0)]. \tag{1.6}$$

Там доказывается, что:

1. Функция $T[F^2(r), f]$ не убывающая от r.
2. Если $f = f_1 + f_2$, то

$$T[F^2(r), f] = T[F^2(r), f_1] + T[F^2(r), f_2]. \tag{1.7}$$

3. Если функция $f(z_1, z_2)$ целая в рассматриваемой области, то справедливо неравенство

$$T[F^2(r), f] \leqq \overset{+}{\log} M[F^2(r), f] \leqq \prod_{k=1}^{2} \frac{\rho_k + r_k}{\rho_k - r_k} \cdot T[F^2(\rho), f], \tag{1.8}$$

где

$$M[F^2(r), f] = \max_{\text{на } F^2(r)} f(z_1, z_2) \text{ и } \rho_k > r_k$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M[F^2(r), f]}{\log r} = \lim \frac{\log T[F^2(r), f]}{\log r}. \tag{1.9}$$

4. Имеет место обобщенная 1 теорема Nevanlinna

$$T[F^2(r), (f-a)^{-1}] = T[F^2(r), f] + 0(1). \tag{1.10}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Далее аналогично тому, что функция $f(z_1)$ принимает значение a в круге $|z| \leqq r$, на множестве $\mathfrak{n}^\circ(a)$ точек $\left\{ z^{(1)}(a), \ldots z^{(\nu)}(a) \right\}$ и рассматриваются такие величины как,

1) $\nu[r_1(f-a)^{-1}]$ число точек $\mathfrak{n}^\circ(a)$ в круге $|z| \leqq r$.

2) Сумма $\mathbf{D}_\lambda[r_1, (f-a)^{-1}] = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} [z^{(\mu)}(a)]^{-\lambda}$, $\nu[r, (f-a)^{-1}]$.

В случае двух комплексных переменных функция $f(z_1, z_2)$ принимает значение a на двухмерном многообразии $\mathfrak{N}^2(a)$ и можно рассматривать куски поверхностей $\{\mathfrak{N}(a).\mathfrak{B}(r_1, r_2)\}$ *) и аналогично (1) и (2) некоторые средние величины A и D_2, о которых нужно сказать несколько подробней.

Рассмотрим сечение совокупностей S^3 и $\mathfrak{N}^2(0)$ **) с пространством $R^3 = \mathrm{E}[arg\ z_2 = \varphi_2 = \mathrm{const}]$ и положим

$$s^2 = S^3 R^3; \quad \mathfrak{n}^{(1)}(0) = \mathfrak{N}^2(0) R^3; \tag{1.11}$$

$$s_\Delta{}^2 = S_\Delta{}^3 R^3, \quad t_\Delta{}^3 = T_\Delta . R^3; \tag{1.12}$$

где

$$S_\Delta{}^3 = \mathrm{E}[|z_1| = r_1 | z_2| = Ar^\alpha = \Delta] \quad \text{и}$$

$$T_\Delta = \mathrm{E}[|z_1| \leqslant r; \ |z_2| \leqslant Ar \ \leqslant \Delta]. \tag{1.13}$$

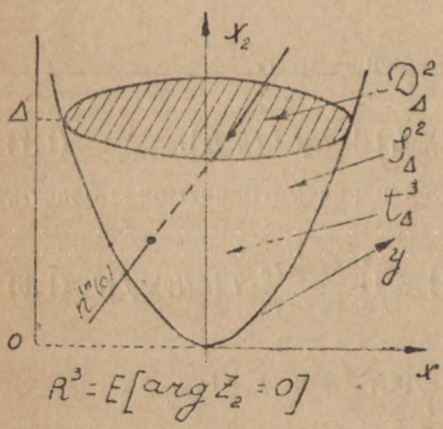


Рис. 1.

Пусть будет теперь $r^{(k)}(\varphi_2^\circ) = |z_2| = r_2 = \mathrm{const}$ плоскость, на которой лежит по крайней мере одна точка сечения $[\mathfrak{n}^{(1)}(0).s_\Delta{}^2]$; пусть $r_2{}^{(k)}(\varphi_2^\circ)$, $(k = 1, 2, 3\ldots)$ соответствующие величины r_2 и пусть

$$\delta^{(k)}(\varphi_2^\circ) = \tag{1.14}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \nu[r+\varepsilon, f^{-1}(z,\ A(r+\varepsilon)^\alpha,\ e^{i\varphi_2^\circ})] - \nu[r-\varepsilon,\ f(z,\ A(r-\varepsilon)^\alpha e^{i\varphi_2^\circ})] \right\}$$

скачек функции $\nu[r, f^{-1}(z,\ Ar^\alpha e^{i\varphi_2})]$ соответствующий значению

*) Общая часть множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{B}$ $(r_1, r_2) = \mathrm{E}\ [|z_k| \leqq r_k]$.

**) Для простоты рассматривается функция $f(z_1, z_2) = 0$, т. е. $a = 0$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$r = r_1^{(k)}(\varphi_2^\circ) = \left[[r_2^{(k)}(\varphi_2^\circ) \cdot \frac{1}{A}]^{\frac{1}{\alpha}} \right.$, при чем $\nu[r, f^{-1}(z, \delta_1)]$ означает число нулей функции $f(z, \delta_1)$ в круге $|z| \leqslant r$ при δ_1 постоянном.

1. Назовем:—„Моментом степени λ сечения $\mathfrak{R}^2(0).S_\Delta^3$ “ величину

$$D_\lambda[F^2(\sigma), f^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r_1^{(k)}(\varphi_2^\circ) \leqq \sigma} \delta^{(k)}(\varphi_2)[r_1^{(k)}(\varphi_2)]^{-\lambda} \right\} d\varphi_2, \quad (1.15)$$

$$\left(\sigma = \left(\frac{1}{A}.\Delta\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Круг $|z_1| \leqslant \sigma$ плоскости $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $(|z_2| = r_2)$ пересекает систему линий $\mathfrak{n}^{(1)}(0)$ в точках

$$z_1 = a^{(k)}(r_2 e^{i\varphi_2}), \ (k = 1, 2, 3 \ldots\ldots, \ \nu \equiv \nu[\sigma, f^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})]).$$

2. Назовем величину

$$A[\sigma; |z_2| = \Delta, f^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \nu[\sigma, f^{-1}(z, \Delta e^{i\varphi_2})] \right\} d\varphi_2 \quad (1.16)$$

„Числом листов поверхностей $\mathfrak{R}^2(0)$ в гиперповерхности $\mathfrak{D}_\Delta{}^3$“, где

$$\mathfrak{D}_\Delta{}^3 = \sum_{\varphi_2=0}^{\varphi_2=2\pi} \mathfrak{d}^2, \text{ где } \mathfrak{d}^2 = \mathrm{E}[|z_1| \leqslant \sigma, \ z_2 = \Delta e^{i\varphi_2}].$$

С целью исследовать рост введенных величин A и $D\lambda$, вводится еще целый ряд вспомогательных величин $\mathfrak{n}$, E, L, $\mathfrak{E}$.

Полагая

$$\mathfrak{n}[F^2(r), f^{-1}] = \frac{dN[F^2(r), f^{-1}]}{d\log r}, \quad (1.17)$$

где $f(z, z_2) = \frac{n(z_1, z_2)}{P(z_1, z_2)}$, $n(z_1, z_2)$ и $F(z_1, z_2)$ целые функции в области $\mathfrak{B} = \mathrm{E}[|z_k| < \infty]$ *), находится, что

$$\mathfrak{n}[F^2(r), f^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \nu[r, f^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})] - \right.$$

*) При исследовании, вместо функции $f^{-1}(z_1, z_2)$, можно рассматривать функцию $n^{-1}(z_1, z_2)$, т. к. очевидно $N[F^2(r), f^{-1}] = N[F^2(r), n^{-1}]$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-\alpha\mathfrak{E}[r_2, r, f^{-1}(z, z_2e^{i\varphi_2})]\Big\}d\varphi_2 - \alpha\nu[r_2, f^{-1}(0, z)], \quad (1.18)$$

где

$$\mathfrak{E}[r_2, r, f^{-1}] = \frac{dL[r, f^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2})]}{d\log r_2} \quad (1.19)$$

и

$$L[r, f^{-1}] = \sum_{s=1}^{\nu[r, f^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2})]} \log|a_s(z_2)|. \quad (1.20)$$

И величина

$$E_\lambda[F^2(r), f^{-1}] = \int_0^r \frac{dn[F^2(r)f^{-1}]}{r^2} \quad (1.21)$$

которая исследуется в предположении:

1°. Исключены точки $\{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\}$ такие, что $n(z_1, z_2^{(k)}) = 0$ при $z_1^{(k)} = 0$, или

2°. Одновременно $n(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}) = 0$ и $\left[\frac{dn(z_1, z_2)}{dz_1}\right]_{z=z_v^{(k)}} = 0.$

I. $n(z_1, z_2)$ имеет на многообразии $z_1 = R_k$, $z_2 = AR_k^\alpha \equiv T_k$ только конечное число нулевых точек.

II. $n(z_1, z_2)$ не имеет множителей вида $z_2 = \text{const}$.

Получается после соответствующих преобразований

$$E_\lambda[F^2(\sigma), f^{-1}] = D_\lambda[F^2(\sigma), f^{-1}] + \sum_s \alpha A^{|\mu|}|\zeta_s|^{-\mu} +$$

$$+\sum \frac{l_k}{R_k^\lambda} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\lambda^2\int_0^\sigma \frac{L[r, f^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2})]}{r^{\lambda+1}}\,dr +\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{\sigma^\lambda}\left[\frac{dL[\sigma, f^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2})]}{d\log r_2}\right]_{r_2=\Delta} + \frac{\lambda}{\sigma^\lambda}L[\sigma, f^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2})]\right\}d\varphi_2. \quad (1.22)$$

Далее, для ограничения величин, входящих в выражение (1.22), вытекает необходимость знать порядок роста функции $f(z_1, z_2)$ на двух гиперповерхностях, λ на $S^3 = \sum_{r=0}^{\infty} F^2(r)$ и λ на $S^{*3} = \sum_{r=0}^{\infty} F^{*2}(r^*)$, где

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$F^{*2}(r^*) = E[|z_1| = r^*,\ |z_2| = Br^{*\beta}],\ (\beta < \alpha,\ B < A). \quad (1.23).$$

Полагая

$$\rho = \frac{1}{A}\rho_2^{\frac{1}{\alpha}};\ \rho^* = \frac{1}{B}\rho_2^{\frac{1}{\beta}},\ (\rho_2 > 1)$$

и пользуясь тем, что по определению

$$\int_0^{\rho^*} \frac{\nu[t, f^{-1}(z,\ \rho_2 e^{i\varphi_2})]}{t}\, dt = N[\rho^*, f^{-1}(z,\ \rho_2 e^{i\varphi_2})] - N[\rho_1, f^{-1}(z,\ \rho_2 e^{i\varphi_2})]$$

или

$$\nu[\rho, f^{-1}(z,\ \rho_2 e^{i\varphi_2})] \leqslant \frac{N[\rho^*, f^{-1}(z,\ \rho_2 e^{i\varphi_2}) - N[\rho, f^{-1}(z,\ \rho_2 e^{i\varphi_2})]}{\log \rho^* - \log \rho}, \quad (1.24)$$

но т. к.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N[\rho, f^{-1}(z,\ \rho_2 e^{i\varphi_2})]\, d\varphi_2 = N[F^2(\rho), f^{-1}(z_1,\ z_2) - \quad (1.24a)$$

$$- N[\rho_2, f^{-1}(0,\ z)],$$

то из (1.24) легко получается, что рост величин A, L и $\dfrac{dL}{d\log r}$ не превосходит максимального порядка роста функции $f(z_1, z_2)$ на гиперповерхностях S^3 и S^{*3}.

И, наконец, опираясь на вспомогательную теорему: „Если $f(z_1, z_2)$ функция мероморфная в $\mathfrak{B} = E[|z_k| < \infty]$, $k=1, 2$, то для данной величины λ $(\lambda > 0)$ интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\int_r^\infty \frac{N[F^2(r) f^{-1}]}{t^\lambda}\, dt,\quad \int_r^\infty \frac{\mathbf{n}[F^2(r), f^{-1}]}{t^{\lambda+1}}\, dt, \\ &\int_r^\infty \frac{d\mathbf{n}[F^2(r), f^{-1}]}{t^\lambda}\, dt = \lim_{\sigma\to\infty} E_\lambda[F^2(\sigma), f^{-1}] \end{aligned}\right\} \quad (1.25)$$

одновременно сходятся или расходятся“, и имея в виду ограничения величин, входящих в выражение (1.22), получается верхняя граница для роста величины $\mathbf{D}_\lambda[F^2(\sigma), f^{-1}]$ при $\sigma \to \infty$.

§ 2. I. Переходя к изучению функций мероморфных в единичном бицилиндре

$$\mathfrak{B} = E[|z_k| < 1],\ (k = 1, 2), \quad (2.1)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

порядок роста функции $f(z_1, z_2)$ на гиперповерхности

$$S^3 = \sum_{r=0}^{r=1} F^2(r),$$

где

$$F^2(r) = E[|z_1| = r_1, |z_2| = r^\alpha], \ (r < 1, \ \alpha > 0),$$

определим через

$$\lambda = \lim \frac{\log T[F^2(r), f(z_1, z_2)]}{\log \frac{1}{1-r}}. \tag{2.2}$$

В виду того, что $T[F^2(r), f^{-1}]$ неубывающая функция от r для всякого $\varepsilon > 0$ и ограниченного $\lambda > 0$, имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda-\varepsilon} < T[F^2(r), f] < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Аналогично тому, как это сделано в вышеуказанной работе Бергмана, введем величины E_λ и D_λ:

$$E_\lambda[F^2(r), n^{-1}(z_1, z_2)] = \int_0^r \frac{d\mathfrak{n}[F^2(r), n^{-1}(z_1, z_2)]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^\lambda}, \tag{2.4}$$

$$D_\lambda[F^2(r), n^{-1}(z_1, z_2)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{r<\sigma} \delta_s(\varphi_2)[1 - r_1^{(s)}(\varphi_2)]^\lambda d\varphi_2, \tag{2.5}$$

где значения величин σ, $\delta_s(\varphi_2)$ и $r_1^{(s)}(\varphi_2)$ будут указаны ниже.

Если мы исключим все значения r, где на поверхности $|z_1| = r$ лежат точки $\{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\}$, для которых

1°. $f(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}) = 0$ при $z_1^{(k)} = 0$, $(|z_1^{k)}| = R_k)$,

2°. Одновременно $f(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}) = 0$ и $\frac{d}{dz}[f(z_1 z_2)] = 0$, $z_1 = z_1^{(k)}$,

тогда для всех остальных значений r мы можем величину $N[F^2(r), n^{-1}]$ диференцировать по r. Действительно, выражение

$$\mathfrak{n}[F^2(r), n^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum\left(1 - \alpha\frac{d\log|a_k(z_2)|}{d\log r_2}\right)\right]d\varphi_2 + \\ + \alpha\nu[r_2, n^{-1}(0, z)] \tag{2.6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

обращается в бесконечность в точках, где $a_k(z_2)=0$ или

$$\frac{da_k(z_2)}{dz_2}=\infty, \text{ т. к.}$$

$$\frac{d\ \log\ |a_k(z_2)|}{d\ \log\ r_2}\leqslant\left|\frac{d\ \log\ a_k(z_2)}{d\ \log\ r_2}\right|=\left|\frac{1}{a_k(z_2)}\cdot\frac{da_k(z_2)}{dz_2}\cdot\frac{dz_2}{dr_2}\cdot\frac{1}{r_2}\right|,$$

но, как раз, эти точки мы исключаем.

Обозначим величины r, точек, исключенных условиями 1^0 и 2^0, через $R_1\ R_2,\ldots\ldots,\ R_s$, $(R_k<R_{k+1})$; назовем эти величины r, особенными координатами.

Для простоты дальнейших исследований ограничимся случаем, когда:

I. $n(z_1, z_2)$ имеет на многообразии $E[|z_1|=R_k;\ |z_2|=R_k^{\alpha}=T_k]$ только конечное число нулевых точек.

II. $n(z_1, z_2)$ не имеет множителей вида $z_2-\text{const}$.

Выделяя особенные точки произвольно малой окрестностью $R_k=R_k+\varepsilon>r>R_k-\varepsilon=\rho_k$, $(\varepsilon>0)$ составим выражение E_λ для каждого интервала $P_k\leqslant r\leqslant\rho_{k+1}$

$$\int_{P_k}^{\rho_{k+1}}\frac{dn[F^2(r),\ n^{-1}]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{P_k}^{\rho_{k+1}}\frac{dv[r,\ n^{-1}(z_1 r_2 e^{i\varphi_2})]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}}-\right.$$

$$\left.-\alpha\int_{P_k}^{\rho_{k+1}}\frac{d\mathfrak{E}[r_2, r;\ n^{-1}(z_1 r_2 e^{i\varphi_2})]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}}\right\}d\varphi_2+\alpha\int_{P_k}^{\rho_{k+1}}\frac{dv[r_2, n^{-1}(0, z)]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}}. \quad (2.7)$$

Пусть будет s особенных координат $R_k(k=1, 2,\ldots, s)$ в интервале $0\leqslant r\leqslant\sigma<1$.
Тогда

$$\int_0^{\sigma}{}^{\varepsilon}=\int_0^{\rho_1}+\sum_{k=1}^{k=s-1}\int_{P_k}^{\rho_{k+1}}+\int_{P_s}^{\sigma}{}^{*)}. \quad (2.7a)$$

Согласно выражения (2.7) пишем

---

*) $\int_0^{\sigma}{}^{\varepsilon}$ означает, что исключены координаты особенностей.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\mathfrak{n}\,[F^2(r), n^{-1}]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\,I_{1,\varepsilon}(\sigma, \varphi_2) - \alpha I_{2,\varepsilon}(\sigma, \varphi_2) + \alpha I_{3,\varepsilon}(\Delta)\,]\, d\varphi_2, \tag{2.8}$$

где $\Delta = \sigma^{\alpha}$ и

$$I_{1,\varepsilon} = \int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\nu\,[\,n^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})\,]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}}, \tag{2.9}$$

$$I_{2,\varepsilon} = \int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\mathfrak{E}\,[r_2, r, n^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}}, \tag{2.10}$$

$$I_{3,\varepsilon} = \int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\nu\,[\,r_2, n^{-1}(0, z)\,]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}} = \int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}} \frac{d\nu\,[\,r_2, n^{-1}(0, z)}{\left(\frac{1}{1-r_2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\lambda}}. \tag{2.11}$$

В случае, если функции $\mathfrak{n}\,[F^2(r), n^{-1}]$ непрерывны во всех особенностях, будем иметь

$$E\,[F^2(r),\ n^{-1}] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{dn\,[F^2(r),\ n^{-1}]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}} = \int_0^{\sigma} \frac{dn\,[F^2(r),\ n^{-1}]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}}. \tag{2.12}$$

Если, напротив, $\mathfrak{n}\,[F^2(r), n^{-1}]$ имеет разрывы в точках $r = R_k$ и скачок функции в них равен L_k, то величина E_λ изменится на сумму $\sum_{k=1}^{s} \frac{L_k}{\left(\frac{1}{1-R_k}\right)^{\lambda}}$. Если далее обозначим нули функции $n(0, z_2)$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ерез ζ_k (не находящиеся на окружности $|z_2| = T_k$), то получим, мея дело с функцией одного комплексного переменного z_2,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_{3,\varepsilon}(\Delta) = \sum_{|\zeta_s|<0} (1 - |\zeta_s|^{\frac{1}{\alpha}})^{\lambda}. \qquad (2.13)$$

Переходим к выражениям $I_{2,\varepsilon}$ и $I_{3,\varepsilon}$.

Пусть будет

$$T_\Delta = E[|z_2| \leqslant |z_1|^{\alpha} \leqslant \Delta]; \quad S_\Delta^3 = E[|z_2| = |z_1|^{\alpha} \leqslant \Delta]$$

$$t_\Delta^3 = T_\Delta R^3; \qquad S_\Delta^2 = S_\Delta^3 . R^3$$

их сечение с пространством $R^3 = E[arg.z_2 = \varphi_2 - \text{const}]$.

Обозначим двухмерные нулевые многообразия функции через $\Re^2$ и полагаем

$$m_\Delta' = \Re^2 . t_\Delta^3. \qquad (2.14)$$

В силу предположения II (ст. 171) можно изобразить m_Δ' в виде

$$z_1 = a_k(r_2 e^{i\Phi_2})\ ^*), \ k = 1, 2, \ldots\ldots, \nu[r, n^{-1}(z_1 z_2 e^{i\Phi_2})], \qquad (2.14)$$

где $a_k(r, e^{i\Phi_2})$ нулевые точки функции $n(z, r_2 e^{i\Phi_2})$ содержащиеся в круге $|z_1| \leqslant r$.

Обозначим через $r_1^{(s)}(\varphi_2)$ величины r, для которых функция $[r, n^{-1}(z_1, r_2 e^{i\Phi_2})$ делает внезапный скачек. Пусть $\delta_s(\varphi_2)$ величина этого скачка. В силу предположения I значения φ_2, для которых величина $r_1^{(s)}(\varphi_2)$ совпадает с R_k, образуют совокупность самое большее измеримую и, очевидно, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{1,\varepsilon}(\sigma, \varphi_2) d\varphi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{|z^{(s)}(\varphi_2)| \leqslant \sigma} \delta_s(\varphi_2) (1 - |z_1^{(s)}(\varphi_2)|)^{\lambda} d\varphi_2. \qquad (2.15)$$

Для дальнейшего рассмотрим точки $\{z_1 = a_k(T_j e^{i\varphi_2});\ z_2 = T_j e^{i\varphi_2}\}$ пересечения m_Δ' с кругом $E[|z_1| \leqslant R_j, z_2 = T_j e^{i\varphi_2}]$. Обозначим через

$D_1^{(s)}$—особенные точки, для которых имеется $|a_k(T_j e^{i\varphi_2})| < R_j$,

$D_3^{(s)}$—особенные точки, для которых $|a_k(T_j e^{i\varphi_2})| = R_j$, и, наконец,

$D_3^{(s)}$—определяемые условиями 1° и 2° (стр. 170).

---

*) $\varphi_2 = \Phi_2 - \text{const}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Рассмотрим интеграл $I_{2,\varepsilon}(\sigma, \varphi_2)$.

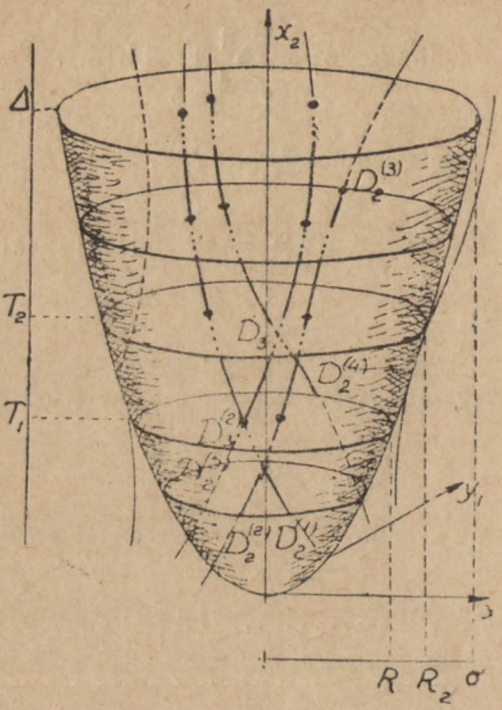


Рис. 2.

Интегрируя по частям, получим

$$(2.16)\qquad \int_{\rho_k}^{\rho+1} \frac{d\mathfrak{E}[r_2, r, n^{-1}(z_1 r_2 e^{i\varphi_2})]}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}} =$$

$$= \left[(1-r)^{\lambda} \sum \frac{d \log a_k}{d \log r_2} + \frac{\lambda r}{\alpha}(1-r)^{\lambda-1} \sum_{r} \log |a_k|\right]_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} +$$

$$+ \frac{\lambda}{\alpha} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \sum_{r}' \log |a_k| (1-r)^{\lambda-2}(\lambda r - 1)\, dr_1 \left(\sum_{r} \equiv \sum_{|a_k|, |z_2| \leqq r}, \; z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}\right).$$

Так как подинтегральное выражение обращается в логарифмическую бесконечность только в точках $D_3^{(s)}$, то существует

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\sigma-\varepsilon}\sum_r \log|a_k(z_2)|\,(1-r)^{\lambda-2}(\lambda r-1)\,dr=$$

$$=\int_0^{\sigma}\sum_r \log|a_k(z_2)|\,.(1-r)^{\lambda-2}(\lambda r-1)\,dr. \qquad (2.17)$$

Полагая $r_k^{\alpha}=T_k$ и $\rho_k^{\alpha}=\tau_k$ можем записать суммы, входящие в выражение (2.16), согласно (2.7а), в следующем виде:

$$(1-\sigma)^{\lambda}\left[\left(\sum_r \frac{d\,\log|a_k|}{d\,\log r_2}\right)_{r_2=\Delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda\sigma}{\alpha}(1-\sigma)^{\lambda-1}\left(\sum_r \log^{+}|a_k|\right)_{r_2=\Delta}\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{s}\left\{\sum_r\left[(1-P_k)^{\lambda}\left(\frac{d\,\log|a_k|}{d\,\log r_2}\right)_{r_2=T_k}-(1-\rho_k)^{\lambda}\left(\frac{d\,\log|a_k|}{d\,\log r_2}\right)_{r_2=\tau_k}\right]+\right.$$

$$+\frac{\lambda}{\alpha}\sum_{P_k}\left[(1-P_k)\,P_k\,\log|a_k(T_k e^{i\varphi_2})|\right]-$$

$$\left.-(1-\rho_k)^{\lambda-1}\rho_k\sum_{\rho_k}\log|a_k(\tau_k e^{i\varphi_2})|\right\}=i(\varphi_2)-\left\{i_2(\varphi_2)+\frac{\lambda}{\alpha}\,i_3(\varphi_2)\right\}. \qquad (2.18)$$

Во первых получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(\varphi_2)d\varphi_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(1-\sigma)^{\lambda}\left[\mathfrak{E}\Delta_1\sigma_1 n^{-1}(z\Delta e^{i\varphi_2})\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda\sigma}{\alpha}(1-\sigma)^{\lambda-1}L\left[\sigma, n^{-1}(z,\Delta e^{i\varphi_2})\right]\right]d\varphi_2 \qquad (2.19)$$

(значения $\mathfrak{E}$ и L см. стр. 168 § 1).

Рассмотрим теперь $i_2(\varphi_2)$. В каждой точке $D_1^{(s)}$ функции

$$\log a_k(z_2) \quad \text{и} \quad \frac{d\,\log|a_k(z_2)|}{dr_2}=Re\left[\frac{d\,\log a_k(z_2)}{dz_2}\,.e^{i\Phi_2}\right],$$

регулярные и, следовательно, обладают непрерывной производной, откуда

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[(1-P_k)^{\lambda}\left(\frac{d\log|a_k(r_2e^{i\Phi_2})|}{dr_2}\right)_{r_2=T_k} - \right.$$

$$\left. -(1-\rho_k)\left(\frac{d\log|a_k|(r_2e^{i\Phi_2})|}{dr_2}\right)_{r_2=\tau_k}\right]=0. \qquad (2.20)$$

Те же рассуждения можно повторить для $i_3(\varphi_2)$ в каждой точке $D_1^{(s)}$. В случае точек $D_2^{(s)}$, часть членов суммы (2.19) исчезает и вторая часть дает постоянную конечную величину. В силу предположения I это обстоятельство наблюдается только для конечного числа значений φ_2 и, следовательно, не будет влиять на результат интегрирования по φ_2.

Наконец, в случае точек $D_3^{(s)}$ можно найти такую окрестность b особенной точки $\{Z_1,\ Z_2=T_2e^{i\varphi_2}\}$, что для $a_k(z_2)$ справедливо разложение

$$a_k(z_2)=Z_1+\beta(z_2-Z_2)^{l_k}, \qquad (2.21)$$

но здесь, в отличие от правильных точек, будет $Z_1=0$ или l_k рациональное не целое. Если выбрать δ и η_s $(s=1,\ 2)$ настолько малыми, чтобы точки $\{z_1=a_k(r_2e^{i\varphi_2}),\ z_2=r_2e^{i\varphi_2}\}$, где

$$\psi_2=\Phi_2-\delta\leqslant\varphi_2\leqslant\Phi_2+\delta\equiv\Psi_2;\ \tau_k\equiv T_k-\eta_2\leqslant r_2\leqslant T_k+\eta_2=T_k,$$

находились в окрестности b, получим, в окрестности особой точки,

$$\int_{\psi_2}^{\Psi_2}(1-P_k)^{\lambda}\left(\frac{d\log|a_k(r_2e^{i\varphi_2})}{d\log r_2}\right)_{r_2=T_k}d\varphi_2 -$$

$$-\int_{\psi_2}^{\Psi_2}(1-\rho_k)^{\lambda}\left(\frac{d|a_k(r_2e^{i\varphi_2})|}{d\log r_2}\right)_{r_2=r_k}d\varphi_2. \qquad (2.22)$$

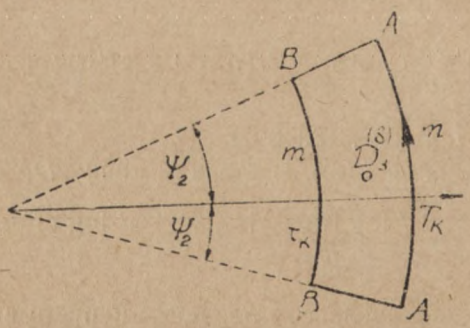


Рис. 3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Но так как

$$\left(\frac{d\ \log\ |a_k(r_2e^{i\varphi_2})|}{d\ \log\ r_2}\right)_{r=T_k} d\varphi_2 = \left[\frac{dI_m\,[\log\ a_k(r_2e^{i\varphi_2})]}{d\varphi_2}\right]_{r_2=T_k} d\varphi_2 =$$

$$= I_m\,[d\ \log\ a_k(T_ke^{i\varphi_2})],$$

то (2.22) преобразуется в

$$I_m\,[(1-R_k)^\lambda \int_{I_ke^{i\psi_2}}^{T_ke^{i\Psi_2}} d\ \log\ a_k(\zeta) - (1-\rho_k)^\lambda \int_{\tau_ke^{i\psi_2}}^{\tau_ke^{i\Psi_2}} d\ \log\ a_k(\zeta)\,] =$$

$$= I_m\,[(1-R_k)^\lambda \int_{AmA'B'm'BA} d\ \log\ a_k(\zeta)\,] +$$

$$+ I_m \Big\{ [(1-\rho_k^z)^\lambda - (1-P_k)^\lambda] \int_{r_ke^{i\Psi_2}}^{\tau_ke^{i\psi_2}} d\ \log\ a_k(\zeta) -$$

$$- (1-P_k)^\lambda \int_{A'}^{B'} d\ \log\ a_k(\zeta) - (1-P_k)^\lambda \int_{B}^{A} d\ \log\ a_k(\zeta) \Big\},\ (\zeta = r_2e^{i\varphi_2}). \tag{2.23}$$

Теперь мы имеем две группы точек $D_3^{(s)}$, для первой $z_1 \neq 0$, для второй $Z_1 = 0$.

Если в формуле (2.23) ε и, следовательно, η_s стремить к нулю, когда δ фиксировано, увидим, что для первой группы точек $I_m\left[\int q\ \log\ a_k(\zeta)\right.$ стремиться к нулю, и для второй группы точек к $2\pi\, l_k(1-R_k)^\lambda$. Все остальные члены, при $\eta_s \to 0$ стремяться к нулю, т. к. $[(1-p_k)^\lambda - (1-P_k)^\lambda = -\underset{\lambda-1}{R_k}.\varepsilon + \ldots$. и первый член второй строки стремиться к нулю, как $\varepsilon\ \log\ \varepsilon$, а у последних двух путь интегрирования стремится к нулю.

Делая тоже с интегралом $\int_{\psi_2}^{\Psi_2} i_3(\varphi_2)d\varphi_2$ получим, что он дает нуль.

В силу условий I и II и предполагая, что $n\,[F^2(r), n^{-1}]$ остается непрерывной для $r_1 = R_k$, из формул (2.12), (2.13), (2.15), (2.17), (2.19) получаем:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$E_\lambda[F^2(\sigma), n^{-1}] = \mathbf{D}_\lambda[F^2(\sigma), n^{-1}]^{*}) + \alpha \sum_{|\zeta|=\Delta} \left(1 - |\zeta_s|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\lambda\int_0^{\sigma}(1-r)^{\lambda-2}(1-r\lambda)\,L[r, n^{-1}(z_1 r_2 e^{i\varphi_2})]\,dr - \right.$$

$$\left. - \alpha(1-\sigma)^\lambda\,\mathfrak{E}[\Delta, \sigma, n^{-1}(z, \Delta e^{i\varphi_2})] - \lambda\sigma(1-\sigma)^{\lambda-1}\,\mathfrak{L}[\sigma, n^{-1}(z_1\Delta e^{i\varphi_2})]\right\} d\varphi_2 +$$

$$+ \sum_{R_k<\sigma} l_k(1-R_k)^{\lambda\,**}). \qquad (2.24)$$

Лемма I. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция (z_1, z_2) была порядка $\lambda > 0$ есть то, что интеграл

$$\int_0^{'} T[F^2(r), f]\,(1-r)^{\mu-1}\,dr \qquad (2.25)$$

сходится для $\mu > \lambda$ и расходится для $\mu < \lambda$.

Необходимость. Если порядок функции $f(z_1 z_2)$ равен λ, то условие (2.25) выполняется.

Действительно, по условию $T[F^2(r), f] < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+\varepsilon}$ и подставляя в интеграл, видим справедливость нашего утверждения.

Достаточность. Если условие (2.25) выполнено, то порядок функции равен λ.

По условию $\int_r^{'} T[F^2(r), f(1-r)^{\mu-1}\,dr < M$, но тогда при r достаточно близком к единице

$$\int_r^{'} T[F^2(r), f]\,(1-r)^{\mu-1}\,dr < \varepsilon$$

и, так как $T[F^2(r), f]$ функция возрастающая от r, то

---

*) D_λ см. | 2.5 |.

**) Если $f = \frac{n}{p}$, то можно заменить в T, n, N, n^{-1} на f^{-1}.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$T[F^2(r), f]\frac{(1-r)^\mu}{\mu} < \int_r^{'} T[F^2(r), f](1-r)^{\mu-1}dr < \varepsilon$$

и тем более

$$T[F^2(r), f] < \left(\frac{1}{1-r}\right)^\mu, \quad \text{ч. т. д.}$$

Лемма II. Для данной величины $\lambda > 0$ интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\int_{r_0}^{'} N[F^2(r), f](1-r)^{\lambda-1}dr, \int_{r_0}^{'} n[F^2(r), f](1-r)^\lambda dr \\ &\int_{r_0}^{'}(1-r)^{\lambda+1}dn[F^2(r), f] = \lim_{r\to 1} E_{\lambda+1}[F^2(r), f] \end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство

$$\int_{r_0}^{r} N[F^2(r), f]^\lambda (1-r)^{\lambda-1}dr = \frac{1}{\lambda}\int_{r_0}^{r} n[F^2(r), f](1-r)^\lambda dr + \\ + \frac{1}{\lambda}(1-r_0)^\lambda N[F^2(r), f]_{r=r_0} - \frac{1}{\lambda}(1-r)^\lambda N[F^2(r), f]$$

(интегрируем по частям)

Из сходимости интеграла $\int_r^{'} n[F^2(r), f[1-r)^\lambda dr$ следует сходимость $\int_r^{'} N[F^2(r), f](1-r)^{\lambda-1}dr$.

Обратно. В силу того, что $N[F^2(r), f]$ возрастающая функция от r, если $\int_r^{'} N[F^2(r), f](1-r)^{\lambda-1}dr < \varepsilon$, то $\frac{1}{\lambda}(1-r)^\lambda N[F^2(r), f] < \varepsilon$ и интеграл $\int_r^{'} n[F^2(r), f](1-r)^\lambda dr$ сходится.

Также

$$\int_{r_0}^{r} n[F^2(r), f](1-r)^\lambda dr = \frac{1}{\lambda+1}\int_{r_0}^{r}(1-r)^{\lambda+1}dn[F^2(r), f] +$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$+\frac{1}{1+\lambda}(1-r_0)^{\lambda+1}n[F^2(r_0),f]-\frac{1}{\lambda+1}(1-r)^{\lambda+1}n[F^2(r),f].$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем доказательство леммы II.

Теорема I.

Если для данной величины λ, $(\lambda>0)$ выражения

$$\int_{r_0}^{r} m[F^2(r),f](1-r)^{\lambda-1}dr \text{ и } E_{\lambda+1}[F^2(r),f] \qquad (2.27)$$

сходятся, тогда порядок функции $f(z_1, z_2)$ самое большее λ. Обратно, если порядок функции $f(z_1, z_2)$ не превосходит данного числа $\lambda>0$, то величины (2.27) сходятся.

1. на основании леммы II заключаем, что

$\int_{r_0}^{r} N[F^2(r),f](1-r)^{\lambda-1}dr$ сходится, но тогда сходится также интеграл

$$\int_{r_0}^{r} T[F^2(r),f](1-r)^{\lambda-1}dr=$$

$$=\int_{r_0}^{r}\left\{m[F^2(r),f]+N[F^2(r),f]\right\}(1-r)^{\lambda-1}dr$$

и по лемме 1 порядок функции равен λ.

2. По условию $\int_{r_0}^{r} N[F^2(r),f](1-r)^{\lambda-1}dr$ существует и по лемме II, также существует $E_{\lambda+1}[F^2(r),f]$.

Переходим к ограничению величин $A[S_\Delta^3,f]$ и $D_\lambda[F^2(\sigma),f]$ когда $\sigma^\alpha=\Delta<1$.

Так как из (1.16), (1.24) и (1.24а) следует, что

$$A[S_\Delta^3,f]\leqslant\frac{1}{\log\sigma^*-\log\sigma}\Big\{N[F^{*2}(\sigma^*),f]-N[F^2(\sigma),f]+$$
$$+N[\sigma^{*\beta},f(0,z^*)]-N[\sigma^\alpha,f(0,z)]\Big\}, \qquad (2.28)$$

где $F^{*2}(\sigma^*)=E[|z_1|=\sigma^*,|z_2|=\sigma^{*\beta}]$, $F^2(\sigma)=E[|z_1|=\sigma,|z_2|=\sigma_\alpha]$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и полагая $\sigma = \Delta^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma^* = \Delta^{\frac{1}{\beta}}$, $\Delta < 1$, $\beta < \alpha$, будем иметь:

если $T[F^{*2}(\sigma^*), f] \leqslant \left(\frac{1}{1-\rho^*}\right)^{\lambda}$, $T[F^2(\sigma), f] \leqslant$

$\leqslant \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{\lambda}$, что

$$A[S_{\Delta^3}, f] \leqslant \left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^{\tau+\varepsilon}, \tag{2.29}$$

т. к. $\sigma > \sigma^*$ и $\tau = \max\left(\lambda \text{ и } \Lambda\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Для ограничения величины D_λ, предварительно найдем ограничения для выражений $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L[r_1 f(r_1 r_2 e^{i\varphi_2})]\,d\varphi_2$

и $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dL[r, f(z_1 r_2 e^{i\varphi_2})]}{d\log r_2}\,d\varphi_2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L[r_1 f(z, r_2 e^{i\varphi_2})]\,d\varphi_2 = \log r \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu[r, f(z_1 r_2 e^{i\varphi_2})]\,d\varphi_2 -$$

$$- N[F^2(r), f] + N[r_2, f(0, z)] =$$

$$= \log r\, A[S_{\Delta^3}, f] - N[F^2(r), f] + N[r_2, f(0, z)] < \left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^{\tau}. \tag{2.30}$$

Также

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dL[r, f(z, r_2 e^{i\varphi_2})]}{d\log r_2}\,d\varphi_2 = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu[r, f(z, r_2 e^{i\varphi_2})]\,d\varphi_2 -\right.$$

$$\left. - \frac{r}{1-r} n[F^2(r), f(z_1, z_2)]\right\} + \nu[r_2, f(0, z)] < C\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+r+\varepsilon}. \tag{2.31}$$

Подставляя найденные ограничения в выражение (2.24), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\lambda\int_0^{\sigma}(1-r)^{\lambda-2}(1-\lambda r) L[r, f(z, r_2 e^{i\varphi_2})]\,dr -\right.$$

$$\left. - \alpha(1-\sigma)^{\lambda}\, \mathfrak{E}[\Delta, \sigma, f(z, \Delta e^{i\varphi_2})] - \lambda\sigma(1-\sigma)^{\lambda-1} L[\sigma, f(z, \Delta e^{i\varphi_2})]\right\} d\varphi_2 \leqslant$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\leqslant c + c_1\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^{1+r+\varepsilon-\lambda} + c_2\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^{\tau+1-\lambda}(1-\lambda\sigma) + c_3\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^{\tau-\lambda}. \tag{2.32}$$

Пусть $\lambda > \Lambda$, в противном случае мы стали бы рассматривать не $\mathbf{D}_\lambda$, а $\mathbf{D}_\Lambda\,[F^{*2}(\sigma^*), f]$.

В силу полученных ограничений и того, что величина $E_{\lambda+1}$ сходится, можно сделать заключение:

Если $f(z_1, z_2)$ мероморфная функция в единичном бицилиндре и если

$$T[F^2(\sigma), f] < \left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^\lambda, \quad T[F^{*2}(\sigma^*), f] < \left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^\lambda,$$

где $F^{*2}(\sigma^*) = E[|z_1| = \sigma^*, |z_2| = \sigma^{*\beta}]$ и $F^2(\sigma) = E[|z_1| = \sigma, |z_2| = \sigma^\alpha]$, $(\alpha < \beta)$,

тогда

$$\lim_{\sigma \to 1} \mathbf{D}_{\lambda+1}[F^2(\sigma), f] = \lim_{\sigma \to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum \delta_s(\varphi_2)\,[1 - r_1^{(s)}(\varphi_2)]^{\lambda+1}\, d\varphi_2 \tag{2.33}$$

существует для всякого $\lambda > 0$ [1]).

В силу обобщенной первой теоремы Nevanlinna найденные соотношения не нарушаются, если заменить функцию $f(z, z_2)$ функцией $[f(z_1, z_2) - a]^{-1}$.

В случае ограниченной функции [2]) получим как следствие:

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{|z_1^{(s)}| < \sigma} \delta_s\,[1 - r_1^{(s)}(\varphi_2)]\, d\varphi_2 \tag{2.34}$$

существует, это выражение можно считать обобщением теоремы Бляшке для функций, одного комплексного переменного, мероморфных в единичном круге.

§ 3. О порядке функции целой в единичном бицилиндре.

В случае, если функция $f(z_1, z_2)$ целая в пространстве $R = E[|z|] < \infty$ имеют место соотношения (1.7) и (1.8).

Для случая функции целой лишь в единичном бицилиндре $\mathfrak{B} = E[|z| \leqslant 1]$ неравенство

---

[1]) Все доказательство проведено в предположении гипотез 1^0, 2^0, I, II (стр. 168) и что порядок роста функции $f(0, z)$ также не превышает λ.

[2]) Доказательство легко получается, т. к. в этом случае имеет место неравенство

$$c\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-\varepsilon} < T[F^2(r), f] < c\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\varepsilon}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$T[F^2(r), f] \leqslant \overset{+}{\log} M[F^2(r), f] \leqslant \prod_{k=1}^{2} \frac{\rho_k + r_k}{\rho_k - r_k} \cdot T[F^2(\rho), f]$$

остается верно, т. к. оно непосредственно получается из формулы Пуассона.

Но равенство (1.8) уже не будет иметь места, т. к. при $\rho \to 1$ (по условию $0 < r < \rho < 1$) выражение $\prod_{k=1}^{2} \frac{\rho_k + r_k}{\rho_k - r_k}$ в пределе, стремится к бесконечности, как величина $\frac{1}{(1-r)^2}$ при $r \to 1$.

Действительно, полагая $\rho_1 = \rho$ и $r_1 = r$, тогда $\rho_2 = \rho^\alpha$, $r_2 = r^\alpha$ и будем иметь

$$\prod_{k=1}^{2} \frac{\rho_k + r_k}{\rho_k - r_k} = \frac{\rho + r}{\rho - r} \cdot \frac{\rho^\alpha + r^\alpha}{\rho^\alpha - r^\alpha} = \frac{k(\rho, r)^*)}{(\rho - r)^2} = \frac{k(r)}{[\varphi(r) - r]^2}, \text{ где } \rho = \varphi(r).$$

Так как величина $k(r)$ ограниченная при $r \to 1$, то

$$\lim_{r \to 1} \frac{\log \prod_{k=1}^{2} \frac{\rho_k + r_k}{\rho_k - r_k}}{\log \frac{1}{1-r}} = \lim_{r \to 1} \left(\frac{-2 \log (\rho - r)}{\log \frac{1}{1-r}} + \frac{\log k(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \right) =$$

$$= \lim_{r \to 1} \left(\frac{-2 \log (1-r)}{-\log (1-r)} + \frac{2 \log \left(1 - \frac{1-\rho}{1-r}\right)}{\log (1-r)} \right) =$$

$$= 2 + \lim_{r \to 1} \frac{2 \log \left(1 - \frac{1-\varphi(r)}{1-r}\right)}{\log (1-r)} \qquad (2.35)$$

по условию $r < \rho < 1$, следовательно при $r \to 1$, $\rho = \varphi(r)$ должно стремится к единице по определенному закону, а именно так, чтобы $\lim_{r \to 1} \varphi'(r) = \varphi'(1)$ была меньше единицы (предполагается непрерывность функции $\varphi(r)$ в точке $r = 1$).

Но это условие вполне выполнимо, т. к. оно выражает тот факт, что ρ должно приближаться к единице не быстрее чем r.

Например, полагая $\rho = \varphi(r) = \frac{1+r}{2}$ видим, что $r < \rho < 1$ и

---

*) $k(\rho, r) = \frac{(\rho + r)(\rho^\alpha + r^\alpha)}{(\rho^{\alpha-1} + \rho^{\alpha-2} r + \ldots + r^{\alpha-2} \rho + r^{\alpha-1})}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\lim\limits_{r\to 1}\varphi'(r)=\varphi'(1)=\dfrac{1}{2}<1$, т. е. условие выполняется и второй член равенства (2.35) стремится к нулю.

Таким образом, будет иметь место следующее неравенство

$$\lim_{r\to 1}\frac{\log[F^2(r),f]}{\log\frac{1}{1-r}}\leqslant\lim\frac{\log M[F^2(r),f]}{\log\frac{1}{1-r}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\log T[F^2(r),f]}{\log\frac{1}{1-r}}+2. \qquad (2.36)$$

И так как рост характеристических функций $T[F^2(r),f]$ и $T[F^2(\rho),f]$ рассматривается относительно одной и той же гиперповерхности S^3, то можно утверждать, что: *рост целой функции $f(z_1,z_2)$ может отличаться от роста ее характеристической функции самое большее на два.*

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

SUR QUELQUES QUESTIONS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE BICYLINDRE UNITÉ.

G. Buler (Tomsk).

Le memoire présent a pour but l'étude des fonctions méromorphes de deux variables complexes dans le bicylindre unité.

Dans le § 2 d'une façon analogue à celle qu'on emploie dans la théorie d'une seule variable on defi it l'ordre apparent de la croissance d'une fonction méromorphe par rapport à la suite des surfaces

$$S^3 = \sum_{r=1}^{1} F^2(r)$$

où $F^2(r) = E[|z_1| = r,\ |z_2| = r^\alpha]$ $(r < 1 \quad \alpha > 0)$

par la quantité

$$\lambda = \lim \frac{\log T[F^2(r), f(z_1, z_2)]}{\log \frac{1}{1-r}}. \tag{2.2}$$

Nous allons montrer que

Lemme I. Pour que l'ordre apparent de la fonction $f(z_1, (z_2)$ soit $\lambda(\lambda > 0)$ il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_0^1 T[F^2(r), f](1-r)^{\mu-1}\, dr \tag{2.25}$$

soit convergente pour $\mu > \lambda$ et divergente pour $\mu < \lambda$.

Lemme II. Pour la valeur donné $\lambda > 0$ les intégrales

$$\int_{r_0}^1 N[F^2(r), f](1-r)^{\lambda-1}\, dr, \quad \int_{r_0}^1 n[F^2(r).f](1-r)^\lambda\, dr$$

$$\int_{r_0}^1 (1-r)^{\lambda+1}\, dn\,[F^2(r).f] = \lim_{r\to 1} E_{\lambda+1}[F^2(r).f] \tag{2.26}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

sont en même temps convergentes ou divergentes.

Théorème 1. Si pour une valeur donnée de λ, $(\lambda > 0)$

$$\int_{r_0} m[F^2(r), f](1-r)^{\lambda-1}dr \text{ et } E_{\lambda+1}[F^2(r), f] \tag{2.27}$$

sont convergentes, alors l'ordre apparent de la foncfion est au plus égal à λ.

Enfin on obtient le théorème suivant:

En désignant par $f(z_1, z_2)$ une fonction méromorphe dans le bicylindre unité et soit

$$T[F^2(\sigma), f] < \left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^{\lambda}, \quad T[F^{2*}(\sigma^*), f] < \left(\frac{1}{1-\sigma}\right)^{\Lambda}, \ (\lambda > \Lambda)$$

où

$$F^{*2}(\sigma^*) = E[|z_1| = \sigma^*, |z_2| = \sigma^{*\beta}] \text{ et } F^2(\sigma) = E[|z_1| = \sigma, |z_2| = \sigma^{\alpha}], \ (\alpha < \beta),$$

on a

$$\lim_{\sigma \to 1} D_{\lambda+1}[F^2(\sigma), f] = \lim_{\sigma \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum \delta_s(\varphi_2)[1 - r_1^{(s)}(\varphi_2)]^{\lambda+1} d\varphi_2 \tag{2.33}$$

qui existe pour $\lambda > 0$.

Dans le cas d'une fonction bornée existe

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{|z_1^{(s)}| < \sigma} \sigma_s[1 - r_1^{(s)}\varphi_2]\, d\varphi_2, \tag{2.34}$$

on peut considérer cette expression comme généralisation du théorème de Blaschke.

Dans le § 3 on démontre que dans le cas d'une fonction entière „l'ordre apparent de croissance de la fonction $f(z_1, z_2)$ peut differer de celui de sa fonction caractéristique au plus de deux".

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ DE SPARRE'A.

Н. В. Оранская (Томск).

В одном из своих мемуаров*) de Sparre предлагает приближенное решение линейного диференциального уравнения

$$y'' + f(x)\,y' + \alpha^2\varphi(x)\,y = \alpha^q F(x),$$

в котором α—число очень большое по сравнению со значениями как самого x, так и функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $F(x)$.

При решении соответствующего однородного уравнения

$$y'' + f(x)\,y' + \alpha^2\varphi(x)\,y = 0$$

de Sparre ограничивается тремя первыми членами ряда, расположенного по отрицательным степеням α, частное решение неоднородного уравнения он отыскивает в виде ряда

$$y = \alpha^{q-2}y_1 + \alpha^{q-4}y_2 + \ldots\ldots\ldots$$

В настоящей работе решение диференциального уравнения

$$y'' + f(x)\,y' + \alpha^2\varphi(x)\,y = \alpha^q F(x)$$

приводится к решению интегрального уравнения, при чем предполагается, что для $x_0 \leqq x \leqq x_1$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные и $\varphi(x) > 0$.

Подстановкой $y = uv$, где

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}$$

уравнение приводится к виду

$$y'' + [\alpha^2\varphi(x) + \sigma(x)]\,y = \Phi(x), \qquad (1)$$

в котором

$$\sigma(x) = -\frac{1}{4}f^2(x) - \frac{1}{2}f'(x),$$

$$\Phi(x) = \alpha^q F(x)\,e^{\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}.$$

---

*) „Sur l'intégration approchée de certaines équations différentielles linéaires" (Annales de la Soc. Sc. de Bruxelles, t. XXIII, 2, 1899).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Коэффициент при y вследствие сделанных выше предположений относительно α и $\varphi(x)$, очевидно, сохраняет знак члена $\alpha^2\varphi(x)$, т. е. должен быть положительным.

Для решения соответствующего однородного уравнения

$$y'' + [\alpha^2\varphi(x) + \sigma(x)]\, y = 0 \tag{2}$$

составим новое вещественное дифференциальное уравнение того же вида

$$u'' + [\alpha^2\varphi(x) + \sigma_1(x)]\, u = 0 \tag{3}$$

и найдем вид функции $\sigma_1(x)$ в предположении, что этому уравнению удовлетворяют решения

$$u_1(x) = z(x) e^{i\alpha \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varphi(\xi)}\, d\xi}$$

и

$$u_2(x) = z(x)\, e^{-i\alpha \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varphi(\xi)}\, d\xi}.$$

Для определения $z(x)$ подставим $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в левую часть уравнения (2) и получим

$$e^{\pm i\alpha \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varphi(\xi)}\, d\xi} [z''(x) \pm i\alpha (2\sqrt{\varphi(x)}\, z'(x) + (\sqrt{\varphi(x)})'\, z(x)) + \sigma(x) z(x)],$$

приравняем нулю выражение $2\sqrt{\varphi(x)}\, z'(x) + (\sqrt{\varphi(x)})'\, z(x)$ и найдем, что $z(x) = \varphi^{-\frac{1}{4}}(x)$.

При этом условии функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ будут частными интегралами дифференциального уравнения

$$u'' + [\alpha^2\varphi(x) + \sigma(x)]\, u = \frac{z''(x) + \sigma(x)\, z(x)}{z(x)}\, u$$

или $u'' + [\alpha^2\varphi(x) + \sigma_1(x)]\, u = 0$, в котором функция $\sigma_1(x) = -\dfrac{z''(x)}{z(x)}$. Общий интеграл этого уравнения будет

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x). \tag{4}$$

Уравнение (2) перепишем в виде уравнения с правой частью

$$y'' + [\alpha^2\varphi(x) + \sigma_1(x)]\, y = -\tau(x) y,$$

при чем

$$\tau(x) = \frac{z''(x)}{z(x)} + \sigma(x),$$

и будем решать его способом вариации произвольных постоянных в выражении (4). Условия для определения C_1 и C_2 будут

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$C_1'u_1 + C_2'u_2 = 0 \quad \text{и}$$
$$C_1'u_1' + C_2'u_2' = -\tau y.$$

Отсюда

$$C_1' = \frac{\tau y u_2}{u_1u_2' - u_1'u_2} \quad \text{и} \quad C_2' = -\frac{\tau y u_1}{u_1u_2' - u_1'u_2};$$

знаменатель

$$u_1u_2' - u_1'u_2 = -2i\alpha.$$

Поэтому

$$C_1 = -\frac{\int_{x^0}^{x} \tau(t)u_2(t)y(t)dt}{2i\alpha} + A_1;$$

$$C_2 = \frac{\int_{x_0}^{x} \tau(t)u_1(t)y(t)dt}{2i\alpha} + A_2.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (2) мы получим в таком виде:

$$y(x) = A_1u_1(x) + A_2u_2(x) +$$
$$+ \frac{u_2(x)\int_{x_0}^{x} \tau(t)u_1(t)y(t)dt - u_1(x)\int_{x_0}^{x} \tau(t)u_2(t)y(t)dt}{2i\alpha}$$

или

$$y(x) = A_1u_1(x) + A_2u_2(x) +$$
$$+ \frac{\int_{x_0}^{x} [u_2(x)u_1(t) - u_1(x)u_2(t)]\,\tau(t)y(t)dt}{2i\alpha}.$$

Очевидно, мы получили интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, в котором ядро

$$K(x,t) = \frac{[u_2(x)u_1(t) - u_1(x)u_2(t)]\,\tau(t)}{2i} =$$

$$= \varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\ \varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\ \sin\left(\alpha\int_x^t \sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)\tau(t),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а именно:

$$y(x)=u(x)+\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{t}\varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\sin\left(\alpha\int_{x}^{t}\sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)\tau(t)y(t)dt \quad (5),$$

где

$$u(x)=A_1u_1(x)+A_2u_2(x).$$

Введя разрешающее ядро $\Gamma(\alpha, x, t)$ для функции $K(x, t)$, получим интеграл уравнения (2)

$$y(x)=u(x)+\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\Gamma(\alpha, x, t)\,u(t)dt.$$

После этого мы можем перейти к решению неоднородного уравнения

$$y''+[\alpha^2\varphi(x)+\sigma(x)]\,y=\Phi(x). \quad (1)$$

Переписав это уравнение таким образом:

$$y''+[\alpha^2\varphi(x)+\sigma_1(x)]\,y=-\tau(x)\,y+\Phi(x),$$

мы видим, что оно отличается от соответствующего однородного уравнения, взятого нами выше в таком виде

$$y''+[\alpha^2\varphi(x)+\sigma_1(x)]\,y=-\tau(x)\,y,$$

только правой частью. Поэтому, мы можем написать интеграл уравнения (1), заменив в (5) выражение $\tau(t)y(t)$ через $\tau(t)y(t)-\Phi(t)$, а именно:

$$y(x)=u(x)+\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\sin\left(\alpha\int_{x}^{t}\sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)[\tau(t)y(t)-\Phi(t)]dt$$

или

$$y(x)=u(x)-\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\sin\left(\alpha\int_{x}^{t}\sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)\Phi(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\sin\left(\alpha\int_{x}^{t}\sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)\tau(t)y(t)\,dt.$$

Таким образом мы получили интегральное уравнение Вольтерра с тем же ядром

$$K(x, t)=\varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\sin\left(\alpha\int_{x}^{t}\sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)\tau(t).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Положив

$$u(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x} \varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\,\sin\left(\alpha\int_{x}^{t}\sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)\Phi(t)dt = v(x),$$

получим общий интеграл уравнения (1)

$$y(x) = v(x) + \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\Gamma(\alpha, x, t)v(t)dt.$$

Из этого интеграла при $A_1 = A_2 = 0$ выделяется частный интеграл, зависящий от правой части уравнения,

$$y_1(x) = v_1(x) + \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\Gamma(\alpha, x, t)v_1(t)dt, \quad \text{где}$$

$$v_1(x) = -\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\varphi^{-\frac{1}{4}}(x)\varphi^{-\frac{1}{4}}(t)\,\sin\left(\alpha\int_{x}^{t}\sqrt{\varphi(\xi)}d\xi\right)\Phi(t)dt.$$

LÖSUNG EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG VON DE SPARRE.

N. Oranskaja (Tomsk).

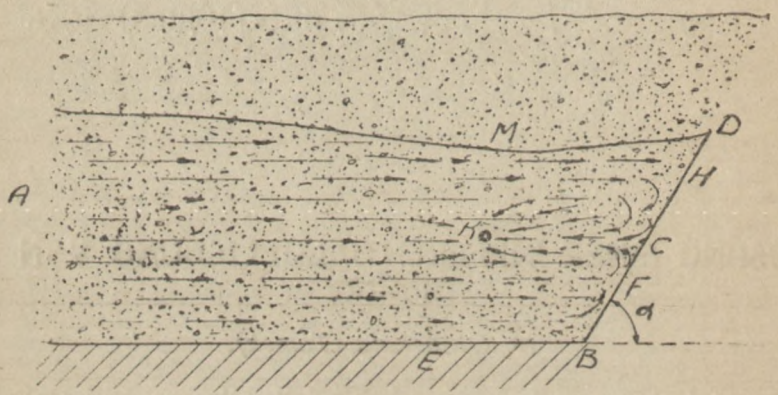
Es wird eine von de Sparre behandelte lineare Differentialgleichung aufgenommen. Die von de Sparre angedeutete, aber nicht durchgeführte Lösung wird durch Zurückführung der Differentialgleichung auf eine Integralgleichung erreicht. Letztere ist vom Volterraschen Typus und besitzt die von de Sparre angedeutete Lösung.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ ДРЕНАЖНОЙ ТРУБЫ, СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ВОДОНЕПРОНИЦАЕМОГО СЛОЯ В ВИДЕ УГЛА.

А. А. Гриб (Томск).

В настоящей статье рассматривается плоское установившееся движение грунтовых вод в области, ограниченной свободной поверхностью и водонепроницаемым слоем в виде некоторого угла (черт. 1). Внутри области, занятой грунтом и водой, находится водосборная труба, которую считаем точечным стоком.



Черт. 1.

В зависимости от положения стока (K) меняется местонахождение точки разветвления потока (C), и соответственно этому изменяется картина движения жидкости.

Задача заключается в определении величин, характеризующих движение жидкости и в частности свободной поверхности, в зависимости от угла наклона водонепроницаемой стенки к горизонтальному подстилающему слою, параметров положения стока и его мощности.

Статья состоит из шести параграфов.

В § 1 приводятся: дифференциальные уравнения движения грунтовых вод и пограничные условия задачи.

В § 2, § 3 и § 4 задача решается для трех случаев: 1) когда точка разветвления потока находится на наклонной стенке,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2) точка разветвления потока—на свободной поверхности и 3) точка разветвления потока на горизонтальном водонепроницаемом слое.

В § 5 приведен частный случай, когда угол наклона стенки к горизонтальному водонепроницаемому слою равен $\frac{\pi}{2}$.

Этот случай можно рассматривать, как задачу об определении потока от двух стоков равной мощности, помещенных в область, ограниченную—1) горизонтальным водонепроницаемым слоем, 2) свободной поверхностью и 3) простирающуюся в обе стороны в бесконечность.

§ 6 заключает различного рода предельные случаи расположения стока и точки разветвления потока.

§ 1.

Дифференциальные уравнения движения грунтовых вод имеют следующий вид [1]):

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{gV_x}{k}&=0\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}-g-\frac{gV_y}{k}&=0\\ \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}&=0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

или

$$\left.\begin{aligned} V_x&=-\frac{k}{\rho g}\frac{\partial P}{\partial x}\\ V_y&=-\frac{k}{\rho g}\frac{\partial P}{\partial y}-k. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Здесь V_x и V_y—компоненты скорости фильтрации, ρ—плотность, P—давление, g—ускорение силы тяжести, k—коэфициент фильтрации (постоянное число).

Из уравнений (1) и (2) следует, что существует потенциал скоростей

$$\varphi=-k\left(\frac{P}{\rho g}+y\right), \quad (3)$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \quad (4)$$

Граничные условия задачи о движении грунтовых вод со свободной поверхностью, впервые сформулированные Девисоном, следующие [2]):

---

[1]) См. Павловский, „Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями" 1922 г., стр. 97.

[2]) См. Девисон, „Движение грунтовых вод через земляную перемычку с вертикальными стенками". Записки ГГИ, т. VI, 1932 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а) стенка и горизонтальный водонепроницаемый слой суть линии тока, на них $\psi = \text{const}$ (ψ—функция тока),

б) на свободной поверхности $p = \text{const}$.

Если пренебречь испарением и проникновением в почву дождевых вод, то компоненты скорости на свободной поверхности изменяются по закону окружности:

$$V_x^2 + \left(V_y + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}, \tag{5}$$

в) сток, заданный значением $Z = a^* + b^* i$, следует отнести к граничной точке области. При

$$Z = a^* + b^* i, \quad \varphi = \infty, \tag{6}$$

г) к границам области можно было бы относить еще линии разрыва и вихревые поверхности.

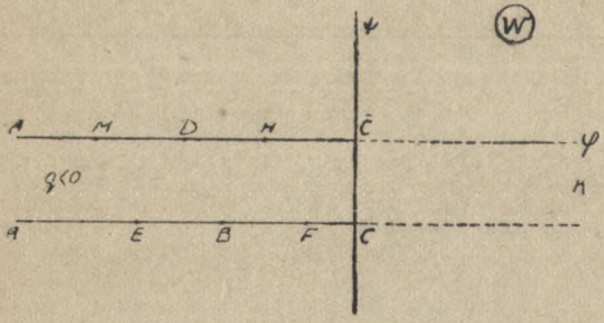
Однако, в рассматриваемом случае движения грунтовых вод таковых не имеется [1]).

Исходя из вышеизложенного, можно доказать, что во всех случаях, рассматриваемых ниже (один сток), точка разветвления потока будет только одна, при чем она будет находится на границе области.

§ 2.

Рассмотрим случай, когда точка разветвления потока находится где либо на наклонной стенке [2]), (см. черт. 1).

Обозначим через $q < 0$ расход [3]).



Черт. 2.

На черт. 1 точка A соответствует бесконечно удаленной точке, точка M есть точка перегиба свободной поверхности ($|V|$ в ней достигает максимума). В точках H, F, E (стенки и дна) скорость достигает максимальных значений. В точках A, B, C, D скорости равны нулю. В точке K на-

[1]) Davison „On the steady two-dimensional Motion of Ground—Water with a Free Surface". Philosophical Magazine, 1936.

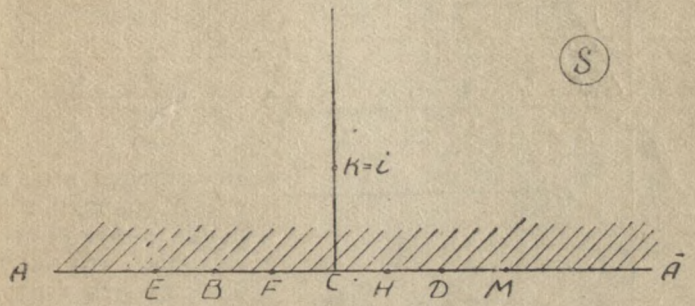
[2]) Но в вершине угла и не на стыке свободной поверхности с стенкой. Эти случаи будут рассмотрены позднее.

[3]) Величину q считаем < 0, т. к. имеем дело со стоком.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ходится сток ($Z_K = a^* + b^* i$). Положение этих точек в плоскости Z (кроме точек A, B и K) неизвестно [1]).

Рассмотрим теперь плоскость $W = \varphi + i\psi$ комплексного потенциала (см. черт. 2).

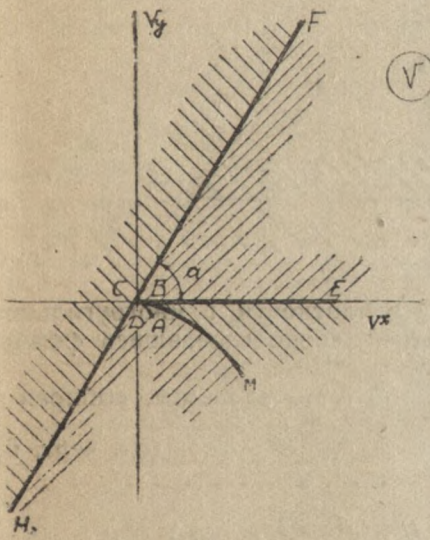


Черт. 3.

Функция W отобразит область течения в плоскости Z на внутренность полосы, при чем линии, обозначенные пунктиром, есть линии, соответствующие разрезу [2]).

В точке C полагаем $\varphi = 0$. Отобразим полученную полосу на полуплоскость. Для этого применим функцию

$$S = \sqrt{e^{\frac{2\pi}{q} W} - 1} \quad \text{см. черт. 3).} \quad (7)$$



Черт. 4.

Для нашего случая, вследствие условий, рассмотренных в § 1, годограф скоростей будет иметь вид, изображенный на черт. 4.

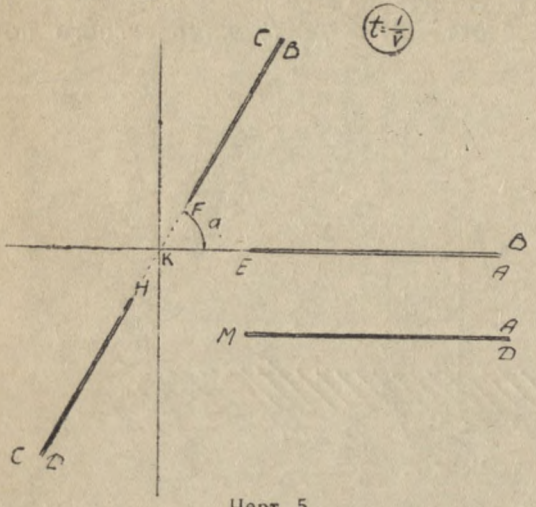
Область скоростей будет состоять из всей плоскости за исключением разрезов, изображенных на черт. 4 и бесконечно-удаленной точки, соответствующей точке K. Для определения по годографу скоростей области потока в плоскости Z заметим, что $Z = \int \frac{1}{\overline{V}} dW$, где $\overline{V}$—анали-

[1]) В дальнейшем мы увидим, что для решения задачи необходимо задать еще положение какой либо точки свободной поверхности.

[2]) Их следует считать принадлежащими области.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

тическая функция Z. При отображении поскости $\overline{V}$ на плоскость $t=\frac{1}{V}$ все разрезы делаются прямолинейными:



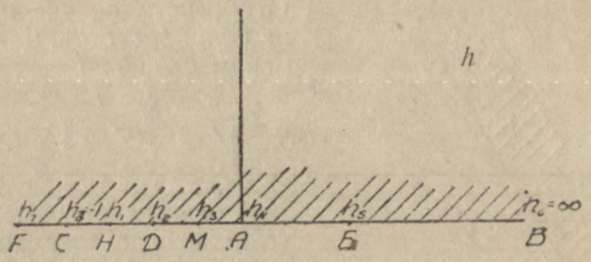
Черт. 5.

$$t_x+it_y=\frac{V_x+iV_y}{|V|^2};$$

$$|V|^2=\frac{V_x}{t_x}=\frac{V_y}{t_y}.$$

Подставляя это выражение в уравнение 5 (уравнение окружности AMD) получим, что окружность в плоскости t перейдет в прямую параллельную оси абсцисс

$$t_y=-\frac{1}{k} \quad \text{(см. черт. 5).} \quad (8)$$



Черт. 6.

Отобразим теперь полученный в плоскости t многоугольник на вспомогательную полуплоскость h, воспользовавшись формулой Кристоффеля-Шварца [1]).

Тремя вещественными значениями h мы задаемся, выбирая

$$h_A=h_4=0,\ h_C=h_8=-1,\ h_B=h_6=\infty \quad \text{(см. черт. 6).}$$

$$t=C_1\int_{h_0}^{h}(h-h_1)^{-\alpha_1}(h-h_2)^{-\alpha_2}(h-h_3)^{-\alpha_3}(h-h_4)^{-\alpha_4}\ldots\ldots(h-$$

$$-h_8)^{-\alpha_8}dh+C_2,$$

[1]) См. „Bieberbach „Lehrbuch der Funktionentheorie" Bd. II.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где

$$\alpha_1 = -1(H), \alpha_2 = 2 - \frac{\alpha}{\pi}(D), \alpha_3 = -1(M), \alpha_4 = 1(A), \alpha_5 = -1(E),$$

$$\alpha_6 = 1 + \frac{\alpha}{\pi}(B), \alpha_7 = -1(F), \alpha_8 = 2(C); \sum \alpha_i = 2.$$ Так как $h_4 = 0$ (A), $h_6 = \infty(B)$, $h_8 = -1(C)$, и полагая $h_0 = 2h_2$, имеем:

$$t = C_1 \int_{2h_2}^{h} \frac{(h-h_1)(h-h_3)(h-h_5)(h-h_7)(h-h_2)^{\frac{\alpha}{\pi}}}{(h-h_2)^2 h (h+1)^2} dh + C_2. \quad (9)$$

Разлагая множитель при $(h-h_2)^{\frac{\alpha}{\pi}}$ на простейшие дроби и полагая $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{n}$, имеем:

$$t = A \int_{2h_2}^{h} \frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}} dh}{(h-h_2)^2} + B \int_{2h_2}^{h} \frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}} dh}{h-h_2} + C \int_{2h_2}^{h} \frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}} dh}{h} +$$

$$+ D \int_{2h_2}^{h} \frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}} dh}{(h+1)^2} + E \int_{2h_2}^{h} \frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}} dh}{h+1} + C_2, \quad (10)$$

где A, B, C, D и E—произведения комплексного коэффициента C_1 на вещественные числа, зависящие от параметров h_1, h_2, h_3, h_5, h_7.

Интегрируя выражения, входящие под знак интеграла в (10), получаем:

$$t = n(B+C+E)(h-h_2)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{An}{1-n}\frac{1}{h-h_2} - \frac{D}{h+1}\right)(h-h_2)^{\frac{1}{n}} -$$

$$- Cn\sqrt[n]{h_2}\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}}, n\right) + \left[D(h_2+1)^{\frac{1-n}{n}} -\right.$$

$$\left. - En(h_2+1)^{\frac{1}{n}}\right]\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2+1}}, n\right) + C_2'^{1}), \quad (11)$$

где C_2' сумма величины C_2 и значений интегралов (10) при ниж-

[1]) Здесь и в дальнейшем берем главное значение корня.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

нем пределе, а

$$\text{Б}(x, n) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{1 + x^n} \tag{12}$$

функция Бахметева [1]).

Непосредственно из многоугольника в плоскости t (черт. 5) имеем следующие условия для определения постоянных:

1) При переходе через точку A (от MA к AE через $h = 0$) происходит скачок t: $[[t]] = \frac{i}{k}$, т. е.

$$C\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{(h - h_2)^{\frac{1}{n}}\, dh}{h} = C\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{(-h_2)^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{h}{h_2}\right)^{\frac{1}{n}} dh}{h} =$$

$$= C(-h_2)^{\frac{1}{n}}\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{1 - \frac{1}{n}\frac{h}{h_2} + \dots}{h}\, dh = C(-h_2)^{\frac{1}{n}}\left[\ln h + P(h)\right]_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} =$$

$$= -C(-h_2)^{\frac{1}{n}}\pi i = \frac{i}{k}, \quad [2])$$

где $P(h) \underset{\text{при } h \to 0}{=} 0$—целая рациональная функция.

$$C = \frac{-1}{k\pi(-h_2)^{\frac{1}{n}}}. \tag{13}$$

Из выражения (13) следует, вследствие $h_2 < 0$, что все коэффициенты A, B, C, D и E вещественны.

2) При изменении h на участке AEB, t—вещественно. Из выражений (9) и (11) следует, что C_2 и C_2' должны быть вещественными числами.

3) На участке BFC (h изменяется от $-\infty$ до -1)

$$t_y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \cdot t_x,$$

т. е.

$$\left\{n(B + C + E)(h_2 - h)^{\frac{1}{n}} + (h_2 - h)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{An}{1 - n}\,\frac{1}{h - h_2} - \frac{D}{h + 1}\right) -\right.$$

$$\left. - Cn\sqrt[n]{-h_2}\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h - h_2}{h_2}}, n\right) + \sqrt[n]{h_2 + 1}\left(\frac{D}{h_2 + 1} -\right.\right.$$

---

[1]) Для вещественных значений x существуют таблицы функций $\text{Б}(x, n)$, помещенные в книге Бахметева „О неравномерном движении жидкости в открытом русле", стр. 271—281.

[2]) Т. к. $\ln(0 + \varepsilon) - \ln(0 - \varepsilon) = \ln|\varepsilon| + 0 - [\ln|\varepsilon| + \pi i] = -\pi i$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-En\Big)\text{Б}'\Big(\sqrt[n]{\frac{h_2-h}{h_2+1}},\ n\Big)\Big\}.\sin\frac{\pi}{n}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\Big\{n(B+C+E)(h_2-h)^{\frac{1}{n}}+$$

$$+(h_2-h)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{An}{1-n}\,\frac{1}{h-h_2}-\frac{D}{h+1}\Big)-$$

$$-Cn\sqrt[n]{-h_2}\,\text{Б}\Big(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\ n\Big)+\sqrt[n]{h_2+1}.\Big(\frac{D}{h_2+1}-$$

$$-En\Big)\text{Б}'\Big(\sqrt[n]{\frac{h_2-h}{h_2+1}},\ n\Big)\Big\}\cos\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\cdot C_2',$$

где

$$\text{Б}'\Big(\sqrt[n]{\frac{h_2-h}{h_2+1}},\ n\Big)=\int\frac{d\Big(\frac{h_2-h}{h_2+1}\Big)^{\frac{1}{n}}}{1-\Big[\Big(\frac{h_2-h}{h_2+1}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big]^n}\ ^{1}).$$

Отсюда следует, что C_2' для значений h вне полукруга с центром в $h=h_2$ и $R=|h_2|$ равно нулю, $C_2'=0$ [2]). (14)

4) На CHD $t_v=\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.t_x$, переход через точку C не должен сопровождаться разрывом функции t [3]), следовательно

$$D(1+h_2)^{\frac{1}{n}-1}-En(1+h_2)^{\frac{1}{n}}=0$$

или

$$\frac{D}{1+h_2}-En=0. \tag{15}$$

5) При $h=h_K$ (точка, соответствующая в плоскости h стоку)

$$n(B+C+E)(h_K-h_2)^{\frac{1}{n}}+(h_K-h_2)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{An}{1-n}\,\frac{1}{h_K-h_2}-\frac{D}{h_k+1}\Big)-$$

$$-Cn\sqrt[n]{h_2}\,\text{Б}\Big(\sqrt[n]{\frac{h_K-h_2}{h_2}},\ n\Big)+C_2'=0\ ^{4}). \tag{16}$$

---

[1]) $\text{Б}\Big(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2+1}},\ n\Big)=(-1)^{\frac{1}{n}}\,\text{Б}'\Big(\sqrt[n]{\frac{h_2-h}{h_2+1}},\ n\Big)$.

[2]) Здесь рассматривалась только функция $\text{Б}\Big(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\ n\Big)$, вследствие следующего 4-го условия.

[3]) При $h=h_c=-1$ происходит скачек функции Бахметева $\text{Б}\Big(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2+1}},n\Big)$.

[4]) Коэффициент при $\text{Б}\Big(\sqrt[n]{\frac{h_k-h_2}{h_2+1}},\ n\Big)$ равен нулю в силу условия (15).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отобразим теперь полуплоскость S на полуплоскость h (см. черт. 3 и 6)

$$h=\frac{aS+b}{S+d}.$$

Для определения постоянных имеем следующие условия:
1) при $S=0$, $h=-1$ (точка C),

2) при $S=\infty$, $h=0$ (точка A), откуда $h=\frac{b}{S-b}$, (17)

где b вещественное число ($b<0$).

При $S=i$, $h=h_K$, т. е. $h_K=\frac{b}{i-b}$. (18)

Из соотношения (17) и (7) следует, что

$$W=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{(b+bh)^2+h^2}{h^2}, \tag{19}$$

$$dW=\frac{q}{2\pi}\frac{b-i}{b+h(b-i)}dh+\frac{q}{\pi}\frac{b+i}{b+h(b+i)}dh-\frac{q}{\pi}\frac{dh}{h}. \tag{20}$$

Как известно $Z=\int t\,dW+C_3$.

Вычислим входящие в выражение Z интегралы:

$$I_1(n)=\int(h-h_2)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{q}{2\pi}\cdot\frac{b-i}{b+h(b-i)}+\frac{q}{2\pi}\cdot\frac{b+i}{b+h(b+i)}-\right.$$

$$\left.-\frac{q}{\pi}\frac{1}{h}\right)dh=-\frac{qn}{2\pi}\left[\left(\frac{b}{b-i}+h_2\right)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b-i)(h-h_2)}{b+(b-i)h_2}},\,n\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{b}{b+i}+h_2\right)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b+i)(h-h_2)}{b+(b+i)h_2}},\,n\right)-$$

$$\left.-2(h_2)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\,n\right)\right].^{1)} \tag{21}$$

$$I_2(n)=\int(h-h_2)^{\frac{1}{n}-1}dW=\int(h-h_2)^{\frac{1}{m}}dW=I_1(m), \tag{22}$$

где

$$m=\frac{n}{1-n},\quad \text{Б}(x,n)=\int_1^x\frac{dx}{1+x^n}+\text{const}^{2}).$$

---

1) Берутся с помощью подстановки $(h-h_2)^{\frac{1}{n}}=Z$.

2) Const. из Б в дальнейшем включена в C_3; в выражении t эта const. равна нулю.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Для $|x|<1$, $\text{Б}(x,n)=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{x^{kn+1}}{kn+1}+C_1+\text{const}$, а для

$|x|>1$, $\text{Б}(x,n)=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)n-1}x^{-[n(k+1)-1]}+C_2+$

$+\text{const}$, где

$$C_1-C_2=-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{kn+1}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)n-1}.$$

$$I_3=\int\frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}}}{h+1}\left(\frac{q}{2\pi}\frac{b-i}{b+h(b-i)}+\frac{q}{2\pi}\frac{b+i}{b+h(b+i)}-\right.$$

$$\left.-\frac{q}{\pi}\frac{1}{h}\right)dh=\frac{qn}{2\pi i}\left[(b-i)\left(\frac{b}{b-i}+h_2\right)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b-i)(h-h_2)}{b+(b-i)h_2}},\ n\right)-\right.$$

$$-(b+i)\left(\frac{b}{b+i}+h_2\right)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b+i)(h-h_2)}{b+(b+i)h_2}},\ n\right)+$$

$$\left.+2ih_2^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\ n\right)\right]. \qquad (23)$$

$$I_4=\int\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\ n\right)dW. \qquad (24)$$

$$I_4=\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\ n\right)W-\int W d\,\text{Б}=\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\ n\right)W-$$

$$-\frac{qh_2}{2\pi}\int\frac{\ln\left[1+\left(\frac{b}{h}+b\right)^2\right]}{h}d\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}}.$$

Для целых n $\text{Б}(x,n)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\int\frac{dx}{x-x_i}=$

$$=-\frac{1}{n}\sum x_i\ln(x-x_i)+C_4,$$

где x_i корни уравнения $1+x_n=0$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$I_4 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \int \ln\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}} - x_i\right) dW. \qquad (24a)$$

Соотношение между Z и h получаем в следующем виде:

$$Z = n(B+C+E)I_1(n) + \frac{An}{1-n} I_2(n) - DI_3 - Cn\sqrt[n]{h_2}\, I_4 + C_2' W + C_3, \qquad (25)$$

где I_1, I_2, I_3, I_4—выражения, вычисляемые по формулам (21), (22), (23), (24).

Подставляя в формулу (25) $h = \frac{b}{S-b}$ и пользуясь зависимостью (7), получим формулу, связывающую Z и W.

Для определения постоянных, входящих в выражение Z (h_2, A, B, C, D, E, b, C_3 или h_1, h_2, h_3, h_5, h_7, h_K, C_1 и C_3) имеем следующие условия [1]:

1) $C = -\frac{1}{k\pi}(-h_2)^{-\frac{1}{n}}$ (см. (13)),

2) $D = En(1+h_2)$ (см. (15)),

3) $n(B+C+E)(h_K-h_2)^{\frac{1}{n}} + (h_K-h_2)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{An}{1-n}\cdot\frac{1}{h_K-h_2} - \frac{D}{h_K+1}\right) - Cn\sqrt[n]{h_2}\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h_K-h_2}{h_2}}, n\right) + C_2' = 0$ (см. (16)).

Легко заметить, что приравнивая вещественную и мнимую часть этого выражения нулю, получим 2 условия [2]).

4) При $h = h_K$, $Z = a^* + b^* i$, так же как и в (3), имеем 2 условия.

5) При $h = \infty$ (на стенке в точке B), $Z = 0$.

Условий получилось 7, а неизвестных 8. Для определенности необходимо задать еще положение какой либо точки свободной поверхности.

6) При $Z = Z_S$, $W = -k\left(\frac{P_0}{\rho g} + y_s\right)$.

§ 3.

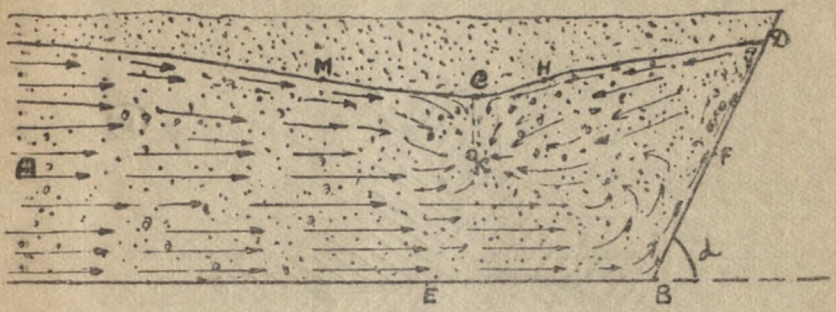
Рассмотрим теперь случай, когда точка разветвления потока находится на свободной поверхности (см. черт. 7).

---

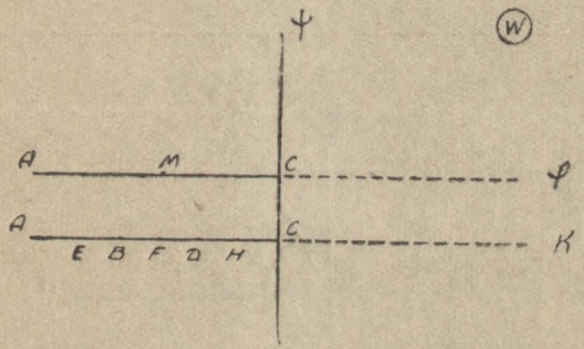
[1]) Условие—при $h = 0$, $Z = \infty$ удовлетворяется тождественно, т. к. им мы уже пользовались.

[2]) $h_K \neq h_2$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



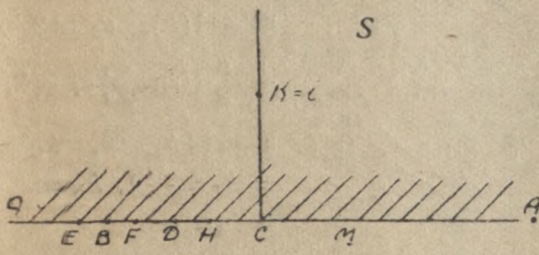
Черт. 7.



Черт. 8.

Здесь принимаем AMC за линию тока $\psi = 0$, а $AEBFDHC$ за $\psi = q$.

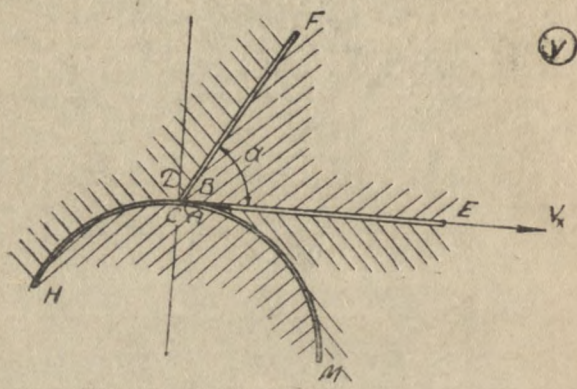
Функция $S = \sqrt{e^{\frac{2\pi}{q}W} - 1}$ отобразить область W на полуплоскость (черт. 9).



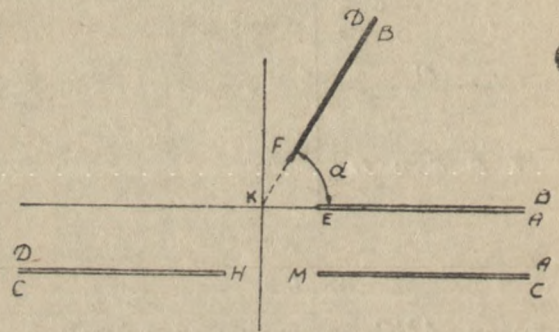
Черт. 9.

Области V, $t = \frac{1}{V}$ и h будут иметь вид, изображенный на черт. 10, 11 и 12.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

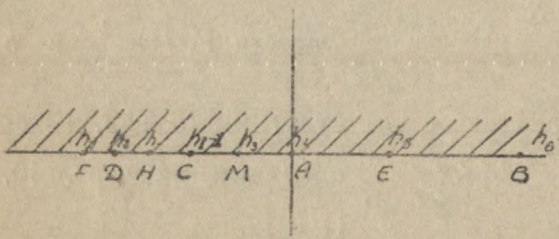


Черт. 10.



Черт. 11.

Здесь $\alpha_1 = -1(H)$, $\alpha_2 = 2(C)$, $\alpha_3 = -1(M)$, $\alpha_4 = 1(A)$, $\alpha_5 = -1(E)$, $\alpha_6 = 1 + \frac{\alpha}{\pi}(B)$, $\alpha_7 = -1(F)$, $\alpha_8 = 2 - \frac{\alpha}{\pi}(D)$; $\sum a_i = 2$, а $h_A = h_4 = 0$. $h_C = h_2 = -1$, $h_B = h_6 = \infty$.



Черт. 12.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$t = C_1 \int_{2h_8}^{h} \frac{(h-h_1)(h-h_3)(h-h_5)(h-h_7)(h-h_8)^{\frac{\alpha}{\pi}}}{(h+1)^2 h (h-h_8)^2}\, dh + C_2. \quad (26)$$

Формула (26) аналогична формуле (9) первого варианта, только здесь вместо h_2 стоит h_8, при чем h_2 в 1-ом варианте и h_8 во втором изображают одну и ту же точку D. Поэтому, формулы 1-го варианта применимы и для настоящего случая, после замены h_2 на h_8, т. е.

$$t = n(B+C+E)(h-h_8)^{\frac{1}{n}} + (h-h_8)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{An}{1-n}\frac{1}{h-h_8} - \frac{D}{h+1}\right) -$$

$$- Cn\sqrt[n]{h_8}\, \text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_8}{h_8}}, n\right) + C_2' \text{[1]}) \quad (27)$$

и

$$Z = n(B+C+E) I_1(n) + \frac{An}{1-n} I_2(n) - DI_3 - Cn\sqrt[n]{h_8}\, I_4 +$$

$$+ C_2' W + C_3, \quad (28)$$

где I_1, J_2, I_3, I_4 вычисляются по формулам (21), (22), (23), (24) с заменой h_2 на h_8.

Постоянные входящие в выражение (28) определяются из условий, аналогичных условиям 1-го варианта:

1) $C = -\frac{1}{k\pi}(-h_8)^{-\frac{1}{n}}$ (C—вещественно).

2) При переходе через точку C (от DHC к CMA) разрыв t_y равен нулю.

$$[[t_y]] = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = En(1+h_8).$$

3) $n(B+C+E)(h_K-h_8)^{\frac{1}{n}} + (h_K-h_8)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{An}{1-n}\frac{1}{h_K-h_8} - \right.$

$$\left. - \frac{D}{h_K+1}\right) - Cn\sqrt[n]{h_8}\, \text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h_K-h_8}{h_8}}, n\right) + C_2' = 0.$$

4) При $h = h_K$, $Z = a_1^* + b_1^* i$.

5) При $h = \infty$, $Z = 0$.

6) При $Z = Z_S$, $W = -k\left(\frac{P_0}{\rho g} + y_s\right)$.

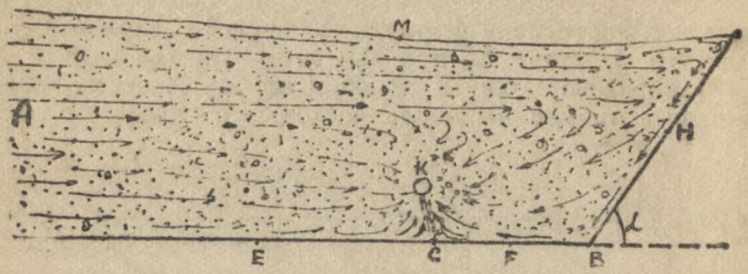
---

[1]) C_2' в формуле (28) равно нулю для значений h вне полукруга $|h-h_8| = |h_8|$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 4.

Предположим, что точка разветвления потока находится на горизонтальном водонепроницаемом слое (см. черт. 13).

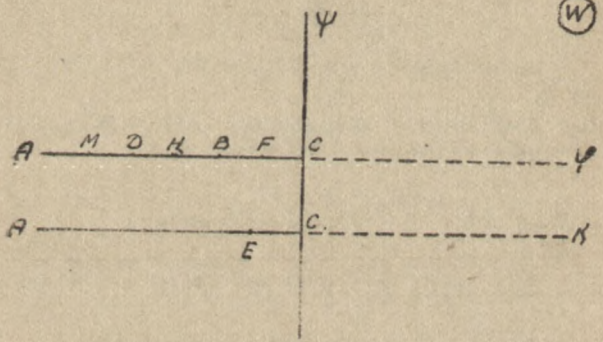


Черт. 13.

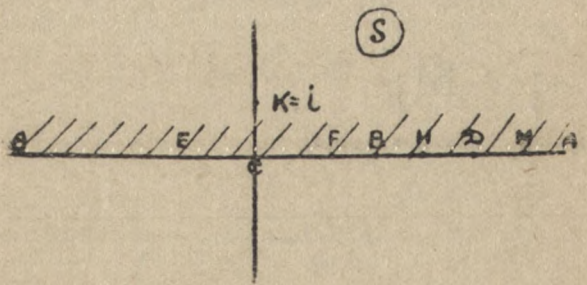
Области, соответствующие полученному потоку в пл.

$$W,\ S,\ V,\ t \text{ и } h$$

будут иметь вид, указанный на черт. 14, 15, 16, 17 и 18.

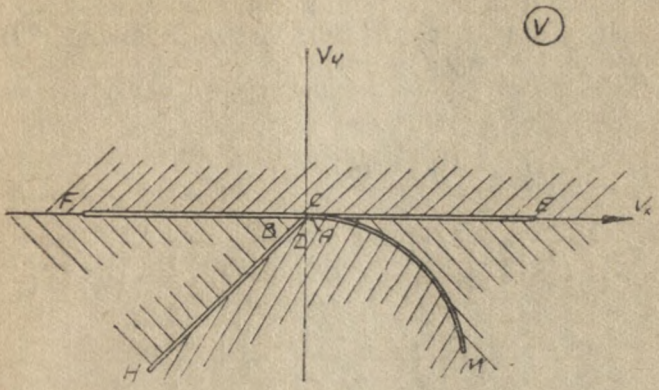


Черт. 14.

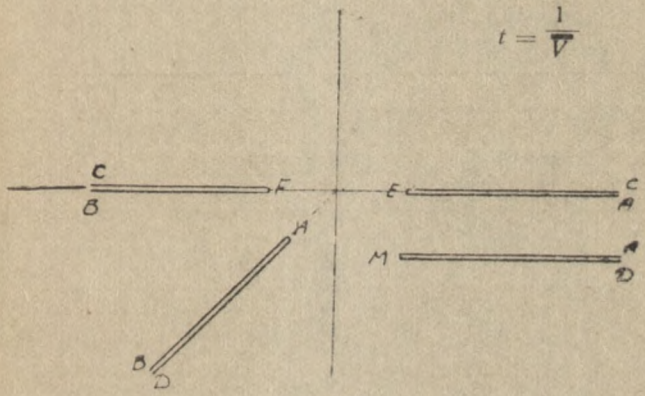


Черт. 15.

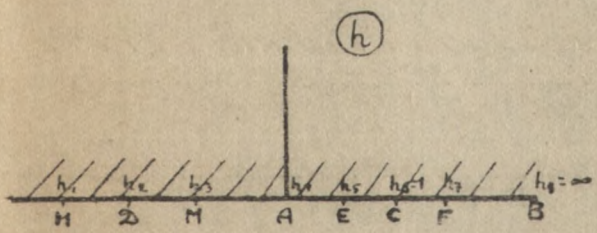
Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Черт. 16.



Черт. 17.



Черт. 18.

$a_1 = -1(H)$, $a_2 = 2 - \frac{\alpha}{\pi}(D)$, $a_3 = -1(M)$, $a_4 = 1(A)$, $a_5 = -1(E)$, $a_6 = 2(C)$, $a_7 = -1(F)$, $a_8 = 1 + \frac{\alpha}{\pi}(B)$; $\sum a_i = 2$,

$$h_A = h_4 = 0,\ h_C = h_6 = 1,\ h_B = h_8 = \infty.$$

$$t = C_1 \int_{2h_2}^{h} \frac{(h-h_1)(h-h_3)(h-h_5)(h-h_7)(h-h_2)^{\frac{\alpha}{\pi}}}{(h-h_2)^2\, h\, (h-1)^2}\, dh + C_2. \quad (29)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Выражение (29) отличается от t (формула 9) первого варианта тем, что в знаменателе подъинтегральной функции (29) вместо множителя $(h+1)^2$ стоит $(h-1)^2$.

Вследствие этого t можно написать в следующем виде:

$$t = n(B+C+E)(h-h_2)^{\frac{1}{n}} + (h-h_2)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{An}{1-n}\frac{1}{h-h_2} - \frac{D}{h-1}\right) - Cn\sqrt[n]{h_2}\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}}, n\right) + (h_2-1)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{D}{h_2-1} - En\right)\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2-1}}, n\right) + C_2'\ ^{1}). \quad (30)$$

Отображение полуплоскости S на h совершается при помощи следующей зависимости:

$$h = \frac{b}{S+b}, \quad (31)$$

где b вещественное отрицательное число.

Точке $S = i$ соответствует точка

$$h_K = \frac{b}{i+b}. \quad (32)$$

$$W = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{(b-bh)^2+h^2}{h^2}. \quad (33)$$

$$I_1(n) = \int (h-h_2)^{\frac{1}{n}}\,dW = -\frac{qn}{2\pi}\left\{\left(h_2 - \frac{b}{b-i}\right)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b-i)(h-h_2)}{(b-i)h_2-b}}, n\right) + \left(h_2-\frac{b}{b+i}\right)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b+i)(h-h_2)}{(b+i)h_2-b}}, n\right) - 2\sqrt[n]{h_2}\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}}, n\right)\right. \quad (34)$$

$$I_2(n) = \int (h-h_2)^{\frac{1}{n}-1}\,dW = I_1(m), \text{ где } m = \frac{n}{1-n}. \quad (35)$$

---

[1]) Здесь $C_2' = 0$ вне полукруга $|h-h_2| = |h_2|$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$I_3(n)=\int\frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}}}{h-1}\,dW=-\frac{qn}{2\pi i}\left\{(b-i)\left(h_2-\right.\right.$$

$$-\frac{b}{b-i}\Big)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b-i)(h-h_2)}{h_2(b-i)-b}},\,n\right)-$$

$$-(b+i)\left(h_2-\frac{b}{b+i}\right)^{\frac{1}{n}}\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{(b+i)(h-h_2)}{h_2(b+i)-b}},\,n\right)+$$

$$\left.+2i\,h_2\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\,n\right)\right\}. \tag{36}$$

$$I_4=\int\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\,n\right)dW=\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\,n\right)W-$$

$$-\frac{qh_2}{2\pi}\int\frac{\ln\dfrac{(b-bh)^2+h^2}{h^2}\,d\sqrt[n]{\dfrac{h-h_2}{h_2}}}{h}. \tag{37}$$

Для целых n

$I_4=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\int\ln\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}}-x_i\right)dW$, где x_i корни уравнения $1+x^n=0$.

Следовательно, $Z=n\,(B+C+E)\,I_1(n)+\frac{An}{1-n}\,I_2(n)-DI_3-$

$$-Cn\sqrt[n]{h_2}\,I_4+C_2'W+C_3. \tag{38}$$

Постоянные определяем из следующих условий:

1) $C=-\frac{1}{k\pi}(-h_2)^{-\frac{1}{n}}$.

2) При переходе через точку C $[[t_y]]=0$, т. е. $D=En(h_2-1)$.

3) $n\,(B+C+E)\,(h_K-h_2)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{An}{1-n}\,\frac{1}{h_K-h_2}-\frac{D}{h_K-1}\right)-$

$$-Cn\sqrt[n]{h_2}\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h_k-h_2}{h_2}},\,n\right)=0.$$

4) При $h=\infty$, $Z=0$.

5) При $h=h_K$, $Z=a^*_2+b^*_2i$.

6) При $Z=Z_S$, $W=-k\left(\frac{P_0}{\rho g}+y_s\right)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Рассматривая полученные во всех 3-х вариантах соотношения, мы можем заметить идентичность полученных результатов. Положение точки разветвления потока зависит от местонахождения стока и уровня грунтовых вод на каком либо расстоянии от начала координат (при постоянном угле α). Для численного решения нашей задачи мы можем задаваться положением точек K и D в полуплоскости h, а затем по известным соотношениям определять местонахождение K и D в плоскости Z (т. е. параметры $a^* + b^* i$ и y_D). Так как в 1-ом и 2-ом вариантах

$$h_K = \frac{b}{i - b}, \text{ то } b = \frac{-\eta_K}{(1+\xi_K)^2 + \eta_K^2} + i\,\frac{\xi_K + \xi_K^2 + \eta_K^2}{(1+\xi_K)^2 + \eta_K^2},$$

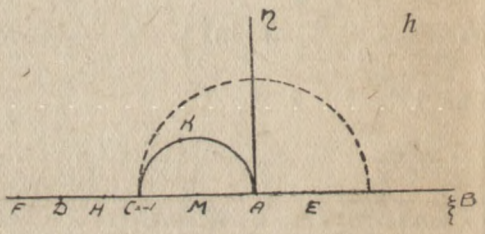
где b вещественное отрицательное число, а $\xi + i\eta = h$.

Из этого следует, что точка h_K находится на полуокружности

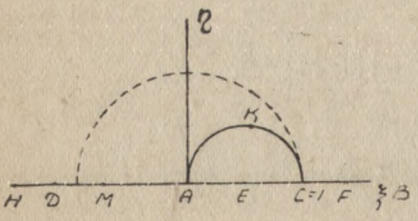
$$\left(\xi_K + \frac{1}{2}\right)^2 + \eta_K^2 = \frac{1}{4}, \tag{39}$$

в верхней полуплоскости h [1]) (см. черт. 19 и 20).

Черт. 19.



Черт. 20.



Черт. 21.

Если $|h_D| < 1$ и h_k находится во 2-ом квадранте, точка разветвления будет находиться на наклонной стенке. При $|h_D| > 1$ и h_K во втором квадранте, точка разветвления на свободной поверхности. Если же h_K находится в первом квадранте при отрицательном h_D, имеем третий вариант.

В этом случае h_K находится на полуокружности

[1]) $|h_K| = -\cos\varphi$, где φ угол, составляемый вектором h_K с осью абсцисс.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\left(\xi_K-\frac{1}{2}\right)^2+\eta^2{}_K=\frac{1}{4}, \tag{40}$$

(см. черт. 21).

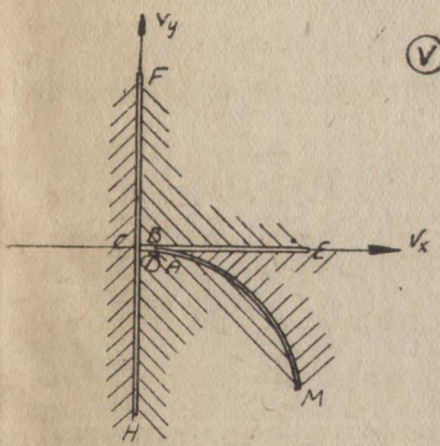
§ 5. Частный случай, $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Как уже известно, этот случай можно рассматривать, как задачу об определении потока при двух симметрично расположен-

(Z)

Черт. 22.

ных точечных стоках одинаковой мощности. Предположим, что точка разветвления потока находится на вертикальной стенке.



Черт. 23.

(V) Годограф скоростей, соответствующий этому случаю, изображен на черт. 23.

Так как при $n=2$.

$$\text{Б}\left(\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}},\,2\right)=$$

$$=\int_{2h_2}^{h}\frac{d\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}}{1+\left(\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}\right)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}-\frac{\pi}{4},$$

то

$$t=\frac{1}{V}=2(B+C+E)(h-h_2)^{\frac{1}{2}}+(h-h_2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2A}{h-h_2}-\frac{D}{h+1}\right)-$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-2C\sqrt{h_2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}+C_2'\,[1]). \qquad (41)$$

Для $|h-h_2|<|h_2|$, $\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}},\,2\right)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}-\frac{\pi}{4}=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\left(\frac{h-h_2}{h_2}\right)^{k+\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{4},\quad C_2'=\frac{i}{k}\,[2]);\ \text{для}$$

$|h-h_2|>|h_2|$, $\text{Б}\left(\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}},\,n\right)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}-\frac{\pi}{4}=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{h-h_2)}{h_2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{4},\quad C_2'=0.$$

$$I_1=-\frac{q}{\pi}\left\{\left(\frac{b}{b-i}+h_2\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{\frac{b}{b-i}+h_2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b}{b+i}+h_2\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{\frac{b}{b+i}+h_2}}-2\sqrt{h_2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}\right\}.\ [3])\ (42)$$

$$I_2=-\frac{q}{\pi}\left\{\left(\frac{b}{b-i}+h_2\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\frac{b}{b-i}+h_2}{h-h_2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b}{b+i}+h_2\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\frac{b}{b+i}+h_2}{h-h_2}}-\frac{2}{\sqrt{h_2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h_2}{h-h_2}}\right\}.\ (43)$$

---

[1]) См. (11).

[2]) $C_2'=C\sqrt{h_2}\,\pi=\frac{i}{k}$.

[3]) См. (21), (22), (23) и (24).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$I_3=\frac{q}{\pi i}\left\{(b-i)\left(\frac{b}{b-i}+h_2\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{\frac{b}{b-i}+h_2}}-\right.$$

$$-(b+i)\left(\frac{b}{b+i}+h_2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{\frac{b}{b+i}+h_2}}+$$

$$\left.+2i\sqrt{h_2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}\right\}. \qquad (44)$$

$$I_4=\int\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}\,dW=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}\cdot W-$$

$$-\frac{qh_2}{2\pi}\int\frac{1}{h}\ln\left[1+b^2\left(1+\frac{1}{h}\right)^2\right]d\sqrt{\frac{h-h_2}{h_2}}. \qquad (45)$$

$$Z=2(B+C+E)I_1-2AI_2-DI_3-2C\sqrt{h_2}\,I_4+C_2'W+C_3. \qquad (46)$$

Постоянные определяются из следующих условий:

1) $C=-\frac{1}{k\pi}(-h_2)^{\frac{1}{2}}$;

2) $D=2E(1+h_2)$.

3) $2(B+C+E)\sqrt{h_K-h_2}+\sqrt{h_K-h_2}\left(-\frac{2A}{h_K-h_2}-\right.$

$$\left.-\frac{D}{h_K+1}\right)-2C\sqrt{h_2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h_K-h_2}{h_2}}+C_2'=0.$$

4) При $h=h_K$, $Z=a^*+{}^*bi$.

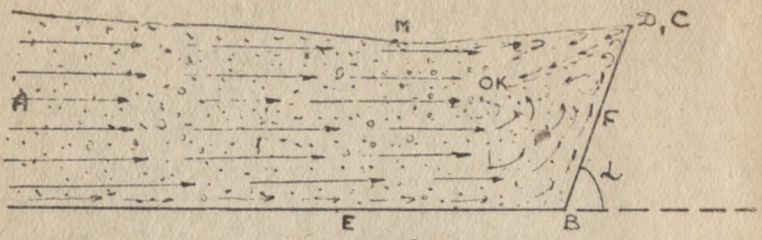
5) При $h=\infty$, $Z=0$.

6) При $Z=Z_s$, $W=-k\left(\frac{P_0}{\rho g}+y_s\right)$.

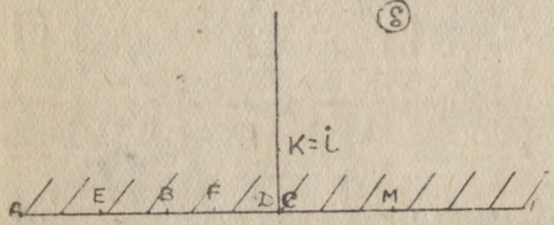
§ 6.

I. Предположим теперь, что точка разветвления потока находится в месте стыка свободной поверхности с наклонной водонепроницаемой стенкой (в точке D. См. черт. 24, 25 и 26).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Черт. 24.

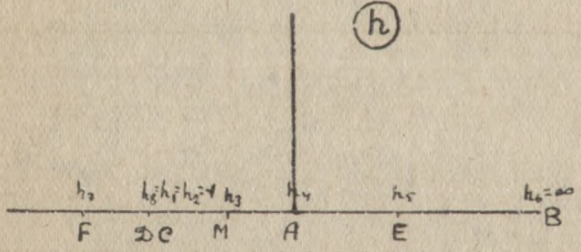


Черт. 25.

Выражение t в виде интеграла Кристоффеля-Шварца получается из (9) или (26), если положить

$$h_1 = h_2 = h_8 = h_D = -1.$$

$$t = \frac{An}{1-2n}(h+1)^{\frac{1}{n}-2} + \frac{Bn}{1-n}(h+1)^{\frac{1}{n}-1} + Cn(h+1)^{\frac{1}{n}} + Dn(h+1)^{\frac{1}{n}} - Dn(-1)^{\frac{1}{n}} \text{Б}\left(\sqrt[n]{-(h+1)},\ n\right) + C_2'. \quad [1] \quad (47)$$



Черт. 26.

Для вычисления Z можно воспользоваться выражениями I_1, I_3, I_4 (форм. 21, 23, 24), полагая

$$h_2 = -1.$$

Постоянные (A, B, C, D, b, C_3) определяются из следующих условий: [2])

1) $D = -\frac{1}{k\pi}$, 2) при $h = h_K$, $t = 0$, 3) при $h = h_K$, $Z = a^* + b^* i$, 4) $h = \infty$, $Z = 0$.

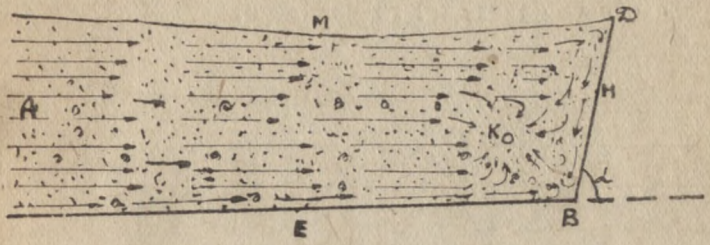
Здесь h_K находится во втором квадранте.

[1]) $C_2' = 0$ для значений h вне полукруга $|h - 1| = 1$.

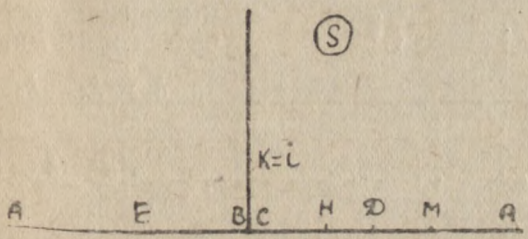
[2]) В этом случае за Z_S можно взять $Z_D\left(y_D = \frac{kP_0}{\rho g}\right)$. При $Z = Z_D$, $W = W_D$ —удовлетворяется тождественно.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

II. Если точка разветвления потока попадет в B (см. черт. 27, 28, 29), выражение t будет получаться аналогично первому случаю.



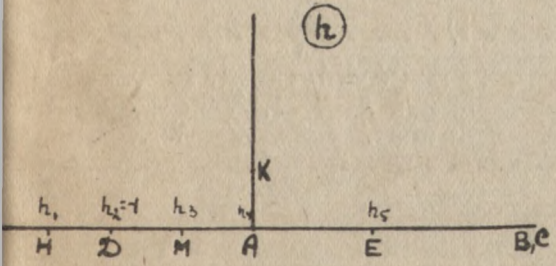
Черт. 27.



Черт. 28.

$$t=\frac{An}{1-n}(h+1)^{\frac{1}{n}-1}+Bn(h+1)^{\frac{1}{n}}+Cn(h+1)^{\frac{1}{n}}-$$

$$-Cn(-1)^{\frac{1}{n}}\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{-(h+1)},\ n\right)+C_2'. \qquad (48)$$



Черт. 29.

Сотношение между h и S здесь имеет следующий вид:

$$h=\frac{b}{S}, \qquad (49)$$

т. е.

$$W=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{b^2+h^2}{h^2}. \qquad (50)$$

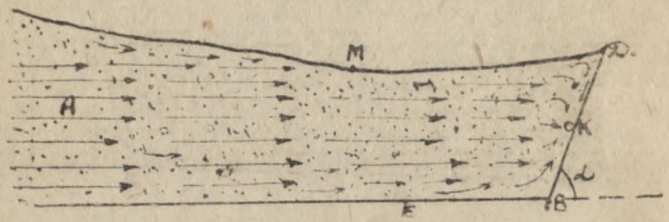
Выражение Z получается без особых затруднений. Для определения постоянных имеем следующие условия:

1) $C=-\frac{1}{k\pi}$, 2) при $h=h_K$, $t=0$, 3) при $h=h_K$, $Z=a^*+b^*i$, 4) при $h=-1$, $Z=Z_D$.

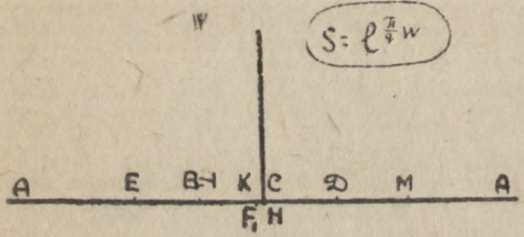
Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Точка K в этом случае переходит на ось ординат ($h_K = -bi$).

III. Установим теперь сток на водонепроницаемой наклонной стенке (см. черт. 30, 31, 32, 33). Как сразу видно, этот случай является частным случаем 1-го варианта.



Черт. 30.



Черт. 31.

Выражение для t получается из (9) при

$$h_1 = h_7 = h_8 = -1.$$

$$t = \frac{An}{1-n}\frac{(h-h_2)^{\frac{1}{n}-1}}{1-n} + Bn(h-h_2)^{\frac{1}{n}} + Cn(h-h_2)^{\frac{1}{n}} - Cn\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{\frac{h-h_2}{h_2}}, n\right) + C_2'. \quad (51)$$

Выражение для Z легко получается из (25).

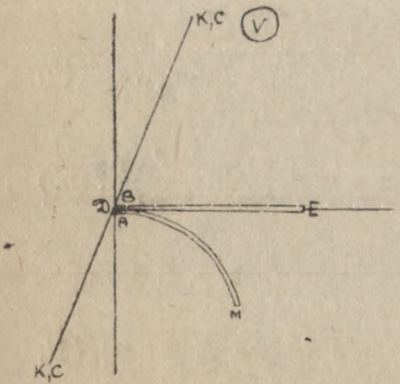
Условия для определения постоянных (A, B, C, h_2, C_1) следующие:

1) $C = -\frac{1}{k\pi}(-h_2)^{-\frac{1}{n}}$,

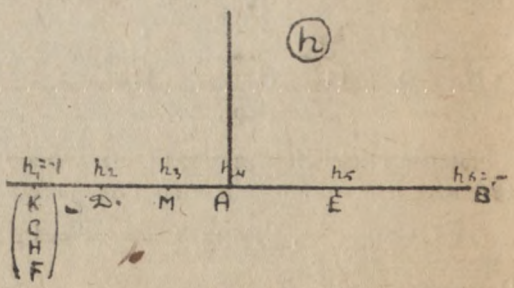
2) при $h = h_K = -1$, $t = 0$,

3) при $h = -1$, $Z = a + a_1 i$,

4) при $Z = Z_S$, $W = W_S$.



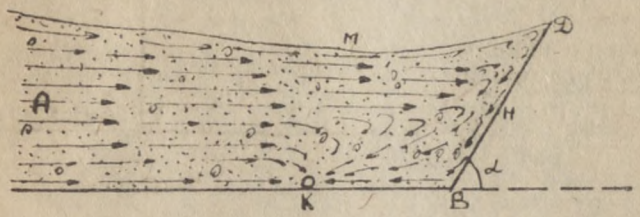
Черт. 32.



Черт. 33.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

IV. Если сток поместим на горизонтальном подстилающем слое, то получим течение, изображенное на черт. 34. Выражение t можно получить из (32), если положить $h_5 = h_6 = h_7 = 1$. Здесь $h_K = 1$. Из (41) легко получается выражение для Z.



Черт. 34.

Постоянные определяются из следующих условий:

1) $C = -\frac{1}{k\pi}(-h_2)^{-\frac{1}{n}}$

2) при $h = 1$, $t = 0$ (одно условие),

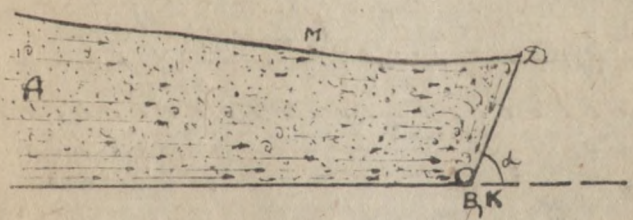
3) при $h = 1$, $Z = a$ (одно условие),

4) при $h = \infty$, $Z = 0$,

5) при $Z = Z_S$, $W = W_S$.

V. Предельный случай, когда сток находится в точке D (на стыке свободной поверхности и наклонной стенки), не охватывается нашей теорией, т. к. в этом случае нельзя пренебрегать размерами стока, считать его точечным.

VI. Рассмотрим случай, когда сток помещен в точку B (см. черт. 35).



Черт. 35.

Здесь $$t = \frac{An}{1-n}(h+1)^{\frac{1}{n}-1} + (B+C)\,n(h+1)^{\frac{1}{n}} - Cn\,\text{Б}\left(\sqrt[n]{-(h+1)},\ n\right) + C_2'. \qquad (56)$$

Интегрированием выражения (56) по W легко также получается и формула для Z, причем здесь $W = -\frac{q}{\pi}\ln(-h)$.

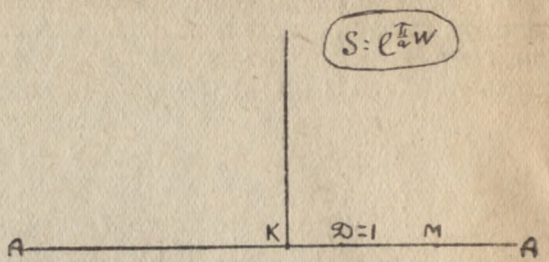
Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Условия для определения постоянных следующие:

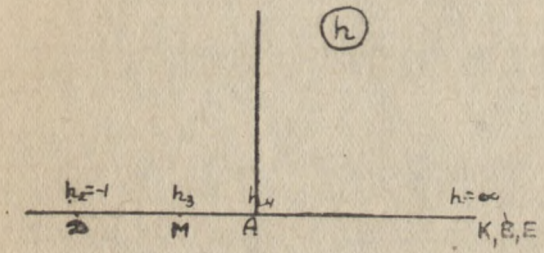
1) $C = -\frac{1}{k\pi}$,

2) при $h = \infty$, $Z = 0$.

VII. В заключение рассмотрим случай, изображенный на черт. 38. В этом случае $V_{y_c} = -k$, $V_{x_c} = 0$.



Черт. 36.



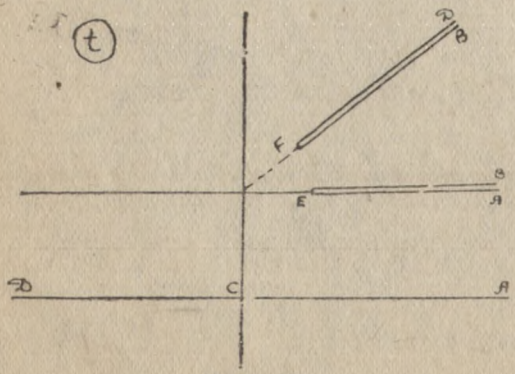
Черт. 37.

Область t изображена на черт. 39.

Выражение t получается из (26), если положить:

$$h_C = h_H = h_M.$$

Черт. 38.



Черт. 39.

Аналогично получается и выражение Z. Для составления таблиц к настоящей работе, можно задаваться значением параметров в полуплоскости h, а параметры плоскости Z определять. Такие таблицы в недалеком будущем и будут составлены.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

SUR LE MOUVEMENT STATIONNAIRE DES EAUX SOUTERRAINES DANS LE CAS D'UN DRAIN, D'UNE SURFACE LIBRE ET D'UNE COUCHE IMPERMÉABLE ET FORMANTE UN ANGLE.

A. A. Grib (Tomsk).

Dans cette note on considère un certain cas du mouvement plan stationnaire des eaux souterraines avec une surface libre. La région cocupé par le sol et l'eau est limitée par une surface libre et deux parois imperméables: l'une horizontale et l'autre inclinée.

A l'intérieur de la région il y a un tuyau de décharge. On obtient la solution du problème à l'aide d'un hodographe. On suppose que la vitesse varie sur la surface libre d'après la loi du cercle. Les vitesses varient avec la position du point de ramification du courant. Dans cette note on étudie les cas divers de la position de ce point.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ.

С. А. Чунихин (Москва).

В настоящей работе G везде обозначает группу порядка g, обладающую тем свойством, что каждому делителю a, где $(a, g/a)=1$, соответствует подгруппа порядка a.

Докажем следующую теорему:

Теорема. Если каждому делителю a порядка g группы G, где $(a, g/a)=1$, соответствует подгруппа порядка a, то группа G разрешима.

Предварительно докажем вспомогательную теорему: каждая подгруппа H группы G будет того же типа, что и сама группа G, если $(h, g/h)=1$. где h порядок H.

Доказательство. Пусть b будет делителем h, для которого $(b, h/b)=1$. Мы сейчас покажем, что H содержит в себе подгруппу порядка b. Согласно нашим условиям, G содержит в себе подгруппу H_1 порядка $\frac{gb}{h}$. Комплекс $H H_1$ содержит в себе $\frac{hgb}{hd}=\frac{gb}{d}$ различных друг от друга элементов G, где d порядок пересечения ϑ групп H и H_1 (следовательно, d будет делителем b). Но число различных элементов комплекса $H H_1$ не больше, чем g. т. е. $\frac{gb}{d}\leqslant g$, $\frac{b}{d}\leqslant 1$; $d=b$. Этим вспомогательная теорема доказана.

Доказательство теоремы. Если существуют неразрешимые группы исследуемого нами типа, то мы берем одну из них G, порядок которой g наименьший. По теореме, данной Бурнсайдом, [1]) число g делится на более, чем 2 различных простых числа. Пусть H, порядка h, подгруппа G, где $(h, g/h)=1$. Число h выберем так, что оно делится только на два различных простых числа. Тогда H разрешима и, следовательно, имеет нормальный делитель P порядка p^{α_1}, где p простое число. Рассмотрим теперь подгруппу M группы G порядка $\frac{gp^{\alpha}}{h}$, где p^{α} наибольшая степень p, делящая число g. Обратимся к комплексу MH. Число различных элементов этого комплекса равно $\frac{gp^{\alpha}}{d}$, где d порядок пересечения ϑ групп M и H (тогда d делитель p^{α}). Так как

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\frac{gp^\alpha}{d}$ не больше g, то получим $\frac{p^\alpha}{d} \leqslant 1$ или $d = p^\alpha$, т. е. $MH = G$. Тогда ϑ является подгруппой Силова группы H порядка p^α, следовательно, ϑ содержит в себе нормальный делитель P. По одной из данных мною теорем [2]) G содержит в себе нормальный делитель N, который в свою очередь является делителем M.

Так как по нашей вспомогательной теореме M является группой того же самого типа, как и сама группа G, и так как порядок M меньше порядка G, то группа M разрешима. Группа N, являясь подгруппой M, тоже разрешима.

Рассмотрим теперь факторгруппу G/N.

Докажем, что эта группа принадлежит к тому же типу, что и группа G. Пусть будет n порядком группы N. Если b является делителем числа g/n таким, что $(b, g/hb) = 1$, то мы берем подгруппу L порядка $b\delta$ группы G, где δ такой делитель g, для которого $(b\delta, g) = 1$. Комплекс LN будет группой и порядок этой группы равен bn. Следовательно, G/N содержит в себе подгруппу порядка b и наше утверждение доказано.

Следовательно, группа G/N разрешима, потому что порядок G/N меньше порядка G. Так как группа N тоже разрешима (как мы показали), то наша теорема доказана.

Наше доказательство является приложением метода композиций [3]), которые я изложил в другой работе (Теорема о трех классах).

ЛИТЕРАТУРА

1) W. Burnside, The theory of groups of finite order, sec. ed. p. 232, Corollary III.

2) Serge Tchounikhin, Simplicité du groupe fini et les ordres de ses classes d'éléments conjugués, Comptes Rendus de l'Acad, des Sc, de Paris, t. 191, p. 397—399, 1930, Lemme I.

3) Serge Tchounikhin, loc. cit. См. также

S. Tchounikhin, Über eine obere Grenze für die Ordnungen der Elemente einer endlichen Gruppe ohne Zentrum, Math. Ann. 112, 583, 1936, u C. Rendus de l'Acad. des Sc. de l'URSS (1936, t. II (XI) № 8) (совместно с A. P. Dietzmann).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ÜBER AUFLÖSBARE GRUPPEN.

S. Tchounikhine (Moskau).

Im folgenden bezeichnet G überall eine Gruppe von der Ordnung g mit der Eigenschaft, dasz jedem Teiler a von g, wo $(a, g/a) = 1$, eine Untergruppe von der Ordnung a entspricht.

Beweisen wir jetzt den folgenden Satz:

Satz. Wenn jedem Teiler a von der Ordnung g einer Gruppe G, wo $(a, g/a) = 1$, eine Untergruppe der Ordnung a entspricht, so ist die Gruppe G auflösbar.

Zuerst beweisen wir den folgenden *Hilfssatz. Jede Untergruppe H von G ist von derselben Art, wie die Gruppe G selbst, wenn $(h, g/h) = 1$, wo h die Ordnung von H ist.*

Beweis. Es sei b ein Teiler von h, für welchen $(b, h/b) = 1$. Wir wollen nun zeigen, dasz H eine Untergruppe der Ordnung b enthält. Nach unseren Bedingungen enthält G eine Untergruppe H_1 der Ordnung $\frac{gb}{h}$. Der Komplex HH_1 enthält $\frac{hgb}{hd} = \frac{gb}{d}$ verschiedene Elemente von G, wo d die Ordnung des Durchschnittes ϑ der Gruppen H und H_1 ist (folglich ist d ein Teiler von b). Aber die Anzahl der verschiedenen Elemente in dem Komplexe HH_1 ist nicht gröszer als g, d.h. $\frac{gb}{d} \leqslant g$, $\frac{b}{d} \leqslant 1$, $d = b$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes. Existieren Gruppen vom behandelten Typus, die nichtauflösbar sind, so nehmen wir eine von ihnen, G, die die kleinste Ordnung g hat. Nach einem Satz von Burnside [1]) ist die Zahl g durch mehr als zwei verschiedene Primzahlen teilbar. Es sei H von der Ordnung h eine Untergruppe von G, wo $(h, g/h) = 1$. Die Zahl h wollen wir so wählen, dasz sie nur durch zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist. Dann ist H auflösbar und folglich enthält H einen Normalteiler P von der Primzahlpotenzordnung p^{α}[1]. Betrachten wir jetzt eine Untergruppe M von der Ordnung $\frac{gp^{\alpha}}{h}$ der Gruppe G, wo p^{α} die höchste der Potenzen von p ist, die die Zahl g teilen. Nehmen wir den Komplex MH. Die Anzahl der verschiedenen Elemente dieses Komplexes ist $\frac{gp^{\alpha}}{d}$, wo d die Orqnung des Durchschnittes ϑ der Gruppen M und H ist (folglich d ein Teiler von p^{α} ist).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Weil $\frac{g p^{\alpha}}{d}$ nicht gröszer als g ist, so erhalten wir $\frac{p^{\alpha}}{d} \leqslant 1$, oder $d = p^{\alpha}$, d.h. $MH = G$. Dann ist $\mathfrak{H}$ eine Sylowuntergruppe der Ordnung p^{α} von H und folglich enthält $\mathfrak{H}$ den Normalteiler P von H. Nach einem unserer Sätze [2]) *enthält G in diesem Falle* einen *Normalteiler N, der in M aufgeht.* Weil M nach dem obigen Hilfssatz von derselben Art ist, wie die Gruppe G selbst, und weil die Ordnung von M kleiner als die Ordnung von G ist, so ist *M auflösbar.* N ist (als Untergruppe von M) auch auflösbar. Betrachten wir nun die Faktorgruppe G/N. Beweisen wir jetzt, dasz diese Gruppe von demselben Typus, wie die Gruppe G selbst, ist. Sei n die Ordnung von N. Ist b ein Teiler von g/n derart, dasz $(b, g/n\, b) = 1$, so nehmen wir eine Untergruppe L der Ordnung $b\delta$ von G, wo δ ein Teiler von g ist, für welchen $(b\delta, g) = 1$. Der Komplex LN ist eine Gruppe; die Ordnung dieser Gruppe ist gleich bn. Also enthält G/N eine Untergruppe von der Ordnung b und unsere Behauptung ist bewiesen. Folglich, weil die Ordnung von G/N kleiner ist, als die Ordnung von G, so ist die Gruppe G/N auflösbar. Weil N auch auflösbar ist (wie wir oben gezeigt haben), so ist unser Satz bewiesen.

Unser Beweis ist eine Anwendung der Kompositionsmethode, die ich shon früher („Dreiklassensatz") entwickelt habe [3]).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ.

Стр.

А. Я. Хинчин. Об унимодальных распределениях 1
A. Khintchine. Über unimodale Verteilungen 7
Д. А. Райков. Одна теорема из теории аналитических характеристических функций 8
D. Raikov. A theorem from the theory of the analytic characteristic functions 11
П. П. Куфарев. Изгиб стержня равностороннего треугольного сечения 12
P. Koufareff. Flexion de la barre à section équilatérale triangulaire . 28
Н. А. Селиванов. Доказательство одной теоремы Denjoy о производных функциях 29
N. A. Selivanov. Démonstration d'un théorème de M. A. Denjoy sur les fonctions dérivées 31
Я. А. Миндлин. Краевая задача волнового уравнения в случае круга 32
J. A. Mindlin. Le problème aux limites de l'équation des ondes dans le cas du cercle 36
Е. Н. Аравийская. О приближенном представлении функций двух комплексных переменных в областях, конвексных относительно некоторых классов функций 37
E. Aravyskaja. Sur l'approximation des fonctions, régulières dans un domaine convexe relativement à certaines classes de fonctions 42
И. И. Привалов и Г. А. Бродский. О предельных значениях интеграла типа Коши-Стильтьеса 43
I. Privalov and G. Brodsky. On the limit values of a Cauchy-Stieltjes integral 51
A. Einstein and N. Rosen. On gravitational waves 53
А. Эйнштейн и Н. Розен. О гравитационных волнах 63
А. С. Кованько. Определение интеграла Римана-Стильтьеса для функций двух независимых переменных с двумя добавочными функциями и его связь с теорией меры поверхности 64
A. S. Kovanko. Définiton de l'intégrale de Rieman-Stieltjes d'une fonction à deux variables avec deux fonctions adjointes et son application à la théorie de la mésure d'une surface 107
Я. Л. Трайнин. О совершенных числах 108
J. L. Trainin. Über vollkommene Zahlen 118
А. С. Джанумянц. Интеграл Стильтьеса и криволинейный интеграл по неспрямляемой кривой Жордана 119
A. C. Djanoumiantz L'integrale de Stieltjes et les intègrales curvilignes le long des courbes non rectifiables 162
Г. А. Бюлер. О некоторых вопросах теории функций двух комплексных переменных мероморфных в единичном бицилиндре 164
G. Buler. Sur quelques questions de la théorie des fonctions méromorphes dans le bicylindre unité 185
Н. В. Оранская. Интегрирование уравнения de Sparre'a 187
N. Oranskaja. Lösung einer Differentialgleichung von de Sparre . . . 191
А. А. Гриб. Установившееся движение грунтовых вод при наличии дренажной трубы, свободной поверхности и водонепроницаемого слоя в виде угла 192

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

A. Grib. Sur le mouvement stationnaire des eaux souterraines dans le cas d'un drain d'une surface libre et d'une couche imperméable et formante un angle 219
С. А. Чунихин. О разрешимых группах 220
S. Tchounikine. Über auflösbare Gruppen 222

АДРЕСА АВТОРОВ.

Хинчин А. Я.—Москва 19, Крестовоздвиженский 2, кв. 36.
Райков Д. А.—Москва 11, Лубянский проезд 5, кв. 4.
Куфарев П. П.—Томск, Ленинский проспект 23.
Селиванов Н. А.—Калинин, Набережная Разина. 25.
Миндлин Я. А.—Москва, Малая Бронная 18, кв. 309.
Аравийская Е. Н.—Томск, Советская 73, кв. 6. Горный корпус.
Привалов И. И.—Москва, Благовещенский пер., д. 1, кв. 5.
Бродский Г. А.—Москва, Институт математики при МГУ.
Эйнштейн А.—США, Принстон, Нью-Джерси. Файн Холл. Научно-исследовательский институт.
Einstein A.—USA New Jersey Fine Hall-Institut for advanced study.
Розен Н.—Киев, Киевский Государственный университет.
Кованько А. С.—Иваново, Пушкинская 9/1, кв. 7.
Трайнин Я. Л.—Новосибирск, улица Щетинкина 82, кв. 2.
Джанумянц А. С.—Томск, Нечевский пер. 24.
Бюлер Г. А.—Томск, Советская 14, кв. 2.
Оранская Н. В.—Томск, Педагогический институт.
Гриб А. А.—Томск, Тимирязевский 12.
Чунихин С. А.—Москва, 8. Петровско-Разумовская, 2 Астрадамский тупик, д. 4-а, кв. 1.

Отв. редактор—проф. Ф. Э. Молин.
Тех. редактор—А. Ф. Лалетин.

Уполгорлита № Б 21507
Сдано в набор 20/VI-1938 г.
Подписано к печати 10/II-1939 г.
Статформат 140×225/16
Типогр. знаков в печ. л. 46080.
Объем 14 1/4 п. л., авт. 16,4, бум. л.—7 1/8.
Заказ № 2567-1938 г.
Тираж 500 экз.

Томск, тип. изд. „Красное Знамя". Советская ул. № 47

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Цена 7 руб.