Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский педагогический государственный университет»

Абелевы группы

*Материалы Международного симпозиума,
посвященного 100-летию со дня рождения Л.Я. Куликова
(Москва, 2–6 ноября 2014 г.)*

Москва – 2014

О проективно вполне транзитивных абелевых группах

Чехлов А.Р. (Томск)

Обозначим через $H_G(g)$ — высотную матрицу элемента g группы G. В случае, если группа G является p-группой вместо $H_G(g)$ рассматриваем индикатор $U_G(g)$ элемента g; аналогично, если G — группа без кручения, рассматриваем его характеристику $\chi_G(g)$. Через $o(g)$ обозначается порядок элемента g; $\mathrm{E}(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G; $\mathrm{End}(G) = \mathrm{E}(G)^+$ — ее группа эндоморфизмов; $\mathrm{Proj}(G)$ — подкольцо в $\mathrm{E}(G)$, порожденное всеми идемпотентами кольца $\mathrm{E}(G)$; $\Pi(G)$ — подгруппу в $\mathrm{End}(G)$, порожденную всеми идемпотентами кольца $\mathrm{E}(G)$. Если m — некоторое кардинальное число, то $A^{(m)}$ — прямая сумма m числа копий группы A. $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — кольцо (аддитивная группа) всех рациональных чисел. $r(A)$ — ранг, а $T(A)$ — периодическая часть группы A.

На множестве $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ рассмотрим следующее отношение $\preccurlyeq$: полагаем $m \preccurlyeq n \Leftrightarrow m, n \in \mathbb{N}$ и $n \mid m$ или $m = \infty$.

Рядом авторов изучались различные классы вполне транзитивных групп (см., например, [1]). Напомним, что группа G называется *вполне транзитивной*, если для любых $x, y \in G$ с условием $H_G(x) \leqslant H_G(y)$ и $o(x) \preccurlyeq o(y)$ найдется $\alpha \in \mathrm{E}(G)$ со свойством $\alpha(x) = y$. Если группа G редуцирована, то условие $o(x) \preccurlyeq o(y)$ можно опустить.

Следуя [2] группу G назовем *проективно вполне транзитивной* (кратко, pft-*группой*), если для любых $x, y \in G$ с условием $H_G(x) \leqslant H_G(y)$ и $o(x) \preccurlyeq o(y)$ найдется $\alpha \in \mathrm{Proj}(G)$ со свойством $\alpha(x) = y$; если α можно выбрать из $\Pi(G)$, то группу назовем spft-*группой*. Если $\mathrm{E}(G) = \mathrm{Proj}(G)$, то группа G называется IG-*группой*, а если $\mathrm{E}(G) = \Pi(G)$, то — IS-*группой*. В [2] изучались IG-группы и IS-группы, а также примарные pft-группы и spft-группы.

Предложение 1. *Делимая группа $D = D_0 \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi} D_p)$ является IG-группой тогда и только тогда, когда, если $D_0 \neq 0$, то $r(D_0) \geqslant 2$; и для каждого $p \in \Pi$, если $D_p \neq 0$, то $r(D_p) \geqslant 2$.*

Предложение 2. *Вполне разложимая группа без кручения G является IG-группой тогда и только тогда, когда каждая ее однородная компонента, делимая хотя бы на одно простое число, имеет ранг $\geqslant 2$; множество же однородных компонент, имеющих ранг 1, конечно.*

Предложение 3. *Векторная группа без кручения $G = \prod_{t\in\Omega} G_t$, где G_t — прямое произведение групп ранга 1 типа t, а Ω — некоторое мно-*

жество типов, является IG-группой тогда и только тогда, когда каждая группа G_t, делимая хотя бы на одно простое число, имеет ранг $\geqslant 2$; множество же групп G_t, имеющих ранг 1, конечно.

Предложение 4. *Делимая группа $D = D_0 \oplus T(D)$ является pft-группой если и только если $D_0 \neq 0$, то $r(D_0) > 1$.*

Предложение 5. *Если $G = D \oplus A$, где D — делимая, а A — редуцированная части группы G, то G является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда D и A — pft-группы (соответственно, spft-группы).*

Предложение 6. *Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где каждая A_i является pft-группой (соответственно, spft-группой), то A является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда A вполне транзитивна.*

Следствие 7. *Если $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ редуцированная группа без кручения и $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$ или $\mathrm{Hom}(A_j, A_i) = 0$ для любых $i \neq j$, то G является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда каждая A_i является pft-группой (соответственно, spft-группой) и если $pA_i \neq A_i$, то $pA_j = A_j$ для каждого простого числа p и любых $i \neq j$, где $i, j \in I$.*

Следствие 8.*Пусть $\kappa > 1$ и G является p-группой или однородной группой без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *G вполне транзитивна;*

(b) *$G^{(\kappa)}$ вполне транзитивна;*

(c) *$G^{(\kappa)}$ является pft-группой.*

Лемма 9. *Если A — вполне транзитивная группа, все ненулевые эндоморфизмы которой суть мономорфизмы, то A является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(A) \cong \mathbb{Z}$.*

Напомним следующее понятие. Говорят, что p-группы G_1 и G_2 образуют *вполне транзитивную пару*, если для любых ненулевых $x \in G_i$, $y \in G_j$ $(i, j \in \{1, 2\})$ условие $U_{G_i}(x) \leqslant U_{G_j}(y)$ влечет существование такого гомоморфизма $\alpha \in \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$, что $\alpha(x) = y$.

Предложение 10. *Если $\{G_i\}_{i \in I}$ — p-группы, являющиеся pft-группами (соответственно, spft-группами), то периодическая часть $H = T(\prod_{i \in I} G_i)$ будет pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда для любых $i, j \in I$ пара (G_i, G_j) вполне транзитивна.*

Следствие 11. *Пусть* $\{G_i\}_{i\in I}$ *— p-группы, являющиеся либо сепарабельными, либо тотально проективными pft-группами (соответственно, spft-группами). Тогда периодическая часть* $H = T(\prod_{i\in I} G_i)$ *будет pft-группой (соответственно, spft-группой).*

Теорема 12. *Пусть* $G = A \oplus T$*, где* A *— редуцированная группа без кручения, а* T *— редуцированная периодическая группа. Тогда* G *будет pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда* A *и* T *являются pft-группами (соответственно, spft-группами).*

Лемма 13. *Пусть* A *— вполне транзитивная группа, а* G *— такая группа, что каждый ее элемент содержится в прямом слагаемом, изоморфном группе* A*, причем дополнительное прямое слагаемое отлично от* 0 *и также обладает указанным свойством. Тогда* G *является spft-группой.*

Следствие 14. *Делимая группа* $D = D_0 \oplus T(D)$ *является spft-группой тогда и только тогда, когда, если* $D_0 \neq 0$*, то* $r(D_0) > 1$.

Следствие 15. *Алгебраически компактная группа без кручения* $G = \prod_{p\in\Pi} G_p$ *является pft-группой тогда и только тогда, когда* $r_p(G_p) > 1$ *для каждого* $p \in \Pi$.

Напомним, что группа называется *сепарабельной*, если каждый ее элемент содержится в прямом слагаемом, являющимся прямой суммой групп ранга 1.

Следствие 16. *Редуцированная сепарабельная группа ранга без кручения* $\geqslant 2$ *является pft-группой (соответственно, spft-группой) тогда и только тогда, когда для любых ее неизоморфных прямых слагаемых* G_1, G_2 *ранга 1 и каждого простого числа* p*, если* $pG_1 \neq G_1$*, то* $pG_2 = G_2$*, причем если* A *— прямое слагаемое ранга 1 группы* G*, то в* G *найдется такая подгруппа* $B \cong A$*, что* $A \oplus B$ *— прямое слагаемое группы* G.

Литература

[1] *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / Факториал Пресс, 2007.

[2] *Danchev P., Goldsmith B.* On projectively fully transitive Abelian p-groups // Results Math. 2013. V. 63. P. 1109–1130.