

УДК 519.2

Г.Н. РЕШЕТНИКОВА, А.А. ЧЕНБУЛАШКИНА

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОСТАВКАМИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Решается задача управления поставками с использованием методов теории автоматического управления. Предлагается подход к формированию следящей системы адаптивного управления. Построена математическая модель для управления поставками. Сформулированы ограничения, которые позволяют избежать недостатка и избытка товаров на складе. Приводятся результаты численного моделирования. Применение предложенных алгоритмов позволяет эффективно решать конкретные задачи управления экономическими системами.

Ключевые слова: математическая модель, адаптивное управление, поставки, система ограничений.

Введение

В настоящее время все большую актуальность приобретают задачи динамического маркетинга, в которых процессы описываются дифференциальными или разностными уравнениями. Это позволяет использовать теорию управления в пространстве состояний для решения экономических задач. При этом большое значение приобретает разработка математических моделей, адекватно отображающих экономические процессы.

Одной из важнейших экономических задач является управление поставками. При реализации этой задачи необходимо учитывать влияние случайных факторов, ошибки и отсутствие части информации, наличие неизвестных параметров в модели. Кроме того, необходимо принимать во внимание, что необоснованное увеличение объемов поставок может привести к затовариванию складов и порче товара, а рассогласование объемов поставок и реализации товаров может привести к существенным убыткам. Таким образом, актуальной становится разработка алгоритмов для принятия решений о поставке товаров с использованием информационных технологий.

В данной работе рассматривается следящая система управления многономенклатурными поставками, позволяющая держать желаемый объем каждого товара на складе. При этом учитываются ограничения на грузоподъемность транспортных средств и рентабельность их использования.

1. Математическая модель и алгоритмы управления

Пусть $u_i(t)$ – объем поставок товара i -го вида в закупочных ценах в единицу времени, $Y_i(t)$ – потенциальный спрос на товар в рыночных ценах, $i = \overline{1, n}$. Уравнения динамики объема товара на складе $z_i(t)$, у потребителя $v_i(t)$ и дохода от реализации товара $w_i(t)$ можно записать в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= k_{3,i}u_i(t) - k_{4,i}(Y_i(t) - v_i(t))z_i(t) - k_{1,i}z_i(t), \quad z_i(t_0) = z_{0,i}, \\ \dot{v}_i(t) &= k_{4,i}(Y_i(t) - v_i(t))z_i(t) - k_{2,i}v_i(t), \quad v_i(t_0) = v_{0,i}, \\ \dot{w}_i(t) &= k_{4,i}(Y_i(t) - v_i(t))z_i(t) - u_i(t) - k_{5,i}z_i(t), \quad w_i(t_0) = w_{0,i}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k_{1,i}, k_{2,i}, k_{3,i}, k_{4,i}, k_{5,i}$ – коэффициенты, определяющие порчу товара при хранении на складе, темп потребления, торговую наценку, темп продаж, плату за хранение; выражение $k_{4,i}(Y_i(t) - v_i(t))z_i(t)$ задает объем проданного товара в единицу времени, $i = \overline{1, n}$.

При управлении поставками систему уравнений (1) будем задавать в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \bar{\mathbf{A}}_i(t)\mathbf{x}_i(t) + \bar{\mathbf{B}}_i(t)u_i(t) + \bar{\mathbf{F}}_i(t)q_i(t), \quad \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{0,i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Матрицы динамических свойств и влияния управляющих воздействий в (2) будут иметь вид

$$\bar{\mathbf{A}}_i(t) = \begin{pmatrix} -k_{4,i}(\varphi_{Y_i}(t) - \varphi_{v_i}(t)) - k_{1,i} & k_{4,i}\varphi_{z_i}(t) & 0 \\ k_{4,i}(\varphi_{Y_i}(t) - \varphi_{v_i}(t)) & -k_{4,i}\varphi_{z_i}(t) - k_{2,i} & 0 \\ k_{4,i}(\varphi_{Y_i}(t) - \varphi_{v_i}(t)) - k_{5,i} & -k_{4,i}\varphi_{z_i}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_i(t) = \begin{pmatrix} k_{3,i} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где функции $\varphi_{Y_i}(t), \varphi_{z_i}(t), \varphi_{v_i}(t)$ определяют расчетные значения потенциального спроса, объема товара на складе и у потребителя; $\mathbf{x}_i(t) = (z_i(t), v_i(t), w_i(t))^T$ – вектор состояния; $u_i(t)$ – управление, задающее объем поставок товара i -го вида, $i = \overline{1, n}$. Матрица $\overline{\mathbf{F}}_i(t)$ определяет влияние случайных факторов.

Компоненты вектора $\mathbf{q}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, который описывает действия случайных факторов в (2), будем считать гауссовскими случайными величинами с характеристиками:

$$M\{\mathbf{q}_i(t)\} = \overline{\mathbf{q}}_i(t), \quad M\{(\mathbf{q}_i(t) - \overline{\mathbf{q}}_i(t))(\mathbf{q}_i(\tau) - \overline{\mathbf{q}}_i(\tau))^T\} = \mathbf{Q}_i(t)\delta(t - \tau).$$

При формировании объема поставок с использованием информационных технологий математическая модель (2) приводится к дискретному виду:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i(k)\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_i(k)u_i(k) + \mathbf{F}_i(k)\mathbf{q}_i(k), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0,i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $\mathbf{A}_i(k) = \mathbf{I}_3 + \Delta t \overline{\mathbf{A}}_i(t_k)$, $\mathbf{B}_i(k) = \Delta t \overline{\mathbf{B}}_i(t_k)$, $\mathbf{F}_i(k) = \sqrt{\Delta t} \overline{\mathbf{F}}_i(t_k)$; $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ – шаг дискретизации; $\mathbf{I}_3$ – единичная матрица третьего порядка; $\mathbf{q}_i(k)$ – последовательность гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{\mathbf{q}_i(k)\} = \overline{\mathbf{q}}_i(k), \quad M\{(\mathbf{q}_i(k) - \overline{\mathbf{q}}_i(k))(\mathbf{q}_i(j) - \overline{\mathbf{q}}_i(j))^T\} = \mathbf{Q}_i(k)\delta_{k,j}.$$

Здесь k соответствует моменту времени $t_k = t_0 + k\Delta t$, $k = \overline{0, N}$, где N – дискретное время моделирования.

В реальных условиях управление поставками осуществляется на основе информации, которая чаще всего является неполной и содержит ошибки.

Пусть математическая модель информационной системы имеет вид

$$\mathbf{y}_i(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{r}_i(k), \quad (4)$$

где $\mathbf{H}$ – матрица размерности $l \times 3$, ($l \leq 3$), определяющая полноту информации; $\mathbf{r}_i(k)$ – вектор, задающий погрешности информационной системы в виде последовательности гауссовских случайных величин с характеристиками:

$$M\{\mathbf{r}_i(k)\} = 0, \quad M\{\mathbf{r}_i(k)\mathbf{r}_i^T(j)\} = \mathbf{R}_i\delta_{k,j}, \quad M\{\mathbf{r}_i(k)\mathbf{q}_\gamma^T(j)\} = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \gamma = \overline{1, 3}.$$

Ввиду сложности получения информации об объеме товара у потребителя, матрица $\mathbf{H}$ полагается равной

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что неизвестными параметрами в модели являются коэффициенты, определяющие темп продаж и потребления $k_{4,i}$, $k_{2,i}$, $i = \overline{1, n}$. Для оценивания состояния и параметров модели используется двухэтапный алгоритм [3, 4]. В связи с тем, что информация об объеме товара у потребителя отсутствует, значение коэффициента $k_{2,i}$ не доступно оцениванию, а остается априорно заданным, равным $\hat{k}_{2,i}(0)$. Поэтому строится оценка только для $k_{4,i}$, т.е. $\theta_i = k_{4,i}$ – неизвестный параметр, который подлежит оцениванию в математической модели для управления поставками товара i -го вида. При этом предполагается, что априорные распределения вектора начального состояния $\mathbf{x}_{0,i}$ и параметра $\theta_{0,i}$ являются гауссовскими:

$$M\{\mathbf{x}_{0,i}\} = \overline{\mathbf{x}}_{0,i}, \quad M\{(\mathbf{x}_{0,i} - \overline{\mathbf{x}}_{0,i})(\mathbf{x}_{0,i} - \overline{\mathbf{x}}_{0,i})^T\} = \mathbf{P}_{x,i,0},$$

$$M\{\theta_{0,i}\} = \overline{\theta}_{0,i}, \quad M\{(\theta_{0,i} - \overline{\theta}_{0,i})^2\} = P_{\theta,i,0}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Рекуррентный алгоритм для оценки состояния дискретной модели, описывающей динамику товара i -го вида, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_i(k+1) &= \hat{\mathbf{x}}_i(k+1/k) + \mathbf{K}_i(k)[\mathbf{y}_i(k+1) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_i(k+1/k)], \\
\hat{\mathbf{x}}_i(k+1/k) &= \hat{\mathbf{A}}_i(k)\hat{\mathbf{x}}_i(k) + \mathbf{B}_i(k)u_i(k) + \mathbf{F}_i(k)\bar{\mathbf{q}}_i(k), \quad \hat{\mathbf{x}}_i(0) = \bar{\mathbf{x}}_{0,i}, \\
\mathbf{K}_i(k) &= \mathbf{P}_{x,i}(k+1/k)\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}_{x,i}(k+1/k)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_i]^{-1}, \\
\mathbf{P}_{x,i}(k+1/k) &= \hat{\mathbf{A}}_i(k)\mathbf{P}_{x,i}(k)\hat{\mathbf{A}}_i^T(k) + \mathbf{F}_i(k)\mathbf{Q}_i\mathbf{F}_i^T(k), \\
\mathbf{P}_{x,i}(k+1) &= [\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_i(k)\mathbf{H}]\mathbf{P}_{x,i}(k+1/k), \quad \mathbf{P}_{x,i}(0) = \mathbf{P}_{x,i,0}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Алгоритм оценивания неизвестного параметра θ_i , $i = \overline{1, n}$, имеет вид

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_i(k+1) &= \hat{\theta}_i(k) + \mathbf{L}_i(k)[\mathbf{y}_i(k+1) - \mathbf{H}\Phi(\hat{\mathbf{x}}_i(k), u_i(k))\hat{\theta}_i(k) - \mathbf{H}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i(k), u_i(k), \hat{k}_{2,i}(0))], \\
\hat{\theta}_i(0) &= \bar{\theta}_{0,i}, \\
\mathbf{L}_i(k) &= \mathbf{P}_{\theta,i}(k)\Phi^T(\hat{\mathbf{x}}_i(k), u_i(k))\mathbf{H}^T\mathbf{M}_i^{-1}, \\
\mathbf{M}_i(k) &= \mathbf{H}\Phi(\hat{\mathbf{x}}_i(k), u_i(k))\mathbf{P}_{\theta,i}(k)\Phi^T(\hat{\mathbf{x}}_i(k), u_i(k))\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{F}_i(k)\mathbf{Q}_i\mathbf{F}_i^T(k)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_i, \\
\mathbf{P}_{\theta,i}(k+1) &= [1 - \mathbf{L}_i(k)\mathbf{H}\Phi(\hat{\mathbf{x}}_i(k), u_i(k))]\mathbf{P}_{\theta,i}(k), \quad \mathbf{P}_{\theta,i}(0) = \mathbf{P}_{\theta,i,0}.
\end{aligned} \tag{6}$$

В (5) $\hat{\mathbf{A}}_i(k)$ – матрица, в которой коэффициент $k_{4,i}$ заменен на оценку $\hat{\theta}_i(k)$, а коэффициент $k_{2,i}$ – на $\hat{k}_{2,i}(0)$. В (6) матрица $\Phi(\mathbf{x}_i(k), u_i(k))$ и вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(k), u_i(k), k_{2,i})$ получаются в результате представления системы (3) в виде

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \Phi(\mathbf{x}_i(k), u_i(k))\theta_i(k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(k), u_i(k), k_{2,i}) + \mathbf{F}_i(k)\mathbf{q}_i(k), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0,i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Объем поставок товара i -го вида формируется на основе минимизации математического ожидания критерия [2]:

$$I_i(k) = M\{(\mathbf{S}\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}_{z,i}^{(s)}(k))^T \mathbf{c}_{s,i}(\mathbf{S}\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}_{z,i}^{(s)}(k)) + u_i^2(k)d_i\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где $\mathbf{S}$ – матрица размерности $\tau \times 3$, ($\tau \leq 3$) ранга τ , состоящая из нулей и единиц, которая позволяет осуществлять слежение за частью компонент вектора состояния; $\mathbf{x}_{z,i}^{(s)}(k)$ – вектор размерности τ , за которым осуществляется слежение; $\mathbf{c}_{s,i}$ – весовая матрица порядка τ ; d_i – весовой коэффициент, $i = \overline{1, n}$.

При управлении поставками требуется, чтобы на складе в каждый момент присутствовал определенный объем $z_{z,i}(k)$ каждого товара. В этом случае полагается

$$\tau = 1, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{z,i}^{(s)}(k) = z_{z,i}(k).$$

Тогда объем поставок товара i -го вида задается следующим образом:

$$u_i(k) = -(\mathbf{B}_i^T(k)\mathbf{S}^T \mathbf{c}_{s,i} \mathbf{S} \mathbf{B}_i(k) + d_i)^{-1} \mathbf{B}_i^T(k)\mathbf{S}^T \mathbf{c}_{s,i} (\mathbf{S} \hat{\mathbf{A}}_i(k)\hat{\mathbf{x}}_i(k) + \mathbf{S} \mathbf{F}_i(k)\bar{\mathbf{q}}_i(k) - z_{z,i}(k)), \tag{9}$$

где $\mathbf{c}_{s,i}$ – весовой коэффициент.

2. Ограничения

Достаточно часто для каждого вида товара определяется страховой запас $z_{1,i}$ – объем товара, который должен оставаться на складе до новой поставки. Кроме того, известен максимальный объем $z_{2,i}$ каждого товара, который может храниться на складе. Таким образом, объем поставляемого товара должен определяться с учетом ограничений, позволяющих избежать как затоваривания, так и недостатка товара на складе.

Для формирования ограничений на объем поставляемого товара в каждый момент k построим оценки:

1) оценку прогноза объема товара i -го вида, который будет продан за один день:

$$\hat{p}_i(k) = \hat{\theta}_i(k)(\varphi_{Y_i}(k) - \hat{v}_i(k))\hat{z}_i(k),$$

где $\hat{v}_i(k), \hat{z}_i(k)$ – компоненты вектора оценки состояния для дискретной модели, описывающей динамику товара i -го вида;

2) оценку прогноза остатка товара к концу дня продажи:

$$\hat{g}_i(k) = \hat{z}_i(k) - \hat{p}_i(k);$$

3) оценку прогноза объема товара, который останется на складе до новой поставки, продолжительность которой составляет j дней:

$$\hat{d}_i(k, j) = \hat{z}_i(k) - j\hat{p}_i(k);$$

4) оценку прогноза объема товара на складе с учетом поставленного товара:

$$\hat{g}_i^*(k) = \hat{d}_i(k, j) + u_i(k).$$

Тогда ограничения на объем поставки товара i -го вида задаются следующим образом:

$$\bar{u}_i(k) = \begin{cases} z_{2,i} - z_{z,i}, & \hat{g}_i^*(k) > z_{2,i}, \\ u_i(k), & z_{1,i} \leq \hat{g}_i^*(k) \leq z_{2,i}, \\ z_{2,i} - z_{1,i}, & \hat{g}_i^*(k) < z_{1,i}. \end{cases} \quad (10)$$

Если товар поставляется в упаковках и h_i – стоимость упаковки товара i -го вида, то количество целых упаковок и остаток определяются выражениями

$$h_i^*(k) = \left\lfloor \frac{\bar{u}_i(k)}{h_i} \right\rfloor, \quad h_i^{**}(k) = \bar{u}_i(k) - h_i^*(k)h_i. \quad (11)$$

Объем поставки товара i -го вида с учетом целых упаковок определяется следующим образом:

$$\tilde{u}_i(k) = \begin{cases} 0, & h_i^*(k) = 0, \quad h_i^{**}(k) \leq 0.5h_i, \\ h_i^*(k)h_i, & h_i^*(k) \neq 0, \quad h_i^{**}(k) \leq 0.5h_i, \\ (h_i^*(k) + 1)h_i, & h_i^*(k) \neq 0, \quad h_i^{**}(k) > 0.5h_i. \end{cases} \quad (12)$$

Достаточно часто для сокращения транспортных расходов все товары поставляются одновременно одними транспортными средствами. Пусть G_M – максимальная грузоподъемность транспортных средств, G_R – объем средств на транспортные расходы, μ_i – вес упаковки товара i -го вида. Тогда, если сумма рыночной стоимости доставляемых товаров в момент k не превосходит транспортных расходов, т.е.

$$\sum_{i=1}^n k_{3,i} \tilde{u}_i(k) \leq G_R, \quad (13)$$

то поставка считается убыточной и полагается $\tilde{u}_i(k) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Если сумма рыночной стоимости доставляемых товаров превосходит транспортные расходы и суммарный вес всех поставляемых товаров не превышает максимальную грузоподъемность транспортных средств, т.е.

$$\sum_{i=1}^n k_{3,i} \tilde{u}_i(k) > G_R \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{u}_i(k)}{h_i} \mu_i \leq G_M, \quad (14)$$

то поставка осуществляется в сформированных объемах. Если последнее условие не выполняется, то необходимо принять решение о реформировании поставки с учетом скорости продажи каждого товара и его стоимости.

3. Результаты численного моделирования

Работоспособность и качество предложенных алгоритмов проиллюстрированы результатами численного моделирования по управлению поставками двух видов товаров. Время поставки составляет одни сутки. На рис. 1 и 2 показаны графики объемов поставок $u_1(k), u_2(k)$, объемов товаров на складе $z_1(k), z_2(k)$ и их оценки $\hat{z}_1(k), \hat{z}_2(k)$, а также для каждого товара приведены значения

$z_{z,1}$ и $z_{z,2}$, которые задают желаемые объемы товаров на складе, и $z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}$, определяющие страховой запас и максимальный объем каждого товара на складе.

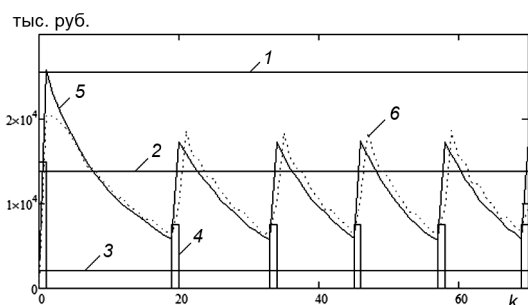


Рис. 1. Значения для 1-го товара: $z_{2,1}$ (1), $z_{z,1}$ (2), $z_{1,1}$ (3), $u_1(k)$ (4), $z_1(k)$ (5), $\hat{z}_1(k)$ (6)

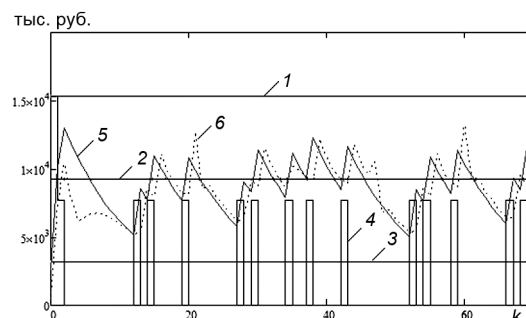


Рис. 2. Значения для 2-го товара: $z_{2,2}$ (1), $z_{z,2}$ (2), $z_{1,2}$ (3), $u_2(k)$ (4), $z_2(k)$ (5), $\hat{z}_2(k)$ (6)

Заметим, что ограничения (10), (12) применяются для формирования объема поставок каждого товара, а (13), (14) – для суммы всех товаров, которые включены в поставку. В связи с этим возможно осуществлять поставку и одного товара. Для визуального определения зависимости моментов поставок и динамики объема товаров на складе объем поставок первого товара увеличен на 5, а второго – на 3.

Таким образом полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенные алгоритмы могут быть использованы для принятия решений о моментах и объемах поставок, которые позволят избежать как избытка, так и недостатка каждого товара на складе, что приводит к убыткам у предпринимателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я. Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товара повседневного спроса // Изв. РАН. ТиСУ. – 1998. – № 1. – С. 144–148.
2. Решетникова Г.Н. Адаптивное управление поставками и рекламой. Алгоритмы. Модели. Ограничения. – Saarbrücken (Germany): LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & GO.KG., 2012. – 152 с.
3. Браммер Л., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана – Бьюси. – М.: Наука, 1972. – 200 с.
4. Решетникова Г.Н. Моделирование систем: учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 441 с.

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: tomrgn@ngs.ru

Поступила в редакцию 14.10.15.

G.N. RESHETNIKOVA, A.A. CHENBULSHKINA

ADAPTIVE CONTROL OF SUPPLY WITHIN THE CONSTRAINTS

Solve the problem of control of supply using methods of automatic control theory. An approach to forming of a tracking system of adaptive control is offered. Creation of mathematical model for control of supply is carried out. Worded restrictions that avoids the disadvantages and surplus products in stock. The article presents the results of numerical simulation. Application of the proposed algorithms can effectively solve specific problems of control of economic systems.

Keywords: *mathematical model, adaptive control, supply, the system limits.*

REFERENCES

1. Gorsky A.A., Kolpakova I.G., Lokshin B.Ya. Dynamic model of process of production, storage and sale of goods of daily demand. *News of the Russian Academy of Sciences. TaCS*, 1998, no. 1, pp. 144–148.
2. Reshetnikova G.N. *Adaptive Control of Supply and of Advertising. Algorithms. Models. Restrictios*. Saarbrucken (Germany), LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & GO.KG., 2012, 152 p.
3. Brummer L., Siffling G. *Kalman-Byusi Filter*. Moscow, Science Publ., 1972, 200 p.
4. Reshetnikova G.N. *Modeling of Systems: a Manual*. Tomsk, TUSUR Publ., 2007, 441 p.