УДК 519.2

Т.И. ГРЕКОВА, К.О. ПОЛУЭКТОВА

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ ДЛЯ ДВУХСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Предлагается решение задачи оптимального распределения ресурсов для двухсекторной модели экономики с целью максимизации благосостояния населения. Рассматривается модель, в которой экономика представлена двумя секторами: сектором производства средств производства и сектором производства потребительских благ. В качестве ресурсов используются капитал и труд. Задача решена на конечном, но достаточно большом интервале времени с применением принципа максимума Понтрягина. Приведена иллюстрация решения на примере производственной функции Кобба – Дугласа.

Ключевые слова: *доход, норма накопления, магистраль, трудовые ресурсы.*

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления в двухсекторной экономике на конечном интервале времени $[0,T]$. Предполагается, что валовой внутренний продукт (ВВП) $Y(t)$ в момент времени t определяется производственной функцией с неоклассическими свойствами [2]. Выпуск продукции для каждого из секторов

$$Y_i(t) = F_i(K_i(t), L_i(t)), \quad i = 1,2 \ , \tag{1.1}$$

где $K_i(t)$ – основные фонды i-го сектора, а $L_i(t)$ – трудовые ресурсы соответствующего сектора.

ВВП страны определяется следующим образом:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) \ . \tag{1.2}$$

Поскольку общие основные фонды и общие трудовые ресурсы распределяются между двумя секторами, можем записать

$$K(t) = K_1(t) + K_2(t),\ L(t) = L_1(t) + L_2(t), \tag{1.3}$$

где $L(t)$ – общие трудовые ресурсы в момент времени t:

$$L(t) = L^0 \cdot e^{\lambda \cdot t}, \quad L^0 > 0, \quad i = 1,2 \quad (\lambda > 0). \tag{1.4}$$

Введем управляющий параметр $p(t)$ распределения трудовых ресурсов между секторами:

$$L_1(t) = p \cdot L(t) = p \cdot L^0 \cdot e^{\lambda \cdot t}, \qquad L_2(t) = (1-p)L(t) = (1-p)L^0 \cdot e^{\lambda \cdot t}, \qquad 0 < p(t) < 1. \tag{1.5}$$

Предположим, что амортизация основного капитала μ одинакова для обоих секторов $(\mu > 0)$.

Норма накопления $s(t)$ определяет деление конечного продукта первого сектора между обоими секторами, $0 \le s(t) \le 1$:

$$Y_1(t) = s(t)F_1(K_1(t), L_1(t)) + (1 - s(t))F_1(K_1(t), L_1(t)). \tag{1.6}$$

Выпуск второго сектора идет только на непроизводственное потребление:

$$Y_2(t) = C(t) = F_2(K_2(t), L_2(t)). \tag{1.7}$$

Дифференциальные уравнения, описывающие изменение основного капитала каждого сектора, имеют вид

$$\dot{K}_1(t) = s(t)F_1(K_1(t), L_1(t)) - \mu \cdot K_1(t), \qquad \dot{K}_2(t) = (1 - s(t))F_1(K_1(t), L_1(t)) - \mu \cdot K_2(t). \tag{1.8}$$

Задача решена в удельных переменных:

$k_i(t) = \dfrac{K_i(t)}{L_i(t)}$, $i = 1,2$ – фондовооружённость (капиталовооружённость), $(k_i(t) > 0)$;

$$y_i(t) = \frac{Y_i(t)}{L_i(t)} = F_i\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}, 1\right) = f_i\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}\right) = f_i(k_i(t)), \qquad i = 1,2\ , \tag{1.9}$$

– производительность труда в i -м секторе; $f_i(k_i(t))$ удовлетворяет неоклассическим условиям;

$c(t) = \dfrac{C(t)}{L(t)} = \dfrac{F_2(K_2, L_2)}{L(t)}$ – удельное потребление в момент времени *t*.

Скорость изменения капиталовооружённости первого и второго секторов соответственно

$$\dot{k}_1(t) = \frac{1}{L_1(t)}(s(t)F_1(K_1(t), L_1(t)) - \mu \cdot K_1(t)) - \frac{K_1(t)}{L_1(t)}\lambda = s \cdot f_1(k_1) - \nu \cdot k_1, \quad k_1(0) = k_1^0, \tag{1.10}$$

где $\nu = \lambda + \mu$ = const, $\nu > 0$;

$$\dot{k}_2(t) = (1-s)\frac{F_1(K_1(t), L_1(t))}{L_2(t)} - \mu \cdot k_2(t) = \frac{p(1-s)}{(1-p)} f_1(k_1(t)) - \nu \cdot k_2(t), \quad k_2(0) = k_2^0, \tag{1.11}$$

условие экономического горизонта для каждого сектора:

$$k_1(T) = k_1^T, \quad k_2(T) = k_2^T, \quad k_1^T > 0, \quad k_2^T > 0. \tag{1.12}$$

С учетом $L(t) = \dfrac{L_2(t)}{(1-p)}$ удельное потребление можно представить в следующем виде:

$$c(t) = \frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L_2(t)}(1-p) = (1-p) f_2(k_2). \tag{1.13}$$

С учётом дисконтирования по норме $\delta > 0$ получим следующий функционал, определяющий благосостояние населения:

$$J = \int_0^T c(t)\, e^{-\delta \cdot t} dt = \int_0^T (1 - p(t)) f_2(k_2(t))\, e^{-\delta \cdot t} dt\,. \tag{1.14}$$

Итак, при заданном распределении трудовых ресурсов (1.4), (1.5) и изменении фондовооруженности $k_1(t)$ первого сектора и $k_2(t)$ второго сектора экономики в соответствии с уравнениями (1.8), где управляющие воздействия $(s(t), p(t))$ подчиняются ограничениям $0 \le s(t) \le 1, \quad 0 < p(t) < 1,$ $t \in [0, T],$ найти такие значения управляющих параметров s и p, чтобы величина суммарного удельного потребления (1.14), достигла максимального значения.

2. Решение задачи на стационарных траекториях

Решать поставленную задачу будем на стационарных траекториях: необходимо найти значения $s = s^*$, $p = p^*$ и соответствующие значения k_1^*, k_2^* из условия

$$J = \int_0^T c(t) e^{-\delta \cdot t} dt = \int_0^T (1 - p(t)) f_2(k_2(t)) e^{-\delta \cdot t} dt \Rightarrow \max_{0<s<1,0/,0<p<1}.$$

Функция Гамильтона для решения поставленной задачи с применением принципа максимума:

$$\hat{H} = H(k_1, k_2, q_1, q_2, s, p, t)e^{\delta \cdot t} = q_1(t)(s \cdot f_1(k_1(t)) - \nu \cdot k_1(t)) +$$

$$+ q_2(t)\left(\frac{p(1-s)}{1-p} f_1(k_1(t)) - \nu \cdot k_2(t)\right) + (1-p) f_2(k_2(t))\,. \tag{2.1}$$

Переменные $q_1(t)$, $q_2(t)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\dot{q}_1(t) = q_1(t)(\delta + v - s \cdot f_1'(k_1(t)) - q_2(t)\frac{p(1-s)}{1-p} f_1'(k_1(t))\,; \tag{2.2}$$

$$\dot{q}_2(t) = q_2(t)(\delta + v) - (1-p) f_2'(k_2(t))\,. \tag{2.3}$$

Для $q_i(t)$ выполняются следующие условия:

$$q_i(t) \ge 0\,, \quad i = 1,2\,, \quad \forall t \in [0, T], \quad q_i(T)(k_i(T) - k_i^T) = 0\,, \quad i = 1,2\,, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

Поскольку функция Гамильтона (2.1) линейно зависит от управляющего параметра $s(t)$, то, отбрасывая из (2.1) члены, не зависящие от $s(t)$, и учитывая, что $f_1(k_1(t))>0$, будем иметь

$$s(t)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad (1-p)q_1(t)>q_2(t)p,\\ 0, & \text{если} \quad (1-p)q_1(t)<q_2(t)p,\\ 0<s(t)<1, & \text{если} \quad (1-p)q_1(t)=q_2(t)p.\end{cases} \tag{2.5}$$

Таким образом, получено релейное управление $s(t)$ с возможными переключениями на множестве $\{0,1,0<s(t)<1\}$.

Если значения переменных $k_1(t),k_2(t)$ и величин $s(t),p(t)$ являются постоянными, то траекторию $\{k_1(t),k_2(t),s(t),p(t)\}$ назовём магистральной или оптимальной траекторией сбалансированного роста.

Необходимым условием существования стационарного решения уравнений (1.8), (2.2), (2.3) является $\left\{\dot{k}_1(t)=0,\dot{k}_2(t)=0,\dot{q}_1(t)=0,\dot{q}_2(t)=0\right\}$:

$$s\cdot f_1(k_1(t))-v\cdot k_1(t)=0\,, \quad \frac{p(1-s)}{1-p}f_1(k_1(t))-v\cdot k_2(t)=0\,; \tag{2.6}$$

$$q_1(t)(\delta+v-s\cdot f_1'(k_1(t))-q_2(t)\frac{p(1-s)}{1-p}f_1'(k_1(t))=0\,; \tag{2.7}$$

$$q_2(t)(\delta+v)-(1-p)f_2'(k_2(t))=0\,. \tag{2.8}$$

Значение s^*, соответствующее траектории сбалансированного роста из (2.6):

$$s^*=\frac{v\cdot k_1^*}{f_1'(k_1^*)}. \tag{2.9}$$

Значения k_1^*, k_2^* фондовооружённости на траектории сбалансированного роста определяются из уравнений (2.7), (2.8).

Значение p^*, соответствующее траектории сбалансированного роста из (2.8):

$$p^*=\frac{v\cdot k_2^*}{v\cdot k_2^*+(1-s^*)f_1(k_1^*)}. \tag{2.10}$$

Заметим, что при $\delta=0$ результаты решения задачи с интегральным критерием качества совпадают с результатами [2].

3. Синтез оптимального управления

Так как управление $s(t)$ является релейным с возможными переключениями на множестве $\{0,1,0<s(t)<1\}$, то весь промежуток времени $[0,T]$ управления экономикой разбивается на три интервала времени. Интервал $[0;\,T^*]$ – время вывода экономики на магистраль, где $k_1(t)=k_1^*=\text{const}$ и $k_2(t)=k_2^*=\text{const}$. Значение T^* можно вычислить следующим образом:

$$T^*=\int_{k_1^0}^{k_1^*}\frac{dk_1}{s\cdot f_1(k_1)-v\cdot k_1}. \tag{3.1}$$

Интервал $[T^*;\,T^{**}]$ – это время нахождения на магистрали при $s(t)=s^*$, причем, чем больше этот интервал, тем дольше обеспечивается экономический рост с постоянным темпом. Значение T^{**} можно вычислить по следующей формуле:

$$T^{**}=T-\int_{k_1^*}^{k_1^T}\frac{dk_1}{s\cdot f_1(k_1)-v\cdot k_1}. \tag{3.2}$$

Интервал $[T^{**};\,T]$ – время движения по траектории схода с магистрали.

Целью управления является перевод траекторий $k_1(t)$ и $k_2(t)$ из начальных положений k_1^0 и k_2^0 на магистраль и обеспечение экономического горизонта k_1^T и k_2^T за время T .

Обобщая предыдущие результаты, сущность алгоритма управления можно сформулировать следующим образом: начальное положение k_i^0 , где $i = 1,2$, за время T^* переводится в положение k_i^* , при этом на всем промежутке времени [0; T^*] управление $s(t)$ равно нулю, если $k_1^0 > k_1^*$ и $k_2^0 < k_2^*$, и равно единице, если $k_1^0 < k_1^*$ и $k_2^0 > k_2^*$. В момент времени T^* функция $s(T^*)$ полагается равной s^* и определяется по формуле (2.10). На протяжении всего промежутка времени [T^*; T^{**}] $k_1(t) = k_1^* = \text{const}$, $k_2(t) = k_2^* = \text{const}$. В момент времени T^{**} управление $s(t)$ равно нулю, если $k_1^* > k_1^T$ и $k_2^* < k_2^T$, и равняется единице, если $k_1^* < k_1^T$ и $k_2^* > k_2^T$. На интервале времени [T^{**};T] траектории $k_1(t)$ и $k_2(t)$ переводятся из стационарных состояний в конечные положения k_1^T и k_2^T соответственно.

Рассмотрим в качестве примера производственную функцию Кобба – Дугласа:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \tag{3.3}$$

где A – технологический коэффициент; α – коэффициент эластичности выпуска по основным фондам, а β – коэффициент эластичности выпуска по трудовым ресурсам.

Рассмотрим ситуацию, когда $k_1^0 < k_1^*, k_1^* < k_1^T, k_2^0 > k_2^*, k_2^* > k_2^T$. Пусть $k_1^0 = 3.8$, $k_2^0 = 7$, $k_1^T = 17.4$, $k_2^T = 2.45$, $A_1 = 1.5$; $A_2 = 1.3$; $\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.2$; $\mu = 0.12$; $\lambda = 0.03$; $T = 80$. Тогда $p^* = 0.2$ – оптимальная норма распределения трудовых ресурсов между секторами, $s^* = 0.4$ – оптимальное значение нормы накопления первого сектора, $k_1^* = 8.98$, $k_2^* = 4.71$, $T^* = 2.64$, $T^{**} = 75.64$, время пребывания на магистрали $T^{**}–T^* = 73.00$. На рис. 1 изображен полученный результат.

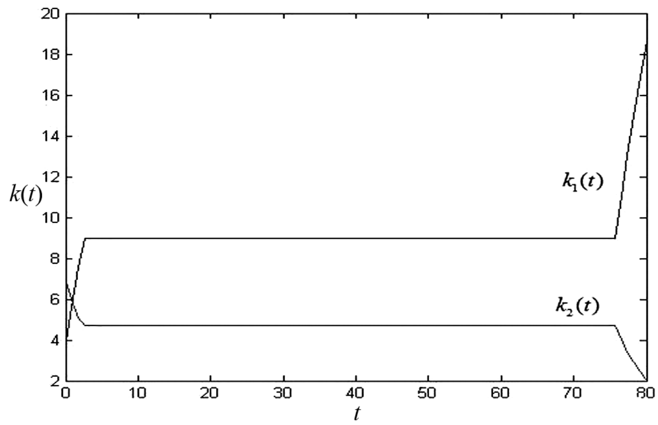

Рис. 1. Динамика фондовооружённостей для случая $k_1^0 < k_1^*, k_1^* < k_1^T, k_2^0 > k_2^*, k_2^* > k_2^T$

Заключение

Рассмотрена задача управления в двухсекторной экономике с целью максимизации непроизводственного потребления, где управляющими параметрами являются нормы распределения факторов производства между секторами. При решении поставленной задачи получены следующие результаты:

Доказано существование и единственность магистрали, на которой экономика находится в сбалансированном состоянии.

Решена задача оптимального управления, получено оптимальное значение нормы инвестирования, равное эластичности выпуска по основным фондам первого сектора и оптимальное значение доли распределения трудовых ресурсов, равное эластичности выпуска по основным фондам второго сектора.

Получены аналитические выражения для моментов времени выхода на магистраль и схода с магистрали для обеспечения экономического горизонта.

Выполнено моделирование поведения экономики на примере производственной функции Кобба – Дугласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-Пресс, 2002. – 607 с.
2. Дёмин Н.И., Грекова Т.И. Макроэкономика: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. – 228 с.
3. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – № 4 (17). – С. 5–15.
4. Параев Ю.И. Оптимальное управление двухсекторной экономикой // Вестник Томского государственного университета. – 2014. – № 3 (28). – С. 4–11.
5. Тарасьев А.М., Усова А.А. Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 271. – С. 278–298.

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: ti_gre@mail.ru; poluekt.kseni@mail.ru

Поступила в редакцию 14.10.15.

Грекова Татьяна Ивановна, к.т.н., доцент;
Полуэктова Ксения Олеговна, студентка.

T.I. GREKOVA, K.O. POLUEKTOVA

OPTIMAL ALLOCATION OF RESOURCES TO THE TWO-SECTOR MODEL OF ECONOMIC GROWTH

The paper proposes a solution to the problem of optimal resources allocation for the two-sector model of the economy in order to maximize social welfare. It is a model in which the economy is represented by two sectors: the capital goods production sector and the consumer goods production sector. Capital and labor are used here as the resources. The problem is solved on a finite but quite large time interval using the Pontryagin maximum principle. An illustration of the solutions is given on the example of Cobb – Douglas production function.

Keywords: *national income, savings rate, highway, human resources.*

REFERENCES

1. Intriligator M. Matematicheskie metodi optimizacii i economicheskaya teoriya (Mathematical methods of optimization and economic theory). Moscow, Airis-Press, 2002, 607 p.
2. Demin N.I., Grekova T.I. Makroeconomica: uchebnoe posobie [Macroeconomics: tutorial]. Tomsk, TSU Publ., 2008, 228 p.
3. Paraev Y.I., Grekova T. I., Daniluk E.Y Analiticheskoe reshenie zadachi optimalnogo upravleniya odnosectornoi economikoi na konechnom intervale vremeni [Analytical solution of optimal one-sector economy control problem on a finite time interval]. Vestnik TSU, 2011, no. 4 (17), pp. 5–15.
4. Paraev Y.I. Optimalnoe upravlenie dvuhsectornoi economikoi [Optimal control of a two-sector economy]. Vestnik TSU, 2014, no. 3 (28), pp. 4–11.
5. Tarasiev A.M., Usova A.A. Postroenie regulatora dlya gamiltonovoi sistemi dvuhsectornoi modeli economicheskogo rosta [Building of controller for Hamilton system of the economic growth model*]. Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, pp. 278–298.