На правах рукописи

Орехов Кирилл Александрович

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ГЕОМЕТРИЕЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР ВБЛИЗИ ГОРИЗОНТА СОБЫТИЙ

01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск — 2016

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математической физики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор РАН
Галажинский Антон Владимирович

Официальные оппоненты:
Макаренко Андрей Николаевич, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет», первый проректор
Караханян Давид Рудольфович, кандидат физико-математических наук, Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна (Ереванский физический институт), ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Объединенный институт ядерных исследований

Защита диссертации состоится 29 декабря 2016 года в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория 211).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/OrehovKA29122016.html

Автореферат разослан “___” ноября 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Киреева Ирина Васильевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Исследованию черных дыр посвящено одно из наиболее активно развивающихся направлений современной теоретической физики и наблюдательной астрофизики. С математической точки зрения, черная дыра описывается метрикой, доставляющей решение уравнениям Эйнштейна, которая характеризуется наличием горизонта событий. С последним связаны многие важные предсказанния теории черных дыр, включая энтропию Бекенштейна–Хокинга, излучение Хокинга и информационный парадокс.

В 1999 г. Бардиным и Горовицем было показано, что вблизи горизонта событий метрика экстремальной черной дыры Керра проявляет дополнительную симметрию, описываемую конформной группой $SO(2,1)$. Позже было установлено, что наличие такой симметрии характерно для широкого класса экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий. Как следствие симметрии пространства, динамические уравнения частиц и полей на таком искривленном фоне автоматически проявляют конформную инвариантность. Настоящий всплеск интереса к геометриям экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий последовал за работой Строминегра и сотрудников 2008 г., в которой была предложена конформная теория поля, дуальная геометрии экстремальной черной дыры Керра вблизи горизонта событий (так называемое Керр/КТП–соответствие). Активные исследования в данном направлении ведутся вплоть до настоящего времени.

Конформно–инвариантные механические системы активно изучаются на протяжении последних 15 лет. С одной стороны, интерес к такого рода моделям обусловлен развитием методов теории интегрируемых систем. В этом контексте стоит особо упомянуть модель Калоджеро и ее различные модификации, включая суперсимметричные расширения. С другой стороны, ожидается, что конформная механика многих частиц может быть использована для микроскопического квантового описания экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий, для объяснения различных аспектов дуальности между теорией струн в искривленном пространстве и конформной теорией поля на границе, а также для эффективного построения спиноров Киллинга на суперсимметричных искривленных многообразиях.

В настоящей диссертационной работе геометрия экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий применяется для построения и последовательного изучения новых интегрируемых систем и их суперсимметричных расширений. В основу рассмотрения положен теоретико–групповой подход, основанный на построении оператора Казимира конформной алгебры $so(2,1)$, редукции по циклическим переменным и анализе остаточных симметрий. При построении новых $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных расширений используются структурные соотношения суперконформной алгебры $su(1,1|1)$, методы гамильтоновой механики и общая теория дифференциальных уравнений в частных производных.

Степень разработанности

Построению интегрируемых систем, ассоциированных с геометрией экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий, посвящено небольшое число работ. К настоящему моменту была исследована конформная механика, ассоциированная с геометрией экстремальной черной дыры Мейерса-Перри вблизи горизонта событий для специального случая, когда все параметры вращения совпадают. С использованием редукции по радиальной переменной построена новая максимально суперинтегрируемая система. Детально исследована структура интегралов движения, отвечающих унитарной группе симметрий исходной фоновой метрики, и установлена их взаимосвязь с интегралами движения результирующей максимально суперинтегрируемой системы. При построении моделей суперсимметричных частиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр, был детально изучен случай $\mathcal{N}=4$ суперчастицы в пространстве Райсснера–Нордстрема и $\mathcal{N}=2$ суперчастицы в пространстве Керра.

В рамках настоящего диссертационного исследования развитые ранее методы обобщаются на случай заряженных, вращающихся черных дыр и черных дыр в пространстве с космологической постоянной. Детально изучается вопрос об интегрируемости нередуцированных механических систем, ассоциированных с такими геометриями. Для всех рассматриваемых полевых конфигураций получены соответствующие им конфромные механики в гамильтоновом формализме. Для моделей массивных частиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Керра–Ньюмана–АдС и экстремальной черной дыры Мельвина–Керра построены $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные обобщения.

Цели и задачи работы

Цели диссертационной работы:

1. Изучение геометрии экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий и разработка новых методов построения таких решений.
2. Построение новых интегрируемых систем, ассоциированных с геометрией экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий.
3. Построение новых моделей $\mathcal{N} = 2$ суперчастиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

1. Адаптировать процедуру построения метрики Майерса–Перри–АдС вблизи горизонта событий на случай совпадающих параметров вращения.
2. Развить метод описания геометрии экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий, основанный на использовании конформных инвариантов.
3. Разработать методику выявления скрытых симметрий фонового многообразия, основанную на анализе гамильтоновой механики пробной массивной частицы.
4. Применить методы теории групп для анализа интегрируемых систем многих частиц, ассоциированных с геометрией экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий.
5. Развить теоретико–групповой подход к построению моделей $\mathcal{N} = 2$ суперчастиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр.

Научная новизна

1. Впервые предложена процедура построения метрики экстремальной черной дыры вблизи горизонта событий в терминах конформных инвариантов.

2. Впервые построено решение вакуумных уравнений Эйнштейна, описывающее $D = 5$ вращающуюся черную дыру Майерса–Перри с ненулевым НУТ зарядом вблизи горизонта событий.

3. Для геометрии экстремальной черной дыры Керра–Ньюмана–АдС вблизи горизонта событий впервые установлена приводимость тензора Киллинга второго ранга.

4. Впервые построены интегрируемые системы многих частиц, ассоциированные с геометрией экстремальной черной дыры Майерса–Перри–АдС вблизи горизонта событий для специального случая, когда все параметры вращения совпадают.

5. Впервые развит теоретико-групповой подход к построению моделей $\mathcal{N} = 2$ суперчастиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр.

Теоретическая и практическая значимость

1. Результаты диссертационной работы представляют интерес в контексте общего развития теории интегрируемых систем многих частиц и суперсимметричной квантовой механики.

2. Результаты диссертационной работы открывают новые возможности для описания геометрии экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий на теоретико–групповом языке.

3. Результаты диссертационной работы актуальны в контексте изучения Керр/КТП-соответствия и для построения микроскопического описания экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе использованы методы гамильтоновой механики, теории интегрируемых систем, теории групп, дифференциальной геометрии, общей теории относительности, теория дифференциальных уравнений в частных производных, и теория суперсимметрии.

Положения, выносимые на защиту

1. Построено новое решение вакуумных уравнений Эйнштейна, описывающее экстремальную черную дыру Майерса–Перри–АдС вблизи горизонта событий для специального случая, когда все параметры вращения совпадают. С использованием инвариантов конформной группы $SO(2,1)$ построено новое решение вакуумных уравнений Эйнштейна, которое определяет $D=5$ метрику Майерса–Перри с ненулевым НУТ зарядом вблизи горизонта событий.

2. Для геометрии экстремальной черной дыры Керра–Ньюмана–АдС вблизи горизонта событий доказана приводимость тензора Киллинга второго ранга. Построено явное выражение, связывающее компоненты тензора Киллинга и компоненты векторов Киллинга, отвечающих конформной группе $SO(2,1)$.

3. Построены новые суперинтегрируемые системы многих частиц, ассоциированные с геометрией экстремальной черной дыры Майерса–Перри–АдС вблизи горизонта событий для специального случая, когда все параметры вращения совпадают. Детально исследована структура интегралов движения, отвечающих унитарной группе симметрий исходной фоновой метрики.

4. Построено $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное расширение модели массивной заряженной частицы, движущейся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Керра–Ньюмана–АдС. Показано, что $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное расширение имеет теоретико–групповую природу и строится в терминах генераторов конформной подалгебры $so(2,1)$ в суперконформной алгебре $su(1,1|1)$ и фермионных степеней свободы. Доказана единственность построенного $\mathcal{N}=2$ суперсимметричного расширения. Рассмотрение обобщено на случай экстремальной черной дыры

Мельвина–Керра.

Степень достоверности

Для решения поставленных задач использованы стандартные методы теоретической и математической физики. Результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах и прошли опробацию в виде докладов на научных конференциях. Следствия из полученных результатов для различных частных случаев совпадают с результатами, полученными другими авторами.

Личный вклад автора

Совместно с научным руководителем осуществлена постановка задач, обсуждение результатов работы, формулировка выводов и положений, выносимых на защиту, написание научных статей по теме диссертации. Лично диссертантом произведены основные теоретические расчеты.

Апробация работы

Результаты, положенные в основу диссертации, докладывались на следующих конференциях:

1. Международная конференция «Dubna–Armenia Workshop on Integrable Systems», г. Дубна, 2013 г.

2. Международная конференция «Quantum Field Theory and Gravity 2014», г. Томск, 2014 г.

3. Международная конференция «Workshop on Supersymmetry in Integrable Systems», г. Дубна, 2014 г.

4. Международная конференция «Tomsk School and Workshop on Mathematical Physics», г. Томск, 2015 г.

5. Международная конференция «Quantum Field Theory and Gravity 2016», г. Томск, 2014 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах, из них 5 – в журналах, входящих в перечень ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 100 страниц. Список литературы включает 105 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы и установлена связь результатов, представленных в диссертации, с результатами, полученными ранее другими авторами. Дано описание структуры диссертационной работы и сформулированы основные задачи.

Первая глава диссертации посвящена построению и изучению метрик, описывающих геометрию экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий. **В разделе 1.1** приведен обзор метода Бардина и Горовица, используемого для построения метрики, описывающей область вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Керра в $D = 4$:

$$ds^2 = \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\left[-\frac{r^2}{r_0^2}dt^2 + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2 + r_0^2 d\theta^2\right] + \frac{2r_0^2\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}\left(d\varphi + \frac{r}{r_0^2}dt\right)^2, \quad (1)$$

где t, r, θ и φ – временная, радиальная и угловые переменные, соответственно, r_0 – радиус горизонта событий. Этот метод, включающий в себя использование координатных преобразований к системе отсчета, вращающейся синхронно с горизонтом, является основным в данной диссертации. Продемонстрирована конформная симметрия метрики. Проведен анализ геодезической полноты решения (1).

В разделе 1.2 рассматривается конфигурация метрики и электромагнитного поля, доставляющая решение уравнениям Эйнштейна–Макс-велла и описывающая черную дыру Керра–Ньюмана–АдС вблизи горизонта событий:

$$ds^2 = \Gamma\left(r^2dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} - \alpha d\theta^2\right) - \gamma(d\varphi + krdt)^2, \; A = f(d\varphi + krdt), \quad (2)$$

где обозначено:

$$
\Gamma = \frac{\rho_+^2 r_0^2}{r_+^2 + a^2}, \quad \alpha = \frac{r_+^2 + a^2}{\Delta_\theta r_0^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta_\theta (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2\theta}{\rho_+^2 \Xi^2},
$$

$$
\rho_+^2 = r_+^2 + a^2\cos^2\theta, \quad r_0^2 = \frac{(r_+^2 + a^2)(1 - r_+^2/l^2)}{1 + 6\frac{r_+^2}{l^2} - 3\frac{r_+^4}{l^4} - \frac{q^2}{l^2}}, \quad k = \frac{2ar_+\Xi r_0^2}{(r_+^2 + a^2)^2}, \tag{3}
$$

$$
f = (r_+^2 + a^2)\frac{q_e(r_+^2 - a^2\cos^2\theta) + 2q_m a r_+ \cos\theta}{2\rho_+^2 \Xi a r_+}.
$$

Выше r_+ есть радиус горизонта событий, q – электрический заряд, число l связано с космологической постоянной Λ посредством соотношения $\Lambda = -3/l^2$ и, кроме того,

$$
\Delta_\theta = 1 - \frac{a^2}{l^2}\cos^2\theta, \quad a^2 = \frac{r_+^2(1 - 3r_+^2/l^2) - q^2}{1 - r_+^2/l^2}, \quad q^2 = q_e^2 + q_m^2.
$$

Как и метрика Керра вблизи горизонта событий, она обладает конформной инвариантностью, описываемой векторами Киллинга:

$$
H = \partial_t,\ D = t\partial_t - r\partial_r,\ K = (t^2 + \frac{1}{r^2})\partial_t - 2tr\partial_r - \frac{2k}{r}\partial_\varphi \tag{4}
$$

образующими конформную алгебру $so(2,1)$:

$$
[H, D] = H, \quad [H, K] = 2D, \quad [D, K] = K. \tag{5}
$$

Выражения (4), (5) являются типичными для всех метрик, приведенных в главе 1. В этом же разделе приведено выражение для тензора Киллинга 2-го ранга метрики Керра–Ньюмана–АдС.

В разделе 1.3 описана геометрия Мелвина–Керра вблизи горизонта событий.

В разделе 1.4 обсуждается геометрия Майерса–Перри общего вида в координатах Бойера–Линдквиста.

В разделе 1.5 получены метрики, описывающие геометрию Майерса–Перри вблизи горизонта событий в специальном случае, когда все параметры вращения совпадают. Рассмотрение проведено отдельно для случая четного и нечетного числа измерений.

В разделе 1.6 даны выражения для метрики Майерса–Перри–АдС общего вида для произвольного числа измерений в координатах Бойера–Линдквиста.

В разделе 1.7 строится геометрия Майерса–Перри-АдС вблизи горизонта событий для случая равных параметров вращения. Для случая нечетного числа измерений ($D = 2n + 1$) она имеет вид:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = & \frac{r_0^2}{2(n(1-2\varkappa)-1)} \left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} \right) - \frac{r_0^2 + a^2}{1+\lambda a^2} \sum_{i=1}^{n} d\mu_i^2 - \\
- & \frac{a^2}{(n(1-2\varkappa)-1)^2} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 (r dt + d\varphi_i)^2 + \\
+ & \frac{a^4}{n r_0^2 (n(1-2\varkappa)-1)^2} \sum_{i<j}^{n} \mu_i^2 \mu_j^2 (d\varphi_i - d\varphi_j)^2,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где обозначено $\varkappa = \lambda r_0^2$ и r_0 – радиус горизонта событий. Для случая четного числа измерений ($D = 2n$) метрика дается выражением:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = & \frac{\rho_0^2}{V} \left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} \right) - \frac{r_0^2 + a^2}{1+\lambda a^2} \sin^2\theta \sum_{i=1}^{n-1} d\nu_i^2 - \frac{\rho_0^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 - \\
- & \frac{\Delta_\theta}{\rho_0^2} \frac{4a^2 r_0^2}{V^2} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 (r dt + d\varphi_i)^2 + \frac{4a^4 r_0^2 (1-\lambda r_0^2)}{\rho_0^2 (r_0^2 + a^2) V^2} \sum_{i<j}^{n-1} \mu_i^2 \mu_j^2 (d\varphi_i - d\varphi_j)^2,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\rho_0^2 = r_0^2 + a^2 \cos^2\theta$, $\Delta_\theta = 1 + \lambda a^2 \cos^2\theta$ и

$$
\tilde{V} = \frac{(r_0^2 + a^2)^{n-2} (a^4 + 2a^2(2n-1) r_0^2 - (3 - 8n + 4n^2) r_0^4)}{r_0^2 (a^2 + (2n-1) r_0^2)(r_0^2 + a^2)^{n-2}}.
$$

В разделе 1.8 обсуждается геометрия черной дыры Майерса–Перри вблизи горизонта событий для произвольных параметров вращения и $D = 2n$.

В разделе 1.9 описан метод построения новых решений уравнений Эйнштейна, основанный на прямом использовании инвариантов конформной группы $SO(2,1)$ в четырех и пяти измерениях

$$
r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2}, \qquad r dt + d\phi_i, \qquad d\phi_i - d\phi_j, \tag{8}
$$

где ϕ_i–азимутальные угловые переменные. В четырех измерениях вид метрики однозначно фиксируется конформной инвариантностью и наложением уравнений Эйнштейна:

$$
\begin{aligned}
& ds^2 = a(\theta) \left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} - d\theta^2 \right) - b(\theta)(r dt + d\varphi)^2, \\
& a(\theta) = L_1 (1 + \cos^2\theta) + L_2 \cos\theta, \quad b(\theta) = \frac{(4L_1^2 - L_2^2)\sin^2\theta}{a(\theta)},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где L_1 и L_2 – произвольные постоянные. L_1 связана с параметром вращения экстремальной черной дыры Керра, в то время как L_2 собой представляет НУТ заряд.

В пяти измерениях рассмотрена метрика следующего вида:

$$ds^2 = a(\theta)\left(r^2dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} - d\theta^2\right) - b(\theta)(rdt + d\varphi_1)^2 - c(\theta)(rdt + d\varphi_2)^2 + \\ + d(\theta)(d\varphi_1 - d\varphi_2)^2$$

и найдены неизвестные функции $a(\theta)$, $b(\theta)$, $c(\theta)$ и $d(\theta)$ из условия выполнения уравнений Эйнштейна. В частности, построено обобщение $D = 5$ решения Майерса–Перри вблизи горизонта событий с ненулевым НУТ–зарядом, которое имеет вид:

$$\begin{aligned}
&a(\theta) = L_1 + L_2\sin\theta + L_3\sin^2\theta, \quad d(\theta) = \frac{a(\theta)b(\theta)c(\theta) - N\cos^2\theta}{a(\theta)(b(\theta)+c(\theta))},\\
&b(\theta) = \frac{(L_1 - L_2)(2L_1 + L_2 - 2(L_1 - L_3(1 + 2L_1/L_2))\sin\theta - L_2\sin^2\theta)}{2a(\theta)},\\
&c(\theta) = \frac{2L1(L_1 + L_3) - L_2^2 + 2L_2(L_1 - L_3)\sin\theta + (L_2^2 - 2L_3(L_1 + L_3))\sin^2\theta}{a(\theta)} - \\
&-b(\theta),\\
&N = \frac{(L_1 - L_2)^2(L_1L_2(L_1 + L_2) - 2L_3L_1^2 - L_3^2(2L_1 + L_2))^2}{2L_2^2(L_1 - L_3)(L_1^2 - L_2^2 + L_3(2L_1 + L_3))},
\end{aligned} \tag{10}$$

где L_1, L_2 и L_3 являются произвольными постоянными. Кроме того, в этом разделе построено более общее решение, включающее два дополнительных параметра.

Вторая глава диссертации посвящена построению и анализу гамильтоновых систем, связанных с геометрией экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий.

В разделе 2.1 описан метод построения конформной механики, ассоциированной с геометрией экстремальной черной дыры Керра вблизи горизонта событий. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \frac{r}{r_0^2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{2}(mr_0)^2 + (rp_r)^2 + p_\theta^2 + \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2\sin\theta}\right)^2 p_\varphi^2} - p_\varphi\right), \tag{11}$$

а дополнительные интегралы движения, отвечающие изометриям метрики, даются выражениями:

$$K=\frac{r}{r_0^2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{2}(mr_0)^2+(rp_r)^2+p_\theta^2+\left(\frac{1+\cos^2\theta}{2\sin\theta}\right)^2p_\varphi^2}+p_\varphi\right)+$$
$$+t^2H+2trp_r,\quad D=tH+rp_r,\quad P=p_\varphi,$$

Данные функции образуют алгебру $so(2,1)\oplus u(1)$ относительно канонической скобки Пуассона. Помимо этого, обсуждается интегрирование уравнений движения в фазовом пространстве с использованием вышеуказанных инвариантов.

В разделе 2.2 приведено построение интегрируемой системы, отвечающей движению заряженной частицы вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Керра–Ньюмана–АдС. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H=r\left(\sqrt{p_r^2r^2+\frac{1}{\alpha}p_\theta^2+\frac{\Gamma}{\gamma}(p_\varphi+ef)^2+\Gamma m^2}-kp_\varphi\right).\qquad(12)$$

Дополнительные интегралы движения даются выражениями:

$$\begin{aligned}
&H=r\left(\sqrt{p_r^2r^2+\frac{p_\theta^2}{\alpha}+\frac{\Gamma}{\gamma}(p_\varphi+ef)^2+\Gamma m^2}-kp_\varphi\right),\\
&D=tH+rp_r,\\
&K=t^2H+2trp_r+\kappa,\\
&P=p_\varphi,
\end{aligned}\qquad(13)$$

где обозначено:

$$\kappa=\frac{1}{r}\left(\sqrt{p_r^2r^2+\frac{p_\theta^2}{\alpha}+\frac{\Gamma}{\gamma}(p_\varphi+ef)^2+\Gamma m^2}+kp_\varphi\right).\qquad(14)$$

Также приведено доказательство приводимости тензора Киллинга второго ранга, который выражается через векторы Киллинга следующим образом:

$$L=(\frac{1}{2}H_{(i}K_{j)}-D_iD_j+P_iP_j)\,dx^idx^j.\qquad(15)$$

В разделе 2.3 обсуждаются основные элементы сферической механики.

В разделе 2.4 найдена обратная метрика Майерса–Перри вблизи горизонта для $D = 2n+1$ и проведено построение конформной механики, ассоциированной с этой геометрией. Показано, что система обладает дополнительной унитарной симметрией. Построена соответствующая сферическая механика, описываемая оператором Казимира алгебры $so(2,1)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = {} & HK - D^2 + (\sum_{i=1}^{n} p_{\varphi_i})^2 = \\ = {} & m^2 + \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_{ij} - \mu_i \mu_j) p_{\mu_i} p_{\mu_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{n}{2} \frac{\delta_{ij}}{\mu_i^2} - \frac{n+1}{2} \right) p_{\varphi_i} p_{\varphi_j},\end{aligned} \tag{16}$$

а также полная редукция, при которой азимутальные импульсы полагаются равными произволным постоянным ($p_{\varphi_i} \to \gamma_i$):

$$\tilde{H} = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_{ij} - \mu_i \mu_j) p_{\mu_i} p_{\mu_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i^2}{\mu_i^2}, \tag{17}$$

В разделе 2.5 проводится аналогичное рассмотрение для случая $D = 2n$.

В разделе 2.6 получена обратная метрика Майерса–Перри–АдС в $D = 2n+1$ и построена связанная с этой геометрией конформная механика, имеющая также дополнительную унитарную симметрию. Построена соответствующая сферическая механика, описываемая гамильтонианом:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = {} & HK - D^2 + (\sum_{i=1}^{n} p_{\varphi_i})^2 = \\ = {} & m^2 + \eta \sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_{ij} - \mu_i \mu_j) p_{\mu_i} p_{\mu_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\tau \frac{\delta_{ij}}{\mu_i^2} - \sigma \right) p_{\varphi_i} p_{\varphi_j},\end{aligned} \tag{18}$$

где η, σ и τ – произвольные постоянные.

В разделе 2.7 проведено аналогичное рассмотрение случая $D = 2n$.

В разделе 2.8 обсуждается связь унитарной симметрии исходной фоновой метрики с суперинтегрируемостью моделей сферической механики. Для полностью редуцированной сферической механики, ассоциированной с $D = 2n+1$ черной дырой Майерса–Перри вблизи горизонта событий гамильтониан можно записать в виде рекуррентного соотношения:

$$H_n = p_{\theta_n}^2 + \frac{\gamma_n^2}{\cos^2 \theta_n} + \frac{H_{n-1}}{\sin^2 \theta_n}, \tag{19}$$

который представляет собой обобщение модели Пёшля–Теллера. Данная модель является максимально суперинтегрируемой. Далее обсуждается нередуцированная модель сферической механики, связанная с геометрией экстремальной черной дыры Майерса–Перри–АдС вблизи горизонта в $D = 2n + 1$. Доказано, что она является интегрируемой по Лиувиллю. С помощью метода математической индукции показано, что в модели не достает одного интеграла движения для максимальной суперинтегрируемости. Доказательство основано на подсчете числа функционально–независимых генераторов в унитарной алгебре $u(n)$ в канонической реализации. Обнаружены соотношения между генераторами этой алгебры вида:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(\rho_{kk}\left(\rho_{in}^2 + \xi_{in}^2\right) + \rho_{ii}(\rho_{kn}^2 + \xi_{kn}^2) + \rho_{nn}(\rho_{ki}^2 + \xi_{ki}^2)) = \\ \rho_{in}(\xi_{ki}\xi_{kn} + \rho_{ki}\rho_{kn}) + \xi_{in}(\rho_{ki}\xi_{kn} - \xi_{ki}\rho_{kn}).\end{gathered} \tag{20}$$

Обсуждается также сферическая механика для $D = 2n$. Доказано, что системе не достает двух интегралов движения для максимальной суперинтегрируемости.

Третья глава посвящена построению моделей $\mathcal{N} = 2$ суперчастиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр.

В разделе 3.1 на многообразии AdS_2 рассматриваются спиноры Киллинга и спинорная производная Ли.

В разделе 3.2 рассматривается схема построения $\mathcal{N} = 2$ суперчастицы, движущейся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Керра.

В разделе 3.3 предложена наиболее общая схема построения $\mathcal{N} = 2$ суперчастицы, движущейся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Керра–Ньюмана–АдС. Генераторы суперсимметрии выбираются в наиболее общем виде:

$$Q = ae^{ib}\psi \quad \Rightarrow \quad \bar{Q} = ae^{-ib}\bar{\psi}, \tag{21}$$

где a и b – вещественные функции на фазовом пространстве системы $(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$, которые затем фиксируются из структурных соотношений супералгебры $su(1, 1|1)$:

$$\begin{array}{llll} \{Q, \bar{Q}\} = -2iH, & \{K, Q\} = S, & \{Q, \bar{S}\} = 2i(D + iJ), & \{D, Q\} = -\frac{1}{2}Q \\ \{H, S\} = -Q, & \{D, S\} = \frac{1}{2}S, & \{S, \bar{S}\} = -2iK, & \{J, Q\} = -\frac{i}{2}Q \\ \{J, S\} = -\frac{i}{2}S, & \{H, D\} = H, & \{H, K\} = 2D, & \{D, K\} = K, \end{array} \tag{22}$$

и требования, чтобы в бозонном пределе суперсимметричный гамильтониан $H = -\frac{1}{2i}\{Q, \bar{Q}\}$ сводился к бозонному. Отсюда находятся все сохраняющиеся величины:

$$\begin{aligned}
&H = H_B - \frac{\sqrt{\mathcal{C}}}{\kappa}\psi\bar{\psi}; && J = \frac{1}{2}\psi\bar{\psi} + \sqrt{\mathcal{C}};\\
&D = tH + rp_r; && K = \kappa + t^2 H + 2trp_r;\\
&Q = -i\frac{rp_r + i\sqrt{\mathcal{C}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\kappa}}\psi; && S = -tQ + i\sqrt{2\kappa}\psi,
\end{aligned} \tag{23}$$

где вид κ дается формулой (14), а $\mathcal{C}$ является оператором Казимира алгебры $so(2,1)$, который строится по генераторам (13). Доказано, что построенное расширение является единственным.

В разделе 3.4 проводится аналогичное рассмотрение $\mathcal{N} = 2$ суперчастицы, движущейся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Мелвина–Керра.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИСЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. **Orekhov K.** N=2 superparticle near horizon of a magnetized Kerr black hole / K. Orekhov // Journal of Geometry and Physics. – 2016. – Vol. 104. – P. 242–245. – DOI : 10.1016/j.geomphys.2016.02.013. – 0,3 п.л.

2. Galajinsky A. On the near-horizon rotating black hole geometries with NUT charges / A. Galajinsky, **K. Orekhov** // European Physical Journal C. – 2016. – Vol. 7, is. 9. – Article 477 (7). – DOI : 10.1140/epjc/s10052-016-4333-0. – 0,6 / 0,2 п.л.

3. **Orekhov K.** Integrable models associated with Myers-Perry-AdS-dS black hole in diverse dimensions / K. Orekhov. // Journal of Geometry and Physics. – 2014. – Vol. 86. – P. 467–475. – DOI : 10.1016/j.geomphys.2014.09.0 08. – 0,7 п.л.

4. **Орехов К. А.** Спиноры Киллинга и суперчастица в пространстве анти-де Ситтера / К. А. Орехов // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 3. – С. 33–38. – 0,4 п.л.
   переводная версия:
   Orekhov K. A. Killing Spinors and Superparticles in Anti-de Sitter Space / K. A. Orekhov // Russian Physics Journal. – 2014. – Т. 57, № 3. – С. 321–327.

5. Galajinsky A. N = 2 superparticle near horizon of extreme Kerr-Newman-AdS-dS black hole / A. Galajinsky, **K. Orekhov** // Nuclear Physics B. – 2011. – Vol. 850, is. 2. – P. 339–348. – DOI : 10.1016/j.nuclphysb.2011.04.015. – 0,5 / 0,2 п.л.

Подписано к печати 24.10.2016. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 1,05. Уч.-изд. л. 0,95.
Заказ 414-16. Тираж 100 экз.

Издательство
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ