МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

О.Н. Галажинская, С.П. Моисеева

Теория случайных процессов

Часть 2
Марковские процессы

Учебное пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

УДК 519.22
ББК 22.172
Г15

Рецензент ***А.А. Назаров***, д-р техн. наук, проф.

Галажинская О.Н., Моисеева С.П.

Г15 Теория случайных процессов. Ч. 2: Марковские процессы : учеб. пособие. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 126 с.

Пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении практических заданий в курсе «Теория случайных процессов». Предложены в большом количестве разнообразные задачи с разобранными решениями, а также задачи для самостоятельной работы студентов по каждой из тем. Приводятся все необходимые теоретические сведения из теории случайных процессов. Методическое пособие составлено так, чтобы студент смог выполнить задания без обращения к дополнительной литературе.

Для студентов 3-го курса ФПМК, изучающих курс «Теория вероятностей и случайные процессы».

УДК 519.22
ББК 22.172

Содержание

Введение

Понятие системы. Детерминированные и стохастические системы

Термин «система» будет неоднократно употребляться в дальнейшем при изложении теории марковских процессов. Поэтому вначале сделаем небольшое отступление и дадим определение этого понятия.

Понятие «система» вошло в обиход в начале 20 века, но долгое время использовалось в самом общем смысле, без претензий на формальную строгость. Со временем появилась необходимость в более-менее строгом определении.
В переводе с греческого «***система***» означает целое, составленной из частей. Часто под системой понимают ***единство связанных*** друг с другом ***предметов***, ***явлений*** в природе и обществе.

Одно из определений «системы» звучит так:
«Системой называется целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы.

Более строгое математически определение системы такое:

Пусть $A = \{a_i\}$ – множество некоторых объектов, обладающих определенными свойствами (элементы системы); $R = \{r_i\}$ – связи между указанными объектами; Z – цель функционирования системы. Тогда систему можно определить, как совокупность элементов со связями и целью функционирования системы, т.е. $S = \{A, R, Z\}$.

Различают два вида систем:

1. ***Детерминированные***;
2. ***Стохастические***.

Детерминированными системами называются такие системы, состояние которых однозначно определяется начальными значениями и может быть однозначно предсказано для любого момента времени. Т.е. это системы, поведение которых мы абсолютно точно можем предвидеть в любой момент времени. Составные части такой системы взаимодействуют друг с другом ***предсказуемо***.

Примеры:

1) Солнечная система;

2) автомобиль, т.е. если допустим вы поворачиваете руль вправо, то можете быть абсолютно уверены, что колеса машины повернут тоже вправо (случай неисправности машины мы не рассматриваем);

3) швейная машинка (если мы повернем на заданный угол вращающуюся ручку машинки, то можем быть уверены, что иголка переместиться вверх-вниз на известное определенное расстояние (случай поломки также не рассматривается).

Стохастические системы – это такие системы, эволюция которых во времени не может быть описана однозначно. То есть будущее поведение системы и прогноз ее поведения носят случайный характер. Нашего знания о текущем состоянии системы и особенностей связей между ее составными элементами ***недостаточно*** для однозначного предсказания будущего системы.

Примеры: Аэропорты, магазины, парикмахерские, страховые компании, взаимоотношения в семье, счётчик в такси и т.д.

Изучение любой системы ***S***, и детерминированной, и стохастической, сводится по существу к созданию и последующему изучению ее ***модели***.

Поведение некоторых стохастических систем, (достаточно большого количества), мы можем моделировать с помощью марковских случайных процессов, к обсуждению которых мы и переходим.

В данном пособии подробно мы рассмотрим только ***цепи Маркова***, которые *использyются для изучения* краткосрочного и долгосрочного ***поведения стохастических систем с дискретным множеством состояний***.

Марковские процессы

Как уже было сказано выше, марковские процессы являются удобной математической моделью для многих реальных процессов, протекающих в различных системах.

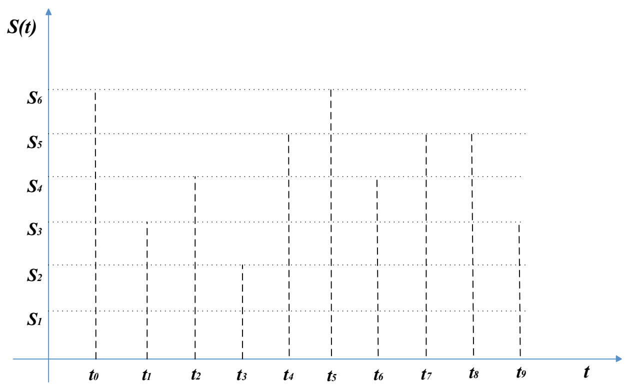
Представим себе систему (например, физическую, техническую или экономическую), которая может находится в различных состояниях: $S_1, S_2, ..., S_N, ...$ и пусть её функционирование во времени носит стохастический характер, то есть состояние системы в момент времени t в общем случае не определяется однозначно её состояниями в предыдущие моменты $s < t$.

Изменение во времени состояний этой системы можно описать некоторым случайным процессом $\xi(t)$, заданным на интервале $[0, T]$ и принимающим значения из множества S, которое может быть как конечным, так и бесконечным.

Рассмотрим *пример*.

Пусть имеется некоторая система (например, кассовый аппарат в супермаркете, компьютер, светофор, человек и т.д.). Представим, что данная система может находится в одном из ***n*** возможных состояний. Обозначим эти состояния так: $S_i, i = \overline{1, n}$. В данном случае выше обозначенное множество S (множество возможных состояний системы) – конечное. В процессе своего функционирования система случайным образом меняет свои состояния, например, в фиксированные моменты времени t_i (на самом деле это может происходить и в случайные моменты времени, этот случай также будет рассмотрен далее). Переход из состояния S_i в состояние S_j происходит с условной вероятностью p_{ij}. Реализации такого случайного процесса (смены состояний системы) могут выглядеть, например, так:

1. $S_6, S_3, S_4, S_2, S_5, S_6, S_4, S_5, S_5, S_3, ...$



При попадании системы в состояние S_1 – ***наступает событие*** A_1, при попадании в состояние S_2 – ***наступает событие*** A_2, и так далее, при попадании в состояние S_N – ***наступает событие*** A_N. События $A_1, A_2, ..., A_N$ являются ***несовместными событиями***. Вероятность например такого события $S_1, S_2, S_5, S_4, S_2, S_2$ для марковского процесса равна $P_1(0)\cdot p_{12}\cdot p_{25}\cdot p_{54}\cdot p_{42}\cdot p_{22}$.

Определение марковских случайных процессов

Пусть в моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ заданы сечения $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ случайного процесса $\xi(t)$. Для момента времени $t_{n+1} > t_n$ рассмотрим сечение $\xi(t_{n+1})$ и условную функцию распределения, определяемую равенством:

$$P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \left|\xi(t_n) = x_n, ..., \xi(t_1) = x_1\right.\right\} = \frac{P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1}, \xi(t_n) = x_n, ...\xi(t_1) = x_1\right\}}{P\left\{\xi(t_n) = x_n, ..., \xi(t_1) = x_1\right\}}.$$

Определение 1. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***марковским***, если выполняется равенство:

$$P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \left|\xi(t_n) = x_n, \ldots, \xi(t_1) = x_1\right.\right\} = P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \left|\xi(t_n) = x_n\right.\right\},$$

То есть ***условная функция распределения вероятностей*** значений $\xi(t_{n+1})$ марковского процесса в будущий момент времени t_{n+1} не зависит от значений процесса в прошлые моменты $t_1, \ldots t_{n-1}$, а определяется лишь значением $\xi(t_n) = x_n$ в настоящий момент времени t_n.

Условная функция распределения:

$$F(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1}) = P\left\{\xi(t_{n+1}) < x_{n+1} \left|\xi(t_n) = x_n\right.\right\}$$

Называется ***марковской переходной функцией***.

Классификация марковских случайных процессов

Классификация случайных процессов

В первой части пособия «Случайные процессы» мы уже обсуждали вопрос о классификации случайных процессов. И выяснили, что все случайные процессы классифицируются по разным признакам, учитывается плавность или скачкообразность реализаций, фиксированность или случайность моментов, в которые происходят скачки, вид закона распределения отдельного сечения процесса или совокупности сечений и т.д.

Мы рассмотрели ***элементарную классификацию*** случайных процессов ***по времени*** и ***по состояниям***. Давайте вспомним ее.

1. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с дискретным временем***, если изменение состояний системы, в которой он протекает, происходит в фиксированные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n, ...$. Множество значений t_i может быть конечным или счетным, т.е. $T = \{t_i\}$, $\overline{i = 1, n}$ (n может быть ∞) – *дискретное множество*.

Примеры:

1.а. Будем считать системой какого-либо человека, данная система может находиться в двух состояниях: здоров, болен. Состояние системы можно фиксировать так: в 8.00 утра и в 20.00 вечера. Т.е. смена состояний системы может происходить в дискретные моменты времени $t_1, t_2, ...$ $T = \{t_1, t_2, ..., t_n, ...\}$ – бесконечное счетное множество.

1.б. Процесс изменения роста человека. Смена состояний происходит в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ определяемые, например, днем рождения человека.

2. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с непрерывным временем***, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент времени t наблюдаемого периода T, т.е. множество значений $t \in T$ *континуально*.

Примеры:

2.а. Случайный процесс: число покупателей пришедших от момента открытия магазина, до произвольного момента времени t.

2.б. Случайный процесс: число несданных предметов студентом задолжником, в течение года сдающего сессию и закрывающего долги. Состояние системы может измениться в любой произвольный момент времени $t \in T$, где T – время обучения в университете.

3. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с непрерывным множеством состояний***, если в любом сечении t получаем непрерывную случайную величину, множество значений которой бесконечно и несчетно.

Примеры:

3.а. Случайный процесс: регистрируется температура воздуха на горнолыжном курорте в фиксированные моменты времени. В любом сечении будем получать непрерывную случайную величину.

3.б. Изменение напряжения в сети в момент t.

4. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с дискретным множеством состояний***, если любое его сечение характеризуется дискретной случайной величиной, множество значений которой конечно или бесконечно, но счетно.

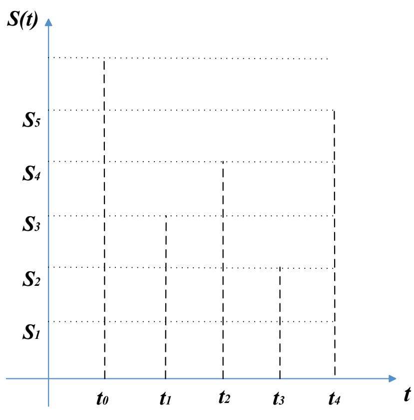
Примеры:

4.а. Случайный процесс: число покупателей пришедших от момента открытия магазина, до произвольного момента времени t. В любом сечении дискретная случайная величина с теоретическим множеством значений $0,1,...,n,..$

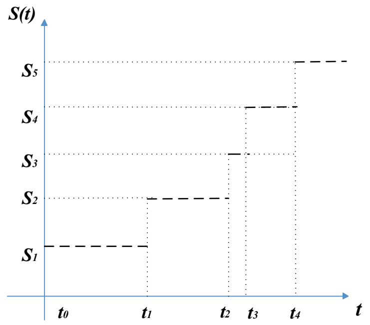
4.б. Процесс изменения состояний человека: веселый, грустный. Смена состояния человека может произойти в любой произвольный момент времени t. Событие $A_1 = \{$ человек веселый $\}$ и $A_2 = \{$ человек грустный $\}$, случайную величину можем определить так: $\xi(A_1) = 1$ и $\xi(A_2) = 2$. В любом сечении случайного процесса дискретная случайная величина со множеством значений $1, 2$.

Таким образом, в зависимости от природы множества T значений аргумента t, моментов времени, в которые возможны переходы системы из состояния в состояние, а также природы множества самих состояний, все случайные процессы делят на 4 основных класса:

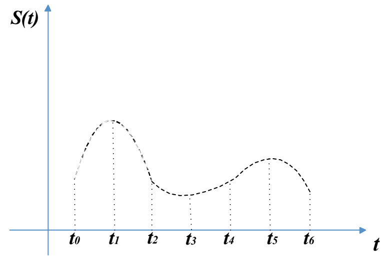
1. ***Процессы с дискретным множеством состояний и дискретным временем*** (пример ***1.а.***)



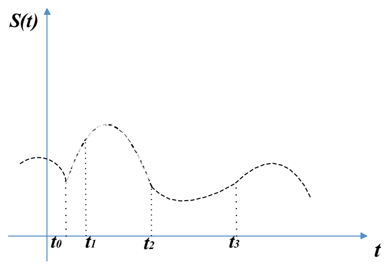
2. ***Процессы с дискретным множеством состояний и непрерывным временем*** (пример ***2.а.***)



3. ***Процессы с непрерывным множеством состояний и дискретным временем*** (пример ***3.а***.)



4. ***Процессы с непрерывным множеством состояний и непрерывным временем*** (пример ***3.б***.)



<u>Замечание 1:</u> На всех графиках изображено по одной из возможных реализаций случайных процессов.

<u>Классификация марковских случайных процессов</u>

Все ***марковские процессы*** также можем разделить на классы в зависимости от:

1. Структуры множества $\{S\}$ – значений случайного процесса $\xi(t)$.

2. Множества моментов времени наблюдения $\{T\}$.

Если множество $\{S\} \to$ {дискретное}, то процесс $\xi(t)$ называется ***цепью Маркова.***

В этом случае когда:

1) $\{T\}$ – дискретное множество, то процесс называется ***цепью Маркова с дискретным временем*** (или ***дискретной цепью Маркова***);

2) $\{T\}$ – непрерывное множество, то процесс называется ***цепью Маркова с непрерывным временем*** (или ***непрерывной цепью Маркова***);

Если $\{S\} \to$ {непрерывное} и $\{T\} \to$ {непрерывное}, то процесс называется ***непрерывным марковским процессом***.

В данном пособии мы подробно рассмотрим ***цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем.***

Глава 1. Цепи Маркова с дискретным временем

1.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ изменения во времени состояний некоторой системы, который принимает целочисленные значения $i = 1, 2, \dots, N, ..$ из множества $\{S\}$ конечного или счетного.

Пусть в момент времени t, значение случайного процесса $\xi(t) = i$, а в момент времени t_1 значение случайного процесса $\xi(t_1) = j$.

Переходы из одного состояния в другое происходят с вероятностью p_{ij} , через равные промежутки времени $|t_1 - t| = 1$, которые мы будем называть ***шагом***.

Условные вероятности

$$P\{\xi(t_1) = j | \xi(t) = i\} = P\{\xi(t+1) = j | \xi(t) = i\} = p_{ij}(t), \text{ для всех } i, j \in X$$

Образуют ***матрицу вероятностей переходов*** цепи Маркова из одного состояния в другое в произвольный момент времени t.

Цепи Маркова с дискретным временем бывают ***однородные*** и ***неоднородные***.

Если вероятности переходов не зависят от момента времени t, то есть проявляется свойство однородности и $p_{ij}(t) = p_{ij}$, то цепь Маркова называется ***однородной*** с матрицей вероятностей переходов за один шаг:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

где n – число состояний системы (число возможных значений цепи Маркова) – конечное или счетное.

Элементы матрицы $p_{ij} \geq 0$ и удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \ \forall\ i = 1,2,\dots n,$$

Т.е. сумма вероятностей каждой строки матрицы равна 1.

Такую матрицу называют ***стохастической*** или ***марковской***.

Для ***<u>однородной цепи Маркова</u>*** стохастическая матрица P имеет постоянный вид, для любого шага, т.е. $P(1) = P(2) = P(3) = ... = P(n) = P$, где (1), (2),… (n) – номера шагов.

Если исследуемая ***<u>цепь Маркова неоднородная</u>***, то матрицы вероятностей переходов для каждого шага $P(1), P(2), P(3), ..., P(n)$ будут разными.

Для того чтобы определить цепь Маркова с дискретным временем необходимо обязательно задать ***начальное распределение***, которое обозначается так:

$$\Theta = \{\theta(1), \theta(2), \ldots, \theta(n)\}, \text{ где } \theta(i) = P\{\xi(0) = i\}.$$

Т.е. начальное распределение – это распределение вероятностей состояний системы в момент времени $t = 0$. Этим моментом может быть например тот, начиная с которого мы стали наблюдать за нашей системой.

<u>Пример 1.</u> Пусть множество значений случайного процесса $\xi(t) \to \{S_1, S_2, S_3\}$. Т.е. система в которой протекает процесс может находится в трех состояниях: S_1, S_2, S_3.

Зададим начальное распределение в виде вектора начальных вероятностей $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, где $\theta_1 = P\{\xi(0) = S_1\}$, $\theta_2 = P\{\xi(0) = S_2\}$, $\theta_3 = P\{\xi(0) = S_3\}$, можно оформить это в виде ряда распределения:

S_i	S_1	S_2	S_3
Θ_i	$\theta_1 = P\{\xi(0) = S_1\}$	$\theta_2 = P\{\xi(0) = S_2\}$	$\theta_3 = P\{\xi(0) = S_3\}$

Начальное распределение может выглядеть, например, так:

S_i	S_1	S_2	S_3
Θ_i	$\theta_1 = P\{\xi(0) = S_1\} = 3/4$	$\theta_2 = P\{\xi(0) = S_2\} = 1/8$	$\theta_3 = P\{\xi(0) = S_3\} = 1/8$

Т.е. в начальный момент времени при $t = 0$, система с разными вероятностями может находится в любом из трех возможных состояний.

Или так:

S_i	S_1	S_2	S_3
Θ_i	0	1	0

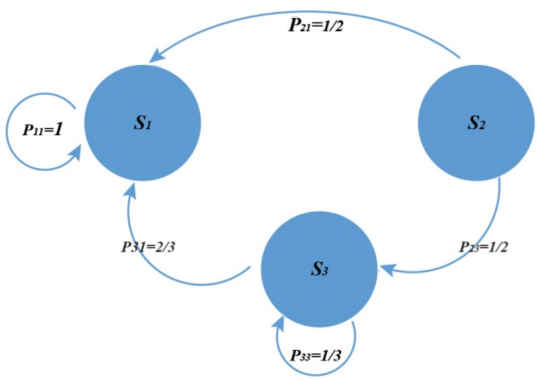
В этом случае, система точно в начальный момент времени будет находиться в состоянии S_2.

Для описания цепи Маркова удобно использовать ***граф вероятностей переходов*** (еще называют ***граф состояний***), вершины которого обозначают возможные состояния системы, стрелки от одной вершины к другой указывают возможные переходы между состояниями, а число на стрелке задаёт вероятность такого перехода.

Пример 2. Пусть множество возможных значений случайного процесса $X = \{1, 2, 3\}$, а матрица вероятностей переходов имеет вид:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

Тогда граф вероятностей переходов выглядит следующим образом:



Для исследования ***однородных цепей Маркова*** с дискретным временем нужно:

1. Указать все состояния, в которых может находиться система.
2. Построить граф состояний, т.е. указать пути возможных непосредственных переходов системы из состояния в состояние.

3. Для каждого возможного перехода указать соответствующую вероятность перехода p_{ij}, т.е. вероятность события, наступающего при переходе системы из состояния x_i непосредственно в состояние x_j. Записать матрицу вероятностей переходов $P = \left[p_{ij} \right]$.

4. Указать начальное распределение вероятностей.

Для распределения вероятностей состояний однородной цепи Маркова имеет место следующее равенство векторов:

$$\{p_1(k), p_2(k), \ldots p_n(k)\} = \{p_1(k-1), p_2(k-1), \ldots, p_n(k-1)\} \cdot P = \Theta \cdot P^k .$$

Для исследования ***<u>неоднородных цепей Маркова</u>*** с дискретным временем нужно:

1. Указать все состояния, в которых может находиться система;
2. Указать распределение вероятностей состояний в начальный момент времени.
3. Для каждого номера шага (момента времени $t = k$) указать соответствующую матрицу вероятностей перехода $P(k) = \left[p_{ij}(k) \right]$.
4. Можно построить граф.

Для неоднородной цепи Маркова распределение вероятностей состояний находится по формулам:

$$\left\{ p_1(k), p_2(k), \ldots p_n(k) \right\} = \left\{ p_1(k-1), p_2(k-1), \ldots, p_n(k-1) \right\} \cdot P(k) = \Theta \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot \ldots \cdot P(k)$$

Понятие ***однородных цепей Маркова*** поясним на следующем простом примере (пример заимствован из книги [11]).

<u>Пример 3</u>. Трудоспособный рабочий в условиях кризиса в стране может находиться в одном из следующих трех состояний:

1) S_1 – работать по специальности;

2) S_2 – работать не по специальности;

3) S_3 – быть без работы.

Назавтра он может быть или в том же состоянии, или перейти в одно из двух других: потерять работу, если он работал; найти работу, если он был без работы и т.д. Зададим вероятности перехода p_{ij} за 1 шаг (1 сутки) для рабочего из состояния i в состояние j в виде таблицы:

Состояние сегодня	***Состояние завтра и*** p_{ij}		
S_i	S_1	S_2	S_3
S_1	$p_{11}=0,8$	$p_{12}=0,1$	$p_{13}=0,1$
S_2	$p_{21}=0,1$	$p_{22}=0,6$	$p_{23}=0,3$
S_3	$p_{31}=0,1$	$p_{32}=0,2$	$p_{33}=0,7$

Данную таблицу можем переписать в виде матрицы вероятностей переходов за 1 шаг:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Для однородного процесса Маркова характерно то, что переходные вероятности постоянны и $p_{ij}(t)=p_{ij}$, т.е. переходные вероятности не зависят от времени. И в нашем примере мы не учитываем, что переходные вероятности, вообще говоря, могут зависеть от времени, например, вследствие сезонных колебаний на рынке труда.

Кроме того, считая, что в изложенном процессе перехода рабочего из состояния в состояние мы имеем дело с ***процессом Маркова***, мы отвлекаемся и от некоторых других осложняющих обстоятельств.

Мы например, считаем, что стаж работы или, наоборот, время безработицы не имеет значения: работающий давно, так же рискует оказаться безработным, как и работающий с недавних пор, или безработному одинаково трудно найти работу, независимо от длительности безработицы (иное дело было бы, например, если на работу биржа труда направляла бы в порядке очереди).

Марковские процессы, часто называют процессам «без памяти», в нашем случае это означает, что если рабочий сейчас в рассматриваемый момент времени находится в состоянии S_1 – работает по специальности, то на следующий день, независимо от того, сколько рабочий провел времени в состоянии S_1 – работал по специальности, как он попал в это состояние (может например, так $S_1 \to S_2 \to S_3 \to .... \to S_1$ это совсем не важно!), вероятность оказаться в любом из имеющихся состояний S_1, S_2, S_3 ***в следующий момент*** зависит только ***от текущего состояния*** S_1.

Пример 4: В некой компании есть парень, которого зовут Иван. Иван известен в кругу друзей тем, что у него часто меняется настроение, которое может быть только плохим или хорошим. Когда настроение плохое с Иваном общаться невозможно, а когда хорошее, он становится чудным собеседником и интересным рассказчиком. Причем если сегодня настроение плохое, то завтра оно изменится с вероятностью 0,6; а если сегодня хорошее, то завтра оно не изменится с вероятностью 0,3. Через 2 дня планируется вечеринка, на которую есть смысл звать Ивана только в хорошем настроении. Какова вероятность того, что Иван будет на вечеринке, если сегодня у него плохое настроение?

Решение:

1) Процесс смены настроения у Ивана, можем рассматривать как процесс $\xi(t)$, протекающий в физической системе S (Иван), у которой множество возможных состояний такое:

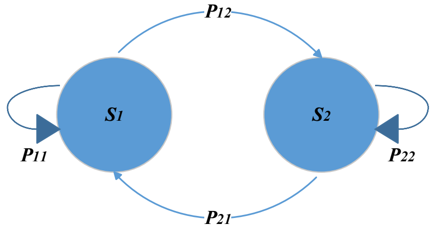
S_1 – настроение хорошее и S_2 – настроение плохое.

Реализация случайного процесса $\xi(t)$ от произвольно выбранного начального момента времени $k=0$ может быть, например, такой: $S_2, S_2, S_1, S_2, S_1, S_1, S_1, S_2, S_2, ...$ или такой: $S_2, S_2, S_2, S_2, S_2, S_1, S_1, S_1, S_1, ...$. (Нарисовать самим реализации случайного процесса)

Замечание: Начальным моментом обычно считатается тот момент, начиная с которого мы наблюдаем за интересующей нас системой.

Когда система попадает в состояние S_1 – ***наступает событие*** A_1, которое заключается в том, что настроение у Ивана хорошее, а если попадает в состояние S_2 – ***наступает событие*** A_2, которое заключается в том, что настроение у Ивана плохое.

Стохастический графа вероятностей перехода выглядит так:



Где $p_{11}=0,3;\ p_{12}=0,7;\ p_{21}=0,6;\ p_{22}=0,4.$

Почему? Известно, что если сегодня настроение у Ивана хорошее, то завтра оно останется таким же, с вероятностью 0,3. Т.е. если система сегодня находится в состоянии S_1, то завтра с вероятностью $p_{11} = 0,3$, система останется там же, т.е. произойдет переход $S_1 \to S_1$. Но настроение все же может измениться с вероятностью 0,7, т.е. возможен переход $S_1 \to S_2$ и поэтому $p_{12} = 0,7$. Далее в задаче говорится, что если сегодня настроение плохое (система в состоянии S_2), то завтра оно изменится с вероятностью 0.6, поэтому возможен переход $S_2 \to S_1$ и соответствующая ему вероятность $p_{21} = 0,6$, и наконец для не меняющегося завтра плохого настроения переход $S_2 \to S_2$ и соответствующая ему вероятность $p_{22} = 0,4$. Матрица вероятностей переходов имеет вид:

$$P = \left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

2) В начальный момент времени (начиная с которого мы наблюдаем за Иваном) $k = 0$ система (Иван) может находится в одном из двух возможных состояний S_1 или S_2, с вероятностями $P_1(0)$ и $P_2(0)$. Начальное распределение вероятностей обычно записывается в виде вектора:

$$\overline{\Theta} = \{\theta(1), \theta(2)\},$$

Где

$$\theta(1) = P\{\xi(0) = S_1\} = P_1(0);\ \theta(2) = P\{\xi(0) = S_2\} = P_2(0).$$

Очевидно, что

$$\theta(1) + \theta(2) = P_1(0) + P_2(0) = 1,$$

т.к. события:

$$A_i = \{\text{система находится в состоянии } \boldsymbol{S_i}\}, i = 1, 2.$$

Образуют ***<u>полную группу попарно несовместных событий</u>***.

В условии записано: «Найти вероятность того, что Иван будет на вечеринке, если ***<u>сегодня</u>*** у него плохое настроение».

То есть мы точно знаем в каком настроении (состоянии) в начальный момент времени (***сегодня***) находится Иван (система): при $k=0$, состояние Ивана S_2 – настроение плохое, поэтому вектор начального распределения вероятностей имеет вид: $\Theta=\{0,1\}$.

3) В целом перед нами стоит такая задача: найти вероятность хорошего настроения Ивана (состояния S_1) через 2 дня.

То есть нужно найти распределение вероятностей состояний системы через 2 шага (через 2 дня), если известно распределение вероятностей в начальный момент времени при $k=0$.

Распределение вероятностей состояний на каждом шаге $k=1,2$, будем записывать в виде вектора:

$$\overline{P}(k)=\{P_1(k),\, P_2(k)\}.$$

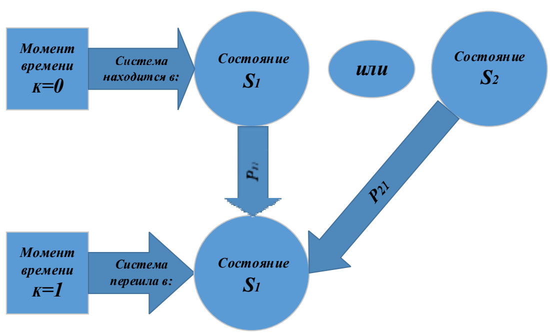
Замечание: Не забываем, что при $k=0$, начальное распределение обозначаем так: $\overline{\Theta}=\{\theta(1),\theta(2)\}=\overline{P}(0)=\{P_1(0),\, P_2(0)\}$

4) Вначале найдем вектор распределения вероятностей состояний в момент времени $k=1$:

$$\overline{P}(1)=\{P_1(1),\, P_2(1)\},$$

где $P_1(1)$ – вероятность состояния 1 в момент времени $k=1$, $P_2(1)$ – вероятность состояния 2 в момент времени $k=1$.
Найдем вероятность того, что за один шаг (от $k=0$ до $k=1$) система перейдет в состояние S_1, т.е. найдем первую компоненту вектора $\overline{P}(1): P_1(1)$.

Изобразим в виде схемы рассматриваемую ситуацию:



в момент времени $k = 0$	система может быть в: →	$\boxed{S_1 \to P_1(0)}$ ↓	или в →	$\boxed{S_2 \to P_2(0)}$ ↓
за 1 шаг перейдет в S_1:	с условными вероятностями:	p_{11} ↓		p_{21} ↓
в момент времени $k = 1$	система уже находится в:	$\boxed{S_1 \to P_1(1)}$	⟵	↲

Для нахождения $P_1(1)$ используем формулу полной вероятности:

$$P_1(1) = P(A) = P\left(A \middle| H_1\right) \cdot P(H_1) + P\left(A \middle| H_2\right) \cdot P(H_2);$$

Где:

A − система перешла в состояние S_1 за 1 шаг;

H_1 − система в момент времени $k = 0$ находилась в состоянии S_1;

H_2 − система в момент времени $k = 0$ находилась в состоянии S_2;

$(A|H_1)$ − система перешла в состояние S_1 за 1 шаг, при условии, что в момент $k = 0$ находилась в состоянии S_1;

$(A|H_2)$ − система перешла в состояние S_1 за 1 шаг, при условии, что в момент $k = 0$ находилась в состоянии S_2.

Обозначим вероятности так:

$$P(H_1) = P_1(0);\ \ P(H_2) = P_2(0);\ P(A|H_1) = p_{11};\ P(A|H_2) = p_{21}$$

Таким образом, вероятность того, что система за 1 шаг перейдет в состояние S_1 , т.е. в момент $k = 1$ будет в S_1, равна:

$$P_1(1) = P(A) = P_1(0) \cdot p_{11} + P_2(0) \cdot p_{21},$$

Т.е. система может оказаться в состоянии S_1, сделав один шаг от $k = 0$, если:

$$A = \underbrace{H_1}_{\text{(была в состоянии } S_1)} \underbrace{\cdot}_{\text{и}} \underbrace{(A|H_1)}_{\text{(осталась в } S_1)} \underbrace{+}_{\text{или}} \underbrace{H_2}_{\text{(была в состоянии } S_2)} \underbrace{\cdot}_{\text{и}} \underbrace{(A|H_2)}_{\text{перешла за 1 шаг в } S_1},$$

Вероятность того, что за 1 шаг система перейдет в состояние S_2, находится аналогично с применением формулы полной вероятности:

$$P_2(1) = P(A) = P\left(A \middle| H_1\right) \cdot P(H_1) + P\left(A \middle| H_2\right) \cdot P(H_2);$$

Где:

A − система перешла в состояние S_2 за 1 шаг;

H_1 − система в момент времени $k = 0$ находилась в состоянии S_1;

H_2 − система в момент времени $k = 0$ находилась в состоянии S_2;

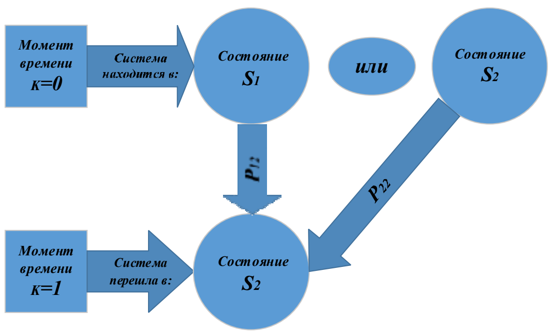
$(A|H_1)$ − система перешла в состояние S_2 за 1 шаг, при условии, что в момент $k = 0$ находилась в состоянии S_1;

$(A|H_2)$ − система перешла в состояние S_2 за 1 шаг, при условии, что в момент $k = 0$ находилась в состоянии S_2.

Обозначим вероятности так:

$$P(H_1) = P_1(0);\ \ P(H_2) = P_2(0);\ P(A|H_1) = p_{12};\ P(A|H_2) = p_{22}$$

Схематически ситуацию с переходами можно изобразить так:



в момент времени $\underline{\boldsymbol{k=0}}$	система может быть в: →	$\boxed{S_1 \to P_1(0)}$	или в →	$\boxed{S_2 \to P_2(0)}$
		↓		↓
за 1 шаг перейдет в $\boldsymbol{S_2}$:	с условными вероятностями:	$\boxed{p_{12}}$		$\boxed{p_{22}}$
		↓		↓
в момент времени $\underline{\boldsymbol{k=1}}$:	система уже находится в:	↳	→$\boxed{S_2 \to P_2(1)}$←	↲

Таким образом, вероятность того, что система за 1 шаг перейдет в состояние S_2 равна:

$$P_2(1) = P_1(0) \cdot p_{12} + P_2(0) \cdot p_{22}.$$

Т.е. распределение вероятностей после 1 шага, в момент времени $k = 1$:

$$\overline{P(1)} = \left(P_1(1), P_2(1)\right)$$

Где компоненты вектора $\overline{P(1)}$:

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot p_{11} + P_2(0) \cdot p_{21};$$

$$P_2(1) = P_1(0) \cdot p_{12} + P_2(0) \cdot p_{22};$$

Обозначим матрицу вероятностей перехода (условных вероятностей перехода из состояния в состояние):

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Имея матрицу вероятностей перехода и вектор вероятностей начальных состояний, вектор распределения вероятностей $\overline{P(1)}$ можно было вычислить сразу:

$$\overline{P(1)} = (P_1(1), \quad P_2(1)) = \overline{P(0)} \cdot P = (P_1(0) \quad P_2(0)) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (\text{используя правило умножения матриц}) =$$

$$= \left(P_1(0) \cdot p_{11} + P_2(0) \cdot p_{21} \quad , P_1(0) \cdot p_{12} + P_2(0) \cdot p_{22}\right)$$

Таким образом мы располагаем вектором распределения вероятностей состояний настроений Ивана в момент времени $k = 1$, по смыслу задачи это «завтра».

Так как в условии указаны конкретные значения переходных вероятностей, можно подставить их и найти распределение вероятностей состояний системы при $k = 1$:

$$\overline{P(1)} = (P_1(1), \quad P_2(1)) = \overline{P(0)} \cdot P = (P_1(0) \quad P_2(0)) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = (0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}6\,; \ \ 0{,}4)$$

5) Получим, рассуждая аналогично, вектор распределения вероятностей состояний в момент времени $k = 2$: $\overline{P(2)}=\left(P_1(2), P_2(2)\right)$.

Сначала находим вероятность того, что за один шаг система перейдет в состояние S_1, для этого также используем формулу полной вероятности:

$$P_1(2) = P(A) = P(H_1) \cdot P\left(A \middle| H_1\right) + P(H_2) \cdot P\left(A \middle| H_2\right);$$

Где:

A −система перешла в состояние S_1 за 1 шаг (от момента времени $k = 1$ до $k = 2$);

H_1 − система в момент времени $k = 1$ находилась в состоянии S_1;

H_2 − система в момент времени $k = 1$ находилась в состоянии S_2;

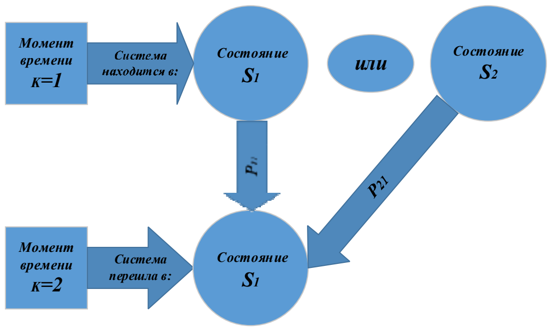
$(A|H_1)$ − система перешла в состояние S_1 за 1 шаг, при условии, что в момент $k = 1$ находилась в состоянии S_1;

$(A|H_2)$ – система перешла в состояние S_1 за 1 шаг, при условии, что в момент $k=1$ находилась в состоянии S_2.

Обозначая вероятности так:

$$P(H_1)=P_1(1);\; P(H_2)=P_2(1);\; P(A|H_1)=p_{11};\; P(A|H_2)=p_{21}$$

Схематически это можно изобразить так:

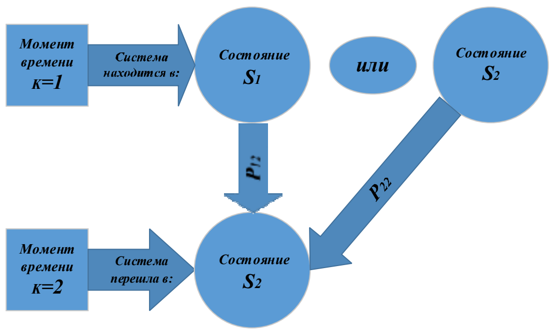


в момент времени $\underline{\boldsymbol{k=1}}$	система может быть в: →	$\boxed{S_1 \to P_1(1)}$	или в →	$\boxed{S_2 \to P_2(1)}$
		↓		↓
за 1 шаг перейдет в $\boldsymbol{S_1}$:	с условными вероятностями:	$\boxed{p_{11}}$		$\boxed{p_{21}}$
		↓		↓
в момент времени $\underline{\boldsymbol{k=2}}$	система находится в:	$\boxed{S_1 \to P_1(2)}$	⟵	↲

Таким образом, вероятность того, что система за один шаг перейдет в состояние S_1 равна:

$$P_1(2)=P_1(1)\cdot p_{11}+P_2(1)\cdot p_{21}$$

Аналогично для $P_2(2)$ схематически:



в момент времени $\underline{\boldsymbol{k=1}}$	система может быть в: →	$\boxed{S_1 \to P_1(1)}$	или в →	$\boxed{S_2 \to P_2(1)}$
		↓		↓
за 1 шаг перейдет в $\boldsymbol{S_2}$	с условными вероятностями:	$\boxed{p_{12}}$	и	$\boxed{p_{22}}$
		↓		↓
в момент времени $\underline{\boldsymbol{k=2}}$	система уже находится в:	↳	⟶ $\boxed{S_2 \to P_2(2)}$ ⟵	↲

И аналитически: $P_2(2) = P_1(1) \cdot p_{12} + P_2(1) \cdot p_{22}$.

Т.е. распределение вероятностей состояний в момент времени $k = 2$ будет такое:

$\overline{P(2)} = \big(P_1(2), P_2(2)\big)$, где компоненты вектора $\overline{P(2)}$:

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot p_{11} + P_2(1) \cdot p_{21};$$

$$P_2(2) = P_1(1) \cdot p_{12} + P_2(1) \cdot p_{22};$$

Используя матричный способ записи:

$$\overline{P(2)} = (P_1(2) \quad P_2(2)) = (P_1(1) \quad P_2(1)) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \overline{P(1)} \cdot P$$

б) Так как $\overline{P(1)} = \overline{P(0)} \cdot P$, то вектор вероятностей состояний на 2 шаге равен:
$\overline{P(2)} = \overline{P(1)} \cdot P = \overline{P(0)} \cdot P \cdot P = \overline{P(0)} \cdot P^2$, где $P -$ матрица вероятностей переходов.

$$\overline{P(2)} = \big(P_1(2), P_2(2)\big) = \overline{P}(0) \cdot P^2 =$$

$$= (P_1(0) \quad P_2(0)) \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^2 + p_{12} \cdot p_{21} & p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \\ p_{21} \cdot p_{11} + p_{22} \cdot p_{21} & p_{21} \cdot p_{12} + p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Подставляя известные значения $P = \left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ и

$\overline{\Theta} = \{\theta(1), \theta(2)\} = \overline{P}(0) = \{P_1(0),\ P_2(0)\} = \{0,1\}$,

окончательно можем записать:

$$\overline{P(2)} = \big(P_1(2), P_2(2)\big) = (0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0,3^2 + 0,7 \cdot 0,6 & 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,4 \\ 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,6 & 0,6 \cdot 0,7 + 0,4^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,6 \quad 0,6 \cdot 0,7 + 0,4^2) = (0,42 \quad 0,58)$$

Заключение: В задаче нужно было найти вероятность того, что у Ивана будет хорошее настроение через 2 дня, если сегодня у него плохое настроение. Состояния системы были введены так: S_1 – настроение хорошее и S_2 – настроение плохое. Согласно полученным результатам, вероятность хорошего настроения через 2 дня: $P_1(2) = 0,42$.

Пример 5. Рассмотрим супермаркет с тремя кассами. Вероятность исправного кассового аппарата выйти из строя за истекшие сутки $1/5$, а вероятность ремонтируемого аппарата войти в строй за сутки $3/5$. Процессы выхода из строя и восстановления кассовых аппаратов независимы друг от друга. Работоспособность кассовых аппаратов проверяется ежедневно, в случае если ремонтник признает аппарат неисправным, он направляется в мастерскую. Построить матрицу вероятностей перехода.

Решение:

1. Введем состояния системы, которые определяются числом исправных аппаратов:

S_3 – все 3 аппарата работают;

S_2 – 2 аппарата работают, 1 не работает;

S_1 – 1 аппарат работает, 2 не работает;

S_0 – ни один аппарат не работает;

2. Найдем вероятности переходов системы из состояния в состояние. Обозначим события:

$A = \{$ исправный аппарат вышел из строя за сутки $\}$, $P(A) = \frac{1}{5}$;

$\overline{A} = \{$ исправный аппарат не вышел из строя за сутки $\}$, $P(\overline{A}) = \frac{4}{5}$;

$B = \{$ ремонтируемый аппарат вошел в строй за сутки $\}$, $P(B) = \frac{3}{5}$;

$\overline{B} = \{$ ремонтируемый аппарат не вошел в строй за сутки $\}$, $P(\overline{B}) = \frac{2}{5}$.

3. Обозначим p_{ij} – переход из состояния i в состояние j.

Тогда p_{00} – вероятность перехода из состояния все аппараты не работают в то же самое, т.к. вероятность одного ремонтируемого аппарата войти в строй за сутки (событие B) $3/5$, то вероятность не войти в этот самый строй (событие $\overline{B}$) $2/5$, поэтому не войти в строй всем трем аппаратам, по теореме умножения: $p_{00} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$.

Найдем сразу же p_{33} – вероятность перехода из состояния все аппараты работают в то же самое. Т.к. вероятность одного исправного аппарата выйти из строя за сутки (событие A) $1/5$, то вероятность не выходить (событие $\overline{A}$) $4/5$, поэтому $p_{33} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$.

Найдем p_{01} – вероятность того, что система из состояния: не работают все, перейдет в состояние: один все-таки работает. Но заработать может какой-то один из трех на самом деле: или 1-й, или 2-й, или 3-й. Поэтому:

$$p_{01}=\underbrace{\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2}_{\substack{1\text{ый работает}\\ 2\text{и}3\text{ нет}}}+\underbrace{\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2}_{\substack{2\text{ ой работает}\\ 1\text{и}3\text{ нет}}}+\underbrace{\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2}_{\substack{3\text{ий работает}\\ 1\text{и}2\text{ нет}}}=3\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

Аналогично для p_{02} – вероятность того, что система из состояния: не работают все, перейдет в состояние: 2 заработали, а это может быть 1 и 3, или 1 и 2, или 2 и 3, поэтому:

$$p_{02}=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}=3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}$$

Аналогично для : $p_{03}=\left(\frac{3}{5}\right)^3$ – вероятность того, что все не работали и все вошли в строй (событие B).

Найдем вероятности $p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}$.

У нас p_{10} – вероятность того, что система из состояния работает один аппарат, перешла в состояние не работает ни один. Т.е. был последний работающий аппарат, да и тот сломался.

$$p_{10}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

p_{11} – вероятность того, что система из состояния работает один аппарат, перешла в состояние: по-прежнему работает один. Как это может случиться: или ни один из 2 сломанных не отремонтировался (событие $\overline{B}$) и единственный работающий не сломался (событие $\overline{A}$), или один из 2 ремонтируемых вошел в строй (событие B), но рабочий до того сломался (событие A), поэтому:

$$p_{11}=\underbrace{\frac{4}{5}}_{\overline{A}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+2\cdot\underbrace{\frac{3}{5}}_{B}\cdot\underbrace{\frac{2}{5}}_{\overline{B}}\cdot\underbrace{\frac{1}{5}}_{A}$$

p_{12} – вероятность того, что система из состояния работает один аппарат, перешла в состояние: работают два. Как это может случиться: или рабочий был один, он не сломался (событие

$\bar{A}$) и еще один из двух сломанных отремонтировали (событие B) или рабочий сломался (событие A), но два отремонтировали (событие B). Поэтому:

$$p_{12} = 2 \cdot \underbrace{\frac{4}{5}}_{\bar{A}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{B} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\bar{B}} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{A} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

p_{13} – вероятность того, что система из состояния работает один аппарат, перешла в состояние: работают все. Как это может случиться: рабочий был один, он не сломался (событие $\bar{A}$) и два сломанных отремонтировали (событие B). Очевидно, что

$$p_{13} = \underbrace{\frac{4}{5}}_{\bar{A}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Аналогично предыдущим рассуждениям находим вероятности $p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}$.

p_{20} – вероятность того, что 2 аппарата было рабочих, стало ни одного, т.е. 2 сломались (событие A) и ремонтируемый не вошел в строй (событие $\bar{B}$). Поэтому:

$$p_{20} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\bar{B}}.$$

p_{21} – вероятность того, что 2 аппарата было рабочих, остался один рабочий. Как это может случиться: или ремонтируемый не вошёл в строй (событие $\bar{B}$), и один из двух целых сломался (событие A), или оба целых сломались (событие A), но ремонтируемый вошел в строй (событие B). Поэтому:

$$p_{21} = 2 \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\bar{B}} \cdot \underbrace{\frac{4}{5}}_{\bar{A}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{A} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{B}.$$

p_{22} – вероятность того, что было 2 исправных аппарата и осталось 2. Как это может случиться: один из двух исправных сломался (событие A), но неисправный наладили (событие B) или исправные не сломались (событие $\bar{A}$) и неисправный не наладили (событие $\bar{B}$), поэтому:

$$p_{22} = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{4}{5}}_{\bar{A}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{B} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\bar{B}}$$

p_{23} – вероятность того, что было 2 исправных аппарата, а стало 3. Как это может случиться: только если 2 целых не сломались (событие $\bar{A}$) и сломанный наладили (событие B), поэтому:

$$p_{23} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5}.$$

И наконец найдем вероятности: p_{30}, p_{31}, p_{32}.

p_{30} – вероятность того, что все три работали и все сломались (событие A), т.е. $p_{30} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$,

p_{31} – вероятность того, что сначала три работали, потом 2 сломались (событие A), и остался один рабочий (событие $\overline{A}$), не знаем какой из трех, поэтому:

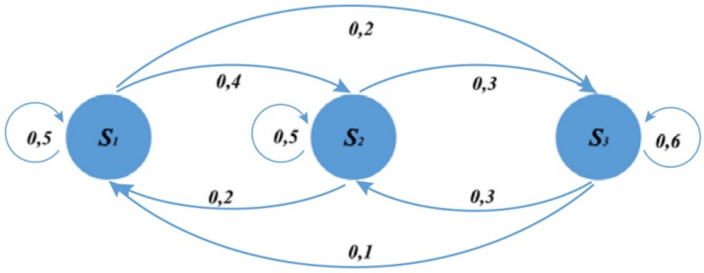
$$p_{31} = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5}$$

p_{32} – вероятность того, что вначале все три работали, затем 1 сломался (событие A), но осталось два рабочих (событие $\overline{A}$), не знаем какие из трех. Поэтому: $p_{32} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}$.

Таким образом матрица вероятностей переходов имеет вид:

$$\begin{pmatrix}
p_{00} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 & p_{01} = 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 & p_{02} = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} & p_{03} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \\
p_{10} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 & p_{11} = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} & p_{12} = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 & p_{13} = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\
p_{20} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} & p_{21} = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} & p_{22} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} & p_{23} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \\
p_{30} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 & p_{31} = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} & p_{32} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} & p_{33} = \left(\frac{4}{5}\right)^3
\end{pmatrix}$$

Пример 6. Рассмотрим состояния банка, характеризующиеся одной из процентных ставок: 12%, 13%, 14%, которые устанавливаются в начале каждого квартала и фиксированы на всем его протяжении**.** Таким образом, если за систему S принять действующую процентную ставку, то она в каждый момент времени может находиться только в одном из состояний: S_1 – процентная ставка 12%, S_2 – процентная ставка 13%, S_3 – процентная ставка 14%. Анализ работы банка в предшествующие годы показал, что изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало. Определить распределение вероятностей состояний системы в конце года, если в конце предыдущего года процентная ставка составила 13%, а граф вероятностей переходов имеет вид:



Решение: Так как множество состояний, в которых может находиться система S, конечно, то протекающий в ней случайный процесс – дискретный. С определенной степенью погрешности можно предположить, что вероятность пребывания банка в одном из своих состояний в будущем зависит только от состояния в настоящем и не зависит от его состояний в прошлом. Поэтому рассматриваемый процесс можно считать марковским.

В силу условий система (банк) может переходить из состояния в состояние только в определенные моменты времени t_k – начало k-го квартала, $k = 1,2,3,4$, а изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало, поэтому рассматриваемый процесс является однородным марковским процессом с дискретным временем.
По стохастическому графу составим матрицу переходных вероятностей:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Так как в конце предшествующего года процентная ставка составляла 13%, то вектор начального распределения имеет вид $\Theta = \{0,1,0\}$.

Тогда распределение вероятностей состояний процентной ставки банка в конце года, то есть по прошествии четырех кварталов определяется следующим образом:

$$\{p_1(4), p_2(4), p_3(4)\} = \Theta \cdot P^4 = \{0{,}2020; \quad 0{,}4015; \quad 0{,}3965\}.$$

Если предположить, что переходные вероятности зависят от моментов установления процентных ставок, полученный процесс будет являться неоднородной марковской цепью с дискретным временем. Например, пусть:

$$P(1) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} \qquad P(2) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$P(3)=\begin{bmatrix}0,3 & 0,4 & 0,3\\ 0,6 & 0 & 0,4\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\end{bmatrix} \qquad P(4)=\begin{bmatrix}0,4 & 0,6 & 0\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\\ 0,5 & 0 & 0,5\end{bmatrix}$$

Тогда $\{p_1(4), p_2(4), p_3(4),\} = \Theta\cdot P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)\cdot P(4) = \{0{,}3584;\ \ 0{,}3696;\ \ 0{,}272\}$.

<u>Пример 7.</u> N черных и N белых шаров размещены по двум урнам так, что в каждой из них по N шаров. Число черных шаров первой урны определяет состояние системы. На каждом шаге случайно выбирают по одному шару из каждой урны и меняют шары местами. Записать матрицу вероятностей переходов за один шаг.

<u>Решение:</u>

4. Имеется 2 урны, в которых находится всего $2N$ шаров:

$$\begin{bmatrix}\text{1 урна}\\ +\\ \text{2 урна}\end{bmatrix} = 2N\text{ шаров} = \begin{Bmatrix}N\\ \text{черных}\\ +\\ N\\ \text{белых}\end{Bmatrix}$$

Пусть в 1 урне i черных шаров, где $i=\overline{0,N}$, тогда:

В 1-й урне:

Всего N шаров $=(i)$ черных $+\ (N-i)$ белых

Во 2-й урне:

Всего N шаров $=(N-i)$ черных $+\ (i)$ белых

5. Представим, что имеется некоторая система ***S***, состояние которой определяется числом черных шаров первой урны. Система может находиться в одном из $S_i, i=\overline{0,N}$ состояний:

S_0- это состояние, когда в первой урне будет ноль черных шаров;

S_1- в это состояние система попадет, если в первой урне будет один черный шар;

И так далее.

6. Для нахождения распределения вероятностей состояний в произвольный момент времени, необходима матрица переходных вероятностей $P=\left(P_{i,j}\right)$. Найдем ее. Введем обозначения:

$P_{i,i+1}$ – вероятность того, что в 1 урне было i черных шаров, а стало $i+1$.

$P_{i,i-1}$ – вероятность того, что в 1 урне было i черных шаров, а стало $i-1$.

$P_{i,i}$ – вероятность того, что в 1 урне было i черных шаров, и осталось i.

Найдем обозначенные вероятности.

7. Система переходит из одного состояния в другое, при наступлении каких-то событий. Каких именно? Разберемся. Давайте рассмотрим введенные вероятности: $P_{i,i+1}, P_{i,i-1}, P_{i,i}$.

а) $P_{i,i}$ – вероятность того, что было i черных шаров, стало i. Обозначим это событие F_1. Когда может наступить событие F_1, тогда когда наступят такие события:

<u>или</u>

A_1 – из 1-й урны взяли один белый шар и из 2 урны взяли один 1 белый шар. Их меняют местами и очевидно при этом в 1-й урне остается i черных шаров, сколько было изначально.

<u>или</u>

A_2 – из 1-й урны взяли один черный шар и из 2 урны взяли один 1 черный шар. Их меняют местами и при этом также в 1-й урне остается первоначальное число i черных шаров.

Оценим сразу вероятность $P_{i,i}$. При нахождении будем использовать классическое определение вероятностей и теоремы сложения и умножения. Так как:

$$F_1 = A_1 + A_2 = C_1 \cdot C_2 + D_1 \cdot D_2,$$

где

$C_i = \{$ из i урны достали белый шар $\}$ и $D_i = \{$ из i урны достали черный шар $\}$, $\overline{i=1,2}$

$P\left(C_1\right)=\dfrac{N-i}{N}$, всего шаров в 1-й урне N, из них $\left(N-i\right)$ белых;

$P\left(C_2\right)=\dfrac{i}{N}$, всего шаров в 1-й урне N, из них $\left(i\right)$ белых;

Мы достаем и из первой урны белый шар ***<u>и</u>*** из второй урны тоже белый шар, т.е. наступает событие $C_1 \cdot C_2$.

$P\left(D_1\right)=\dfrac{i}{N}$, всего шаров в 1-й урне N, из них $\left(i\right)$ черных;

$P(D_2)=\dfrac{N-i}{N}$, всего шаров во 2-й урне N, из них $(N-i)$ черных;

Достали из первой урны черный шар **_и_** из второй урны тоже черный шар, т.е. наступает событие $D_1 \cdot D_2$.

Так как события C_1 и C_2, D_1 и D_2 независимые, то по теореме умножения для независимых событий: $P(C_1 \cdot C_2)=P(C_1)\cdot P(C_2)$ и $P(D_1 \cdot D_2)=P(D_1)\cdot P(D_2)$. События $A_1=C_1 \cdot C_2$ и $A_2=D_1 \cdot D_2$ несовместные, поэтому по теореме сложения несовместных событий $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)$. Подставляем найденные значения вероятностей и окончательно получаем:

$$P(F_1)=P(A_1+A_2)=P(C_1 \cdot C_2+D_1 \cdot D_2)=P(C_1 \cdot C_2)+P(D_1 \cdot D_2)=\frac{N-i}{N}\cdot\frac{i}{N}+\frac{i}{N}\cdot\frac{N-i}{N}=$$
$$=2\cdot\frac{i}{N}\cdot\frac{N-i}{N}$$

b) $P_{i,i+1}$ – вероятность того, что было i черных шаров, стало $(i+1)$. Т.е. после перекладывания черных шаров в 1-й урне стало на один больше. Обозначим это событие F_2. Когда может наступить событие F_2, тогда когда одновременно наступят такие события:

_и_ $C_1=\{$ достали белый шар из 1 урны $\}$ **_и_** $D_2=\{$ достали черный шар из 2 урны $\}$, т.е. $F_2=C_1 \cdot D_2$, по теореме умножения:

$$P(F_2)=P(C_1 \cdot D_2)=P(C_1)\cdot P(D_2)=\frac{N-i}{N}\cdot\frac{N-i}{N}=\left(\frac{N-i}{N}\right)^2.$$

c) $P_{i,i-1}$ – вероятность того, что было i черных шаров, стало $(i-1)$. Т.е. после перекладывания черных шаров в 1-й урне стало на один меньше. Обозначим это событие F_3. Когда может наступить событие F_3, тогда когда одновременно наступят такие события:

_и_ $D_1=\{$ достали черный шар из 1 урны $\}$ **_и_** $C_2=\{$ достали белый шар из 2 урны $\}$, т.е. $F_3=D_1 \cdot C_2$, по теореме умножения:

$$P(F_3)=P(D_1 \cdot C_2)=P(D_1)\cdot P(C_2)=\frac{i}{N}\cdot\frac{i}{N}=\left(\frac{i}{N}\right)^2.$$

8. Наконец мы готовы записать матрицу вероятностей перехода за 1 шаг, используя найденные вероятности:

$$P_{i,i}=P(F_1)=2\cdot\frac{i}{N}\cdot\frac{N-i}{N}=\frac{2i\cdot(N-i)}{N^2};$$

$$P_{i,i+1}=P(F_2)=\left(\frac{N-i}{N}\right)^2;$$

$$P_{i,i-1}=P(F_3)=\frac{i}{N}\cdot\frac{i}{N}=\left(\frac{i}{N}\right)^2.$$

Оформим ее в виде таблицы:

Состояния	S_0	S_1	S_2	S_3	...	S_{N-2}	S_{N-1}	S_N
S_0	0	1	0	0	0	0	0	0
S_1	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{2(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)^2}{N^2}$	0	0	0	0	0
S_2	0	$\frac{4}{N^2}$	$\frac{4(N-2)}{N^2}$	$\frac{(N-2)^2}{N^2}$	0	0	0	0
S_3	0	0	$\frac{9}{N^2}$	$\frac{6(N-3)}{N^2}$	$\frac{(N-3)^2}{N^2}$	0	0	0
...	…	…	…	…	…	…	…	…
S_{N-2}	0	0	0	0	…	$\frac{4(N-2)}{N^2}$	$\frac{4}{N^2}$	0
S_{N-1}	0	0	0	0	…	$\frac{(N-1)^2}{N^2}$	$\frac{2(N-1)}{N^2}$	$\frac{1}{N^2}$
S_N	0	0	0	0	0	0	1	0

<u>Комментарии:</u>

1) Из состояния S_0- в состояние S_0 мы перейти не можем, по условию эксперимента. Так как если в 1-й урне будет ноль черных шаров (все белые). То очевидно все черные будут во второй. И при проведении эксперимента мы возьмем белый шар из 1-й урны, черный шар из второй урны (т.к. больше нечего взять), и поменяем их местами. В 1-й урне окажется 1 черный шар. Поэтому вероятность $P_{0,0}=0$, тогда как $P_{0,1}=1$. Т.е. из S_0 мы достоверно сможем перейти только в состояние S_1. Эти вероятности можем сразу найти используя формулы:

$P_{i,i} = 2 \cdot \frac{i}{N} \cdot \frac{N-i}{N} = \frac{2i \cdot (N-i)}{N^2}$ при $i = 0$ получаем $P_{0,0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot (N-0)}{N^2} = 0$ и $P_{i,i+1} = \left(\frac{N-i}{N}\right)^2$ при $i = 0$ получаем $P_{0,1} = \left(\frac{N-0}{N}\right)^2 = 1$.

2) Аналогично можно получить вероятности переходов из S_N в состояние S_N и из S_N в состояние S_{N-1}. Либо используя рассуждения, либо сразу используя формулы для $P_{i,i}$, $P_{i,i-1} = \left(\frac{i}{N}\right)^2$ подстановкой в них значения $i = N$: $P_{N,N} = \frac{2N \cdot (N-N)}{N^2} = 0$; $P_{N,N-1} = \left(\frac{N}{N}\right)^2 = 1$

3) Переход из состояния в состояния с разницей в индексах больше 1 являются невозможными событиями по условию эксперимента. Т.е. переходы, например: $S_0 \to S_2$; $S_1 \to S_3$; $S_2 \to S_5$; $S_N \to S_{N-2}$; невозможны, поэтому соответствующие вероятности равны нулю.

<u>Пример 8.</u> На некоторой производственной линии, каждая единица выпускаемой продукции с вероятностью ***p*** является бракованной. Процедура контроля качества выпускаемых изделий включает в себя 2 этапа. На первом этапе проверяется каждое изделие, пока не появится 10 качественных изделий подряд. После чего реализуется второй этап процедуры контроля, который заключается в следующем: из каждых 8 последующих изделий случайным образом выбирается одно и проверяется на годность. Если оно качественное, то второй этап продолжается, если нет, то начинается контроль по правилам 1 этапа. Записать матрицу вероятностей переходов.

<u>Решение:</u>

1) Так как процедура контроля может находится на 2 уровнях (этапах), то логично ввести два состояния некой системы: S_1 и S_2. Т.е. $\xi(t)$ – случайный процесс перехода процедуры контроля с одного этапа на другой или другими словами $\xi(t)$ случайный процесс изменения состояний системы (процедуры контроля качества).

2) Введем события:

$A_1 = \{$ изделие качественное $\}$, $\overline{A_1} = \{$ изделие бракованное $\}$. Из условия известно, что $P(\overline{A_1}) = p$, поэтому $P(A_1) = 1 - p$.

3) Нам нужно записать матрицу вероятностей переходов. Возможные переходы системы, это:

$S_1 \to S_1, S_1 \to S_2, S_2 \to S_1, S_2 \to S_2$, т.е. матрица вероятностей перехода будет вида:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

4) Когда система переходит из состояния S_1 – 1 этап контроля качества, в состояние S_2 – второй этап контроля? То есть так: $S_1 \to S_2$. Когда подряд 10 изделий оказались качественными. Обозначим это событие G_1. Найдем его вероятность: $P(G_1) = (1-p)^{10} = P_{12}$.

5) Когда система перейдет так: $S_1 \to S_1$, т.е. останется в состоянии S_1? Когда хотя бы одно из 10 подряд проверенных изделий не качественное (событие $\overline{G_1}$), вероятность этого: $P\left(\overline{G_1}\right) = 1 - P(G_1) = 1 - (1-p)^{10} = P_{11}$.

6) Система перейдет так: $S_2 \to S_2$, когда наступит событие $G_2 = \{$ наудачу выбранное из 8 изделие качественное $\}$, вероятность этого события $P(G_2) = P(A_1 \cdot B_1)$ где $A_1 = \{$ изделие качественное $\}$, $B_1 = \{$ наудачу выбрано одно из 8 изделий $\}$. События A_1 и B_1 независимые, поэтому $P(G_2) = P(A_1 \cdot B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1)$. Так как $P(A_1) = 1 - p$, и согласно классическому определению вероятностей $P(B_1) = \frac{1}{8}$, то окончательно $P(G_2) = P(A_1) \cdot P(B_1) = \frac{1}{8} \cdot (1-p) = P_{22}$.

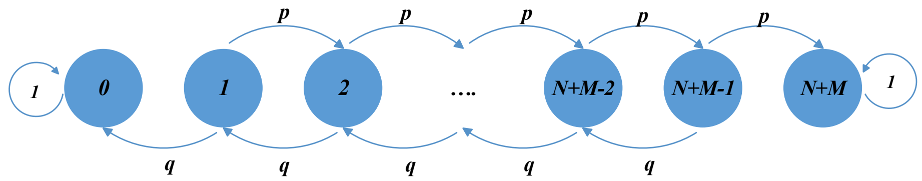
7) И наконец, система перейдет так: $S_2 \to S_1$, если наступит событие $\overline{G_2} = \{$ наудачу выбранное из 8 изделие бракованное $\}$, вероятность этого события $P\left(\overline{G_2}\right) = 1 - P(G_2) = 1 - \frac{1-p}{8} = P_{21}$.

8) Наша матрица вероятностей перехода готова:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(1-p)^{10} & (1-p)^{10} \\ 1-\dfrac{1-p}{8} & \dfrac{1-p}{8} \end{pmatrix}$$

Пример 9. Пусть целые числа $M>0$ и $N>0$ – начальные капиталы соответственно первого и второго игроков. Проводятся последовательно игры, в результате каждой из которых с вероятностью p капитал первого игрока увеличивается на 1 и с вероятностью $q=1-p$ капитал первого игрока уменьшается на 1. Результаты любой игры не зависят от результатов любых других игр. Пусть S_n – капитал первого игрока после n игр. Предполагается, что в случае $S_n=0$ или $S_n=M+N$ игра прекращается (ситуация разорения одного игрока). Провести классификацию состояний и найти переходную матрицу. Найти вероятность разорения первого игрока. Рассмотреть случай, когда один из игроков бесконечно богат.

Указание: Стохастический граф переходов имеет вид:



Замечание: В процессе игры капитал первого игрока может колебаться от 0 до $N+M$. Состояние системы определяются количеством монет у 1 игрока (капиталом 1 игрока).

Решение:

1. Пусть S_n – капитал первого игрока после n игр, тогда последовательность $\{S_n\}$ со множеством значений $\{0,1,2,....,M+N\}$ образует однородную цепь Маркова с вероятностями перехода из состояние в состояние $p_{ij}=p$ если $j=i+1\left(i=\overline{1,M+N-1}\right)$ и $p_{ij}=q$, если $j=i-1\left(i=\overline{1,M+N-1}\right)$, т.к. состояния $S_n=0$ и $S_n=M+N$ являются поглощающими (существенными), то переходные вероятности $p_{0,0}=p_{M+N,M+N}=1$. Все остальные состояния системы $\{1,2,....,M+N-1\}$, кроме $\{0\}$ и $\{M+N\}$ являются сообщающимися.

Пусть $\xi_1,\xi_2,\xi_3,.....\xi_n,...$ последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Бернулли:

ξ_i	-1	1
p_i	q	p

Введем обозначение $S_0 -$ капитал игрока в начале игры и по условию задачи $S_0 = M$ и $S_n = i -$ капитал 1 игрока после n игр.

Тогда $S_n = S_0 + \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ и $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$.

В силу независимости исхода каждой игры от исходов предыдущих игр (имеем однородную марковскую цепь) условные вероятности переходов $P\left(S_{n+1} = i+1 \middle| S_n = i\right) = p$ и $P\left(S_{n+1} = i-1 \middle| S_n = i\right) = q$.

1.в. Введем события:

$$A = \left\{ 1 \ \textit{игрок разорится} \right\},$$

$$B_i = \left\{ 1 \ \textit{игрок имеет капитал} \ S_n = i \right\}$$

Обозначим $P\left(A \middle| B_i\right) = R_i -$ вероятность разорения 1 игрока при условии, что его капитал $S_n = i$, тогда $R_{i+1} = P\left(A \middle| B_{i+1}\right) -$ вероятность разорения 1 игрока с капиталом $S_n = i+1$, а $R_{i-1} = P\left(A \middle| B_{i-1}\right) -$ вероятность разорения 1 игрока, с капиталом $S_n = i-1$.

Рассмотрим капитал 1 игрока на $n-$ шаге. В результате первого после $n-$ шага движения, 1 игрок может выиграть с вероятностью p и его капитал станет равным $S_{n+1} = i+1$, и вероятность разорения в этом случае равна R_{i+1}. Или же он проиграет с вероятностью q и капитал станет равным $S_{n+1} = i-1$. В этом случае вероятность разорения R_{i-1}. Используя формулу полной вероятности, оформим эту мысль:

$$P\left(A \middle| S_n = i\right) = R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$$

Таким образом уравнение, для нахождения вероятности разорения 1 игрока:

$$R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$$

1.г. Получим граничные условия. Очевидно, что если $S_n = 0$ на каком то шаге *n*, то $P\left(A \middle| B_0\right) = P\left(A \middle| S_n = 0\right) = R_0 = 1$, в случае же если $S_n = M + N$, $P\left(A \middle| B_{M+N}\right) = P\left(A \middle| S_n = M + N\right) = R_{M+N} = 0$, т.к. разорится в этом случае 1 игроку невозможно.

<u>Замечание:</u> Нашей целью в задаче является нахождение вероятности разорения 1 игрока с капиталом $S_n = M$, после n-*й* игры, т.е. $P\left(A\middle|B_M\right) = P\left\{A\middle|S_n = M\right\} = R_M = ?$

Рассмотрим решения данного уравнения для двух возможных вариантов значений p и q:

1. $p = q = \frac{1}{2}$;
2. $p \neq q$.

<u>1-й случай:</u>

Полученное уравнение $R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$

При $p = q = \frac{1}{2}$ принимает вид:

$$R_i = \frac{1}{2} \cdot \left(R_{i+1} + R_{i-1}\right)$$

Где $1 \leq i \leq M + N - 1$

Это разностное уравнение 2 порядка, характеристическое уравнение которого:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0$$

Оба корня данного уравнения действительны и равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$, т.к.

$$D = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

В таком случае решением разностного уравнения является линейная функция:

$$R_i = P(A|S_n = i) = C_1 + C_2 \cdot i$$

Подставляя граничные условия: $R_0 = P(A|S_n = 0) = 1$ и $R_{M+N} = P(A|S_n = M + N) = 0$

Получаем систему:

$$R_0 = P(A|S_n = 0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 1$$
$$R_{M+N} = P(A|S_n = M + N) = C_1 + C_2 \cdot (M + N) = 0$$

Из которой определяем значения C_i:

$$\begin{cases} \mathrm{C}_1 = 1 \\ \mathrm{C}_2 = -\dfrac{1}{M+N} \end{cases}$$

После чего можем записать окончательное решение:

$$R_i = P(A|S_n = i) = 1 - \tfrac{i}{M+N}$$

Т.е. вероятность разорится 1 игроку с капиталом $S_n = M$, равна:

$$R_M = P(A|S_n = M) = 1 - \tfrac{M}{M+N} = \tfrac{N}{M+N}$$

Рассмотрим решение для второго варианта значений p и q, случай когда $p \neq q$.

<u>2-й случай:</u>

Ранее было получено разностное уравнение:

$$R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$$

Перепишем его в другом виде, используя, что $p + q = 1$,

$$(p+q) \cdot R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$$

Откуда:

$$p \cdot R_i + q \cdot R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$$

Собираем подобные члены:

$$p \cdot R_{i+1} - p \cdot R_i = q \cdot R_i - q \cdot R_{i-1}$$

$$p \cdot (R_{i+1} - R_i) = q \cdot (R_i - R_{i-1})$$

Разделив на p получаем:

$$(R_{i+1} - R_i) = \frac{q}{p} \cdot (R_i - R_{i-1})$$

Обозначим $\frac{q}{p} = \lambda$, тогда окончательно:

$$(R_{i+1} - R_i) = \lambda \cdot (R_i - R_{i-1}) \qquad (1)$$

Перепишем соотношение (1) в другом виде.

Так как:

$$(R_i - R_{i-1}) = \lambda \cdot (R_{i-1} - R_{i-2})$$

Поэтому наше выражение (1) можно переписать так:

$$(R_{i+1} - R_i) = \lambda^2 \cdot (R_{i-1} - R_{i-2}) \tag{2}$$

Продолжив расписывать правую часть теперь уже (2), получим:

$$(R_{i-1} - R_{i-2}) = \lambda \cdot (R_{i-2} - R_{i-3})$$

Тогда:

$$(R_{i+1} - R_i) = \lambda^3 \cdot (R_{i-2} - R_{i-3})$$

и так далее

… ….

Т.е. уравнение (1) можем переписать так:

$$(R_{i+1} - R_i) = \lambda^k \cdot (R_{i-k+1} - R_{i-k}), \quad \text{где } 1 \le k \le i$$

Тогда при $k = i$ получим:

$$(R_{i+1} - R_i) = \lambda^i \cdot (R_1 - R_0) \tag{3}$$

Просуммируем обе части соотношения (3) по $\boldsymbol{i}$ от 1 до какого-то произвольного значения s, $(1 \le s \le M + N - 1)$, т.е:

$$\sum_{i=1}^{s}(R_{i+1} - R_i) = \sum_{i=1}^{s}\lambda^i \cdot (R_1 - R_0)$$

Или

$$\sum_{i=1}^{s}(R_{i+1} - R_i) = (R_1 - R_0) \cdot \sum_{i=1}^{s}\lambda^i \tag{4}$$

Рассмотрим левую часть равенства (4) и распишем ее:

$$\sum_{i=1}^{s}(R_{i+1} - R_i) = (R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + (R_4 - R_3) + (R_5 - R_4) + \cdots + (R_s - R_{s-1}) + (R_{s+1} - R_s) = R_{s+1} - R_1$$

Рассмотрим теперь правую часть равенства (4) и найдем сумму s членов геометрической прогрессии по формуле $S_s = \frac{b_1(1-q^s)}{1-q}$:

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda^i = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^s = \frac{\lambda(1-\lambda^s)}{1-\lambda}$$

Т.е. окончательно наше равенство (4) примет вид:

$$R_{s+1} - R_1 = (R_1 - R_0) \cdot \left(\frac{\lambda(1-\lambda^s)}{1-\lambda}\right) \tag{5}$$

Используем граничные условия: $R_0 = P(A|S_n = 0) = 1; \quad R_{M+N} = P(A|S_n = M+N) = 0$ для нахождения R_1.

Так как s может быть выбрано произвольным в пределах $1 \le s \le M+N-1$, положим его равным $M+N-1$, и подставим в R_{s+1} :

$$R_{s+1} = R_{M+N-1+1} = R_{M+N} = P(S_n = M+N) = 0$$

Используя оба граничных условия, перепишем равенство (5):

$$-R_1 = (R_1 - 1) \cdot \left(\frac{\lambda(1-\lambda^{M+N-1})}{1-\lambda}\right);$$

Откуда:

$$\left(\frac{\lambda(1-\lambda^{M+N-1})}{1-\lambda}\right) = R_1 \cdot \left\{\left(\frac{\lambda(1-\lambda^{M+N-1})}{1-\lambda}\right) + 1\right\};$$

$$\left(\frac{(\lambda-\lambda^{M+N})}{1-\lambda}\right) = R_1 \cdot \left\{\left(\frac{(\lambda-\lambda^{M+N})}{1-\lambda}\right) + 1\right\};$$

И окончательно:

$$R_1 = \frac{\left(\frac{(\lambda-\lambda^{M+N})}{1-\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{(\lambda-\lambda^{M+N})}{1-\lambda}\right) + 1\right\}} \tag{6}$$

Знаменатель (6) можем переписать:

$$\left\{\left(\frac{(\lambda-\lambda^{M+N})}{1-\lambda}\right) + 1\right\} = \frac{(\lambda-\lambda^{M+N}) + 1 - \lambda}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda^{M+N}}{1-\lambda}$$

Тогда окончательно:

$$R_1 = \frac{\left(\frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{1-\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{1-\lambda}\right)+1\right\}} = \frac{(\lambda - \lambda^{M+N})\cdot(1-\lambda)}{(1-\lambda)\cdot(1-\lambda^{M+N})} = \frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{(1-\lambda^{M+N})} \qquad (6.1)$$

В ранее записанном выражении (5):

$$R_{s+1} - R_1 = (R_1 - R_0)\cdot\left(\frac{\lambda(1-\lambda^s)}{1-\lambda}\right)$$

Положим $s = M - 1$, (так как нас интересует $P(A|S_n = M) = R_M$ вероятность разорения 1 игрока с капиталом M), получим:

$$R_M - R_1 = (R_1 - R_0)\cdot\left(\frac{\lambda(1-\lambda^{M-1})}{1-\lambda}\right) \qquad (7)$$

Подставляем в (7): $R_0 = P(A|S_n = 0) = 1$ и $R_1 = \frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{(1-\lambda^{M+N})}$

Получаем:

$$R_M - \frac{\lambda - \lambda^{M+N}}{1-\lambda^{M+N}} = \left(\frac{\lambda - \lambda^{M+N}}{1-\lambda^{M+N}} - 1\right)\cdot\left(\frac{\lambda(1-\lambda^{M-1})}{1-\lambda}\right) \qquad (8)$$

Проведем некоторые преобразования в (8):

$$\left(\frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{(1-\lambda^{M+N})} - 1\right) = \frac{\lambda - 1}{1-\lambda^{M+N}}$$

$$\left(\frac{\lambda(1-\lambda^{M-1})}{1-\lambda}\right) = \frac{\lambda - \lambda^M}{1-\lambda}$$

Теперь наше выражение (8) примет вид:

$$R_M - \frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{(1-\lambda^{M+N})} = -\left(\frac{\lambda - 1}{1-\lambda^{M+N}}\right)\cdot\left(\frac{\lambda - \lambda^M}{\lambda - 1}\right)$$

$$R_M - \frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{(1-\lambda^{M+N})} = -\left(\frac{\lambda - \lambda^M}{1-\lambda^{M+N}}\right);$$

$$R_M = \frac{(\lambda - \lambda^{M+N})}{(1-\lambda^{M+N})} - \left(\frac{\lambda - \lambda^M}{1-\lambda^{M+N}}\right) = \frac{\lambda - \lambda^{M+N} - \lambda + \lambda^M}{(1-\lambda^{M+N})} = \frac{\lambda^M - \lambda^{M+N}}{(1-\lambda^{M+N})}$$

То есть при $S_n = M$, в случае капитала 1 игрока равного M, вероятность его разорения равна:

$$P(A|S_n = M) = R_M = \frac{\lambda^M - \lambda^{M+N}}{(1 - \lambda^{M+N})}$$

Где $\lambda = \frac{q}{p}$, и $p + q = 1$.

Мы получили два решения для двух вариантов значений p и q:

1. При $p = q = \frac{1}{2}$:

$$P(A|S_n = M) = R_M = \frac{N}{M+N};$$

2. При $p \neq q$:

$$P(A|S_n = M) = R_M = \frac{\lambda^M - \lambda^{M+N}}{(1 - \lambda^{M+N})}$$

И наконец рассмотрим случай, когда один из игроков «бесконечно» богат. Опять рассмотрим 2 варианта: $p > q$ и $p < q$.

1. Пусть у нашего 1 игрока с начальным капиталом M, «бесконечно богатый» соперник, т.е. его капитал $N \to \infty$. И пусть $p > q$, тогда $\lambda = \frac{q}{p} < 1$, рассмотрим предел выражения $\frac{\lambda^M - \lambda^{M+N}}{(1-\lambda^{M+N})}$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\lambda^M - \lambda^{M+N}}{(1 - \lambda^{M+N})} = \lim_{N\to\infty} \frac{\lambda^M \cdot (1 - \lambda^N)}{(1 - \lambda^{M+N})} =$$

$$= \lambda^M \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{(1 - \lambda^N)}{(1 - \lambda^{M+N})} = \left[\text{т. к. } \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ , при } 0 < a < 1, \text{а у нас } \lambda < 1\right]$$

$$= \lambda^M \cdot 1 = \lambda^M$$

Заключение 1: То есть вероятность разорения 1 игрока против «бесконечно богатого» противника стремится к значению λ^M. А вероятность «обогащения» 1 игрока, с начальным капиталом M стремится к $(1 - \lambda^M)$. Т.е. если 1 игрок, достаточно опытен и искусен в игре $(p > q)$, то он имеет неплохие шансы на денежную удачу, даже если его противник «бесконечно богат».

Например, пусть $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, тогда $\lambda = \frac{q}{p} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = 0{,}67$. Положим начальный капитал $M = 2$, тогда вероятность «обогащения» равна $(1 - \lambda^M) = 1 - 0{,}67^2 \approx 0{,}5511$, при начальном капитале $M = 4$ вероятность становится равной $(1 - \lambda^M) = 1 - 0{,}67^4 \approx 0{,}7985$ и т.д.

2. Пусть у нашего 1 игрока с начальным капиталом M, бесконечно богатый соперник, т.е. его капитал $N \to \infty$. И пусть $p < q$, тогда $\lambda = \frac{q}{p} > 1$, рассмотрим предел выражения $\frac{\lambda^M - \lambda^{M+N}}{(1-\lambda^{M+N})}$:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda^M-\lambda^{M+N}}{(1-\lambda^{M+N})}=\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda^M\cdot(1-\lambda^N)}{(1-\lambda^{M+N})}=$$

$$=\lambda^M\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{(1-\lambda^N)}{(1-\lambda^{M+N})}=\left[\text{т.к. }\lim_{x\to\infty}a^x=\infty\text{ , при }a>1,\text{а у нас }\ \lambda>1\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{имеем неопределенность }\frac{\infty}{\infty},\text{можем использовать для нахождения предела например}\\ \text{правило Лопиталя, считая }N\text{ непрерывно изменяющимся аргументом}\end{array}\right]$$

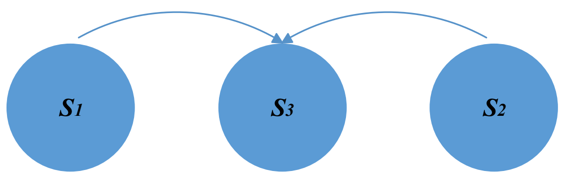
$$=\lambda^M\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda^N\cdot ln\lambda}{\lambda^{M+N}\cdot ln\lambda}=\lambda^M\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda^N\cdot ln\lambda}{\lambda^M\cdot\lambda^N\cdot\ ln\lambda}=\frac{\lambda^M}{\lambda^M}\cdot 1=1$$

Заключение 2: Таким образом в случае когда игрок не удачлив, не искусен и не опытен ($\boldsymbol{p<q}$), шансов в игре с бесконечно богатым противником у него нет. Вероятность разорения в таком случае стремится к единице.

1.2. Классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем

Определение 1. Состояние j называется ***достижимым*** из состояния i, обозначается $i\to j$, если $\exists\ n>0$ (где n – число шагов), что $p_{ij}^{(n)}>0$, где $p_{ij}^{(n)}$ – вероятность перехода из i в j за $n-$ шагов.

Пример 10:

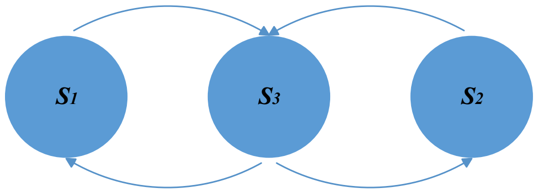


Состояние S_3 является достижимым для состояний S_1 и S_2.

Определение 2: Состояния i и j называются ***сообщающимися*** (обозначается $i\leftrightarrow j$), если j достижимо из i, и i достижимо из j, или иначе: состояния i и j называются ***сообщающимися, если*** $\exists$ n и m такие, что $p_{ij}^{(n)}>0$ и $p_{ji}^{(m)}>0$, т.е. можно попасть за конечное число шагов из состояния i в состояние j, и также за конечное число шагов вернуться обратно из j в i.

По определению отношение «$\leftrightarrow$» является симметричным ($i\leftrightarrow j\Rightarrow j\leftrightarrow i$), и нетрудно убедиться, что оно транзитивно ($i\leftrightarrow j, j\leftrightarrow k\Rightarrow i\leftrightarrow k$).

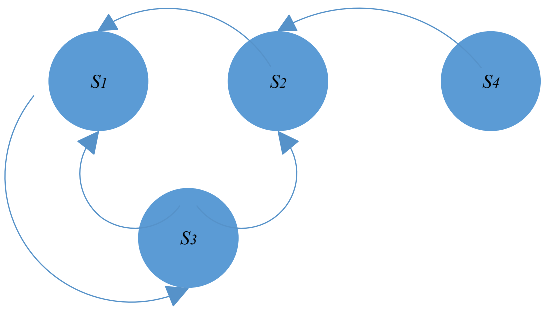
Пример 11:



Все состояния системы S_1, S_2, S_3 являются сообщающимися, S_1, S_2 сообщаются через S_3.

Определение 3: Состояние i называется ***существенным***, если оно сообщается с любым достижимым из него состоянием.

Пример 12:



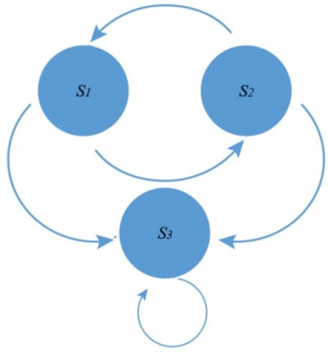
S_1, S_2, S_3 – достижимые для всех состояний системы, в том числе для S_4. Состояния S_1, S_2, S_3 являются ***существенными***, состояние S_4 ***несущественное***, т.к. оно не сообщается с достижимыми для него состояниями S_1, S_2, S_3.

Определение 4: Состояние $i \in X$ цепи Маркова называется ***несущественным***, если $\exists\, m, j$ такие что:

$$p_{ij}^{(m)} > 0, \ \forall n \ \ p_{ji}^{(n)} = 0,$$

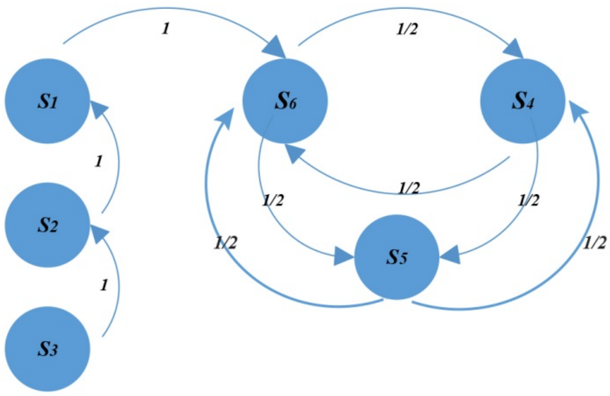
то есть существует такое состояние j, в которое можно попасть с положительной вероятностью, но из которого нельзя вернуться в i. Здесь $p_{ij}^{(m)}$ – вероятность перехода цепи Маркова из состояния i в состояние j за m шагов.

Пример 13:



Состояния S_1, S_2 несущественные, S_3 – существенное (поглощающее) состояние.

Если из множества X выделить все несущественные состояния, то оставшееся множество существенных состояний обладает тем свойством, что, попав в него, цепь Маркова никогда из него не выйдет.



Как видно из рисунка, $\{1,2,3\}$ – несущественные состояния, $\{4,5,6\}$ – существенные.

Рассмотрим множество существенных состояний.

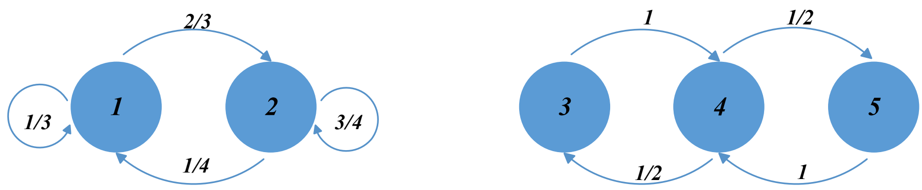
Множество существенных состояний можно разбить на конечное или счетное число непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots$ состоящих из сообщающихся состояний и характеризующихся тем, что переходы между различными множествами невозможны.

Определение 5. Множества $X_1, X_{2,\ldots}$ называются ***замкнутыми классами,*** или ***неразложимыми классами***, существенных сообщающихся состояний.
Цепь Маркова, состояния которой образуют один неразложимый класс, называется ***неразложимой***.

<u>Пример 14.</u> Рассмотрим цепь Маркова с множеством состояний $X = \{1,2,3,4,5\}$ и матрицей вероятностей переходов:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Граф вероятностей переходов имеет вид:



Очевидно, что у рассматриваемой цепи все состояния существенные и есть два неразложимых класса $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4,5\}$. Исследование свойств данной цепи Маркова сводится к исследованию свойств каждой из двух цепей с матрицами вероятностей переходов соответственно P_1 и P_2.

Проведенная классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем, позволяет привести ***<u>матрицу вероятностей переходов к каноническому виду</u>***.

Для этого выделяют неразложимые классы существенных состояний, а также отдельно несущественные состояния. Каноническая нумерация состояний осуществляется по следующему правилу: сначала произвольно нумеруются существенные состояния, затем также произвольно нумеруются несущественные состояния. Тогда матрица вероятностей переходов P принимает вид:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_k & 0 \\ B_1 & B_2 & \dots & B_k & R \end{bmatrix},$$

Где

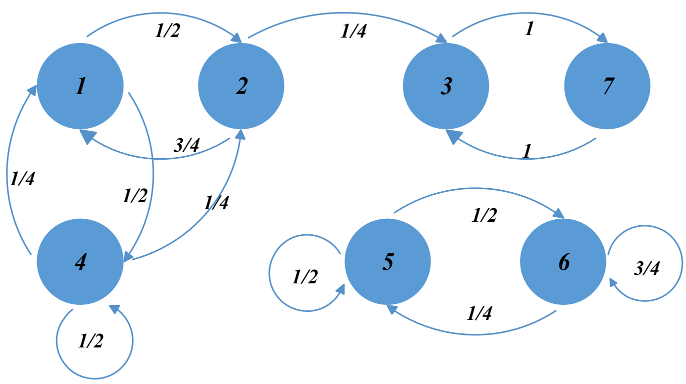
P_s – матрица вероятностей переходов s-го неразложимого класса, $s=\overline{1,k}$;

B_s – матрица вероятностей переходов из несущественных состояний в состояние s-го замкнутого класса; R – матрица вероятностей переходов по несущественным состояниям.

Пример 15. Классифицировать состояния цепи Маркова, заданной матрицей вероятностей переходов за один шаг.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

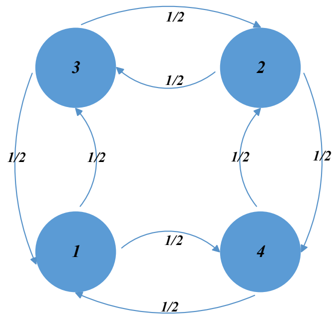
Решение: Граф переходов для данной цепи Маркова имеет вид:



Очевидно, что у рассматриваемой цепи состояния 1,4,2 – несущественные, 3,5,6,7 – существенные, кроме того, есть два неразложимых класса $X_1=\{3,7\}$, $X_2=\{5,6\}$. Следовательно, канонический вид матрицы вероятностей переходов следующий:

$$P=\begin{array}{c} \\ S5 \\ S6 \\ S3 \\ S7 \\ S1 \\ S2 \\ S4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} S5 & S6 & S3 & S7 & S1 & S2 & S4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пример 16. Рассмотрим неразложимый класс, изображенный на рисунке:



Заметим, что здесь возвращение в каждое состояние возможно лишь за четное число шагов, переход в соседнее состояние – за нечетное число шагов, а матрица вероятностей переходов имеет блочную структуру:

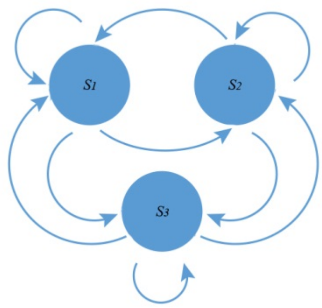
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \vdots & 1/2 & 1/2 \\ \dots & \dots & \therefore & \dots & \dots \\ 1/2 & 1/2 & \vdots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда видно, что класс $X_s = \{1,2,3,4\}$ разбивается на два подкласса $C_0 = \{1,2\}$ и $C_1 = \{3,4\}$, обладающих следующим свойством цикличности: за один шаг цепь Маркова из C_0 непременно переходит в C_1, а из C_1 – в C_0, но за два шага возвращается в исходный класс. Этот пример показывает возможность разбиения неразложимых классов на циклические подклассы.

Определение 6. Будем говорить, что состояние j замкнутого класса имеет период $d(j)$, если $d(j)$ есть ***наибольший общий делитель*** чисел n таких, что $p_{jj}(n) > 0$, где $p_{jj}^{(n)}$ – вероятность вернуться в состояние j за n шагов, выйдя из него же.

Очевидно, что для предыдущего примера 16 период каждого из состояний $d(j) = 2$, $\forall j$.

Пример 17.



Имеем 3 состояния цепи Маркова, которые образуют неразложимый класс. Обозначим M_i – множество числа шагов, для которых $p_{ii}^{(n)} > 0$. Наибольший общий делитель множества элементов M_i, называется периодом состояния i, т.е. НОД $\left(M_i\right) = d_i$. В нашем примере: $M_1 = \{1,2,3,4,5,...\}$, т.к. $n=1$: $1 \leftrightarrow 1$, $n=2$: $1 \to 3 \to 1$, $n=3$: $1 \to 3 \to 3 \to 1$, $n=4$: $1 \to 3 \to 2 \to 2 \to 1$ и так далее, таким образом НОД $\left(M_1\right) = d_1 = 1$. Т.к. наибольший общий делитель чисел 1,2,3,4,.. будет очевидно 1. Для остальных состояний рассуждая аналогично, получим: НОД $\left(M_2\right) = d_2 = 1$ и НОД $\left(M_3\right) = d_3 = 1$.

Определение 7. Если $d(j) = 1$, то состояние j называется ***апериодическим***.

Определение 8. Если $d(X) = 1$, то класс X называется ***эргодическим***.

Теорема 1 (солидарности). Все состояния одного неразложимого класса имеют одинаковый период d.
В примере 17, период состояний S_2 и S_3 можно было определить сразу, используя теорему солидарности.

Возвращаясь к циклическим подклассам, можно сделать вывод о том, что если в начальный момент времени система находится в состоянии подкласса C_0, то в момент времени $n = 1 + dr,\ r = 0,1,2,\cdots$, она будет находиться в подклассе C_1. Следовательно, с каждым из подклассов C_1, C_2 можно связать новую марковскую цепь с матрицей вероятностей переходов $\{p_{ij}(2),\ i,j \in C_p\},\ p = 1,2$, которая будет неразложимой и апериодической. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении предельных свойств вероятностей $p_{ij}(n)$ при $n \to \infty$, можно ограничиться только эргодическими классами.

1.3. Классификация состояний цепи Маркова по асимптотическим свойствам переходных вероятностей

Возвратные и невозвратные состояния

Для цепи Маркова $\xi(n)$ определим:

$$f_i(n) = P\left\{\xi(n) = i \middle| \xi(0) = i, \xi(1) \neq i, \ldots \xi(n-1) \neq i\right\}$$

Это вероятность первого возвращения в состояние i на n-м шаге.

Тогда $f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n)$ – вероятность того, что система, выйдя из состояния i, хотя бы один раз вернется в него.

<u>Определение 9.</u> Состояние $i \in X$ называется ***возвратным***, если $f_i = 1$, и ***невозвратным***, если $f_i < 1$.

<u>Можно сказать о возвратном состоянии так</u>: это состояние марковской цепи, посещаемое ей бесконечное число раз.

Все состояния конечного эргодического класса ***возвратны***. Невозвратные состояния возможны только при бесконечном числе состояний.

<u>Теорема 2 (солидарности)</u> Если имеется 2 сообщающихся состояния и одно из них возвратно, то и второе тоже возвратно.

<u>Другими словами:</u> Если состояние $i \in X$ возвратно и $i \leftrightarrow j$, то состояние $j \in X$ также возвратно.

Если состояние i возвратно, то есть $f_i = 1$, то набор вероятностей $f_i(n)$ образует распределение вероятностей времени возврата.

Поскольку отыскание функций $f_i(n)$ довольно сложно, то для определения возвратности состояний полезен следующий критерий.

Критерий возвратности состояний. Состояние $i \in X$ ***возвратно*** тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.

<u>Положительные и нулевые состояния</u>

Каждое возвратное состояние можно в свою очередь отнести к одному из двух типов в зависимости от величины среднего значении времени возвращения (от его конечности или бесконечности). Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть i – возвратное состояние, для него вероятности $f_i(n)$ – времени возврата, образуют распределение вероятностей значений n, где n – число шагов до первого возвращения в i состояние:

n_i	1	2	3	……
p_i	$f_i(1)$	$f_i(2)$	$f_i(3)$	……

Т.е. система может вернуться в состояние i за 1 шаг с вероятностью $f_i(1)$, за 2 шага с вероятностью $f_i(2)$ и т.д. Очевидно, что можно найти среднее число шагов для возвращения в i. Математическое ожидание будет равно:

$$1\cdot f_i(1)+2\cdot f_i(2)+3\cdot f_i(3)+....=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_i(n)$$

Обозначим $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_i(n)$ – это среднее значение числа шагов, за которые цепь Маркова возвращается в состояние i.

Величина μ_i^{-1} характеризует ***интенсивность*** возвращения в состояние i.

<u>Определение 10.</u> Если $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_i(n)<\infty$, то состояние i ***положительное***, если $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_i(n)=\infty$, то состояние ***нулевое***.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_i(n)<\infty$, то математическое ожидание числа шагов для возвращения в i конечно.

<u>Определение 10.1.</u> Возвратное состояние i называется ***положительным***, если $\mu_i^{-1}>0$, и ***нулевым***, если $\mu_i^{-1}=0$.

<u>Теорема 3 (солидарности):</u> Если имеется два сообщающихся состояния и одно из них положительное, то и второе тоже положительное.

Пример 18. Рассмотрим одномерное случайное блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой. За каждый переход частица перемещается на единицу вправо с вероятностью p и на единицу влево с вероятностью q, причем $p+q=1$.

Решение: Используя формулу Бернулли, получаем:

$$p_{ii}(2n+1)=0\,,\ p_{ii}(2n)=C_{2n}^{n}p^{n}q^{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^{n}\,,\ n=0{,}1{,}2\ldots$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга $n!\approx\sqrt{2\pi n}n^{n+1/2}e^{-n}$ получаем:

$$p_{ii}(2n)\approx\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(pq)^{n}=\frac{(4pq)^{n}}{\sqrt{\pi n}}\,.$$

Так как $pq=p(1-p)\le\frac{1}{4}$, причем равенство имеет место только тогда, когда $p=q=\frac{1}{2}$, то $p_{ii}(2n)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}(2n)$ расходится тогда и только тогда, когда $p=q=\frac{1}{2}$, и в данном случае все состояния являются ***возвратными***.

При $p\ne q$, когда $4pq<1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{ii}(2n)<\infty$, все состояния являются ***невозвратными***. Очевидно, что если $p>q$, то частица, отправляясь из состояния i, будет смещаться вправо к $+\infty$, а если $p<q$, то влево к $-\infty$.

1.4. Эргодические теоремы для цепей Маркова

Теорема 4 (основная эргодическая теорема). Рассмотрим неразложимую, непериодическую, возвратную цепь Маркова со счётным числом состояний, тогда имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty}p_{ii}(n)=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{i}(n)}=\begin{cases}0, & \text{если i нулевое,}\\ >0, & \text{если i положительное.}\end{cases}$$

При этих же условиях $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ji}(n)=\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}(n)$.

<u>Теорема 5.</u> Для неразложимой, непериодической, возвратной и положительной цепи Маркова со счётным числом состояний существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}(n)=\pi_i$, где $\pi_i>0$ и однозначно определяются условиями:

1. $\pi_i=\sum\limits_j \pi_j p_{ji}$ – уравнение Колмогорова для финальных вероятностей,
2. $\sum\limits_i \pi_i=1$ –условием нормировки для финальных вероятностей.

Распределение вероятностей π_i называется ***финальным*** или эргодическим, а цепь Маркова называется ***эргодической***.

<u>Теорема 6 (альтернативы).</u> Пусть для марковской цепи со счётным числом состояний существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}(n)=\pi_i$, при этом выполняется равенство $\pi_i=\sum\limits_j \pi_j p_{ji}$, тогда возможна одна из двух альтернатив: все $\pi_i=0$ или $\sum\limits_i \pi_i=1$.

Если $\sum\limits_i \pi_i=1$, то набор вероятностей π_i образует единственное стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова.
Если $\pi_i=0$, то не существует стационарного распределения для рассматриваемой цепи Маркова.

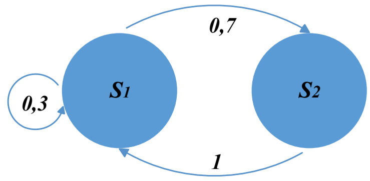
<u>Теорема 7 (эргодическая теорема для цепей Маркова с конечным числом состояний).</u> Для неразложимой непериодической цепи Маркова с конечным числом состояний существуют пределы:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n)=\pi_i,$$

не зависящие от j и удовлетворяющие условию нормировки.

Таким образом, если цепь Маркова ***неразложимая, непериодическая, возвратная и положительная,*** то для неё существует стационарное (финальное) распределение вероятностей.
Если для однородной цепи Маркова существуют финальные вероятности, то говорят, что для этой цепи существует ***стационарный режим функционирования.***

Пример 19. Найти финальные вероятности для цепи Маркова заданной графом:



Решение: Данная цепь Маркова является неразложимой и апериодической, так как $d(1)=d(2)=1$. Кроме того, она имеет конечное число состояний, поэтому является эргодической.

Матрица вероятностей переходов: $P=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Составим систему уравнений для нахождения финальных вероятностей:

$$\begin{cases} 0,3\pi_1+\pi_2=\pi_1 \\ 0,7\pi_1=\pi_2 \\ \pi_1+\pi_2=1 \end{cases}$$

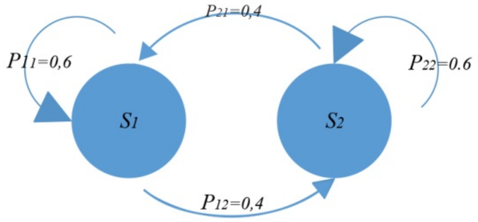
откуда находим $\pi_1=10/17$, $\pi_2=7/17$.

Пример 20. Автомашина может находиться в одном из двух состояний: i_1 – машина работает хорошо, i_2 – машина требует ремонта, которые образуют однородную цепь Маркова. На следующий день работы она меняет свое состояние в соответствие с матрицей перехода:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Определить финальные вероятности состояний автомашины.

Решение: Решим задачу двумя способами. Граф состояний выглядит так:



1-й способ рассуждений при получении решения

Распределение вероятностей состояний для однородной цепи Маркова находится так:

$$\{p_1(k), p_2(k)\} = \Theta \cdot P^k,$$

где Θ – вектор начального распределения, P – матрица вероятностей перехода за 1 шаг.

Найдем распределение вероятностей состояний автомашины после первого шага, т.е. при $k=1$, оно находится по формуле:

$$\{p_1(1), p_2(1)\} = \Theta \cdot P = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

При $k=2$ распределение вероятностей состояний автомашины находится так:

$$\{p_1(2), p_2(2)\} = \Theta \cdot P^2 = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,48 & 0,52 \end{pmatrix}$$

При $k=3$ распределение вероятностей состояний автомашины:

$$\{p_1(3), p_2(3)\} = \Theta \cdot P^3 = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,504 & 0,496 \\ 0,496 & 0,504 \end{pmatrix}$$

Продолжая дальше, для получения распределения вероятностей состояний системы на разных шагах k, мы будем всякий раз умножать вектор начального распределения Θ на какую то матрицу. Данная матрица для каждого шага, начиная от $k=1$ до $k=25$ будет разной. Это можно легко проверить. При $k=25$ мы получим следующее:

$$\{p_1(25), p_2(25)\} = \Theta \cdot P^{25} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^{25} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

То есть матрица, на которую мы умножаем вектор начальных состояний Θ, на 25 шаге приобрела такой вид:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

И эта матрица в дальнейшем при любых k, изменяться не будет ***совсем***, для разных k мы всякий раз будем получать одинаковый результат:

При $k=26$:

$$\{p_1(26), p_2(26)\} = \Theta \cdot P^{26} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^{25} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

При $k = 27$:

$$\{p_1(27), p_2(27)\} = \Theta \cdot P^{27} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^{26} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Если положить вектор $\Theta = (1,0)$, т.е. допустим система в начальный момент времени при $k = 0$ находилась в состоянии i_1 – была исправна. Тогда для разных значений k, получим такие распределения:

$$k = 1: \{p_1(1), p_2(1)\} = \Theta \cdot P = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,6; 0,4)$$

$$k = 2: \{p_1(2), p_2(2)\} = \Theta \cdot P^2 = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,48 & 0,52 \end{pmatrix} = (0,52; 0,48)$$

$$k = 3: \{p_1(3), p_2(3)\} = \Theta \cdot P^3 = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0,504 & 0,496 \\ 0,496 & 0,504 \end{pmatrix} = (0,504; 0,496)$$

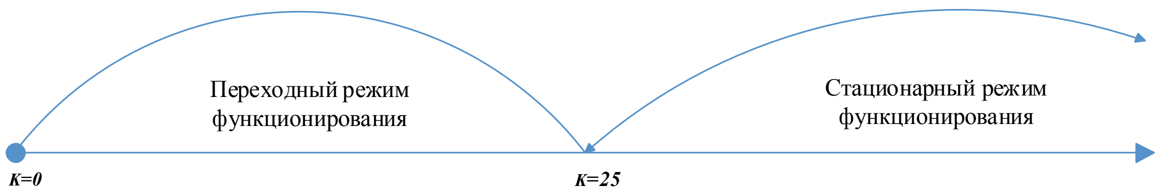
…………………………………………………………………………..

$$k = 25: \{p_1(25), p_2(25)\} = \Theta \cdot P^{25} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,5; 0,5)$$

$$k = 26: \{p_1(26), p_2(26)\} = \Theta \cdot P^{26} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,5; 0,5)$$

$$k = 27: \{p_1(27), p_2(27)\} = \Theta \cdot P^{27} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,5; 0,5)$$

Таким образом видно, что начиная с момента времени $k = 25$, распределение вероятностей состояний системы становится постоянным и не зависящим от номера k. То есть в системе начиная с 25 шага (*по истечении достаточно большого времени ее функционирования*) устанавливается стационарный режим. Время функционирования такой системы можно разбить условно на 2 интервала:



2-й способ рассуждений при получении решения

Вероятности состояний системы которые мы получили в предыдущем способе, называются ***финальными*** (или предельными) вероятностями. На самом деле, чтобы получить финальные вероятности нам пришлось проделать довольно большую работу. Ее можно было избежать. В том случае когда переходные вероятности по строкам стали одинаковые, дальнейших изменений при повышении степени k матрицы переходов P^k не будет. Почему? На 25 шаге матрица P^{25} приобрела такой вид:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

На следующем шаге при $k = 26$ нам нужно проделать следующее:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^{25} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0,5 & 0,6\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0,5 \\ 0,4\cdot 0,5 + 0,6\cdot 0,5 & 0,4\cdot 0,5 + 0,6\cdot 0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5\cdot(0,6+0,4) & 0,5\cdot(0,6+0,4) \\ 0,5\cdot(0,4+0,6) & 0,5\cdot(0,4+0,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Из подробно расписанного видно, что при получении матрицы P^{26} мы элементы любой строки (***сумма которых равна единице***!!!) умножаем на одно и то же число, поэтому складывая произведения, мы опять получаем то же самое число, на которое умножаем, т.е. $0,5$.

В виду сказанного, можно попробовать найти P^{∞}, поставив задачу так: каковы должны быть вероятности p_1 и p_2 нахождения системы в момент времени k в том или ином состоянии, чтобы вероятности нахождения в момент $k+1$ были теми же самыми. Вероятности состояний в момент времени $k+1$ можно получить, умножая матрицу строку $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ на матрицу P. Т.е. мы должны найти такие p_1, p_2, чтобы имело место равенство:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

Для этого необходимо, чтобы p_1, p_2 удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} 0,6\cdot p_1 + 0,4\cdot p_2 = p_1 \\ 0,4\cdot p_1 + 0,6\cdot p_2 = p_2 \end{cases}$$

Так как сумма всех трех уравнений дает тождество $p_1 + p_2 = p_1 + p_2$, мы отбрасываем одно из уравнений как выводящееся из других и добавляем условие нормировки: $p_1 + p_2 = 1$. И окончательно наша система имеет вид:

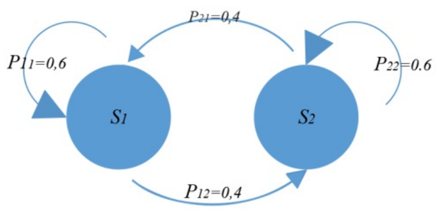
$$\begin{cases} 0,6 \cdot p_1 + 0,4 \cdot p_2 = p_1 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решением этой системы является следующий вектор: $(0,5;0,5)$. Обычно финальные вероятности обозначаются как π_i, тогда у нас вектор финальных вероятностей $(\pi_1 \ \pi_2)$. В следующем способе решения используем именно это обозначение.

<u>3-й способ рассуждений при получении решения</u>

В данном способе используем теоретический материал, данный в учебнике «Теория вероятностей и случайных процессов» А.А. Назарова и А.Ф. Терпугова.

Ранее был получен граф состояний:



Цепь Маркова, состояния которой образуют один неразложимый класс, называется ***неразложимой***. Если $d(j)=1$, то состояние j называется ***апериодическим*** (непериодическим). По теореме солидарности: все состояния одного неразложимого класса имеют одинаковый период d.

Из графа состояний видно, что рассматриваемая нами цепь Маркова является неразложимой и апериодической (так как $d(S_1)=d(S_2)=1$).

Кроме того, она имеет конечное число состояний, поэтому является эргодической. И согласно теореме 7 (записанной выше):

<u>Теорема 8 (эргодическая теорема для цепей Маркова с конечным числом состояний).</u> Для неразложимой непериодической цепи Маркова с конечным числом состояний существуют пределы:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n) = \pi_i,$$

не зависящие от j и удовлетворяющие условию нормировки.

Таким образом, для нашей цепь Маркова точно существует стационарное (финальное) распределение вероятностей. И следовательно для этой цепи существует ***стационарный режим функционирования.***

Матрица вероятностей переходов: $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

Составим систему уравнений для нахождения финальных вероятностей, используя: $\pi_i = \sum_j \pi_j p_{ji}$ – уравнение Колмогорова для финальных вероятностей и $\sum_i \pi_i = 1$ – условие нормировки для финальных вероятностей:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}, \ \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Условием нормировки можем заменить любое из входящих в систему уравнений, поэтому:

$$\begin{cases} 0,6 \cdot \pi_1 + 0,4 \cdot \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Нехитрые вычисления приводят нас к результату: $\pi_1 = 0,5;\ \pi_2 = 0,5$.

Финальные вероятности показывают сколько в среднем при наступлении стационарного режима система будет находится в том или ином состоянии. Поэтому у нас в стационарном режиме система 50% времени будет находится в состоянии i_1 – машина работает хорошо, и 50% в состоянии i_2 – машина требует ремонта.

1.5. Вероятностно-временные характеристики цепи Маркова

Распределение вероятностей состояний цепи Маркова является наиболее важной её характеристикой. Но также представляют интерес и некоторые другие её характеристики.

Вероятность перехода из несущественного состояния в замкнутый класс

Обозначим $\Pi_i(S_k)$ вероятность перехода цепи Маркова из несущественного состояния i в замкнутый класс S_k, p_{ij} – вероятности перехода из i-го состояния в j-е.

Тогда $\Pi_i(S_k)$ является решением неоднородной системой линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\Pi_i(S_k) = \sum_{j\in T} p_{ij}\Pi_j(S_k) + \sum_{j\in S_K} p_{ij} ,$$

где T – множество несущественных состояний.

Среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс

Пусть для цепи Маркова единственный замкнутый класс S.

Обозначим $m_i(S)$ – ***среднее значение времени перехода цепи Маркова из несущественного состояния*** i ***в замкнутый класс*** S.

Учитывая, что из состояния i можно сразу попасть в класс S_k, в этом случае время перехода равно единице, если же этот переход выполняется в несущественное состояние j, тогда суммарное время перехода составляет $1+m_j(S)$, где первое слагаемое, равное единице, определяет первый шаг, а второе: $m_j(S)$ – среднее значение времени перехода из состояния j в класс S.

В силу формулы полной вероятности для условных математических ожиданий, можно записать систему линейных неоднородных уравнений для определения $m_i(S)$:

$$m_i(S) = \sum_{j\in S} p_{ij} \times 1 + \sum_{j\in T} \left(p_{ij}(1+m_j(S)\right)$$

Если цепь Маркова содержит k замкнутых классов, то для нахождения ***среднего времени перехода из несущественного состояния в k-й замкнутый класс*** S_k, необходимо учитывать вероятность перехода в этот замкнутый класс, то есть находить условное время перехода: $m_i(S_k/H_k)$, где H_k – событие, состоящее в том, что из i-го состояния мы перешли в k-й замкнутый класс. Это время перехода определяется равенством:

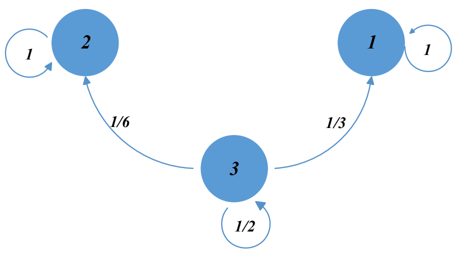
$$m_i(S_k / H_k) = \frac{m_i(S_k, H_k)}{\Pi_i(S_k)}$$

где $m_i(S_k, H_k)$ определяется аналогично $m_i(S)$ для цепи Маркова с единственным замкнутым классом состояний.

Пример 21. Найдите вероятность и условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс для цепи Маркова, заданных матрицей переходов за один шаг:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Решение: Граф состояний для заданной цепи Маркова имеет вид:



Очевидно, что у рассматриваемой цепи состояние 3 – несущественное и есть два неразложимых класса $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$.

Следовательно, рассмотрим две гипотезы:

H_1 – произошел переход в замкнутый S_1;

H_2 – произошел переход в замкнутый S_1.

Тогда условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутые классы S_1 и S_1 определяется по формулам:

$$m_3(S_1 / H_1) = \frac{m_3(S_1, H_1)}{\Pi_3(H_1)},$$

$$m_3(S_2 / H_2) = \frac{m_3(S_2, H_2)}{\Pi_3(H_2)},$$

где $\Pi_3(H_i)$ – вероятность события H_i, то есть вероятность перехода из несущественного состояния 3 в i-й замкнутый класс.

Вероятности перехода из несущественного состояния 3 в замкнутые классы S_1 и S_2 определяем по формулам:

$$\Pi_3(S_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Pi_3(S_1),$$

$$\Pi_3(S_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\Pi_3(S_2).$$

Откуда получаем: $\Pi_3(S_1) = \frac{2}{3}$, $\Pi_3(S_2) = \frac{1}{3}$.

Для $m_3(S_1, H_1)$ и $m_3(S_2, H_2)$ имеем систему уравнений:

$$m_3(S_1, H_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + m_3(S_1, H_1)\right), \Rightarrow \qquad m_3(S_1, H_1) = \frac{5}{3};$$

$$m_3(S_2, H_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(1 + m_3(S_2, H_2)\right), \qquad \Rightarrow \qquad m_3(S_2, H_2) = \frac{4}{3}.$$

Тогда условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутые классы S_1 и S_2 составляет:

$$m_3(S_1 / H_1) = \frac{5/3}{2/3} = \frac{5}{2},$$

$$m_3(S_2 / H_2) = \frac{4/3}{1/3} = 4.$$

Среднее время перехода из состояния в состояние внутри замкнутого класса

Рассмотрим некоторый замкнутый класс S.

Обозначим m_{ij} – среднее значение времени перехода из состояния i в состояние j внутри замкнутого класса для $\forall \ i, j \in S$.

Тогда можно получить систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, определяющих значения m_{ij}:

$$m_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(1 + m_{ki}) = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{ki}$$

Из полученной системы можно найти следующие соотношения:

$$m_{jj} = 1/\pi_j \quad \pi_j = 1/m_{jj}$$

Из которых следует, что среднее время возвращения в возвратное состояние j обратно пропорционально финальной вероятности этого состояния, поэтому для положительных состояний оно конечно, а для нулевых – бесконечно.

Пример 22. Студент может перейти на следующий курс с вероятностью p, с вероятностью q может остаться на повторное обучение, а с вероятностью r может быть отчислен ($p+q+r=1$). Восстановление невозможно, но с вероятностью p можно вновь поступить на первый курс. Записать матрицу вероятностей переходов за один шаг и найти среднее время перехода в эргодическое множество.

Решение: Будем считать, что образование занимает 5 лет, тогда состояния $S_1, S_2, S_3,\ S_4, S_5$ – соответствуют обучению с первого по пятый курс, S_0 – абитуриент, S_6 – специалист. По определению $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ – несущественные состояния, S_6 – эргодическое множество из одного состояния.

Матрица переходов за один шаг в каноническом виде может быть записана:

$$P = \begin{array}{c} \\ S_6 \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S_6 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & q & p \\ p & r & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix} \end{array}$$

Через m_i обозначим среднее время перехода из несущественного состояния S_i, $i=\overline{0,5}$ в эргодическое состояние S_6. Тогда можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} m_0 = p_{06} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{0j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{0j}m_j = 1+(1-p)m_0 + pm_1, \\ m_1 = p_{16} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{1j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{1j}m_j = 1+rm_0 + qm_1 + pm_2, \\ m_2 = p_{26} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{2j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{2j}m_j = 1+rm_0 + qm_2 + pm_3, \\ m_3 = p_{36} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{3j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{3j}m_j = 1+rm_0 + qm_3 + pm_4, \\ m_4 = p_{46} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{4j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{4j}m_j = 1+rm_0 + qm_4 + pm_5, \\ m_5 = p_{56} + \sum\limits_{j\neq 6} p_{5j}(1+m_j) = 1 + \sum\limits_{j\neq 6} p_{5j}m_j = 1+rm_0 + qm_5, \end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & q-1 & p & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & q-1 & p & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & q-1 & p & p \\ r & 0 & 0 & 0 & q-1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & q-1 \end{vmatrix} = p^6,$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} -1 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & q-1 & p & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & q-1 & p & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q-1 & p & p \\ -1 & 0 & 0 & 0 & q-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p + (q-1)^2 p^3 - (q-1)p^4 + p^5$$

$$\Delta_1 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p + (q-1)^2 p^3 - (q-1)p^4$$

$$\Delta_2 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p + (q-1)^2 p^3$$

$$\Delta_3 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p - (q-1)^3 p$$

$$\Delta_4 = -(q-1)^5 + (q-1)^4 p$$

$$\Delta_5 = -(q-1)^5$$

Следовательно, $m_0 = \dfrac{(1-q)^5}{p^6} + \dfrac{(1-q)^4}{p^5} + \dfrac{(1-q)^3}{p^4} + \dfrac{(1-q)^2}{p^3} + \dfrac{(1-q)}{p^2} + \dfrac{1}{p}$.

Аналогично находим для остальных состояний, и записываем ответ в общем виде.

Ответ: $m_i = \sum\limits_{s=i}^{5} \dfrac{(1-q)^s}{p^{s+1}}$, $i = \overline{0{,}5}$.

Задачи для самостоятельного решения по теме «Цепи Маркова с дискретным временем»

1. На окружности отмечено 5 точек: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Будем рассматривать окружность как некую систему, в которой протекает случайный процесс перехода из точки в точку. Возможные переходы в системе могут быть такие:

а) Из A_i в одну из соседних $A_j, i \neq j$ с вероятностью 0,5;

b) Из A_i в A_i с вероятностью 0,5.

Записать матрицу переходов за один шаг. Найти матрицу переходов за 2,3 шага.

2. Магазин бытовой техники в начале каждой недели размещает заказы на два телевизора. Еженедельный спрос на телевизоры задается следующим распределением вероятностей:

i	0	1	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Построить граф состояний дискретной цепи Маркова, моделирующей процесс функционирования магазина и записать матрицу вероятностей перехода за 2 шага. Состояния цепи Маркова определяются так: S_0 – для продажи имеется 0 телевизоров; S_1 – для продажи имеется 1 телевизор; S_2 – для продажи имеется 2 телевизора.

3. В учениях участвуют два корабля, которые одновременно производят выстрелы друг в друга через равные промежутки времени. При каждом выстреле корабль ***А*** поражает корабль ***Б*** с вероятностью 1/2, а корабль ***Б*** поражает корабль ***А*** с вероятностью 3/8. Предполагается, что при любом попадании корабль выходит из строя. Рассматриваются результаты серии выстрелов. Найти матрицу вероятностей перехода, если состояниями цепи являются комбинации кораблей, оставшихся в строю: ***E1*** – оба корабля в строю, ***E2*** – в строю только корабль ***А***, ***E3*** – в строю только корабль ***Б***, ***E4*** – оба корабля поражены.

4. Рассматривается некоторое автопредприятие с тремя водителями. Состояние их здоровья контролируется каждые сутки, если врач признает водителя здоровым, то он выходит в рейс, в противном случае отстраняется от работы. Вероятность заболеть здоровому водителю в течение суток равна $\frac{1}{4}$, а вероятность выздороветь заболевшему $\frac{1}{3}$. Считать процессы заболевания водителей и их выздоровления независимыми. Построить граф состояний случайного процесса и записать матрицу вероятностей перехода, если состояния случайного процесса определяются так: S_0 – все водители здоровы; S_1 – один не здоров, два здоровы; S_2 – два водителя не здоровы, один здоров; S_3 – все три водителя не здоровы.

5. В сказочной стране ***Оз*** никогда не бывает двух солнечных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра будет плохая погода – снег или дождь с равной вероятностью. Если сегодня снег (дождь), то завтра погода изменится с вероятностью 0,5. Если она изменится, то в половине

случаев будет ясно. Записать матрицу переходов за один шаг. Найти вероятность того, что послезавтра будет ясно, если сегодня ясно (снег).

6. В процессе эксплуатации ***ЭВМ*** может рассматриваться как физическая система, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: x_1 – ***ЭВМ*** полностью исправна; x_2 – ***ЭВМ*** имеет незначительные неисправности в ОП, но может решать задачи; x_3 – ***ЭВМ*** имеет существенные неисправности, может решать ограниченный класс задач; x_4 – ***ЭВМ*** полностью вышла из строя. В начальный момент ***ЭВМ*** полностью исправна. Проверка ***ЭВМ*** производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Процесс, протекающий в системе, можно рассматривать как цепь Маркова. Матрица перехода за один шаг имеет вид:

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Определить вероятности состояний ***ЭВМ*** после трех проверок.

7. Рассмотрим производственную линию, выпускающую продукцию. Каждая единица продукции с вероятностью $\frac{2}{3}$ годная и с вероятностью $\frac{1}{3}$ бракованная. Все изделия проходят проверку качества. Процедура проверки состоит из 2 этапов. На первом этапе проверяется каждое изделие, пока не появится 10 годных подряд. Как только это случилось, стартует второй этап контроля, который заключается в следующем: из каждых 8 последующих изделий выбирается случайным образом одно и проверяется. В случае если оно оказалось качественным, то второй этап снова повторяется, если же нет, то процедура контроля возвращается на 1 этап. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы. ***<u>Указание</u>***: Состояния случайного процесса определить так: S_1 – процедура контроля качества на 1 этапе; S_2 - процедура контроля качества на 2 этапе.

8. Имеются 2 набора по три монеты. В первом наборе все монеты имеют вероятность выпадения герба p_1, во втором p_2. Бросается один набор. Если выпало хоты бы 2 герба, то в следующий раз бросается тот же набор, в противном случае-другой. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

9. Подбрасывается правильная монета 2 раза. Рассматриваются элементарные исходы: $(\mathit{Г},\mathit{Г}),(\mathit{Г},P),(P,\mathit{Г}),(P,P)$. Если в $(n,n+1)$-х испытаниях имел место, например исход $(\mathit{Г},P)$, то в $(n+1,n+2)$-х испытаниях возможны лишь исходы (P,P) или $(P,\mathit{Г})$, аналогично в других случаях. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

10. Семь школьников играют в мяч: первый бросает его второму, второй – наугад третьему или седьмому, третий – наугад первому, второму или седьмому, четвертый – первому; пятый – наугад одному из первых четырех, шестой – наугад второму или седьмому, наконец, седьмой – наугад одному из игроков с четным номером. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и найти финальные вероятности состояний системы.

11. Рассматривается система, в которой запасается товар с целью удовлетворения случайного спроса, имеющего распределение, представленное в таблице:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,15	0,25	0,25	0,20	0,10

В исходном состоянии запас равен 5 и расходуется на протяжении шага в соответствии со спросом. К началу каждого шага запас пополняется до исходного уровня. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

12. Клиенты поступают в систему обслуживания в моменты времени 0,1,2,… и обслуживаются одним мастером по очереди. За один шаг обслуживается один клиент. Если в системе находится ***i*** клиентов, то на очередном шаге в систему поступит ***j*** новых клиентов с условной вероятностью, заданной в таблице:

i \ ***j***	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
0	*0*	*0,2*	*0,2*	*0,3*	*0,2*	*0,1*
1	*0*	*0,3*	*0,4*	*0,2*	*0,1*	
2	*0,1*	*0,4*	*0,3*	*0,2*		
3	*0,2*	*0,5*	*0,3*			
4	*0,5*	*0,5*				
5	*1*					

Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

13. Некий коммивояжер (***К***) совершает деловые поездки из города 0 по следующим маршрутам. Прежде всего, из города 0 он посещает либо город 1, либо город 2; из города 1 путь К лежит либо в город 3, либо в город 4; из города 2 ***К*** едет либо в город 4, либо в город 5, из городов 3,4,5 ***К*** возвращается в город 0. При этом поездки $0 \Rightarrow 2, 1 \Rightarrow 3, 2 \Rightarrow 4$, осуществляются в том случае, если при бросании двух, четырех или шести монет выпадают два, три или четыре герба соответственно. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

14. Рассмотрим 6 вузов: политехнический, металлургический, педагогический, юридический, строительный и экономический. Дети выпускников педагогического и юридического с вероятностью 1 поступают в те же учебные заведения. 60% детей металлургического идут по стопам своих родителей, остальные предпочитают политехнический. Только 19% детей выпускников политехнического стремятся получить высшее техническое образование, остальные считают более перспективными, причем в равной мере, юридический, строительный и экономический институты. 50% детей как строителей, так и экономистов сохраняют преемственность профессий, остальные поступают в юридический 35% и педагогический 15%. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

15. У профессора имеются 5 излюбленных вопросов, один из которых он задает на каждом экзамене. Если в прошлый раз он задал вопрос 1 или 2, то в этот раз он не задает эти вопросы, а бросает 2 игральные кости: если выпадет хотя бы одна единица, то он задает вопрос 3, если же выпадут четные цифры, то вопрос 4. Если в прошлый раз профессор задал один из вопросов 3,4,5, то в этот раз он снова бросает две игральные кости и задает вопрос 1, если сумма выпавших цифр – четная.
Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

16. ***А*** и ***В*** играют в шахматы несколько партий. ***А*** выигрывает одну партию с вероятностью p и проигрывает с вероятностью $q = 1 - p$. Игра продолжается до тех пор, пока один из иг-

роков не выиграет две партии. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

17. На поверхности пруда плавают шесть листьев с номерами 1, 2, …, 6. На *i*-ом листе сидит лягушка и раз в минуту перепрыгивает на другой лист. С внутренних листов $(2,3,4,5)$ она перепрыгивает на соседние $i-1$ или $i+1$ с равными вероятностями. С внешних $(i=1,6)$ она перепрыгивает на один из листов противоположной четности также с равными вероятностями. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

18. Некий человек пьет на завтрак один из следующих напитков: кефир, молоко, чай, какао, кофе, сок. Он не пьет один и тот же напиток два дня подряд, более того, на следующий день после молока он не пьет ни кефир, ни сок, после кофе для него запретны чай, кефир и молоко, после сока – кефир. Один из возможных напитков он выбирает наугад. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

19. N шаров один за другим размещаются по N урнам. Пусть i – число занятых урн после размещения очередного шара, $i=0,1,....,N$. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

20. В урне содержится два неокрашенных шара. В последовательные моменты времени $t_0<t_1<t_2<...$ извлекается один шар, окрашивается в белый или черный цвет и возвращается в урну. Если шар не был окрашен, то выбор цвета случаен, если же был окрашен, то цвет меняется. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы..

Подсказка:

• Принять за состояние моделирующей цепи тройку чисел (x,y,z), где x,y,z - числа неокрашенных, белых и черных шаров соответственно, $x+y+z=2$

• Из состояний $(0,0,2)$ и $(0,2,0)$ возможен переход только в состояние $(0,1,1)$ с вероятностью 1;

• Из состояния $(0,1,1)$ возможны переходы только в состояния $(0,0,2)$ и $(0,2,0)$ с вероятностями $1/2$;

• Из состояния $(1,1,0)$ возможны переходы в состояния $(0,2,0)$ и $(0,1,1)$ с вероятностями $1/4$ и в состояние $(1,0,1)$ с вероятностью $1/2$ и т.д.

21. В урне содержится M белых и N черных шаров. Из нее наугад извлекаются n шаров и отбрасываются. Эксперимент продолжается снова и снова, пока в урне не останется менее n шаров. Рассмотреть два варианта: $M=5$, $N=3$, $n=2$; $M=8$, $N=5$, $n=3$. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

Подсказка:

• В качестве состояния моделирующей цепи принять состав шаров в урне после очередного извлечения;

• Для определения вероятностей перехода из состояния в состояние воспользоваться формулой гипергеометрического распределения, согласно которой вероятность извлечь m белых и $(n-m)$ черных шаров из урны, содержащей S шаров, в том числе T белых, равна $\dfrac{C_T^m \cdot C_{S-T}^{n-m}}{C_S^n}$.

Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

22. В двух урнах 1 и 2 размещены N шаров. На каждом шаге рассматриваемого процесса наугад выбирается один шар. Этот шар, помещается в урну 1 с вероятностью p или в урну 2 с вероятностью $q=1-p$. Построить граф состояний. Найти матрицу вероятностей переходов и финальные вероятности состояний системы.

23. Две автомашины ***A*** и ***B*** сдаются в аренду по одной и той же цене. Каждая из них может находиться в одном из двух состояний: i_1 – машина работает хорошо, i_2 – машина требует ремонта, которые образуют цепь Маркова. Матрицы вероятностей переходов между состояниями за сутки для этих машин равны соответственно:

$$P_A=\begin{bmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,8 & 0,2\end{bmatrix}\quad P_B=\begin{bmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,7 & 0,3\end{bmatrix}.$$

Определить финальные вероятности состояний для обеих автомашин. Какую автомашину стоит арендовать?

24. Автомашина может находиться в двух состояниях: i_1 – работает хорошо, i_2 – требует ремонта. На следующий день работы она меняет свое состояние в соответствии с матрицей вероятностей переходов

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Пусть:

– если машина работает нормально, мы имеем прибыль \$40;

– когда она начинает работу в нормальном состоянии, а затем требует ремонта (либо наоборот), прибыль равна \$20;

– если машина требует ремонта, то потери составляют \$20.

Найдите ожидаемую прибыль за два перехода между состояниями (за два шага).

Указание. Положим:

$V = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix}$ – матрица доходов за один шаг,

тогда $Q = [q_1, q_2] = P \cdot V$ – вектор прибыли за один шаг.

25. В городе ***N*** каждый житель имеет одну из трех профессий ***A***, ***B***, ***C***. Дети отцов, имеющих профессии ***A***, ***B***, ***C*** сохраняют профессии отцов с вероятностями 3/5, 2/3, 1/4 соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти:

1) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию ***A*** имело 20%, профессию ***B*** – 30%, профессию ***C*** – 50%;

2) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

26. Через фиксированные промежутки времени проводится контроль технического состояния банкомата, который может находиться в одном из трех состояний: S_1 – работает, S_2 – не работает и ожидает ремонта, S_3 – ремонтируется. Предполагается, что процесс, описывающий смену состояний прибора является однородной цепью Маркова с переходной матрицей:

$$P=\begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & p_{02} \\ 0,3 & p_{11} & 0,6 \\ p_{20} & 0,01 & 0,29 \end{bmatrix}$$

Найти неизвестные элементы матрицы P и вычислить $P(2)$ при условии, что в начальный момент времени банкомат был исправен. Найти среднее время перехода внутри замкнутого класса.

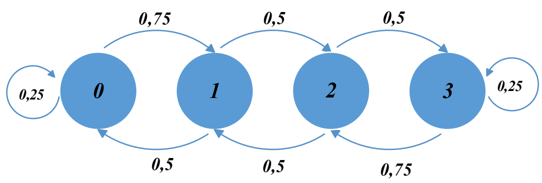
27. Классифицировать состояния для марковской цепи, заданной матрицей вероятностей переходов P1, записать ее в каноническом виде и найти среднее время перехода из одного состояния в другое внутри замкнутого класса (все возможные варианты).

$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

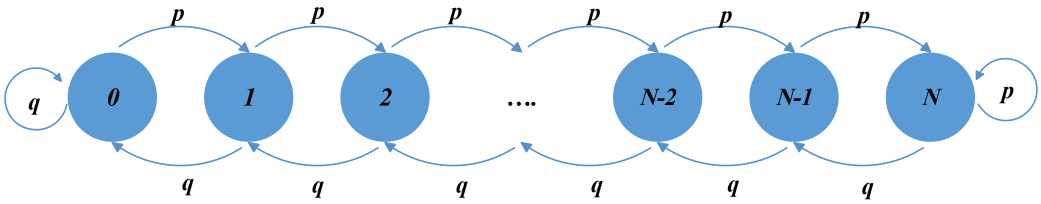
$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}; \quad P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_1=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

28. Цепь Маркова задана графом. Найти стационарное распределение вероятностей, если оно существует.



29. Цепь Маркова имеет множество допустимых состояний $E = \{0,1,2,\ldots N\}$ и описывается графом, где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Доказать, что цепь является эргодической, и найти стационарное распределение вероятностей.



30. Провести классификации состояний и записать матрицы переходов в каноническом виде для следующих цепей Маркова:

а) $$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

б) $$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

в) $$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

г) $$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

е) $$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{bmatrix}, \ p + q = 1$$

31. Цепь Маркова имеет множество состояний $\{-6,-5,\ldots,0,1,\ldots,6\}$. Переходные вероятности определяются соотношениями:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i + 1 \le 0 \quad \text{или } j = i - 1 \ge 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Провести классификацию состояний цепи Маркова и множества ее состояний, если выполняются равенства:

а) $p_{0,6}=1,\ \ p_{0,i}=0\ \ (i\neq 6)$,

б) $p_{0,6}=p_{0,-6}=1/2,\ \ p_{0,i}=0\ \ (i\neq \pm 6)$,

в) $p_{0,6}=p_{0,-5}=1/2,\ \ p_{0,i}=0\ \ (i\neq 6, i\neq -5)$

32. Цепь Маркова задана матрицей переходов за один шаг. Найдите финальные вероятности состояний цепи Маркова.

а) $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ***б)*** $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

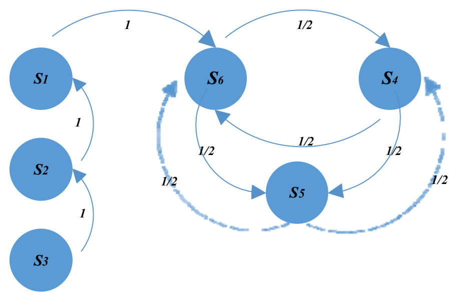
в) $P=\begin{bmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & q \\ p & 0 & q \end{bmatrix}$ ***г)*** $P=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$

33. Найдите вероятность и условное среднее время перехода (при условии попадания в S_k) из несущественного состояния в замкнутый класс для цепей Маркова, заданных матрицами вероятностей переходов за один шаг:

а) $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$, ***в)*** $P=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$,

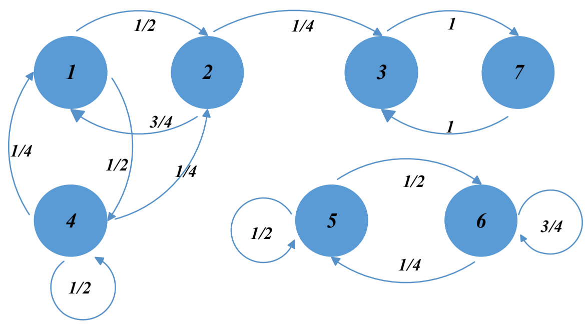
б) $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, ***г)*** $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

34. Найдите вероятность и среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс для цепи Маркова, заданной графом вероятностей переходов за один шаг:



Найдите среднее время перехода внутри замкнутого класса.

35. Найдите вероятность и условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс для цепи Маркова, заданной графом вероятностей переходов за один шаг:



Найдите среднее время перехода внутри замкнутых классов.

36. Найдите среднее время перехода внутри замкнутых классов, если матрица вероятностей переходов имеет вид:

$$\textbf{\textit{а)}}\ P=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix},\quad \textbf{\textit{б)}}\ P=\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{bmatrix}\quad \textbf{\textit{в)}}\ P=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/5 & 2/5 & 1/5\\ 1/5 & 2/5 & 2/5\end{bmatrix}$$

37. Цепь Маркова задана матрицей вероятностей перехода P за один шаг и вектором начального распределения

$$P=\begin{bmatrix}3/12 & 2/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 2/12\\ 1/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12\\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix},$$

$$Q=\left\{\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,0,0\right\}$$

Найти:

а) несущественные состояния;

б) среднее время выхода их множества несущественных состояний;

в) вероятности попадания в замкнутые классы $\{3,4\}$ и $\{5,6\}$ из несущественных состояний.

38. Из таблицы случайных чисел, содержащей все целые числа от 1 до m включительно, по одному выбираются числа наудачу. Система находится в состоянии Q_j, если наибольшее из выбранных чисел равно j ($j = 1,2,..m$). Найти вероятности того, что после выбора n чисел наибольшее будет k, если раньше было i.

Указание. Найдите матрицу переходов за один шаг P, тогда $p_{ik}^{(n)}$ – элементы матрицы P^n.

39. M молекул, распределенных в двух резервуарах, случайно по одной перемещаются из своего резервуара в другой. Найти финальные вероятности числа молекул в первом резервуаре.

40. Независимые испытания проводятся до тех пор, пока не будет получена серия из m последовательных появлений события A, вероятность появления которого при каждом испытании равна p. Определить среднее число испытаний t_k, которые нужно провести для получения требуемой серии, если уже имеется серия из k последовательных появлений этого события $(k = 0,1,...,m-1)$. Рассчитать t_k при $m = 3$, $p = 0,5$ и $k = 0,1,2$.

41. Из урны содержащей N черных и N белых шаров одновременно извлекаются m шаров, вместо которых кладут m черных шаров. Число белых шаров определяет состояние системы. Определите вероятности того, что после n извлечений в урне останется k белых шаров. Рассчитать вероятности при $N = 6$, $m = 3$.

42. Отрезок ***AB*** разделен на m равных интервалов. Частица может находиться только в серединах интервалов, перемещаясь скачками на величину интервала по направлению к точке ***A*** с вероятностью p, а по направлению к точке ***B*** с вероятностью $q = 1 - p$. В крайних точках отрезка имеются отражающие экраны, которые при достижении частицей точки ***A*** или ***B*** возвращают ее в исходное положение. Определить финальные вероятности нахождения частицы в каждом интервале.

43. Вероятности перехода для цепи Маркова с бесконечным числом состояний определяются равенствами:

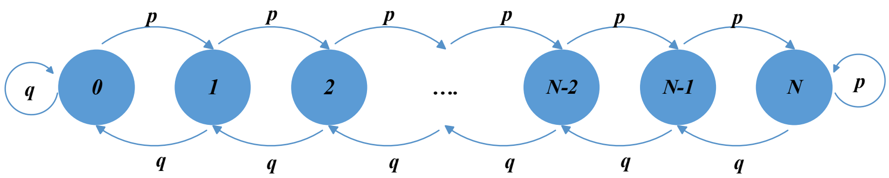
а) $p_{i1} = q$, $p_{i,i+1} = p = 1 - q$ $(i = 1,2,...)$;

б) $p_{i1} = \dfrac{i}{i+1}$, $p_{i,i+1} = \dfrac{1}{i+1}$ $(i = 1,2,...)$;

в) $p_{11} = \dfrac{1}{2}$, $p_{12} = \dfrac{1}{2}$, $p_{i,1} = \dfrac{1}{i}$, $p_{i,i+1} = \dfrac{i-1}{i}$ $(i = 2,3,...)$.

Определить финальные вероятности, если они существуют.

44. Цепь Маркова задана графом вероятностей переходов:



где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Докажите, что цепь является эргодической, и найдите стационарное распределение вероятностей состояний.

45. Эргодическая цепь Маркова с двумя состояниями имеет стационарное распределение $\pi_0 = p$, $\pi_1 = q = 1 - p$. Найдите матрицу вероятностей переходов за один шаг.

Глава 2. Цепи Маркова с непрерывным временем

2.1. Основные понятия и определения

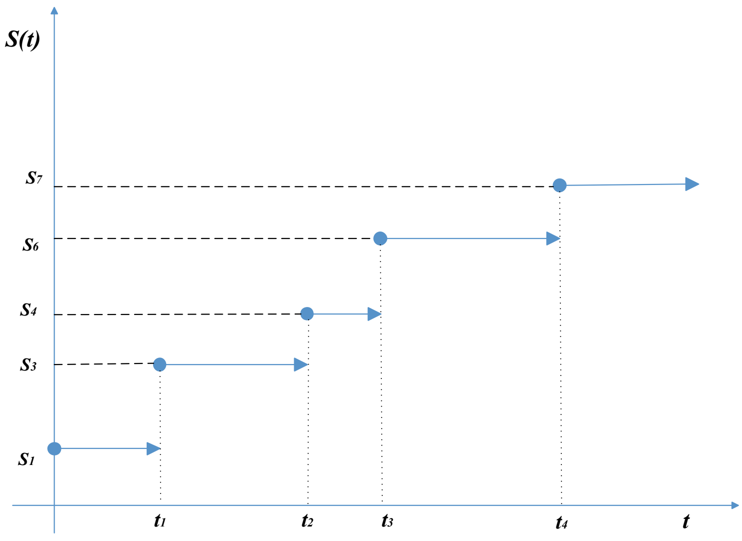
Ранее мы рассмотрели дискретные цепи Маркова, когда система может находиться в одном из дискретных состояний $i \in S$ и в ***фиксированные*** моменты времени $t_0, t_1, ..., t_n, ..$ переходит из одного состояния в другое.

Рассмотрим теперь марковский процесс $\xi(t)$ с конечным или счетным множеством состояний X, который изменяет свои состояния в ***случайные*** моменты времени. Такой процесс называется ***цепью Маркова с непрерывным временем***. Очевидно, что для такой цепи Маркова выполняются условия:

$$P\left\{\xi(t) = j \middle| \xi(s) = i, \xi(s') = i'\right\} = P\left\{\xi(t) = i \middle| \xi(s) = j\right\} = p_{ij}(s,t)$$

для любых $i', i, j \in X$ и $s' < s < t \in T$.

Одна из реализаций произвольного марковского случайного процесса с непрерывным временем может быть например такой:



Определение 1. Вероятность $p_{ij}(s,t)$ называется ***вероятностью перехода*** из состояния i в состояние j за промежуток времени $[s,t)$.

Цепи Маркова однозначно определяются матрицей вероятностей переходов $P(s,t) = \left\| p_{ij}(s,t) \right\|$ и начальным распределением $\theta_i = P\{\xi(0) = i\}$.

Вероятности состояний в любой момент времени t определяются следующим образом:

$$P_j(t) = \sum_i \theta_i p_{ij}(0,t)$$

Где $P_j(t) = \left(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t), ..\right)$ – вектор, компоненты которого непрерывно зависят от времени t.

<u>Определение 2.</u> Если вероятности переходов $p_{ij}(s,t)$ зависят только от разности моментов времени, то есть $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s) = p_{ij}(\tau)$, то цепь Маркова называется ***однородной***.

Для однородных цепей Маркова матрица вероятностей переходов имеет вид:

$$P(\tau) = \left\| p_{ij}(\tau) \right\|$$

А вероятности состояний определяются следующим образом:

$$P_j(\tau) = \sum_i \theta_i p_{ij}(\tau).$$

Переходные вероятности обладают следующими свойствами:

1. $p_{ij}(s,t) \ge 0$;
2. $\sum_j p_{ij}(s,t) = 1$ – условие нормировки;
3. Уравнение Чепмена–Колмогорова:

$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t)$ – для ***однородных цепей Маркова***,

$p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,\tau) p_{kj}(\tau,t)$ – для ***неоднородных цепей Маркова***, где $s < \tau < t$.

4. Условие стохастической непрерывности: $\lim\limits_{\tau \to 0} p_{ij}(\tau) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad i = j, \\ 0, & \textit{если} \quad i \ne j. \end{cases}$

Это условие означает, что с вероятностью 1 цепь однородная Маркова не изменит своего состояния за бесконечно малый промежуток времени $\tau \to 0$. Следует отметить, что стохастическая непрерывность не означает непрерывность реализаций марковской цепи. Это происходит потому, что разрывы каждой реализации цепи происходят в случайные моменты времени, и вероятность того, что разрыв произойдет именно в данный момент времени t, равна нулю.

Плотность вероятности

В силу того, что значения цепи Маркова с непрерывным временем меняются в случайные моменты времени, а не в фиксированные. Мы не можем записать вероятность перехода в конкретный момент времени t, но мы можем рассмотреть вероятность перехода за бесконечно малый промежуток времени, т.е. при $\Delta t \to 0$. Другими словами мы можем определить плотности вероятностей перехода системы из состояние в состояние.

Определим плотности вероятностей следующим образом:

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

Где $\dfrac{p_{ij}\left(t, t+\Delta t\right)}{\Delta t}$ – это количество вероятности, приходящееся на единицу интервала времени длиной Δt.

Величина q_{ij} – имеет смысл ***интенсивности вероятности перехода.***

Матрица инфинитезимальных характеристик (матрица интенсивностей)

Совокупность всех q_{ij} можно записать в виде ***матрицы интенсивностей*** или по другому ее называют матрицей ***инфинитезимальных характеристик.*** Запишем ее для системы, имеющей n возможных состояний:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & q_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица инфинитезимальных характеристик определяется через матрицу вероятностей перехода так:

$$Q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P-I}{\Delta t}$$

Где $I-$единичная матрица.

Т.е.

$$P-I=\begin{pmatrix} p_{11}-1 & p_{12} & \dots & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-1 & \dots & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & \dots & p_{nn}-1 \end{pmatrix}$$

Элементы каждой строки матрицы P удовлетворяют условию нормировки, а именно $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1,\overline{i=1,n}$, поэтому с учетом этого условия, можно переписать $P-I$ так:

$$P-I=\begin{pmatrix} -(p_{12}+p_{13}+..+p_{1n}) & p_{12} & \dots & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & -(p_{21}+p_{23}+..+p_{2n}) & \dots & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & \dots & -(p_{n1}+p_{n2}+..+p_{nn-1}) \end{pmatrix}$$

Как получили например для 1 строки: из условия нормировки $p_{11}+p_{12}+p_{13}+..+p_{1n}=1$, поэтому $p_{11}-1=-(p_{12}+p_{13}+..+p_{1n})$ и т.д. для всех остальных строк.

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$:

$$Q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P-I}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}\cdot\begin{pmatrix} -(p_{12}+p_{13}+..+p_{1n}) & p_{12} & \dots & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & -(p_{21}+p_{23}+..+p_{2n}) & \dots & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & \dots & -(p_{n1}+p_{n2}+..+p_{nn-1}) \end{pmatrix}\right]$$

Получили матрицу ***инфинитезимальных характеристик*** (или матрицу интенсивностей) для n возможных состояний.

Таким образом элементы матрицы интенсивностей, определяются следующим образом:

$$q_{ii}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} < 0\,,$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} > 0\,,\ i \neq j$$

Величины $q_{ij}(t)$ имеет смысл ***интенсивности вероятности перехода*** цепи Маркова из состояния i в состояние j.

Величины $\left(-q_{ii}(t)\right)$ – смысл ***интенсивности вероятности выхода*** из состояния i.

Свойства матрицы инфинитезимальных характеристик

1) Сумма элементов по каждой из строк равна 0: $\sum_j q_{ij} = 0$.

2) Недиагональные элементы неотрицательны, т.е. они могут быть больше или равны нулю.

3) Диагональные элементы матрицы имеют отрицательное значение.

Цепи Маркова с непрерывным временем задаются с использованием матрицы ***инфинитезимальных характеристик*** $Q(t) = \left\| q_{ij}(t) \right\|$. Матрица ***инфинитезимальных характеристик*** позволяет найти переходные вероятности $p_{ij}(s,t)$ для любых $s < t$.

Дифференциальные уравнения Колмогорова

Используя элементы матрицы инфинитезимальных характеристик можно найти ***вероятности перехода за время*** $\Delta t \to 0$:

$$p_{ii}(t, t + \Delta t) = 1 + q_{ii}(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

Эти вероятности удовлетворяют ***прямой*** и ***обратной*** системам дифференциальных уравнений Колмогорова.

Для неоднородных цепей Маркова:

Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_k q_{ik}(s) p_{kj}(s,t)\,,$$

где $p_{ij}(t,t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ – краевые условия, заданные на ***правой*** границе $s=t$ области изменения переменной $-\infty<s\le t$.

Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t}=\sum_k p_{ik}(s,t)q_{kj}(t),$$

где $p_{ij}(s,s)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ – краевые условия, заданные на ***левой*** границе $t=s$ области изменения переменной $s\le t<\infty$.

<u>Для однородных цепей Маркова эти системы записываются следующим образом:</u>

Обратная система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial p_{ij}(\tau)}{\partial \tau}=\sum_k q_{ik}p_{kj}(\tau)$$

с начальными условиями $p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

Прямая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial p_{ij}(\tau)}{\partial \tau}=\sum_k p_{ik}(\tau)q_{kj}$$

с начальными условиями $p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

Удобно записывать системы уравнений Колмогорова в матричной форме.

Введем матрицу вероятностей переходов $P(t)=\left\|p_{ij}(t)\right\|$ для однородной цепи Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Тогда системы уравнений можно записать в виде:

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t}=PQ \ - \ \underline{\textbf{прямая}}$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = QP \ - \underline{\textbf{\textit{обратная}}}$$

Обратная система уравнений <u>*применяется*</u> обычно для нахождения значений функционалов от цепей Маркова.

Прямую систему уравнений <u>*можно применять*</u> для нахождения безусловного распределения вероятностей $P_i(t) = P\{\xi(t) = i\}$ состояний системы в произвольный момент времени.

Пример 23. Пусть $\xi(t)$ является однородной цепью Маркова с двумя состояниями, $X = \{0,1\}$. Время пребывания в состоянии 0 распределено по экспоненциальному закону с параметром λ, а время пребывания в состоянии 1 распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Составить прямую и обратную системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Найти матрицу вероятностей переходов из состояния i в j, $i, j = 0,1$.

<u>***Решение:***</u> Пусть η_0 – случайная величина, характеризующая время пребывания в состоянии 0, тогда $P\{\eta_0 < \Delta t\} = F_0(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = p_{01}(\Delta t)$ – вероятность того, что цепь Маркова за время Δt перейдет из состояния 0 в состояние 1, а $P\{\eta_0 > \Delta t\} = 1 - F_0(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = p_{00}(\Delta t)$ – вероятность того, что цепь Маркова за время Δt не изменит своего состояния.

Аналогично, пусть η_1 – случайная величина, характеризующая время пребывания в состоянии 1, тогда

$$P\{\eta_1 < \Delta t\} = F_1(\Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} = p_{10}(\Delta t),$$

$$P\{\eta_0 > \Delta t\} = 1 - F_1(\Delta t) = e^{-\mu \Delta t} = p_{11}(\Delta t).$$

Находим матрицу ***инфинитезимальных характеристик*** $Q = \|q_{ij}\|$:

$$q_{00} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{00}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\lambda \Delta t} - 1}{\Delta t} = -\lambda,$$

$$q_{11} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{11}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\mu \Delta t} - 1}{\Delta t} = -\mu,$$

$$q_{01} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} = \lambda,$$

$$q_{10} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{10}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\mu \Delta t}}{\Delta t} = \mu.$$

Составим ***прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова***:

$$p'_{00}(t) = p_{00}(t)q_{00} + p_{01}(t)q_{10} = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t) \quad \textbf{(1)}$$

$$p'_{01}(t) = p_{00}(t)q_{01} + p_{01}(t)q_{11} = \lambda p_{00}(t) - \mu p_{01}(t) \quad \textbf{(2)}$$

$$p'_{10}(t) = p_{11}(t)q_{10} + p_{10}(t)q_{00} = \mu p_{11}(t) - \lambda p_{10}(t) \quad \textbf{(3)}$$

$$p'_{11}(t) = p_{11}(t)q_{11} + p_{10}(t)q_{01} = -\mu p_{11}(t) + \lambda p_{10}(t) \quad \textbf{(4)}$$

Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова будет иметь вид:

$$p'_{00}(t) = q_{00}p_{00}(t) + q_{01}p_{10}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \lambda p_{10}(t),$$

$$p'_{01}(t) = q_{00}p_{01}(t) + q_{01}p_{11}(t) = -\lambda p_{01}(t) + \lambda p_{11}(t),$$

$$p'_{10}(t) = q_{10}p_{00}(t) + q_{11}p_{10}(t) = \mu p_{00}(t) - \mu p_{10}(t),$$

$$p'_{11}(t) = q_{10}p_{01}(t) + q_{11}p_{11}(t) = \mu p_{01}(t) - \mu p_{11}(t).$$

Начальные условия: $p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Решая пары уравнений **(1–2)** и **(3–4)** находим искомые вероятности.

Из первого уравнения получаем:

$$\left[p'_{00}(t) + \lambda p_{00}(t)\right]\frac{1}{\mu} = p_{01}(t),$$

Подставляем в **(2)**:

$$\left[p'_{00}(t) + \lambda p_{00}(t)\right]'\frac{1}{\mu} = \lambda p_{00}(t) - \left[p'_{00}(t) + \lambda p_{00}(t)\right] = -p'_{00}(t),$$

Получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$p''_{00}(t) + (\lambda + \mu)p'_{00}(t) = 0$$

Решение которого в общем виде:

$$p_{00}(t) = C_1 + C_2 e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Учитывая начальные условия, получаем:

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{01}(t)=\frac{1}{\mu}\left\{\left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]'+\lambda\left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\left\{-\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}+\lambda\left[\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\right\}=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Аналогично, находим:

$$p_{11}(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$p_{10}(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}-\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Задание 1: Убедитесь, что полученное решение обращает в тождество и обратную систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Для рассмотренного нами ***примера 22*** решим задачу нахождения безусловных вероятностей $P_i(t)=P\{\xi(t)=i\}$ состояний системы в произвольный момент времени.

Пример 24. Пусть $\xi(t)$ является однородной цепью Маркова с двумя состояниями, $X=\{0,1\}$. Время пребывания в состоянии 0 распределено по экспоненциальному закону с параметром λ, а время пребывания в состоянии 1 распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Найти безусловные вероятности $P_i(t)=P\{\xi(t)=i\}$ состояний системы в произвольный момент времени.

Решение: Для вероятностей $P_0(t)=P\{\xi(t)=0\}$ и $P_1(t)=P\{\xi(t)=1\}$ используя Δt – метод составим прямую систему Колмогорова. Учитывая, что:

$$p_{00}(t,t+\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p_{11}(t,t+\Delta t)=1-\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p_{01}(t,t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p_{10}(t,t+\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

Имеем:

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)(1-\mu\Delta t)+P_0(t)\lambda\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)$$

Разделив полученные выражения на Δt, и устремив $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$P_1'(t) = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

Пусть в начальный момент цепь Маркова находилась в состоянии 0, то есть $P_0(0) = P\{\xi(0) = 0\} = 1$, $P_1(0) = P\{\xi(0) = 1\} = 0$.

Решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \\ P_1(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \end{cases}$$

Далее будет получено это решение с использованием преобразования Лапласа.

2.2. Преобразование Лапласа

Для решения систем дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами широко используется преобразование Лапласа. В курсе математического анализа оно было подробно рассмотрено. Поэтому далее будут приведены лишь некоторые краткие сведения о данном преобразовании.

Неотрицательная функция $f(t), t > 0$ называется ***оригиналом***, а ее преобразование по Лапласу, функция $L(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt$ называется ***изображением***. Преобразование Лапласа всегда существует, если $f(t)$ растет не быстрее показательной функции, т.е. если существует число C такое, что $\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau f(t) \cdot e^{Ct} dt < \infty$.

Все основные пары «оригинал-изображение» приводятся в таблице ниже:

№	$f(t)$	$L(p)$
1	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$p\cdot L(p)-f(0)$
2	$\sum_{i=1}^{n} f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} L_i(p)$
3	c	c/p
4	$c\cdot f(t)$	$c\cdot L(p)$
5	e^{at}	$1/(p-a)$
6	$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{e^{\alpha_i\cdot t}}{f_n^{'}(\alpha_i)}$	$\dfrac{1}{f_n(p)}$
7	$\dfrac{1}{f_n(0)}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{e^{\alpha_i\cdot t}}{\alpha_i\cdot f_n^{'}(\alpha_i)}$	$\dfrac{1}{p\cdot f_n(p)}$
8	$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{g(\alpha_i)}{f_n^{'}(\alpha_i)}\cdot e^{\alpha_i\cdot t}$	$\dfrac{g(p)}{f_n(p)}$
9	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{p\to 0} p\cdot L(p)$
10	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{p\to\infty} p\cdot L(p)$
11	$f(t/c)$	$cL(cp)$
12	$f(t-c)$	$e^{-cp}\cdot L(p)$
13	$e^{-ct}\cdot f(t)$	$L(p+c)$
14	$t\cdot f(t)$	$-\dfrac{dL(p)}{dp}$

В таблице приняты обозначения: $f_n(p)=\prod_{i=1}^{n}(p-\alpha_i),\ \alpha_i\neq\alpha_j\ \forall i\neq j$ и $g(p)=p^m+\beta_{m-1}\cdot p^{m-1}+\ldots+\beta_1\cdot p+\beta_0,\ m<n$.

Схема для решения системы уравнений Колмогорова с использованием преобразования Лапласа

Для получения решения необходимо пройти последовательно 3 этапа:

1) Перейти от дифференциально-разностных уравнений относительно $P_i(t)$ к линейным алгебраическим уравнениям относительно изображений $L_i(p)$.

2) Из полученной системы линейных алгебраических уравнений найти $L_i(p)$.

3) По полученным изображениям $L_i(p)$ найти оригиналы $P_i(t)$, для чего использовать таблицу преобразований Лапласа.

***Пример 24.1*.**

Решение: При рассмотрении ***примера 24*** мы получили систему:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_o(t) + \mu P_1(t) \\ P_1'(t) = -\mu P_o(t) + \lambda P_1(t) \end{cases}$$

И записали ее решение без вывода:

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \\ P_1(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \end{cases}$$

Получим эти решения, используя преобразование Лапласа.

1) Заменим в системе одно из уравнений условием нормировки:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_o(t) + \mu P_1(t) \\ P_o(t) + P_1(t) = 1 \end{cases}$$

2) Перейдем к изображениям, используя таблицу в пособии:

$$\begin{cases} p \cdot L_0(p) - P_0(0) = -\lambda \cdot L_0(p) + \mu \cdot L_1(p) \\ L_0(p) + L_1(p) = 1/p \end{cases}$$

3) Известно, что в начальный момент цепь Маркова находилась в состоянии 0, то есть $P_0(0) = P\{\xi(0) = 0\} = 1$, $P_1(0) = P\{\xi(0) = 1\} = 0$. Поэтому наша система может быть переписана так:

$$\begin{cases} p\cdot L_0(p)-1=-\lambda\cdot L_0(p)+\mu\cdot L_1(p) \\ L_0(p)+L_1(p)=1/p \end{cases}$$

Проводим простые алгебраические преобразования:

$$\begin{cases} \left(p+\lambda\right)\cdot L_0(p)-\mu\cdot L_1(p)=1 \\ L_0(p)+L_1(p)=1/p \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \left(p+\lambda\right) & -\mu \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=p+\lambda+\mu$$

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ 1/p & 1 \end{vmatrix}=1+\left(\mu/p\right)=\frac{p+\mu}{p}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \left(p+\lambda\right) & 1 \\ 1 & 1/p \end{vmatrix}=\frac{p+\lambda}{p}-1=\frac{\lambda}{p}$$

Откуда $L_0(p)=\dfrac{p+\mu}{p\left(p+\lambda+\mu\right)}$ и $L_1(p)=\dfrac{\lambda}{p\left(p+\lambda+\mu\right)}$

Найдем оригинал для $L_0(p)$, а оригинал для $L_1(p)$ можно найти из условия нормировки.

4) $L_0(p)=\dfrac{p+\mu}{p\left(p+\lambda+\mu\right)}$, разложим данную дробь на сумму простых дробей:

$$L_0(p)=\frac{p+\mu}{p\left(p+\lambda+\mu\right)}=\frac{1}{\left(p+\lambda+\mu\right)}+\frac{\mu}{p\left(p+\lambda+\mu\right)}$$

Теперь используя таблицу легко можно найти оригиналы.

Для нахождения используем что: $e^{\lambda t}\leftrightarrow\dfrac{1}{p-\lambda}$, поэтому $\dfrac{1}{\left(p+\lambda+\mu\right)}\leftrightarrow e^{-(\lambda+\mu)t}$.

И $\dfrac{1}{f_n(p)}\leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{\alpha_i\cdot t}}{f_n^{'}(\alpha_i)}$, где $f_n(p)=\prod\limits_{i=1}^{n}\left(p-\alpha_i\right)$, $\alpha_i\neq\alpha_j\ \forall i\neq j$, т.к. у нас $f_2(p)=p\left(p+\lambda+\mu\right)$,

то $\alpha_1=0,\ \alpha_2=-\left(\lambda+\mu\right)$ и $f_2^{'}(p)=2p+\lambda+\mu$, поэтому:

$$\frac{\mu}{p\left(p+\lambda+\mu\right)}\leftrightarrow\mu\cdot\left(\frac{e^{0\cdot t}}{0+\lambda+\mu}+\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{-\left(\lambda+\mu\right)}\right)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu\cdot e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}$$

И окончательно:

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu\cdot e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}+e^{-(\lambda+\mu)t}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot\left(1-\frac{\mu}{\left(\lambda+\mu\right)}\right)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

Зная $P_0(t)$, находим из условия нормировки $P_1(t)$:

$$P_1(t)=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}-e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)=\frac{\lambda+\mu-\mu-\lambda\cdot e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right).$$

И окончательно запишем решение нашей системы дифференциально-разностных уравнений относительно $P_i(t)$:

$$\begin{cases} P_0(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \\ P_1(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}-e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \end{cases}$$

2.3. Финальные вероятности

Для однородной неразложимой цепи Маркова с конечным числом состояний существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j$, $\forall j$, не зависящий от i, который называется ***финальной вероятностью*** j-го состояния, а их совокупность – ***финальным распределением***.

Финальные вероятности определяются из системы линейных алгебраических уравнений $\sum\limits_i \pi_i q_{ij}=0$, с учетом условия нормировки $\sum\limits_i \pi_i=1$.

Если ввести матричные обозначения $\pi=[\pi_1,\pi_2\ldots]$, $Q=\|q_{ij}\|$, $E=[1,1,\ldots]^T$, то уравнения для нахождения финальных вероятностей можно записать в виде $\begin{cases}\pi Q=0,\\ \pi E=1.\end{cases}$

В рассмотренном выше ***примере 24.1***, финальные вероятности можно найти предельным переходом, устремив $t\to\infty$:

$$\pi_0=\frac{\mu}{\mu+\lambda},\quad \pi_1=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}.$$

<u>Пример 25.</u> Жизненный цикл студента включает как минимум три состояния: занятия S_1, развлечения S_2, и сон S_3, с переходами $S_1\to S_2\to S_3\to S_1\ldots$. Время пребывания в каждом из состояний экспоненциальное с параметрами 5,1,1. Определить вероятности состояний студента в произвольный момент времени t. Найти финальные вероятности всех состояний системы. Известно, что в начальный момент времени $t=0$ студент занимается.

Решение:

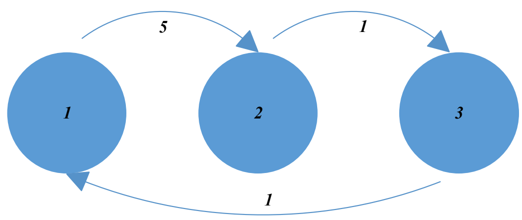
При рассмотрении непрерывных цепей Маркова удобно считать, что переходы системы из состояния в состояние происходят под действием пуассоновских потоков событий. При этом плотности вероятностей перехода имеют смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (как только в потоке интенсивности λ_{ij}, связанном с системой, произошло событие, система скачком переходит из состояния S_i в состояние S_j). В этом случае для любых i и j:

✓ Вероятность перехода $i \to j$ за промежуток времени Δt равна $P\left(\xi\left(t+\Delta t\right)=j \middle| \xi\left(t\right)=i\right)=\lambda_{ij}\Delta t+0\left(\Delta t\right)$.

✓ Время пребывания в состоянии i до перехода в состояние j есть случайная величина T_{ij}, которая имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_{ij}.

Потоком вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j называется величина $\lambda_{ij} \cdot P_i(t)$.

Граф состояний системы, с отмеченными интенсивностями переходов из состояния в состояние имеет вид:



Рассмотрим 2 способа получения системы дифференциальных уравнений для нахождения распределения вероятностей состояний системы.

1-й способ. Найдем вероятность состояния 1 в произвольный момент времени t. Введем события:

$A=\{\ \xi\left(t+\Delta t\right)=1\}$ – в момент времени $t+\Delta t$, студент находится в состоянии 1; $P_1(t+\Delta t)$

$B=\{\ \xi\left(t\right)=1\}$ – в момент времени t, студент находится в состоянии 1. Обозначим вероятность состояния 1: $P_1(t)$.

$C=\{\ \xi(t)=2\}$ – в момент времени t, студент находится в состоянии 2. Обозначим вероятность состояния 2: $P_2(t)$.

$D=\{\ \xi(t)=3\}$ – в момент времени t, студент находится в состоянии 3. Обозначим вероятность состояния 3: $P_3(t)$.

$G=\{$ система в момент времени t находилась в состоянии 1 и за время Δt так и не вышла из него $\}$; $P(G)=P\left(A\middle|\xi(t)=1\right)=P\left(\xi(t+\Delta t)=1\middle|\xi(t)=1\right)=P_1(t)\cdot p_{11}$

$L=\{$ система в момент времени t находилась в состоянии 2, но за время Δt перешла в состояние 1 $\}$. $P(L)=P\left(A\middle|\xi(t)=2\right)=P\left(\xi(t+\Delta t)=1\middle|\xi(t)=2\right)=P_2(t)\cdot p_{21}$

$F=\{$ система в момент времени t находилась в состоянии 3, но за время Δt перешла в состояние 1 $\}$. $P(F)=P\left(A\middle|\xi(t)=3\right)=P\left(\xi(t+\Delta t)=1\middle|\xi(t)=3\right)=P_3(t)\cdot p_{31}$

События $\{G\},\{L\},\{F\}-$ несовместные события. Очевидно, что $A=G+L+F$, поэтому

$P(A)=P(G+L+F)=P_1(t)\cdot p_{11}+P_2(t)\cdot p_{21}+P_3(t)\cdot p_{31}=P_1(t)\cdot(1-p_{12}-p_{13})+P_2(t)\cdot p_{21}+$
$+P_3(t)\cdot p_{31}$

Так как $p_{21}=\lambda_{21}\cdot\Delta t+O(\Delta t), p_{31}=\lambda_{31}\cdot\Delta t+O(\Delta t), p_{12}=\lambda_{12}\cdot\Delta t+O(\Delta t), p_{13}=\lambda_{13}\cdot\Delta t+O(\Delta t),$ то

$$\begin{aligned}P(A)&=P_1(t)\cdot p_{11}+P_2(t)\cdot p_{21}+P_3(t)\cdot p_{31}=P_1(t)\cdot\left(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t-O(\Delta t)\right)+\\&+P_2(t)\cdot\left(\lambda_{21}\cdot\Delta t+O(\Delta t)\right)+P_3(t)\cdot\left(\lambda_{31}\cdot\Delta t+O(\Delta t)\right)=\\&=P_1(t)\cdot\left(1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t\right)+P_2(t)\cdot\lambda_{21}\cdot\Delta t+P_3(t)\cdot\lambda_{31}\cdot\Delta t+o(\Delta t)\end{aligned}$$

Раскрывая скобки получим:

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)-P_1(t)\cdot(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t+P_2(t)\cdot\lambda_{21}\cdot\Delta t+P_3(t)\cdot\lambda_{31}\cdot\Delta t+o(\Delta t)$$

Откуда:

$$P_1(t+\Delta t)-P_1(t)=-P_1(t)\cdot(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t+P_2(t)\cdot\lambda_{21}\cdot\Delta t+P_3(t)\cdot\lambda_{31}\cdot\Delta t+o(\Delta t)$$

Разделим все на Δt:

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-P_1(t)\cdot(\lambda_{12}+\lambda_{13})+P_2(t)\cdot\lambda_{21}+P_3(t)\cdot\lambda_{31}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[-P_1(t)\cdot(\lambda_{12}+\lambda_{13})+P_2(t)\cdot\lambda_{21}+P_3(t)\cdot\lambda_{31}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right];$$

Получаем:

$$P_1'(t) = -P_1(t)\cdot(\lambda_{12}+\lambda_{13}) + P_2(t)\cdot\lambda_{21} + P_3(t)\cdot\lambda_{31}$$

Аналогично рассуждая, получаем все остальные уравнения:

$$P_2'(t) = -P_2(t)\cdot(\lambda_{21}+\lambda_{23}) + P_1(t)\cdot\lambda_{12} + P_3(t)\cdot\lambda_{32}$$

$$P_3'(t) = -P_3(t)\cdot(\lambda_{31}+\lambda_{32}) + P_1(t)\cdot\lambda_{13} + P_2(t)\cdot\lambda_{23}$$

Получили систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -P_1(t)\cdot(\lambda_{12}+\lambda_{13}) + P_2(t)\cdot\lambda_{21} + P_3(t)\cdot\lambda_{31} \\ P_2'(t) = -P_2(t)\cdot(\lambda_{21}+\lambda_{23}) + P_1(t)\cdot\lambda_{12} + P_3(t)\cdot\lambda_{32} \\ P_3'(t) = -P_3(t)\cdot(\lambda_{31}+\lambda_{32}) + P_1(t)\cdot\lambda_{13} + P_2(t)\cdot\lambda_{23} \end{cases}$$

Любое из входящих в систему уравнений можем заменить условием нормировки:

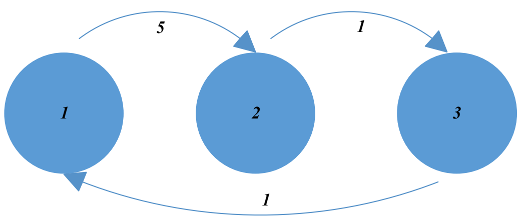
$$P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$$

Подставляя заданные значения времени пребывания в каждом из состояний 5,1,1 и заменяя первое уравнение на условие нормировки, получаем окончательно систему:

$$\begin{cases} P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \\ P_2'(t) = -P_2(t) + 5\cdot P_1(t) \\ P_3'(t) = -P_3(t) + P_2(t) \end{cases}$$

Систему уравнений, которую мы получили, очень удобно составлять, пользуясь графом состояний и ***<u>мнемоническим правилом</u>***: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, переводящих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, переводящих из данного состояния в другие.

Глядя на граф:



Составим уравнение для 3 состояния.

Поток вероятности выводящий систему из состояния 2 в состояние 3: $\lambda_{23}\cdot P_2(t)$,

Поток вероятности переводящий систему из состояния 3 в состояние 1: $\lambda_{31}\cdot P_3(t)$, Т.е. производная вероятности состояния 3 $P_3'(t)$ равна входящему потоку вероятности $\lambda_{23}\cdot P_2(t)$ минус выходящий поток вероятности $\lambda_{31}\cdot P_3(t)$, или $P_3'(t)=\lambda_{23}\cdot P_2(t)-\lambda_{31}\cdot P_3(t)$.

Подставив известные значения λ_{ij}, окончательно получаем:

$$P_3'(t)=P_2(t)-P_3(t)$$

Аналогично рассуждая можем получить уравнения для всех остальных состояний.

Решим полученную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)=1 \\ P_2'(t)=-P_2(t)+5\cdot P_1(t) \\ P_3'(t)=-P_3(t)+P_2(t) \end{cases}$$

Используем метод Лапласа. Вначале перейдем от оригиналов к Лаплас− изображениям, используя таблицу, приведенную ранее в теме преобразование Лапласа и условие, что в начальный момент времени $t=0$ студент занимается, т.е. $P_1(0)=1, P_2(0)=0, P_3(0)=0$.

Так как

$$P_1(t)\to L_1(p),\ P_2(t)\to L_2(p),\ P_3(t)\to L_3(p),\ 1\to\frac{1}{p},\ P_2'(t)\to p\cdot L_2(p)+P_2(0),$$

$$P_3'(t)\to p\cdot L_3(p)+P_3(0)$$

То наша система перепишется в таком виде:

$$\begin{cases} L_1(p)+L_2(p)+L_3(p)=1/p \\ p\cdot L_2(p)+P_2(0)=-L_2(p)+5\cdot L_1(p) \\ p\cdot L_3(p)+P_3(0)=-L_3(p)+L_2(p) \end{cases}$$

Или окончательно, используя начальные условия:

$$\begin{cases} L_1(p)+L_2(p)+L_3(p)=1/p \\ 5\cdot L_1(p)-(p+1)\cdot L_2(p)=0 \\ L_2(p)-(p+1)\cdot L_3(p)=0 \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -(p+1) & 0 \\ 0 & 1 & -(p+1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6-p & -5 \\ 0 & 1 & -(p+1) \end{vmatrix}=(6+p)\cdot(p+1)+5=p^2+7p+11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1/p & 1 & 1 \\ 0 & -(p+1) & 0 \\ 0 & 1 & -(p+1) \end{vmatrix} = \frac{1}{p}\cdot(p+1)^2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1/p & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(p+1) \end{vmatrix} = \frac{5}{p}\cdot(p+1);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/p \\ 5 & -(p+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{p};$$

Тогда:

$$L_1(p) = \frac{(p+1)^2}{p\left(p^2+7p+11\right)},\ L_2(p) = \frac{5(p+1)}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)};L_3(p) = \frac{5}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)}$$

Найдем оригинал $L_3(p) = \dfrac{5}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)}$. Для чего, опять используем таблицу:

$$\frac{1}{p\cdot f_n(p)} \to \frac{1}{f_n(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\alpha_i\cdot t}}{\alpha_i\cdot f_n'(\alpha_i)}.$$

У нас $f_n(p) = f_2(p) = p^2+7p+11$, $f_2'(p) = 2p+7$, α_i – корни $f_n(p)$.

Найдем корни многочлена $f_2(p)$, для чего $f_2(p) = p^2+7p+11 = 0$, откуда $\alpha_1 = \dfrac{-7+\sqrt{5}}{2} = -2,38; \alpha_1 = \dfrac{-7-\sqrt{5}}{2} = -4,62$.

Найдем значение $f_2'(\alpha_i)$: $f_2'(\alpha_1) = 2\cdot(-2,38)+7 = 2,24$ и $f_2'(\alpha_2) = 2\cdot(-4,62)+7 = -2,24$

Поэтому

$$\frac{5}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)} \to 5\cdot\left(\frac{1}{11} - \frac{e^{-2,38\cdot t}}{2,38\cdot 2,24} + \frac{e^{-4,62\cdot t}}{4,62\cdot 2,24}\right)$$

Или окончательно:

$$P_3(t) = 5\cdot\left(\frac{1}{11} - \frac{e^{-2,38\cdot t}}{5,33} + \frac{e^{-4,62\cdot t}}{10,35}\right) = 5\cdot\left(0,09 - 0,187\cdot e^{-2,38\cdot t} + 0,1\cdot e^{-4,62\cdot t}\right);$$

Найдем оригинал, для $L_2(p) = \dfrac{5(p+1)}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)} = \dfrac{5}{\left(p^2+7p+11\right)} + \dfrac{5}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)}$.

Для $\dfrac{5}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)}$ оригинал мы уже нашли, поэтому осталось найти оригинал $\dfrac{5}{\left(p^2+7p+11\right)}$.

Используем опять таблицу: $\dfrac{1}{f_n(p)}\to\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{\alpha_i\cdot t}}{f_n'(\alpha_i)}$

$f_n(p)=f_2(p)=p^2+7p+11$, $\quad f_2'(p)=2p+7$, $\quad \alpha_1=\dfrac{-7+\sqrt{5}}{2}=-2,38;\alpha_1=\dfrac{-7-\sqrt{5}}{2}=-4,62$,

$f_2'(\alpha_1)=2\cdot(-2,38)+7=2,24$, $f_2'(\alpha_2)=2\cdot(-4,62)+7=-2,24$.

$$\frac{5}{\left(p^2+7p+11\right)}\to 5\cdot\left(\frac{e^{-2,38\cdot t}}{2,24}-\frac{e^{-4,62\cdot t}}{2,24}\right);$$

Окончательно оригинал для $L_2(p)$:

$$\frac{5}{\left(p^2+7p+11\right)}+\frac{5}{p\cdot\left(p^2+7p+11\right)}\to 5\cdot\left(\frac{e^{-2,38\cdot t}}{2,24}-\frac{e^{-4,62\cdot t}}{2,24}+0,09-0,187\cdot e^{-2,38\cdot t}+0,1\cdot e^{-4,62\cdot t}\right)=$$
$$=5\cdot\left(0,09+0,26\cdot e^{-2,38\cdot t}-0,35\cdot e^{-4,62\cdot t}\right)$$

$$P_2(t)=5\cdot\left(0,09+0,26\cdot e^{-2,38\cdot t}-0,35\cdot e^{-4,62\cdot t}\right)$$

Так как вероятности состояний должны удовлетворять условию нормировки, то найдем вероятность состояния 1 так: $P_1(t)=1-P_2(t)-P_3(t)$ или

$$P_1(t)=1-5\cdot\left(0,09+0,26\cdot e^{-2,38\cdot t}-0,35\cdot e^{-4,62\cdot t}\right)-5\cdot\left(0,09-0,187\cdot e^{-2,38\cdot t}+0,1\cdot e^{-4,62\cdot t}\right)=$$
$$=0,1-0,365\cdot e^{-2,38\cdot t}+1,25\cdot e^{-4,62\cdot t}$$

Распределение вероятностей состояний системы для любого момента времени t:

$$\begin{cases}P_1(t)=0,1-0,365\cdot e^{-2,38\cdot t}+1,25\cdot e^{-4,62\cdot t}\\ P_2(t)=0,45+1,3\cdot e^{-2,38\cdot t}-1,75\cdot e^{-4,62\cdot t}\\ P_3(t)=0,45-0,935\cdot e^{-2,38\cdot t}+0,5\cdot e^{-4,62\cdot t}\end{cases}$$

В задание необходимо было найти финальные вероятности всех состояний системы. Устремив $t\to\infty$, найдем финальное распределение:

$$\begin{cases} \pi_1(t) = 0,1 \\ \pi_2(t) = 0,45 \\ \pi_3(t) = 0,45 \end{cases}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что рассматриваемый студент в среднем только 10% своего времени тратит на занятия, 45% на сон и столько же на развлечения.

2.4. Время перехода цепи Маркова с непрерывным временем из одного состояния в другое

Время перехода из одного состояния в другое T_{kj} при $k \neq j$ для цепей Маркова с непрерывным временем определяется следующими соотношениями:

$$1 + \sum_{k \neq j} q_{ik} T_{kj} = 0 \text{ для } \forall \ i \neq j .$$

Если $i = j$, то естественно $T_{jj} = 0$, поэтому рассматривается $T_{jj}(t)$ – длина интервала от текущего момента времени t, до следующего попадания в это состояния.

Тогда $T_{jj} = M\left\{T_{jj}(t) \middle| \xi(t) = j\right\}$ определяется из уравнения:

$$1 + q_{jj} T_{jj} + \sum_{k \neq j} q_{ik} T_{kj} = 0$$

Для рассмотренного уже неоднократно примера ***22***, найдем на этот раз среднее время перехода из одного состояния в другое.

<u>Пример 26.</u> Пусть $\xi(t)$ является однородной цепью Маркова с двумя состояниями, $X = \{0,1\}$. Время пребывания в состоянии 0 распределено по экспоненциальному закону с параметром λ, а время пребывания в состоянии 1 распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Найти среднее время перехода из одного состояния в другое.

<u>Решение:</u> Ранее было найдено:

$$q_{00} = -\lambda, \ q_{11} = -\mu, \ q_{01} = \lambda, \ q_{10} = \mu .$$

Для $i \neq j$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1+q_{11}T_{10}=0, \\ 1+q_{00}T_{01}=0, \end{cases}$$

Откуда имеем:

$$\begin{cases} 1-\mu T_{10}=0, \\ 1-\lambda T_{01}=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{10}=\dfrac{1}{\mu}, \\ T_{01}=\dfrac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

А для $i=j$ получаем:

$$\begin{cases} 1+q_{11}T_{11}+q_{10}T_{01}=0, \\ 1+q_{00}T_{00}+q_{01}T_{10}=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\mu T_{11}+\mu T_{01}=0, \\ 1-\lambda T_{00}+\lambda T_{10}=0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1-\mu T_{11}+\mu\dfrac{1}{\lambda}=0, \\ 1-\lambda T_{00}+\lambda\dfrac{1}{\mu}=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{11}=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}, \\ T_{00}=\dfrac{\lambda+\mu}{\mu\lambda}. \end{cases}$$

2.5. Процессы гибели и размножения

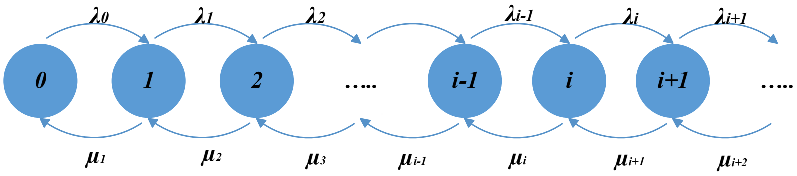
Процессом гибели и размножения называется однородная марковская цепь с непрерывным временем и счетным множеством состояний $X=\{0,1,2,\ldots\}$, в которой за время Δt из состояния i возможен лишь непосредственный переход в состояния $i-1$ и $i+1$, то есть для инфинитезимальных характеристик будут выполнены следующие условия:

$$q_{ii-1}=\mu_i,\ q_{ii+1}=\lambda_i,\ q_{ii}=-(\lambda_i+\mu_i),$$

$$q_{00}=-\lambda_0,\ q_{01}=\lambda_0,\ q_{ij}=0 \text{ для остальных значений } i,j.$$

Процессы гибели и размножения хорошо описывают процессы, протекающие в биологических, физических, социологических системах, а также в системах массового обслуживания. Состояние процесса можно интерпретировать, например, как число особей некоторой популяции, переход из состояния i в $i+1$ – как рождение новой особи, а переход из состояния i в $i-1$ – как гибель некоторой особи.

Процессы гибели и размножения принято изображать в виде размеченного графа состояний, следующего вида:



Вершина графа обозначает состояние цепи Маркова. Ребра графа ориентированы и показывают возможные переходы из одного состояния в другое. В графе рисуют лишь те ребра, которые показывают переходы с ненулевыми инфинитезимальными характеристиками. Эти характеристики обычно пишут рядом с ребрами и называют весами ребер. Удобство такого способа описания марковских процессов заключается в его наглядности и возможности реализации простого правила построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Данное правило можно сформулировать так.

<u>ПРАВИЛО (мнемоническое):</u> *Производная по времени от вероятности состояния в момент времени **t** равна сумме произведений вероятностей состояний на веса ребер, входящих в данное состояние (как будто вероятности **втекают** в данное состояние), минус произведение вероятности рассматриваемого состояния на сумму весов всех ребер, выходящих из него (как будто вероятность **вытекает** из рассматриваемого состояния).*

Прямая и обратная системы дифференциальных уравнений для переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ процессов гибели и размножения имеют вид:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = p_{ij-1}(t)\lambda_{j-1} - p_{ii}(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{ij+1}(t)\mu_{j+1}$$

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_i p_{i+1,j+1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \mu_i p_{i-1j}(t)$$

Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $P_i(t) = P\{i(t) = i\}$ соответственно записывается в виде:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)(\lambda_0 + \mu_0) + P_1(t)\mu_1,$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = P_{i-1}(t)\lambda_{i-1} - P_i(t)(\lambda_i + \mu_i) + P_{i+1}(t)\mu_{i+1},\ i = 1,2,...$$

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей π_j :

$$\pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_i(\lambda_j + \mu_j) + \pi_{j+1}\mu_{j+1} = 0 \quad j = 1,2,\dots,$$

$$\pi_0\lambda_0 - \pi_1\mu_1 = 0\,,$$

$$\sum_i \pi_i = 1\,.$$

Для решения полученной системы можно применить ***метод Хинчина.***

Обозначим $z_j = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_j\mu_j$, тогда из системы уравнений следует, что

$$z_1 = 0\,,\ z_j = z_{j+1}\,,\ \forall j = 1,2,\cdots$$

Следовательно, имеет место равенство:

$$\pi_{j-1}\lambda_{j-1} - \pi_j\mu_j = 0\,,$$

Откуда получаем равенство:

$$\pi_j = \pi_{j-1}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = \pi_0\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} = \pi_0\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}$$

Вероятность π_0 найдём из условия нормировки:

$$\pi_0 = 1\Bigg/\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\} = \left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\}^{-1}.$$

Здесь возможны два случая, связанные со сходимостью ряда $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}$:

1) $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty$,

2) $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \infty$,

В 1 случае если: $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty$, то стационарные вероятности существуют и равны:

$$\pi_j = \left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right\}^{-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\,.$$

Во 2 случае если: $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \infty$, то не существует стационарного распределения для рассматриваемого процесса гибели и размножения.

2.6. Простейший поток

Случайным потоком однородных событий называется последовательность $t_1 < t_2 < ... < t_n ...$ моментов наступления событий.

Обозначим $m(t)$ – число событий наступивших за время t. Пусть для этого процесса выполнены следующие условия: процесс стационарен, ординарен и без последействия.

Стационарность. Поток называется стационарным, если число событий, наступивших на интервале $[s,t)$, не зависит от положения этого интервала на оси времени, а определяется лишь его длиной $t-s$.

Последействие. Число событий, наступивших на некотором интервале времени не зависит от числа событий, наступивших на других, не пересекающихся с ним, интервалах.

Ординарность. Вероятность наступления более одного события за бесконечно малый промежуток времени является бесконечно малой более высокого порядка, чем длина рассматриваемого промежутка.

Обозначим через $p_k(\Delta t)$ вероятность того, что на интервале Δt наступит k событий. Эти вероятности определяются равенствами:

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_k(\Delta t) = o(\Delta t), \ k \geq 1.$$

Определение 3. Случайный поток однородных событий, удовлетворяющий всем трем свойствам, называется ***простейшим***.

Определение 4. Ординарный поток событий без последействия называется ***пуассоновским***.

Простейший поток это стационарный пуассоновский поток, т.е. простейший поток есть частный случай пуассоновского потока.

Определение 5. Интенсивностью потока называется среднее число событий (математическое ожидание числа событий), приходящееся на единицу времени.

Для стационарного потока интенсивность является постоянной величиной, т.е. $\lambda = \text{const}$, для нестационарного очевидно интенсивность является функцией времени $\lambda = \lambda(t)$. ***Мгновенная интенсивность потока*** определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t+\Delta t)$ к длине данного интервала, когда эта длина стремится к нулю.

Среднее число событий, наступающих на интервале времени длины τ, который непосредственно следует за некоторым зафиксированным моментом времени t_1, равно:

$$a(t_1,\tau)=\int_{t_1}^{t_1+\tau}\lambda(t)\,dt$$

В случае если поток стационарный, то $a(t_1,\tau)=\lambda\cdot\tau$.

Пример 27. Найти распределение вероятностей числа наступивших событий в простейшем потоке.

Решение: Обозначим $k(t)$ – число наступивших событий простейшего потока за время t. Для вероятностей $P_k(t)=P\{k(t)=k\}$ получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Учитывая отсутствие последствия, можно записать:

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot P_0(\Delta t)=P_0(t)\left[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right]$$

Аналогично, для $P_k(t)$ можно записать:

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)\left[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right]+P_{k-1}(t)\left[\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right]+o(\Delta t) \qquad \textbf{(*)}$$

После предельного перехода $\Delta t\to 0$, получаем систему дифференциальных уравнений вида:

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t),$$

$$P_k'(t)=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t),\quad \forall k>0$$

Для однозначного решения этой системы надо добавить граничное условие, которое естественно брать в виде:

$$P_k(0)=\begin{cases}1, \text{ если } & k=0,\\ 0, \text{ если } & k\ge 1,\end{cases}$$

Так как в силу ординарности потока на интервале нулевой длины с вероятностью 1 не будет ни одного события.

Решим полученную систему дифференциальных уравнений с помощью метода производящих функций.

2.7. Метод производящих функций

Введем обозначение:

$$G(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t)$$

Тогда систему уравнений Колмогорова **(*)** можно переписать в виде уравнения:

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t}=-\lambda G(z,t)+\lambda z G(z,t)=\lambda(z-1)G(z,t)$$

С начальным условием

$$G(z,0)=1$$

Это уравнение легко решается методом разделения переменных:

$$\frac{dG(z,t)}{G(z,t)}=\lambda(z-1)\lambda dt\,,$$

Откуда, интегрируя в пределах $(0,t)$, получим:

$$\ln G(z,t)-\ln G(z,0)=\lambda(z-1)t$$

Но, как следует из граничного условия:

$$G(z,0)=\sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(0)=z^0 P_1(0)=1\,,$$

И поэтому:

$$G(z,t)=\exp\left[(z-1)\lambda t)\right]=e^{z\lambda t}e^{-\lambda t}\,,$$

Разлагая $e^{z\lambda t}$ в ряд Тейлора, запишем:

$$G(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k(\lambda t)^k}{k!}\,e^{-\lambda t}$$

Очевидно, что число событий простейшего потока, наступивших за произвольный фиксированный интервал времени, распределено по закону ***Пуассона***:

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad (**)$$

2.8. Основные вероятностные характеристики простейшего потока

Получим некоторые, наиболее часто используемые, вероятностные характеристики, используя полученное в предыдущем разделе распределение (**):

- Вероятность того, что в течение времени τ не произойдет ни одного события, равна: $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$;
- Вероятность того, что за промежуток времени τ в потоке наступит хотя бы одно событие, равна: $P_0(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$

Математическое ожидание числа событий, наступивших за время τ:

$$M\left(k(\tau)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} = \lambda\tau$$

Дисперсия числа событий, наступивших за время τ:

$$D\left(k(\tau)\right) = M\left(k^2(\tau)\right) - M^2\left(k(\tau)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}\right]^2 = \lambda\tau$$

Рассмотрим случайную величину, характеризующую ***длину интервала между моментами наступления событий простейшего потока.***

Пусть $\tau = t_k - t_{k-1}$ есть длина интервала между двумя произвольными соседними моментами наступления событий.

По определению функция распределения: $F(t) = P(\tau < t)$. Эта вероятность вычисляется с помощью вероятности противоположного события, то есть:

$$F(t) = P(\tau < t) = 1 - P(\tau > t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ x \geq 0$$

Плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями получим, продифференцировав $F(t)$ по времени:

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ \tau \geq 0$$

Пользуясь полученной функцией плотности распределения, можно получить числовые характеристики случайной величины τ: математическое ожидание $M(\tau)$, дисперсию $D(\tau)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(\tau)$:

$$M(\tau)=\lambda\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda},\ D(\tau)==\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(\tau)==\frac{1}{\lambda}$$

Для малых Δt можно получить приближенную формулу, получаемую заменой функции $e^{-\lambda\Delta t}$, только двумя членами разложения в ряд по степеням Δt, тогда вероятность попадания на малый промежуток времени Δt хотя бы одного события составляет:

$$P(\tau<\Delta t)=1-e^{-\lambda\Delta t}=1-\left[1-\lambda\Delta t+\frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!}-\frac{(\lambda\Delta t)^3}{3!}+...\right]\approx\lambda\Delta t+0(\Delta t).$$

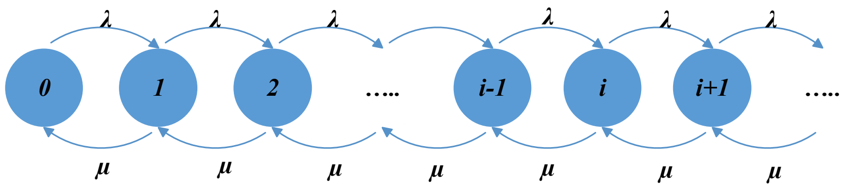
Заключение из всего вышесказанного: Средний интервал времени τ между любыми двумя соседними событиями в простейшем потоке в среднем равен $\frac{1}{\lambda}$ и его среднеквадратическое отклонение также равно $\frac{1}{\lambda}$, где λ – интенсивность потока, т.е. среднее число событий, происходящих в единицу времени.

Из курса теории вероятностей известно, что закон распределения случайной величины, обладающей такими свойствами, является ***показательным*** (или экспоненциальным), а величина λ является параметром этого показательного закона.

Таким образом, для простейшего потока математическое ожидание интервала времени между соседними событиями равно его среднеквадратическому отклонению.

Пример 28. Пусть клиенты, которые хотят получить консультацию, образуют простейший поток с параметром λ. Клиентов обслуживает один работник социальной сферы, если он занят, образуется очередь. Считается, что длина очереди не ограничена. Время обслуживания одного клиента является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ. Пусть $i(t)$ – число клиентов, находящихся в системе в момент t. Найти финальные вероятности числа клиентов в системе.

Решение: пусть $i(t)$ есть число клиентов, находящихся в системе в момент времени t. Граф вероятностей переходов для процесса $i(t)$ изображен на рисунке:



Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + \mu) P_i(t) + \mu P_{i+1}(t), \ i \geq 1.$$

Очевидно, что система уравнений для финальных вероятностей примет вид:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0, \\ \lambda\pi_{i-1} - (\lambda+\mu)\pi_i + \mu\pi_{i+1} = 0, i \geq 1, \\ \sum\limits_i \pi_i = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0.$$

Из уравнения для $i = 2$:

$$\lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0,$$

Получаем:

$$\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0.$$

Аналогично для

$$\pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0.$$

Можно показать, что:

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \pi_0$$

Тогда из условия нормировки получаем, что

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1.$$

Так как ряд сходится при $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, то и стационарный режим существует лишь при $\lambda < \mu$.

В этом случае:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\frac{\mu-\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

Следовательно, $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

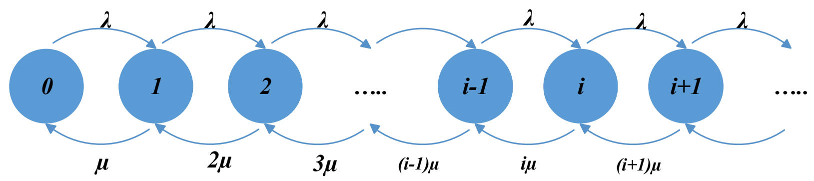
Окончательно, финальные вероятности числа клиентов в системе определяются по формуле:

$$\pi_i = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i.$$

Рассмотрим пример на применение ***производящих функций*** при решении систем дифференциальных уравнений Колмогорова.

<u>Пример 29.</u> Поток клиентов, пришедших открыть счет (депозит) в банке, является простейшим с параметром λ, будем считать, что случайная величина, характеризующая продолжительность обслуживания счета, является экспоненциально распределенной с параметром μ. Найти распределение вероятностей числа счетов в банке в момент времени t, если в начальный момент времени в банке не было ни одного счета.

<u>Решение:</u> Пусть $i(t)$ есть число клиентов, счета которых обслуживаются в банке, в момент времени *t*. Граф вероятностей переходов для процесса $i(t)$ изображен на рисунке:



Составляем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P_i(t) = P\{i(t) = i\}$:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t).$$

Очевидно, начальные условия имеют вид:

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = 0, \\ 0, \text{ если } i > 0. \end{cases}$$

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений, определим производящую функцию:

$$F(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(t).$$

Домножим каждое уравнение системы на z^i и просуммируем:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i'(t) = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_{i-1}(t) - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} z^i P_i(t) + \mu \sum_{i=0}^{\infty} i z^i P_i(t) + \mu \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) z^i P_{i+1}(t).$$

При этом учитываем, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} z^i P_{i-1}(t) = zF(z,t) \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} i z^i P_i(t) = z\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \lambda z F(z,t) - \lambda F(z,t) - \mu z \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} + \mu \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}, \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + \mu(z-1)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \lambda(z-1)F(z,t).$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик которого имеет вид:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{\mu(z-1)} = \frac{dF}{\lambda(z-1)F}.$$

Рассмотрим первое равенство: $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dz}{\mu(z-1)}$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$t = \frac{1}{\mu}\ln(z-1) + \frac{1}{\mu}\ln C_1$$

Или

$$e^{\mu t} = C_1(z-1)$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{1}{z-1}e^{\mu t}.$$

Из второго равенства получим:

$$\frac{dz}{\mu} = \frac{dF}{\lambda F},$$

Откуда следует:

$$\ln F = \frac{\lambda}{\mu} z + \ln C_2 .$$

Тогда

$$F = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} C_2 ,$$

Где

$$C_2 = \varphi(C_1) = \varphi\left(\frac{1}{z-1} e^{\mu t}\right).$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$F(z,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} C_2 = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} \varphi\left(C_1\right) = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} \varphi\left[\frac{1}{z-1} e^{\mu t}\right],$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция.

Найдем ее вид, используя начальное условие $F(z,0) = 1$:

$$F(z,0) = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} \varphi\left[\frac{1}{z-1}\right] = 1 .$$

Отсюда

$$\varphi\left[\frac{1}{z-1}\right] = e^{-\frac{\lambda}{\mu} z}$$

Выполнив замену:

$$\frac{1}{z-1} = y$$

Получим:

$$\varphi\left(y\right) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1+\frac{1}{y}\right)}.$$

Следовательно:

$$F(z,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{z-1}e^{\mu t}}\right)} = e^{\frac{\lambda}{\mu} z} e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1+(z-1)e^{-\mu t}\right)} = e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\left[1-e^{-\mu t}\right]} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)\left[1-e^{-\mu t}\right]}.$$

Разлагая эту функцию в ряд по степеням z^i, найдем вероятности $P_i(t)$ следующим образом:

$$e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)\left[1-e^{-\mu t}\right]}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}e^{\frac{\lambda}{\mu}z\left[1-e^{-\mu t}\right]}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}z\left[1-e^{-\mu t}\right]\right]^i}{i!}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}z^i\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]\right]^i}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}=\sum_{i=0}^{\infty}z^iP_i(t).$$

Следовательно, распределение является пуассоновским с параметром $\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]$

$$P_i(t)=\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]\right]^i}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]}.$$

Отсюда можно определить финальное распределение:

$$\lim_{t\to\infty}P_i(t)=\pi(i)=\frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}e^{-\lambda/\mu}.$$

Распределение $\pi(i)$ является пуассоновским с параметром λ/μ.

Задачи для самостоятельного решения по теме «Цепи Маркова с непрерывным временем»

1. Жизненный цикл студента включает как минимум три состояния: занятия $i=1$, развлечения $i=2$ и сон $i=3$ с переходами $1\to 2\to 3\to 1\ldots$ Время пребывания в каждом из состояний экспоненциальное с параметрами 1,1,1. Определить вероятности состояний студента в произвольный момент времени t. Найти финальные вероятности всех состояний системы. Известно, что в начальный момент времени $t=0$ студент спит.

2. Имеется цепь Маркова с двумя состояниями. Время пребывания в каждом из них распределено по экспоненциальному закону с параметром λ. $N(t)$ – число переходов из одного состояния в другое за время t. Найти вероятностное распределение $N(t)$, то есть $P_k(t)=P\{N(t)=k\}, k=0,1,2\ldots$

Указание: Записать формулу полной вероятности для $P_k(t+\Delta t)$, и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получить дифференциальные уравнения относительно $P_k(t)$.

3. Марковская цепь с двумя состояниями задана вероятностями переходов за бесконечно малое время τ:

$$p_{12}(\tau)=\lambda_1\tau+o(\tau), \qquad p_{11}(\tau)=1-\lambda_1\tau+o(\tau),$$

$$p_{21}(\tau)=\lambda_2\tau+o(\tau), \qquad p_{22}(\tau)=1-\lambda_2\tau+o(\tau)$$

Нарисовать граф переходов для этой цепи, записать прямую и обратную системы уравнений Колмогорова. Решить обратную систему и найти финальные вероятности предельным переходом в этом решении.

4. Некоторый прибор подвержен отказам двух типов. Пусть вероятность отказа первого типа за бесконечно малое время τ равна $\lambda_1\tau+o(\tau)$, а вероятность отказа второго типа за это же время τ равна $\lambda_2\tau+o(\tau)$. В состоянии отказа производится ремонт, длительность которого распределена по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 для отказов первого и второго типов соответственно. Найти вероятность того, что прибор работает в момент времени t, если известно, что в начальный момент времени прибор был исправен. Найти финальные вероятности всех состояний системы.

Указание: Данная система описывается цепью Маркова с непрерывным временем с тремя состояниями: ***0*** – прибор исправен; ***1*** – произошел отказ первого типа и выполняется его восстановление; ***2*** – произошел отказ второго типа и выполняется его восстановление.

5. Имеются два трансатлантических кабеля, каждый из которых может передавать одновременно только одно телеграфное сообщение. Время исправной работы каждого из них имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Время ремонта, в случае поломки, распределено тоже по экспоненциальному закону с параметром μ. Найти вероятность того, что два сообщения, поступившие одновременно найдут оба кабеля исправными, при условии, что в момент $t=0$ оба кабеля были исправны. Найти финальные вероятности всех состояний системы.

6. Данные, полученные при исследовании рынка ценных бумаг, показали, что рыночная цена одной акции акционерного общества может колебаться в пределах от 1 руб. до 10 руб. Будем интересоваться следующими состояниями, характеризующимися рыночной ценой акции: ***S1*** – от 1 руб. до 4 руб.; ***S2*** – от 4 руб. до 7 руб.; ***S3*** – от 7 руб. до 9 руб.; ***S4*** – от 9 руб. до 10 руб. Замечено, что рыночная цена акции в будущем существенно зависит от ее цены в те-

кущий момент времени. При этом в силу случайных воздействий рынка изменение цены может произойти в любой случайный момент времени. Матрица инфинитезимальных характеристик имеет вид: $Q = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. Составить долгосрочный прогноз рыночной цены акции и ответить на вопрос: стоит ли приобретать акции по цене 6 руб. за акцию?

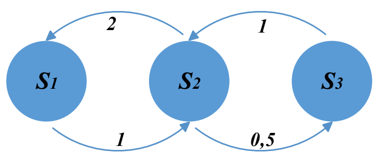
7. Марковская цепь с тремя состояниями задана вероятностями переходов за бесконечно малое время τ:

$$p_{12}(\tau) = \lambda_1\tau + o(\tau),\ p_{11}(\tau) = 1 - \lambda_1\tau + o(\tau),\ p_{13}(\tau) = p_{31}(\tau) = 0,\ p_{21}(\tau) = \lambda_2\tau + o(\tau),$$

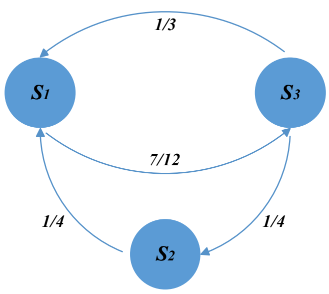
$$p_{23}(\tau) = \mu_2\tau + o(\tau),\ p_{22}(\tau) = 1 - (\lambda_2 + \mu_2)\tau + o(\tau),\ p_{32}(\tau) = \mu_2\tau + o(\tau),\ p_{33}(\tau) = 1 - \mu_2\tau + o(\tau).$$

Найти финальные вероятности состояний системы и среднее время перехода из одного состояния в другое.

8. По размеченному графу состояний составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний и решить ее. Найти финальное распределение. Вектор начальных вероятностей $\Theta = (0,1,0)$.



9. По размеченному графу состояний составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний и решить ее. Найти финальное распределение. Вектор начальных вероятностей $\Theta = (0,1,0)$.



10. Два библиотекаря выдают книги. Время обслуживания одного читателя распределено по экспоненциальному закону с параметром q. Поток читателей образует пуассоновский поток с параметром λ. Состояние системы определяется числом свободных библиотекарей. Найти вероятность того, что читателю не откажут в обслуживании.

11. Система состоит из N идентичных элементов, каждый из которых работает независимо от других, причем время безотказной работы имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Отказавший элемент ремонтируется в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. Состояние системы определяется числом исправных элементов. Найти инфинитезимальные параметры, отличные от нуля, для цепи Маркова, описывающую такую систему.

12. Один мастер следит за работой M аппаратов, которые при исправной работе не требуют его вмешательства. Сбои в работе происходят в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток с параметром λ. На устранение неполадки мастер тратит случайное время τ, распределенное по экспоненциальному закону с параметром ν. Под состояние системы будем понимать число аппаратов ожидающих своей очереди. Найти инфинитезимальные параметры для такой системы.

13. Рассмотрите процесс чистого размножения с инфинитезимальными параметрами:

а) $\lambda_i = \lambda$,

б) $\lambda_i = i\lambda$, $i \geq 1$

в) $\lambda_i = (N-i)\lambda$, $0 \leq i \leq N$

Найдите среднее число особей $M\xi(t)$ и $D\xi(t)$ в произвольный момент времени.

14. ***Задача Эрланга.*** Найти стационарное распределение вероятностей π_i процесса гибели и размножения с параметрами $\mu_i = i\mu$, $\lambda_i = \lambda$, $\lambda_N = 0$, где N – число состояний системы. Найти среднее время перехода T_{0N}, T_{N0}.

15. Дан пуассоновский поток с параметром λ. Известно, что за время t наступило n событий. Найти плотность распределения вероятностей времени наступления r-го события ($r < n$).

<u>Указание:</u> Пусть t_r – момент наступления r-го события. Рассмотрим группу независимых событий:

H1 – за время $[0, t_r)$ наступило $r-1$ событие;

H2 – за время $[t_r, t_r+dt)$ наступило одно событие;

H3 – за время $[t_r+dt, t]$ наступило $n-r$ событий

Далее воспользоваться определением условной вероятности наступления *r*-го события $p_r(t_r)$, при условии, что за время $t > t_r$ наступило $n > r$ событий.

16. Некоторый прибор выходит из строя после воздействия ***K*** возмущений. Возмущения образуют пуассоновский поток с параметром λ. Найти плотность распределения времени безотказной работы прибора.

17. Телефонный узел имеет m каналов. Моменты поступления вызовов образуют пуассоновский поток с параметром λ. Вызовы обслуживаются, если имеется свободный канал, в противном случае они теряются. Продолжительность каждого разговора – случайная величина с экспоненциальным законом распределения с параметром μ. Длительности отдельных разговоров – независимые случайные величины. Под состоянием системы будем понимать число свободных каналов. Найти финальные вероятности состояний системы.

18. Система состоит из *N* идентичных каналов, каждый из которых работает независимо от других случайное время до отказа. Время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону с параметром λ. Отказавший элемент ремонтируется, причем время ремонта распределено тоже по экспоненциальному закону с параметром μ. Состояние системы определяется числом элементов находящихся в ремонте. Найти финальные вероятности состояний системы.

19. Дан процесс гибели и размножения с параметрами $\mu_i = i\mu$, $\lambda_i = i\lambda$. Считая, что $\xi(0) = 1$, найти распределение числа живущих индивидуумов в момент времени t. Рассмотреть случаи $\lambda = \mu$, $\lambda > \mu$, $\lambda < \mu$.

<u>Указание:</u> воспользоваться производящей функцией: $F(z.t) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(t)$.

20. Решить систему дифференциальных уравнений для процесса гибели и размножения с конечным числом состояний, для которого $\mu_i = iq$, $\lambda_i = (N-i)p$, $p+q=1$, $i = 0,1,2,...$ Начальные условия имеют вид:

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

21. Частицы, вылетающие из радиоактивного вещества, образуют простейший поток с параметром λ. Каждая частица независимо от других с вероятностью p регистрируется счетчиком. Определить вероятность того, что за время t зарегистрировано n частиц.

22. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что за время t зарегистрировано n частиц, если $p = 1$ и после каждого момента регистрации частицы счетчик отключается на случайное время τ, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ.

23. По двум линиям связи в коммутационный узел поступает два независимых простейших потока сообщений с параметрами λ_1 и λ_2. Найти вероятность того, что за время t в узел поступит n сообщений.

24. В населенном пункте ведет прием один врач-инфекционист. Известно, что за бесконечно малый отрезок времени Δt каждый больной с вероятностью λ передает инфекцию здоровому человеку. Предположим, что после обращения к врачу больной становится не опасен для окружающих. Время лечения будем считать экспоненциальным с параметром μ. Найти нестационарное распределение вероятностей числа больных. В начальный момент болен был один человек.

25. Клиенты, обращающиеся в мастерскую бытового обслуживания, образуют простейший поток с параметром λ. Каждый клиент обслуживается одним мастером в течение случайного времени, подчиняющегося показательному закону с параметром μ. В случае отсутствия свободных мастеров клиент не ждет, а отказывается от обслуживания. Определить, сколько необходимо иметь мастеров, чтобы вероятность отказа клиенту в обслуживании не превосходила 0,015, если $\mu = \lambda$.

26. Решить предыдущую задачу при условии, что число обслуживающих рабочих равно r ($r < m$).

27. В электронно-вычислительной машине могут быть применены либо элементы A, либо B. Отказы этих элементов образуют простейший поток с параметрами $\lambda_A = 0{,}1$ ед./час и $\lambda_B = 0{,}01$ ед./час. Суммарная стоимость всех элементов A равна a, суммарная стоимость

элементов B равна b ($b > a$). Неисправность элемента вызывает простой машины на случайное время ремонта, подчиняющееся показательному закону распределения со средним временем, равным двум часам. Стоимость каждого часа простоя машины равна c. Найти математическое ожидание экономии от применения более надежных элементов за 1000 часов работы машины.

28. Для анализа изменения с течением времени размера текущего фонда компании, ведущей дела по страхованию автомобилей, важно обладать информацией о поступлении требований по выплатам в соответствии со страховыми полисами. Наблюдение показало, что число поступающих выплат за любой промежуток времени не зависит от момента времени, с которого начинается отсчет, а зависит только от его продолжительности; требования в любые два не пересекающиеся интервала времени поступают независимо; в достаточно малые промежутки поступает по одному требованию Ожидаемое число требований равно 2. ***Найти:***

1) Вероятность того, что за месяц в компанию поступит 7 требований?

2) Вероятность того, что за месяц в компанию поступит не менее 7 требований?

3) Вероятность того, что за месяц в компанию поступит менее 7 требований?

4) Вероятность того, что за месяц в компанию не поступит ни одного требования?

5) За две недели поступит хотя бы одно?

6) Интервал между двумя соседними требованиями будет меньше двух дней?

7) Интервал между двумя соседними требованиями будет не менее двух дней?

С какой вероятностью:

1) За ноябрь поступит в компанию 6 требований?

2) За декабрь поступит в компанию 6 требований?

3) За январь поступит в компанию не менее 5 требований?

4) За первые две недели ноября не поступит ни одного требования?

5) За вторую и третью недели декабря поступит хотя бы одно требование?

6) Интервал времени межу соседними поступлениями требований будет не менее трех дней, если первое из них поступило в первый день второй недели января?

7) Интервал времени межу соседними поступлениями требований будет меньше двух дней, если первое из них поступило в начале третьей недели декабря?

29. При рассмотрении деятельности страховой компании за определенный период нас будет интересовать изменении ее начального фонда, происходящее благодаря поступлению в компанию страховых взносов и выплатам компании по страховым полисам. В связи с этим рас-

смотрим три состояния, характеризующиеся величиной фонда, который принимаем за 100%: 1 – текущий фонд составляет не менее 200% начального фонда, 2 – текущий фонд составляет от 100% до 200% начального фонда, 3 – менее 100% начального фонда. Изучение деятельности в предыдущие периоды позволяет сделать вывод о том, что ее переходы из состояния в состояние характеризуются следующей матрицей инфинитезимальных характеристик, не зависящих от времени:

$$Q = \begin{pmatrix} -3.8 & 2.3 & 1.5 \\ 0.8 & -2.7 & 1.9 \\ 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}$$

Обосновать, что в этой системе протекает однородный дискретный Марковский процесс с непрерывным временем, построить граф состояний, записать систему дифференциальных уравнений и найти вероятности состояний, если в момент, предшествующий рассматриваемому периоду фонд составлял 150 % от начального фонда, найти финальные вероятности системы.

30. Поток поступления неисправной аппаратуры в мастерскую гарантийного ремонта является простейшим с параметром $\lambda = 10$ ед./час. Продолжительность ремонта одной единицы является случайной величиной, имеющей показательный закон распределения с параметром $\mu = 5$ ед./час. Определить среднее время, проходящее от момента поступления неисправной аппаратуры до начала ремонта, если в мастерской четверо рабочих, каждый из которых одновременно ремонтирует только один прибор.

31. В травматологическом пункте работают два врача. С какой наибольшей интенсивностью могут поступать больные, чтобы среднее число ожидающих в очереди не превосходило трех, если на оказание помощи больному в среднем затрачивается 9 мин?

32. В мастерскую срочного ремонта обуви, имеющую двух мастеров, обращаются в среднем 18 клиентов в час, а среднее время обслуживания одного клиента 5 мин. Какова вероятность для клиента завершить починку обуви не более чем за полчаса?

33. На коммутатор, имеющий три внешние линии связи, поступает в среднем в час 60 требований на связь. Средняя продолжительность переговоров 3 мин. ***Определить***: а) вероятность отказа абоненту; б) среднее число занятых линий.

34. В цехе 2 взаимозаменяемые технологические линии сборки изделий. Для работы цеха достаточно, чтобы работала хотя бы одна линия. Поток отказов – простейший с интенсивностью $\lambda = 1$. При выходе из строя линия начинает мгновенно ремонтироваться и через Δ единиц времени ($\Delta \in E(\mu = 1)$) полностью восстанавливается. Какова вероятность, что за время t цех ни разу не прекратит работу? Найти финальное распределение вероятностей.

35. Рассматривается одноканальная система массового обслуживания, в которой очередь на обслуживание не превышает двух требований. Канал может выходить из строя. Требование, которое обслуживалось в момент отказа, становится в очередь, если очередь меньше двух, в противном случае покидает систему необслуженным. Найти финальное распределение вероятностей.

36. На контактном многоканальном телефоне фирмы работает 4 оператора. Каждый свободный оператор независимо от других на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ может с вероятностью $\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ начать отвечать на звонок. Оператор, отвечающий на звонок, с вероятностью $\mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ может завершить ответ и освободиться. Требуется найти финальные вероятности того, что будут заняты $k = \overline{0,4}$ операторов.

37. К линии электропередач подключены 3 электромотора, которые работают независимо друг от друга. Вероятность того, что неработающий электромотор в течение малого времени Δt будет подключен к сети, равна $\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$. Вероятность отключения работающего электромотора в течение малого времени Δt равна $\mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$. Найти финальные вероятности числа электромоторов, работающих в данный момент.

38. Система массового обслуживания состоит из двух обслуживающих устройств. В систему поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Времена обслуживания заявок независимы и имеют показательный закон распределения с параметром μ. Заявка заставшая все устройства занятыми, может встать в очередь или покинуть систему. Вероятность присоединения к очереди пропорциональна числу обслуживающих устройств и обратно пропорциональна числу заявок в системе плюс один. Это означает, что интенсивность перехода $E_{2+m} \to E_{m+3}$ равна $\dfrac{2\lambda}{m+3}$. Требуется найти стационарное распределение числа заявок в системе.

Литература

1. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы : учеб. для вузов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 448 с.
2. *Маталыцкий М.А.* Элементы теории случайных процессов : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2004. 326 с.
3. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М. : Наука, 1991. 384 с.
4. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с.
5. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр, и доп. М. : КомКнига, 2005. 400 с.
6. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
7. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
8. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 448 с.
9. *Соколов Г.А.* Теория случайных процессов для экономистов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 208 с.
10. *Ахтямов А.М.* Математические модели экономических процессов. Уфа : РИЦ БашГУ, 2009. 140с.
11. *Боярский А.Я.* Математика для экономистов. М. : Госстатиздат, 1961. 464 с.
12. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М. : Советское радио, 1972. 552 с.
13. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. 3-е изд. М. : Айрис-пресс, 2008. 290 с.
14. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Наука, 1986. 328 с.
15. *Донской Е.Н.* Курс теории вероятностей с элементами случайных процессов и математической статистики. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. 288 с.
16. *Максимов Ю.Д.* Математика. Теория вероятностей и случайных процессов. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2008. 384 с.
17. *Сборник* задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова. СПб. : Лань, 2007. 448 с.

18. *Власенков В.М.* Основы теории случайных процессов в практическом изложении. Комсомольск-на-Амуре : Изд-во КнАГТУ, 2004. 99 с.
19. *Марченко Л.В.* Случайные процессы : учеб. пособие. Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2013. 75 с.
20. *Храмов А.Г.* Теория случайных процессов : электронное учебное пособие. Самара : Самарский аэрокосмический университет, 2011.
21. *Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г.* Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы : учеб. пособие. М. : Издательский дом МЭИ, 2013. 368 с.
22. *Син Л.И.* Элементы теории случайных процессов : методическое пособие. Шахты : ЮРГУЭС, 2002. 32 с.
23. *Крицкий О.Л.* Введение в теорию случайных процессов : учеб. пособие. Томск : Изд-во ТПУ, 2009. 110 с.

Приложение 1

Некоторые распределения случайных величин

1. ***Распределение Бернулли.*** Случайная величина ξ – число наступлений некоторого события в одном испытании. $P(\xi = 1) = p$, $P(\xi = 0) = q$, $M\xi = p$, $D\xi = p \cdot q$, характеристическая функция: $g_\xi(u) = q + p \cdot e^{iu}$.

2. ***Биномиальное распределение.*** Случайная величина ξ – число наступлений некоторого события в ***n*** независимых испытаниях. $P(\xi = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, $m = \overline{0, n}$, p – вероятность успеха в одном испытании, q – вероятность неудачи. $M\xi = n \cdot p$, $D\xi = n \cdot p \cdot q$, характеристическая функция: $g_\xi(u) = \left(q + p \cdot e^{iu}\right)^n$.

3. ***Геометрическое распределение.*** В схеме Бернулли ξ – число испытаний до первого наступления события. $P(\xi = m) = p \cdot q^{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$; $q = 1 - p$, $M\xi = \dfrac{1}{p}$, $D\xi = \dfrac{q}{p^2}$; характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{p \cdot e^{iu}}{1 - q \cdot e^{iu}}$.

4. ***Распределение Пуассона.*** Случайная величина ξ – число событий, наступивших в пуассоновском потоке, $P(\xi = m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $m = 0, 1, \ldots$; $M\xi = D\xi = \lambda$ характеристическая функция: $g_\xi(u) = e^{\lambda \cdot (e^{iu} - 1)}$.

5. ***Равномерное распределение на конечном множестве.*** Случайная величина ξ – принимает любое из значений некоторого интервала с одинаковыми вероятностями. Закон распределения и числовые характеристики:

$$P(\xi = m) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , a \le k \le b \\ 0 \ , & else \end{cases} \quad n = b - a + 1;\ k \in \{a, a+1, \ldots, b-1, b\};\ M\xi = \frac{a+b}{2};\ D\xi = \frac{n^2 - 1}{12}$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{e^{iau} - e^{i(b+1)u}}{n \cdot (1 - e^{iu})}$.

6. ***Непрерывное равномерное распределение***. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей и числовыми характеристиками:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 \ , & else \end{cases} \qquad M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu \cdot (b-a)}$.

7. Экспоненциальное распределение. Плотность вероятности случайной величины ξ с таким распределением и числовые характеристики:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , \ x \ge 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0, \ M\xi = \frac{1}{\lambda}, \qquad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{\lambda}{\lambda - iu}$.

8. Распределение Коши. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \quad \lambda, a > 0, \ x \in (-\infty, \infty)$$

Данное распределение не имеет конечных математического ожидания и дисперсии, характеристическая функция: $g_\xi(u) = e^{iau - \lambda|u|}$.

9. Нормальное распределение. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad M\xi = a, \ D\xi = \sigma^2, \ x \in (-\infty, \infty)$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \exp\left\{iau - \dfrac{\sigma^2 u^2}{2}\right\}$.

10. Двумерное нормальное распределение. Распределение случайной величины (ξ, η) с совместной плотностью вероятностей:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_\xi \sigma_\eta \sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{(y-a_\eta)^2}{\sigma_\eta^2} - 2r \cdot \frac{(x-a_\xi)\cdot(y-a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}\right\}\right\},$$

$M\xi = a_\xi, \ M\eta = a_\eta, \ D\xi = \sigma_\xi^2, \ D\eta = \sigma_\eta^2$

r – коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

11. Распределение Лапласа. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей: $p_\xi(x) = \dfrac{1}{2} \cdot e^{-|x|}$ $\quad M\xi = 0, \ D\xi = 2$ характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$.

12. Гамма распределение. Распределение интервала времени, необходимого для появления ***k*** событий в пуассоновском потоке интенсивности λ, имеет плотность вероятностей и числовые характеристики:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0 \qquad , & x < 0 \end{cases} \qquad \lambda, \alpha > 0, \ M\xi = \frac{\alpha}{\lambda}, \ D\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \ \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z}\, dz$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \left(1 - \dfrac{iu}{\lambda}\right)^{-\alpha}$.

Учебное издание

Оксана Николаевна Галажинская
Светлана Петровна Моисеева

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Часть 2
Марковские процессы

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Компьютерная верстка А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 12.10.2016 г. Формат $60\times84^{1}/_{8}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,6.
Тираж 100 экз. Заказ № 2117.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru