

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией
физического факультета
Председатель комиссии Н.Г. Брянцева

В методическом пособии рассматривается параметрическое возбуждение колебаний на примере математического маятника с модулированной длиной. Приводится теоретическое рассмотрение с энергетической точки зрения основного параметрического резонанса в математическом маятнике с прямоугольной модуляцией длины.

Для студентов физических специальностей дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛЬ: доцент *Н.И. Федяйнова*

РЕЦЕНЗЕНТ: *Э.Д. Ковалёнок*

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Цель работы: экспериментально исследовать явление параметрического резонанса.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Если маятник отклонить на угол φ из положения равновесия (рис. 1), он под действием момента силы тяжести начнёт совершать вращательное движение относительно оси z , проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку подвеса O .

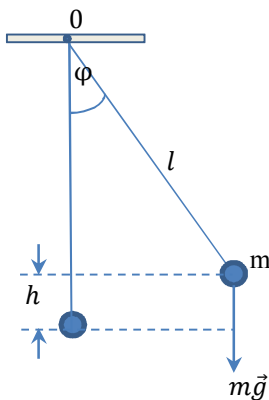


Рис. 1

Запишем уравнение моментов относительно этой оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

где $L_z = I_z \dot{\varphi}$; $M_z = -mgl \sin \varphi$, если за положительное принять направление оси z , совпадающее с направлением вектора угловой скорости.

Будем рассматривать груз m в модели материальной точки, а длину нити $l = \text{const}$. Тогда момент инерции $I_z = ml^2$ не будет изменяться в процессе движения и уравнение можно записать в виде:

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi.$$

Для малых углов отклонения, когда можно рассматривать приближение $\sin \varphi \approx \varphi$, получаем уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0,$$

решением которого будут гармонические колебания:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота колебаний математического маятника.

Рассмотрим изменение полной механической энергии математического маятника в процессе его движения.

Кинетическая энергия

$$E_k = \frac{I(\dot{\varphi})^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 (\omega_0)^2 (\varphi_0)^2 [\sin(\omega_0 t + \alpha)]^2;$$

Потенциальная энергия относительно положения равновесия

$$E_{\pi} = mgh = mgl(1 - \cos \varphi).$$

Разложив функцию $\cos \varphi$ в ряд Тейлора около точки $\varphi = 0$ (положение равновесия математического маятника), для малых углов отклонения получим: $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$. В этом приближении потенциальная энергия математического маятника может быть представлена в виде:

$$E_{\pi} = \frac{1}{2} mgl \varphi^2 = \frac{1}{2} ml^2 (\omega_0)^2 (\varphi_0)^2 [\cos(\omega_0 t + \alpha)]^2,$$

поскольку

$$(\omega_0)^2 = \frac{g}{l}.$$

Имея ввиду, что

$$\begin{aligned} [\cos(\omega_0 t + \alpha)]^2 &= \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha)] \\ [\sin(\omega_0 t + \alpha)]^2 &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha)], \end{aligned}$$

кинетическую и потенциальную энергии можно представить в виде:

$$E_k = \frac{1}{4} ml^2 (\omega_0)^2 (\varphi_0)^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha)]$$

$$E_{\pi} = \frac{1}{4} ml^2 (\omega_0)^2 (\varphi_0)^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha)]$$

Следовательно, кинетическая и потенциальная энергии совершают гармонические колебания вокруг общего среднего значения $\frac{1}{4} ml^2 (\omega_0)^2 (\varphi_0)^2$ с удвоенной круговой частотой $2\omega_0$. Когда кинетическая энергия проходит через максимум, потенциальная обращается в нуль и наоборот. При этом полная механическая энергия маятника остаётся неизменной:

$$E = E_k + E_{\pi} = \frac{1}{2} ml^2 (\omega_0)^2 (\varphi_0)^2.$$

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Параметрическое возбуждение колебаний происходит в результате развития так называемой параметрической неустойчивости, возникающей при периодическом воздействии на те параметры системы, которые определяют величину запасённой колебательной энергии. Для математического маятника – это длина нити или масса груза.

Предположим, что длина нити маятника изменяется со временем $l = l(t)$, тогда

$$\frac{d(ml^2 \dot{\varphi})}{dt} = -mgl \sin \varphi \quad \text{примет вид}$$

$$2ml\dot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0.$$

Для малых углов отклонения маятника из положения равновесия получим уравнение вида:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Анализ и решение этого уравнения очень сложны. Следует также подчеркнуть, что линейное уравнение параметрических колебаний получается для малых углов отклонения маятника из положения равновесия, не превышающих нескольких градусов ($\varphi_{\text{предельное}} \cong 8^\circ$).

В случае бóльших отклонений проявляются нелинейные эффекты, когда период собственных колебаний начинает зависеть от амплитуды колебаний φ_0

$$T_{\text{онел.}}(\varphi_0) \approx T_0 \left(1 + \varphi_0^2/16 \right) \quad (1)$$

Для понимания происходящих физических процессов удобно рассмотреть явление возникновения параметрического резонанса с энергетической точки зрения. Рассмотрим идеализированную модель, в которой модуляция длины маятника происходит по прямоугольному закону, аналогично тому, как периодически изменяется момент инерции качелей (физического маятника) в результате того, что стоящий на них ребёнок сгибает ноги в коленях в положении наибольшего отклонения и распрямляется каждый раз, когда качели проходят через положение равновесия.

Приближение прямоугольной модуляции применимо к реальному маятнику при условии, что изменения длины происходят в течение промежутков времени, составляющих малую долю периода собственных колебаний.

Предположим, что почти мгновенные увеличения и уменьшения длины маятника происходят последовательно через промежутки времени, равные $T/2$, где T – полный период изменения длины маятника (период модуляции). Если длина маятника уменьшается, когда он проходит положение равновесия (следовательно, уменьшается его момент инерции и увеличивается угловая скорость), маятник получает дополнительную кинетическую энергию. Напротив, при мгновенном увеличении длины нити угловая скорость и кинетическая энергия маятника уменьшаются. Уменьшение энергии означает, что энергия возвращается источнику, который производит модуляцию длины нити.

Таким образом, период и фаза модуляции должны удовлетворять определённым условиям. В частности, наиболее быстрый рост амплитуды колебаний маятника происходит, если длина маятника уменьшается каждый раз, когда он пересекает положение равновесия, и увеличивается до прежнего значения в положениях наибольшего отклонения, когда его скорость обращается в нуль. В таких

условиях уменьшения энергии маятника не происходит. Следовательно, **наиболее быстрый (резонансный) рост амплитуды происходит при условии, что два цикла модуляции длины совершаются на протяжении одного периода собственных колебаний маятника. То есть частота изменения длины маятника в два раза больше собственной частоты колебаний маятника и совпадает с частотой изменения кинетической энергии. Это основной параметрический резонанс.**

Энергия маятника может возрастать не только тогда, когда два цикла модуляции параметра происходят на протяжении одного периода собственных колебаний маятника, но и когда два цикла модуляции приходятся на любое нечётное число периодов собственных колебаний. Это резонансы нечётных порядков.

Передача энергии маятнику, хотя и менее эффективная, происходит и при резонансах чётных порядков.

В реальной системе рост амплитуды при параметрическом резонансе ограничивается за счёт нелинейных эффектов. В нелинейной системе, такой, как маятник, период собственных колебаний зависит от амплитуды φ_0 (1). Если условия параметрического резонанса выполняются при малых амплитудах колебаний, то нарушаются при больших амплитудах – система «выпадает» из резонанса. Фаза модуляции становится неблагоприятной для «подпитки» маятника энергией, и происходит обратная передача энергии от маятника к источнику модуляции. Это приводит к постепенному уменьшению амплитуды. При этом собственный период маятника начинает уменьшаться, и условия для роста амплитуды постепенно восстанавливаются. Колебания маятника приобретают характер биений. Из-за трения эти переходные биения постепенно затухают и амплитуда колебаний приближается к окончательному постоянному значению.

Найдём относительное приращение энергии $\Delta E/E$ за один цикл модуляции, а именно между двумя последовательными прохождением маятника через положение равновесия в противоположных направлениях.

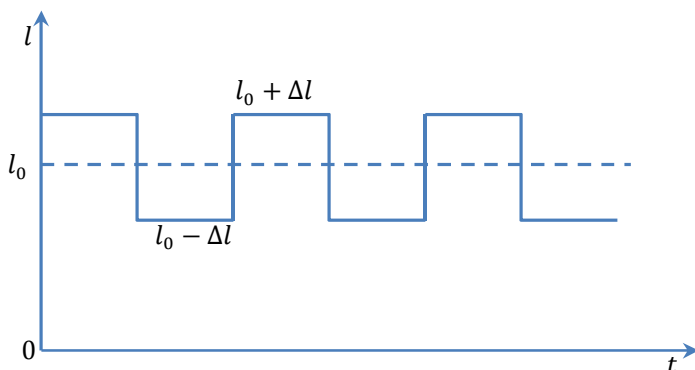


Рис. 2

Пусть в условиях основного параметрического резонанса изменения длины l (рис. 2) маятника происходят между значениями

$$l_1 = l_0(1 + k_l) \text{ и } l_2 = l_0(1 - k_l),$$

где $k_l = \frac{\Delta l}{l_0}$ — безразмерная величина, называемая глубиной модуляции.

При первом прохождении положения равновесия кинетическая энергия в расчёте на единицу массы груза равна

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2},$$

где V_1 — скорость груза.

В этот момент длина маятника изменяется от значения $l_0(1 + k_l)$ до $l_0(1 - k_l)$. При скачкообразном изменении длины маятника момент импульса $L = I\dot{\varphi} = ml^2\dot{\varphi}$ сохраняется:

$$ml_0^2(1 + k_l)^2\dot{\varphi}_1 = ml_0^2(1 - k_l)^2\dot{\varphi}_2.$$

Поэтому угловая скорость изменяется в этот момент от значения $\dot{\varphi}_1$ до

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{(1 + k_l)^2}{(1 - k_l)^2} \dot{\varphi}_1.$$

Это значит, что линейная скорость груза изменяется от значения

$$V_1 = l_0(1 + k_l)\dot{\varphi}_1$$

до

$$V = l_0(1 - k_l)\dot{\varphi}_2 = l_0 \frac{(1 + k_l)^2}{1 - k_l} \dot{\varphi}_1 = \frac{1 + k_l}{1 - k_l} V_1, \text{ то есть } V > V_1$$

Затем маятник движется от положения равновесия, когда $\varphi = 0$ до максимального отклонения φ_0 , величину которого можно определить на основании закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1+k_l}{1-k_l} V_1 \right)^2 = gl_0(1 - k_l)(1 - \cos \varphi_0). \quad (2)$$

Если частота и фаза модуляции соответствуют наиболее благоприятному режиму для подпитки маятника энергией, то обратные скачкообразные изменения длины нити происходят в моменты наибольших отклонений маятника (точнее, когда маятник находится вблизи этих положений). В такие моменты маятник имеет почти нулевую угловую скорость, поэтому изменение длины маятника до значения $l_0(1 + k_l)$ практически не изменяет его кинетическую энергию. Маятник начинает обратное движение к положению равновесия с нулевой скоростью. Скорость, которую он набирает в этом движении, можно также определить из закона сохранения энергии:

$$gl_0(1 + k_l)(1 - \cos \varphi_0) = \frac{1}{2} V_2^2 \quad (3)$$

Из уравнений (2) – (3) находим:

$$V_2^2 = V_1^2 \left(\frac{1 + k_l}{1 - k_l} \right)^3,$$

$$E_2 = E_1 \left(\frac{1 + k_l}{1 - k_l} \right)^3,$$

где $E_2 = \frac{1}{2} V_2^2$ – кинетическая энергия на единицу массы после завершения периода T модуляции. Поэтому

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2}{E_1} - 1 = \left(\frac{1 + k_l}{1 - k_l} \right)^3 - 1.$$

Для малых значений глубины модуляции ($k_l \ll 1$), обозначив $1 \pm k_l \equiv Y$, разложим функцию Y^3 в ряд Тейлора около точки $Y = 1$. С точностью до членов второго порядка малости, получим

$$\frac{\Delta E}{E} \cong 6k_l$$

Таким образом, относительное увеличение полной энергии ка $\Delta E/E$ за один период модуляции T в условиях основного параметрического резонанса составляет приблизительно $6k_l$. То есть в среднем в единицу времени

$$\frac{\Delta E}{T} \cong E \frac{6k_l}{T},$$

или

$$\frac{dE}{dt} \cong E \frac{6k_l}{T}.$$

Процесс, в котором увеличение энергии ΔE за период пропорционально запасённой энергии, характеризуется в среднем экспоненциальным ростом энергии со временем:

$$E(t) = E_0 \exp\left(\frac{6k_l}{T} t\right) = E_0 \exp(\alpha t). \quad (4)$$

В данном случае показатель экспоненциального роста α пропорционален глубине модуляции k_l длины маятника:

$$\alpha = \frac{6k_l}{T}.$$

В условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс ($T = T_0/2$) уменьшение энергии обусловлено почти исключительно трением. Рассеяние энергии из-за вязкого трения на протяжении целого числа собственных полупериодов ($t = nT = nT_0/2$) описывается следующим выражением:

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \quad (5)$$

где γ – постоянная затухания амплитуды.

Сравнивая выражения (4) и (5), получаем следующую оценку порогового (минимального) значения $(k_l)_{\min}$ глубины модуляции для возбуждения основного параметрического резонанса:

$$(k_l)_{\min} = \frac{1}{3} \gamma T = \frac{1}{6} \gamma T_0.$$

Таким образом, в линейной системе при превышении порога параметрического возбуждения амплитуда колебаний экспоненциально нарастает со временем. В отличие от вынужденных колебаний, воз-

буждаемых прямым действием периодической внешней силы, вязкое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды при параметрическом резонансе. Увеличение размаха колебаний маятника при резонансе, как уже отмечалось, приводит к удлинению собственного периода. Система выбивается из резонанса, размах колебаний уменьшается, и условия резонанса восстанавливаются.

В случае параметрического резонанса как вложение энергии за счёт модуляции параметра, так и потери из-за трения пропорциональны запасённой энергии: их отношение не зависит от амплитуды колебаний. Поэтому параметрический резонанс возможен только при превышении некоторого порога возбуждения, когда вложение энергии за период (вызванное модуляцией параметра) превосходит энергию, рассеиваемую за то же время.

Пороговое значение глубины модуляции зависит от величины трения в системе. Но если порог возбуждения превышен, потери энергии из-за трения не в состоянии ограничить рост амплитуды. Стационарные колебания неизменной амплитуды, в конце концов, устанавливаются, благодаря нелинейным свойствам маятника.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проведения эксперимента используется установка (рис. 3), представляющая собой маятник 1, длина которого модулируется за счёт движения эксцентрика 2. К эксцентрику прикреплена нить маятника, проходящая через малое отверстие в ползуне 3. Ползун 3 позволяет изменять длину маятника и, следовательно, период собственных колебаний маятника T_0 .

В данной работе частота модуляции длины маятника остаётся неизменной и определяется эксцентриком, который приводится в движение мотором, совершающим 60 оборотов в минуту. Параметрический резонанс достигается в результате изменения средней длины маятника, то есть периода собственных колебаний маятника.

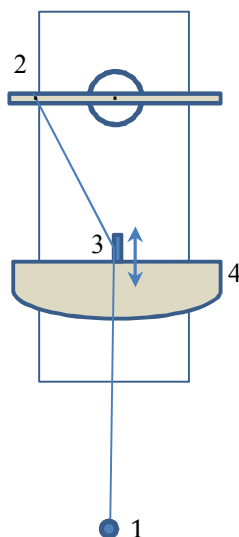


Рис. 3

1. Поставить ползун 3 в крайнее нижнее положение.
2. Измерить длину маятника l_{01} в этом положении. Предварительно необходимо накинуть короткую петлю, укрепленную на верху прибора, на эксцентрик таким образом, чтобы планка 2, на которой он укреплен, заняла горизонтальное положение.
3. Отклонив маятник на угол $\cong 5^\circ$ и определив время 20 – 30 полных колебаний, вычислить период собственных колебаний T_{01} для заданной длины маятника с точностью до 0,01 секунды.
4. Снять короткую петлю, удерживающую планку в горизонтальном положении. Отвести маятник в плоскости, параллельной стенке, на угол $\cong 5^\circ$ и отпустить его. Включить мотор, приводящий в движение эксцентрик. Выждав достаточное время, чтобы возникли установившиеся колебания, произвести отсчет амплитуды в градусах по транспортиру 4.
5. Выключить мотор; остановить маятник; изменить его длину на 2см путём передвижения ползуна вверх. Прodelать все измерения, указанные в пунктах 2–5, для новой длины маятника.

6. Проводить измерения до достижения ползуном крайнего верхнего положения.
7. По полученным данным построить график зависимости амплитуды параметрических колебаний от периода собственных колебаний математического маятника.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие колебания называются параметрическими?
2. Получить зависимость кинетической энергии математического маятника от времени в модели прямоугольной модуляции длины маятника.
3. Сформулировать условия возникновения основного параметрического резонанса.
4. Какое значение периода собственных колебаний маятника будет соответствовать условиям возникновения основного параметрического резонанса в данном эксперименте?

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики : в 5 т. Т. 1: Механика : учеб. пособие для вузов. М. : Физматлит, 2005. 560 с.
2. Алешкевич В.А., Ахметьев В.М. Параметрические колебания в курсе общей физики // Физическое образование в вузах. 2001. Т. 7, № 4. С. 44–49.
3. Бутиков Е.И. Параметрический резонанс // Компьютерные инструменты в образовании. 2009. № 3. С. 22–40.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1944 от «29» июня 2016 г. Тираж 100 экз.