ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Управление, вычислительная техника и информатика № 2 (35)

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/35/3

О.В. Губина, Г.М. Кошкин

ОЦЕНИВАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОЙ РЕНТЫ СТАТУСА СОВМЕСТНОЙ ЖИЗНИ

Находится современная стоимость непрерывной временной пожизненной ренты для статуса совместной жизни. Для стандартных актуарных моделей выводятся аналитические формулы функционалов рент. Строятся параметрические оценки соответствующих рент.
Ключевые слова: коллективное страхование жизни; рента статуса совместной жизни; параметрические оценки.

Рассмотрим случай коллективного страхования жизни, для которого полезной абстракцией является понятие статуса [1–5]. Пусть m индивидуумов с возрастами $(x_1,...,x_m)$ желают заключить страховой договор. В соответствии с обозначениями актуарной математики [1–3] пусть случайная величина X – продолжительность жизни, $T(x_k) = X - x_k$ – остаточное время жизни k-го индивидуума. Совокупности m чисел $T(x_1),...,T(x_m)$ поставим в соответствие статус U со своей продолжительностью жизни $T(U)$.

Двумя самыми распространенными статусами являются статус совместной жизни и статус выживания последнего. Статус выживания последнего обозначается $U := \overline{x_1 :...: x_m}$ и считается разрушенным, если все представители коллектива умерли, т.е.

$$T(U) = \max\left(T(x_1),...,T(x_m)\right).$$

Статус совместной жизни обозначается $U := x_1 :...: x_m$ и считается разрушенным, если наступила смерть хотя бы одного из индивидуумов, т.е.

$$T(U) = \min\left(T(x_1),...,T(x_m)\right).$$

Именно для этого статуса определим современную стоимость непрерывной временной пожизненной ренты. Понятно, что

$$P\left\{T(U) > t\right\} = P\left\{\min\left(T(x_1),...,T(x_m)\right) > t\right\} = P\left\{T(x_1) > t,...,T(x_m) > t\right\},$$

и в предложении независимости смертей $P\left\{T(U) > t\right\} = \prod_{i=1}^{m} {}_t p_{x_i}$, где ${}_t p_x = P\left\{X > x + t\right\}$ – одно из общепринятых обозначений актуарной математики.

По аналогии со случаем индивидуального страхования [6–8] определим ренту через нетто-премию:

$$\bar{a}_{x_1:...:x_m} = \frac{1}{\delta}\left(1 - \bar{A}_{x_1:...:x_m}\right), \tag{1}$$

где δ – процентная ставка, $\bar{A}_{x_1:...:x_m}$ – нетто-премия статуса совместной жизни, определяемая формулой

$$\bar{A}_{x_1:...:x_m} = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{x_1:...:x_m}(t)dt, \tag{2}$$

в которой плотность распределения статуса совместной жизни

$$f_{x_1:...:x_m}(t) = \frac{d}{dt}\left[-P\{\min(T(x_1),...,T(x_m)) > t\}\right] = \frac{d}{dt}\left[-\frac{S(x_1+t)}{S(x_1)}\cdots\frac{S(x_m+t)}{S(x_m)}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{S(x_1+t)}{S(x_1)}\cdots\frac{d}{dt}\left(-\frac{S(x_i+t)}{S(x_i)}\right)\cdots\frac{S(x_m+t)}{S(x_m)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{S(x_1+t)}{S(x_1)}\cdots\frac{f(x_i+t)}{S(x_i)}\cdots\frac{S(x_m+t)}{S(x_m)} =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} S_{x_1}(t)\cdots f_{x_i}(t)\cdots S_{x_m}(t).$$

Здесь $S_x(t)=\dfrac{S(x+t)}{S(x)}$ и $f_x(t)$ – соответственно функция выживания и плотность распределения случайной величины $T(x)$.

1. Рента статуса совместной жизни двух индивидуумов для модели де Муавра

Для простоты рассмотрим статус совместной жизни двух индивидуумов $U := x_1 : x_2$, для которого

$$T(U)=\min\left(T(x_1),T(x_2)\right),\quad \overline{a}_{x_1:x_2}=\frac{1}{\delta}\left(1-\int_0^\infty e^{-\delta t} f_{x_1:x_2}(t)dt\right),\quad f_{x_1:x_2}(t)=f_{x_1}(t)S_{x_2}(t)+f_{x_2}(t)S_{x_1}(t).$$

Отсюда имеем

$$\overline{a}_{x_1:x_2}=\frac{1}{\delta}\left(1-\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[f_{x_1}(t)S_{x_2}(t)+f_{x_2}(t)S_{x_1}(t)\right]dt\right). \tag{3}$$

Найдем ренту статуса совместной жизни для модели де Муавра, которая ввиду простоты часто используется в качестве учебного примера. Введем обозначение $I_t(a,b)=\{1,t\in(a,b);0,t\notin(a,b)\}$. Тогда $S(x)=I_x(-\infty,\omega)-xI_x(0,\omega)/\omega$, $f(x)=-\dfrac{d}{dx}S(x)=I_x(0,\omega)/\omega$, $f_x(t)=\dfrac{I_t(0,\omega-x)}{\omega-x}$, ω – предельный возраст, а нетто-премия совместного статуса

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{x_1:x_2}(\omega,\delta)&=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[\frac{I_t(0,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\left(I_t(-\infty,\omega-x_2)-\frac{tI_t(0,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{I_t(0,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\left(I_t(-\infty,\omega-x_1)-\frac{tI_t(0,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\right)\right]dt=\\
&=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[\frac{I_t(0,\min(\omega-x_1,\omega-x_2))}{\omega-x_1}-\frac{tI_t\left(0,\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)\right)}{\left(\omega-x_1\right)\left(\omega-x_2\right)}+\right.\\
&\left.+\frac{I_t(0,\min(\omega-x_1,\omega-x_2))}{\omega-x_2}-\frac{tI_t\left(0,\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)\right)}{\left(\omega-x_1\right)\left(\omega-x_2\right)}\right]dt=\\
&=\int_0^{\min(\omega-x_1,\omega-x_2)} e^{-\delta t}\frac{1}{\omega-x_1}dt+\int_0^{\min(\omega-x_1,\omega-x_2)} e^{-\delta t}\frac{1}{\omega-x_2}dt-\\
&-2\int_0^{\min(\omega-x_1,\omega-x_2)} e^{-\delta t}\frac{t}{\left(\omega-x_1\right)\left(\omega-x_2\right)}dt=\frac{1-e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}}{\delta\left(\omega-x_1\right)}+\frac{1-e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}}{\delta\left(\omega-x_2\right)}+\\
&+\frac{2\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}}{\delta\left(\omega-x_1\right)\left(\omega-x_2\right)}-\frac{2\left(1-e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}\right)}{\delta^2\left(\omega-x_1\right)\left(\omega-x_2\right)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Рента совместного статуса согласно (3) и (4) равна

$$\begin{aligned}
\overline{a}_{x_1:x_2}(\omega,\delta)=\frac{1}{\delta}&\left(1-\frac{1-e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}}{\delta\left(\omega-x_1\right)}-\frac{1-e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}}{\delta\left(\omega-x_2\right)}-\right.\\
&\left.-\frac{2\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}}{\delta\left(\omega-x_1\right)\left(\omega-x_2\right)}+\frac{2\left(1-e^{-\delta\min\left(\omega-x_1,\omega-x_2\right)}\right)}{\delta^2\left(\omega-x_1\right)\left(\omega-x_2\right)}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Соотношение (5) позволяет вычислять ренту совместной жизни для различных комбинаций возрастов индивидуумов. При $\omega = 120$ и $\delta = 0{,}1$ (10%) полученные результаты сведем в табл. 1.

Таблица 1

Рента статуса совместной жизни для модели де Муавра

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	8,35	8,27	8,18	8,07	7,92	7,73	7,46	7,07	6,45
20	8,27	8,2	8,11	8	7,86	7,67	7,4	7,02	6,42
30	8,18	8,11	8,02	7,9	7,78	7,59	7,34	6,96	6,37
40	8,07	8	7,9	7,81	7,68	7,5	7,25	6,89	6,31
50	7,92	7,86	7,78	7,68	7,55	7,38	7,14	6,79	6,24
60	7,73	7,67	7,59	7,5	7,38	7,22	7	6,67	6,14
70	7,46	7,4	7,34	7,25	7,14	7	6,79	6,49	6
80	7,07	7,02	6,96	6,89	6,79	6,67	6,49	6,23	5,79
90	6,45	6,42	6,37	6,31	6,24	6,14	6	5,88	5,44

Например, в рамках нашей модели современная стоимость полной непрерывной пожизненной ренты для двух индивидуумов возрастов $x_1 = x_2 = 40$ лет при $\delta = 0{,}1$ и ежемесячной выплате в размере 1000 руб. каждому равна $12\,000 \cdot 7{,}81 = 93\,720$ руб. Следовательно, каждый из них должен внести 46 860 руб. в страховую компанию.

Сравним коллективную ренту с индивидуальной рентой, которая для модели де Муавра вычисляется по формуле [7]:

$$\overline{a}_x(\omega,\delta) = \frac{\delta(\omega - x) - 1 + e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta^2(\omega - x)}.$$

Таблица 2

Индивидуальная рента для модели де Муавра

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\overline{a}_x(120,\ 0{,}1)$	9,09	9	8,89	8,75	8,57	8,34	8,01	7,55	6,83

Согласно табл. 2 современная стоимость полной непрерывной пожизненной индивидуальной ренты для $x = 40$ лет при $\delta = 0{,}1$ и ежемесячной выплате в размере 1000 руб. равна $12\,000 \cdot 8{,}66 = 103\,920$ руб.

Таким образом, рента статуса совместной жизни для некоторых категорий индивидуумов может оказаться более выгодной, чем индивидуальная рента.

Если параметр ω модели неизвестен, то для случайной выборки продолжительностей жизней пар индивидуумов $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ объема n функция правдоподобия $L(X,\omega) = \frac{1}{\omega^{2n}}\prod_{i=1}^{n} I(0 < X_i < \omega) I(0 < Y_i < \omega)$, и, следовательно, асимптотически несмещенная оценка максимального правдоподобия для ω равна $\hat{\omega} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)$. В качестве оценки ренты естественно взять $\overline{a}_{x_1:x_2}(\hat{\omega},\delta) = \frac{1 - \overline{A}_{x_1:x_2}(\hat{\omega})}{\delta}$.

2. Модели Гомпертца и Мейкхама

Эти модели наиболее адекватно описывают реальное распределение продолжительности жизни человека. Для модели Гомпертца

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)} = \frac{B\exp\left[\alpha(x+t) - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - 1\right)\right]}{\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{ax} - 1\right)\right]} = B\exp\left[\alpha(x+t) - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right],$$

$$S_x(t)=\frac{S(x+t)}{S(x)}=\frac{\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)}-1\right)\right]}{\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x}-1\right)\right]}=\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)}-e^{\alpha x}\right)\right],\ F_x(t)=1-\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)}-e^{\alpha x}\right)\right],$$

где $S(x)$ – функция выживания, $f(x)$ – кривая смертей и $\alpha > B > 0$. В этой модели величина $Be^{\alpha x}$ учитывает влияние возраста на смертность.

Нетто-премия статуса $x_1 : x_2$

$$\overline{A}_{x_1:x_2}(B,\alpha,\delta)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(B\exp\left[\alpha(x_1+t)-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_1+t)}-e^{\alpha x_1}\right)\right]\times\right.$$
$$\times\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_2+t)}-e^{\alpha x_2}\right)\right]+B\exp\left[\alpha(x_2+t)-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_2+t)}-e^{\alpha x_2}\right)\right]\times$$
$$\left.\times\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_1+t)}-e^{\alpha x_1}\right)\right]\right)dt=\int_0^\infty e^{-\delta t}B\left(\exp\left[\alpha(x_1+t)-\frac{B}{\alpha}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2}\right)\left(e^{\alpha t}-1\right)\right]+\exp\left[\alpha(x_2+t)-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2}\right)\left(e^{\alpha t}-1\right)\right]\right)dt=$$
$$=B\left(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2}\right)\int_0^\infty\exp\left[(\alpha-\delta)t-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2}\right)\left(e^{\alpha t}-1\right)\right]dt$$

и, соответственно, рента

$$\overline{a}_{x_1:x_2}(B,\alpha,\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-B\left(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2}\right)\int_0^\infty\exp\left[(\alpha-\delta)t-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2}\right)\left(e^{\alpha t}-1\right)\right]dt\right). \tag{6}$$

Вычисление интеграла в (6) проводится приближенно методом трапеций (с точностью до 4-го знака) при B = 0,00005, $e^{\alpha}=10^{0,04}$. Именно эти значения используются при распределении продолжительности жизни в иллюстративной таблице [1]. Результаты расчета ренты сведем в табл. 3.

Таблица 3

Рента статуса совместной жизни для модели Гомпертца

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	9,88	9,81	9,66	9,35	8,77	7,78	6,33	4,55	2,81
20	9,81	9,75	9,61	9,31	8,74	7,76	6,32	4,55	2,81
30	9,66	9,61	9,48	9,2	8,66	7,71	6,29	4,54	2,81
40	9,35	9,31	9,2	8,97	8,48	7,59	6,23	4,51	2,8
50	8,77	8,74	8,66	8,48	8,08	7,32	6,07	4,43	2,77
60	7,78	7,76	7,71	7,59	7,32	6,74	5,71	4,26	2,71
70	6,33	6,32	6,29	6,23	6,07	5,71	5,01	3,9	2,57
80	4,55	4,55	4,54	4,51	4,33	4,26	3,9	3,22	2,27
90	2,81	2,81	2,81	2,8	2,77	2,71	2,57	2,27	1,77

Итак, современная стоимость ренты в условиях двух предыдущих моделей равна $12\,000\cdot 8,97=107\,640$ руб.

Приведем таблицу для индивидуальной ренты, вычисляемой по формуле [7]:

$$\overline{a}_x(B,\alpha,\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-B\exp\left[\alpha x+B\frac{e^{\alpha(x+t)}}{\alpha}\right]\int_0^\infty\exp\left[(\alpha-\delta)t-B\frac{e^{\alpha(x+t)}}{\alpha}\right]dt\right).$$

Таблица 4

Индивидуальная рента для модели Гомпертца

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\overline{a}_x(0,1)$	9,94	9,86	9,7	9,38	8,79	7,79	6,34	4,56	2,82

Согласно табл. 4 индивидуальная рента равна $12\,000 \cdot 9{,}38 = 112\,560$ руб.

Если параметры B и α в модели Гомпертца неизвестны, то они находятся из решения системы уравнений, составленной согласно методу моментов:

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{B}{\alpha}(\exp[\alpha x]-1)\right]dx = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n \left(X_i + Y_i\right), \\ \int\limits_0^\infty 2x\exp\left[-\frac{B}{\alpha}(\exp[\alpha x]-1)\right]dx = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n \left(X_i^2 + Y_i^2\right). \end{cases}$$

Для модели Мейкхама

$$f_x(t) = \frac{\left(A + Be^{\alpha(x+t)}\right)\exp\left[-A(x+t) - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)}-1\right)\right]}{\exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x}-1\right)\right]} =$$

$$= \left(A + Be^{\alpha(x+t)}\right)\exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right],$$

$$S_x(t) = \frac{\exp\left[-A(x+t) - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)}-1\right)\right]}{\exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x}-1\right)\right]} = \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right],$$

$$F_x(t) = 1 - \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right]$$

нетто премия

$$\overline{A}_{x_1:x_2}(A,B,\alpha,\delta) = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t}\left(\left(A + Be^{\alpha(x_1+t)}\right)\exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_1+t)} - e^{\alpha x_1}\right)\right]\times\right.$$

$$\times\exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_2+t)} - e^{\alpha x_2}\right)\right] + \left(A + Be^{\alpha(x_2+t)}\right)\times$$

$$\left.\times\exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_2+t)} - e^{\alpha x_2}\right)\right]\exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x_1+t)} - e^{\alpha x_1}\right)\right]\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \exp\left[-(2A+\delta)t - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2}\right)\left(e^{\alpha t}-1\right)\right]\left(2A + Be^{\alpha t}\left(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2}\right)\right)dt,$$

рента

$$\overline{a}_{x_1:x_2}(A,B,\alpha,\delta) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \int\limits_0^\infty \exp\left[-(2A+\delta)t - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2}\right)\left(e^{\alpha t}-1\right)\right]\left(2A + Be^{\alpha t}\left(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2}\right)\right)dt\right). \quad (7)$$

Отметим, что для модели Мейкхама параметр A учитывает риски жизни, связанные с несчастными случаями.

Вычисление интеграла в (7) проводится приближенно методом трапеций. При значениях параметров A = 0,0007, B = 0,00005, $e^\alpha = 10^{0,04}$ получаем результаты, представленные в табл. 5.

Приведем таблицу для индивидуальной ренты, вычисляемой по формуле [7]:

$$\overline{a}_x(\delta) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \exp\left[B\frac{e^{ax}}{a}\right]\int\limits_0^\infty \exp\left[-(a-\delta)t - B\frac{e^{a(x+t)}}{a}\right]\left(A + Be^{a(x+t)}\right)dt\right).$$

Согласно табл. 5, 6 современные стоимости рент в условиях предыдущих моделей соответственно равны $12\,000 \cdot 8{,}87 = 106\,440$ руб. и $12\,000 \cdot 9{,}32 = 111\,840$ руб.

При сравнении табл. 4 и 6 видно, что модель Мейкхама по сравнению с моделью Гомпертца более адекватно характеризует процесс смертности индивидуумов: для детских возрастов преобладающую роль в интенсивности смертности играют несчастные случаи, а с увеличением возраста их роль ослабевает.

Т а б л и ц а 5

Рента статуса совместной жизни для модели Мейкхама

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	9,75	9,68	9,54	9,24	8,67	7,71	6,28	4,53	2,81
20	9,68	9,62	9,48	9,2	8,64	7,69	6,27	4,52	2,8
30	9,54	9,48	9,36	9,09	8,57	7,64	6,25	4,51	2,8
40	9,24	9,2	9,09	8,87	8,39	7,52	6,18	4,48	2,79
50	8,17	8,64	8,57	8,39	8	7,25	6,02	4,41	2,76
60	7,71	7,69	7,64	7,52	7,25	6,68	5,67	4,24	2,7
70	6,28	6,27	6,25	6,18	6,02	5,67	4,98	3,88	2,56
80	4,53	4,52	4,51	4,48	4,41	4,24	3,88	3,21	2,27
90	2,81	2,8	2,8	2,76	2,76	2,7	2,54	2,27	1,76

Т а б л и ц а 6

Индивидуальная рента для модели Мейкхама

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{a}_x(0,1)$	9,87	9,79	9,64	9,32	8,74	7,76	6,31	4,54	2,81

Если параметры A, B и α в модели Мейкхама неизвестны, то они находятся из решения системы уравнений, составленной согласно методу моментов:

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \exp\left[-Ax-\frac{B}{\alpha}\left(\exp[\alpha x]-1\right)\right]dx = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n\left(X_i+Y_i\right), \\ \int\limits_0^\infty 2x\exp\left[-Ax-\frac{B}{\alpha}\left(\exp[\alpha x]-1\right)\right]dx = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n\left(X_i^2+Y_i^2\right), \\ \int\limits_0^\infty 3x^2\exp\left[-Ax-\frac{B}{\alpha}\left(\exp[\alpha x]-1\right)\right]dx = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n\left(X_i^3+Y_i^3\right). \end{cases}$$

Заключение

В результате исследований выяснено, что величины рент в коллективном страховании сложнее зависят от распределений продолжительностей жизней индивидуумов коллектива. Следует отметить симметричность таблиц относительно главной диагонали $\left(\bar{a}_{x_1:x_2}=\bar{a}_{x_2:x_1}\right)$, причем $\bar{a}_{x_1:x_2}>\bar{a}_{x_1:x_1}$, если $x_1>x_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, Itasca, III, 1986. 624 p.
2. Гербер Х. Математика страхования жизни. М. : Мир, 1995. 156 с.
3. Кошкин Г.М. Введение в математику страхования жизни. Томск : ТГУ, 2004. 112 с.
4. Кошкин Г.М., Лопухин Я.Н. Оценивание нетто-премий в моделях долгосрочного страхования жизни // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10, вып. 2. С. 315–330.
5. Koshkin G., Lopukhin Y. Nonparametric Estimation of Net Premium Functionals for Different Statuses in Collective Life Insurance // Communications in Computer and Information Science. 2014. Vol. 487. P. 223–233.
6. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М. : Анкил, 2002. 262 с.
7. Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание современной стоимости непрерывной n-летней временной пожизненной ренты // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 235–241.
8. Koshkin G.M., Gubina O.V. Estimation of the Present Values of Life Annuities for the Different Actuarial Models // Proceedings of The Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management / Ilia Frenkel and Anatoly Lisnianski (Eds.). SMRLO 2016, February 15–18, 2016, Beer Sheva, Israel. Conference Publishing Services The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 2016. P. 506–510.

Губина Оксана Викторовна. E-mail: gov7@mail.ru

Кошкин Геннадий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: kgm@mail.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 25 февраля 2016 г.

Gubina Oxana V., Koshkin Gennady M. (Tomsk State University, Russian Federation).
Collective annuity estimation of joint-life status.
Keywords: collective life insurance; joint-life status; survival function; parametric estimate.

DOI: 10.17223/19988605/35/3

Consider the case of collective life insurance for which a useful abstraction is a status. Let *m* individuals of ages $x_1,...,x_m$ conclude an insurance contract. In accordance with the notation of actuarial mathematics, let the random variable X be lifetime, $T(x_k) = X - x_k$ be residual lifetime of the *k*-th individual. We put in line to the set of *m* numbers $T(x_1),...,T(x_m)$ the status *U*, which has its own lifetime $T(U)$.

The joint-life status is denoted $U := x_1 : ... : x_m$ and is considered to be destroyed if at least one of the individuals has died, i.e.

$$T(U) = \min\left(T(x_1),...,T(x_m)\right).$$

It is clear that

$$P\{T(U) > t\} = P\{\min\left(T(x_1),...,T(x_m)\right) > t\} = P\{T(x_1) > t,...,T(x_m) > t\} = S_{x_1}(t) \cdots S_{x_m}(t),$$

where $S_x(t) = \dfrac{S(x+t)}{S(x)}$ is the survival function of the random variable *T*(*x*). It is for this status, we define the present value of continuous time life annuity.

By analogy with the case of individual insurance, the annuity is expressed in terms of the net premium:

$$\overline{a}_{x_1:...:x_m} = \frac{1}{\delta}\left(1 - \overline{A}_{x_1:...:x_m}\right),$$

where δ is the rate of interest, the net premium $\overline{A}_{x_1:...:x_m}$ is expressed by the formula

$$\overline{A}_{x_1:...:x_m} = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{x_1:...:x_m}(t)dt,$$

in which the distribution density of the joint-life status is defined as

$$f_{x_1:...:x_m}(t) = \sum_{i=1}^{m} S_{x_1}(t) \cdots f_{x_i}(t) \cdots S_{x_m}(t).$$

Here $f_x(t)$ is the distribution density of the random variable *T*(*x*).

The paper deals with the problem of finding numerical values for functionals of annuities for the join-life status of two persons for a number of parameterized distributions of actuarial mathematics. Also, the corresponding estimates of annuities for the join-life status of two persons are found.

REFERENCES

1 . Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1986) *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Itasca, III.
2. Gerber, H.U. (1995) *Matematika strakhovaniya zhizni* [Life Insurance Mathematics]. Translated from English by V. Mishkin, P. Biryukov. Moscow: Mir.
3. Koshkin, G.M. (2004) *Vvedenie v matematiku strakhovaniya zhizni* [Introduction to life insurance mathematics]. Tomsk: Tomsk State University.
4. Koshkin, G.M. & Lopukhin, Ya.N. (2003) Otsenivanie netto-premiy v modelyakh dolgosrochnogo strakhovaniya zhizni [Estimation of Net Premium in the Models of Long-term Life Insurance]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 10(2). pp. 315-330.
5. Koshkin, G. & Lopukhin, Y. (2014) Nonparametric Estimation of Net Premium Functionals for Different Statuses in Collective Life Insurance. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 223-233. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_27
6. Falin, G.I. (2002) *Matematicheskie osnovy teorii strakhovaniya zhizni i pensionnykh skhem* [Mathematical Foundations of the Theory of Life Insurance and Pension Schemes]. Moscow: Ankil.
7. Gubina, O.V. & Koshkin, G.M. (2015) Otsenivanie sovremennoy stoimosti nepreryvnoy n-letney vremennoy pozhiznennoy renty [Estimation of the Acturial Present Value of the Continuous n-year Time Life Annuity]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(11/2). pp. 235-241.
8. Koshkin, G.M. & Gubina, O.V. (2016) Estimation of the Present Values of Life Annuities for the Different Actuarial Models. *Proc. of The Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management*. SMRLO 2016, February 15–18, 2016, Beer Sheva, Israel. Conference Publishing Services The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 2016. pp. 506-510.